

**XXXI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA-VENEZUELA 2018**

PROGRAMACIÓN POLAR

Victor J. Griffin B.

MÉRIDA, VENEZUELA, 2 al 7 de septiembre de 2018

XXXI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de: Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Universidad Central de Venezuela, Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Universidad de Carabobo, Universidad de Oriente y Universidad del Zulia; cuenta con el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana (AMV) y la Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA). La XXXI Escuela Venezolana de Matemáticas es también Escuela de Matemática de América Latina y el Caribe (EMALCA - Venezuela 2018); ha recibido financiamiento de: Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA) y Commission for Developing Countries - International Mathematical Union (CDC-IMU).

2010 Mathematics Subject Classification: 90C05, 90C29, 51A50, 52B99

©Ediciones IVIC

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Rif: G-20004206-0

Programación Polar

Victor J. Griffin B.

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas

Depósito legal: DC2018001564

ISBN: 978-980-261-194-2

Caracas, Venezuela

2018

XXXI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA - VENEZUELA 2018

PROGRAMACIÓN POLAR

Victor J. Griffin B.

Universidad de Carabobo

victorgriffin77@gmail.com

MÉRIDA, 2 al 7 DE SEPTIEMBRE DE 2018

Dedico este libro al
Dios vivo y verdadero, y su hijo eterno
Jesucristo, autor de la vida y salvador del mundo,
a **Mary** mi amada esposa, compañera fiel y verdadera,
a **Jack Edmonds**, fuente de inspiración matemática quien
junto con **Julian Aroaz** me introdujo a polaridades de poliedros.

Índice general

Prólogo	XI
1. Preliminares	1
1.1. Polaridades Abstractas	1
1.2. Conceptos básicos de poliedros	5
1.2.1. Poliedros definidos por Desigualdades Lineales	6
1.2.2. Eliminación Fourier-Motzkin	7
1.2.3. Lema de Farkas:	8
1.2.4. Conjuntos finitamente generados	8
1.2.5. Conos de recesión, espacios de linealidad y flats	9
1.2.6. Desigualdades Válidas y Polaridades dadas por relaciones bilineales	10
1.2.7. Caras de Poliedros Convexos y Programación Lineal	12
1.2.8. Caras de $P(A,b)$ y (A,b) -equisetes	14
1.2.9. Caras de $C(S_M, T_N)$ y (S_M, T_N) -soportes	17
1.3. Programación Lineal Multi-objetivo	17
1.3.1. Dominancia y Eficiencia en términos de funciones objetivos múltiples	18
1.3.2. Dominancia y Eficiencia en términos de conos de dominancia	19
1.3.3. Demostración de un Teorema Clásico de PLMO	21
1.3.4. Metodos para resolver PLMO	23
2. Polaridades dadas por una desigualdad bilineal general	25
2.1. Introducción	25
2.2. Definiciones y notación	28
2.3. El Ω -polar de $C(S_M, T_N)$	28
2.4. La Ω -clausura de $C(S_M, T_N)$	29

2.4.1.	Conjuntos relacionados con Ω :	29
2.4.2.	Clasificación de relaciones Ω	30
2.5.	Caracterizaciones de poliedros Ω -cerrados	31
3.	Análisis Envolvente de Datos (DEA)	35
3.1.	Historia y Conceptos	35
3.1.1.	Los modelos DEA más sencillos	37
3.1.2.	Representación Geométrica del modelo CCR	42
3.1.3.	El modelo DEA BCC [12]	45
3.1.4.	Modelos radiales de otras direcciones (Directional Distance Models)	46
3.1.5.	Modelos radiales con restricciones adicionales sobre los multiplicadores o pesos	47
3.1.6.	Modelos radiales modificados para lograr eficiencia Koopmans/Debreu	48
3.1.7.	Modelos aditivos (No-radiales)	49
3.2.	El modelo SBM de Tone 2001	51
3.3.	Presente y futuro del DEA	52
4.	Programación Polar	55
4.1.	Introducción	55
4.2.	Un Programa Lineal Base y su Dual para analizar un punto de datos	57
4.2.1.	Parámetros y Variables	57
4.2.2.	Programa Lineal Espacio de Datos	57
4.2.3.	Programa Lineal dual en espacio polar	58
4.3.	Interpretación geométrica del modelo general	58
4.3.1.	El Envolvente:	58
4.3.2.	El Dominante	59
4.4.	Envolventes poliédricos Particulares	61
4.5.	El Dominante, política de frontera	62
4.5.1.	Modelos Radiales: una sola dirección desde o hacia un origen	63
4.6.	Aproximación de la Cápsula Convexa de los datos	63
4.7.	Extensión a Modelos Difusos	64
4.7.1.	Parámetros y Variables: Difuso	64
4.7.2.	Programa Lineal Espacio de datos: Difuso	65
4.7.3.	Programa Lineal dual en espacio polar: Difuso	65
4.7.4.	Características de los modelos	65

5. Proceso básico de modelado para aplicaciones de minería de Datos	67
5.1. Definir objetivos del proyecto	67
5.2. Definir variables homogéneas de datos para comparar los entes entre si	67
5.3. Colección de datos	68
5.4. Definir un envolvente poliédrico para los datos	68
5.5. Seleccionar entes a analizar en detalle	69
5.6. Definir el dominante, es decir, una política de frontera	69
5.7. Llevar a cabo el análisis de los puntos seleccionados	69
5.8. Cosas por terminar	70
Bibliografía	73

Prólogo

*¿Por qué se da vida al hombre que no sabe por donde de ir,
y a quien Dios ha encerrado?
La Biblia, Job 3:23*

El clamor del patriarca Job retumba a lo largo de los siglos demandando respuesta al problema de dolor y sufrimiento. No pretendemos acercarnos a problemas tan trascendentales sino a encierres mucho mas accesibles al análisis matemático y al poder computacional del siglo veinte-uno.

La tarea de comparar unidades productivas o de servicio entre si en relación con su eficiencia o productividad llevó a Charnes, Cooper y Rhodes desarrollar el primer modelo de Análisis Envolvente de Datos en 1978. Esa técnica representaba cada ente en términos de un conjunto finito de variables de input y de output para poder así cuantificar la eficiencia de cada uno como una combinación lineal de las variables de output dividido por una combinación lineal de las variables de output. Usando técnicas de programación lineal se identificaban las entes que no eran dominados en términos de eficiencia por otras entes mas eficientes y para cada ente que si era dominado por otras, se identificaba un punto de referencia eficiente en la frontera de un envolvente poliédrico que contenía los puntos de datos. Desde ese primer modelo se ha desarrollado decenas de otros modelos, algunos con parecer muy distintos, para lograr objetivos similares.

Muchos pensamientos, filosofías y religiones han surgido para intentar responder las preguntas de Job hasta Jesucristo dio la respuesta divina,

*Yo soy la resurrección y la vida;
el que cree en mí, aunque esté muerto, vivirá.
Yo soy el camino, y la verdad, y la vida;
nadie viene al Padre, sino por mí.
La Biblia Juan 11:25; 14:6*

triunfando, en su propia resurrección, sobre el dolor, el sufrimiento y la muerte. Este texto no pretende una tesis y demostración tan gloriosa pero si presenta un modelo general y técnicas generalizados de análisis envolvente de datos basado en *polaridades de poliedros*. Se describe el modelo general en términos geométricos sencillos como un problema de optimización lineal cuyo objetivo es encontrar un punto en la intersección de dos poliedros que mas domina el punto siendo analizado. Uno de los poliedros involucrados es un envolvente poliédrico arbitrario de los datos y el otro poliedro está determinado por las direcciones y parámetros usadas en la definición de dominancia. Diversos modelos clásicos de análisis de eficiencia son vistos como casos especiales pero además se verán otras aplicaciones en minería de datos donde el objetivo es el explorar y conocer las caras que componen la frontera de un poliedro envolvente.

vjg

Valencia, Julio 2018

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Polaridades Abstractas

Temas de **dualidad** y **polaridad** en los cuales se logra describir un fenómeno en dos formas muy distintas pero a la vez equivalentes ocurren con cierta frecuencia y han sido extremadamente útiles en la matemática y otras ciencias naturales. La naturaleza de la luz puede verse en términos de ondas y también como partículas. En la teoría de colas, es sumamente útil poder describir la cantidad de eventos que ocurren en un periodo de tiempo con la distribución Poisson cuando el tiempo entre eventos obedece a una distribución Exponencial con el mismo parámetro λ igual a la tasa promedio de eventos. Temas de dualidad en la programación matemática, son muy ricos en aplicaciones especialmente en la economía y la combinatoria. En este libro veremos la gran utilidad de la doble descripción de poliedros y sus caras. Empezamos con una discusión de polaridades abstractas.

Definición 1.1. Dados dos conjuntos X y Y , con una relación binaria $* \subseteq X \times Y$ donde $(x, y) \in *$ es denotado por x^*y , se define el $*$ -polar de cualquier $P \subseteq X$ como

$$P^{\rho(*)} \equiv \{y \in Y : x^*y \quad \forall x \in P\}.$$

Similarmente

Definición 1.2. el $*$ -polar de cualquier $Q \subseteq Y$ es

$$Q^{\sigma(*)} \equiv \{x \in X : x^*y \quad \forall y \in Q\}.$$

Definición 1.3. Las funciones $\rho(*) : 2^X \rightarrow 2^Y$ y $\sigma(*) : 2^Y \rightarrow 2^X$ se llaman la polaridad definida por $*$ entre subconjuntos de X y subconjuntos de Y.

Nótese que la definición de $\sigma(*)$ es idéntica a la de $\rho(*)$ con los conjuntos de X y Y intercambiados entonces desde cualquier proposición en relación a la polaridad entre X y Y se puede obtener otra por intercambiar X y Y e intercambiar $\sigma(*)$ y $\rho(*)$. Salvo cuando sea necesario hacer referencia explícitamente a la función $\rho(*)$ o a $\sigma(*)$,

Definición 1.4. se denota el $*$ -polar de P por P^* donde

$$P^* \equiv \begin{cases} P\rho(*) & \text{si } P \subseteq X; \\ P\sigma(*) & \text{si } P \subseteq Y. \end{cases}$$

Proposición 1.5.

$$P_1 \subseteq P \subseteq X \text{ implica } P^* \subseteq P_1^*$$

porque $y \in P^*$ implica x^*y por todo $x \in P_1 \subseteq P$.

Proposición 1.6.

$$P \subseteq P^{**}$$

porque para todo $x \in P$, x^*y para todo $y \in P^*$.

Definición 1.7. Para cualquier conjunto $P \subseteq X$ o $P \subseteq Y$, el conjunto P^{**} se llama la $*$ -clausura de P. Si $P = P^{**}$ se dice que P es $*$ -cerrado.

Por la simetría notada previamente las ecuaciones 1.5 y 1.6 son ciertas para P un subconjunto de Y. Entonces 1.6 dice que cualquier subconjunto de X o Y está contenido en su $*$ -clausura.

Aplicando 1.5 a 1.6 obtenemos $(P^{**})^* \subseteq P^*$. 1.6 mismo nos indica que $P^* \subseteq (P^*)^{**}$, entonces

Proposición 1.8.

$$P^* = P^{***}$$

es decir, el $*$ -polar de cualquier subconjunto de X o Y es $*$ -cerrado. Este hecho ilustra cuan apropiado es el término " $*$ -cerrado". P^* es " $*$ -cerrado" en el sentido que añadir cualquier otro elemento a P^* destruiría la propiedad de que todo elemento de P es $*$ -relacionado con todo elemento de P. P^* es el único conjunto maximal con esa propiedad.

Conjuntos $*$ -cerrados son caracterizados por

Proposición 1.9. *P es *-cerrados si y sólo si existe Q tal que $P = Q^*$*

Demostración. Si P es *-cerrado, sea $Q = P^*$. Por otro lado, si existe Q tal que $P = Q^*$, entonces por 1.8, $P^{**} = (Q^*)^{**} = Q^* = P$ pues P es *-cerrado. \square

Con cada subconjunto *-cerrado $P \subseteq X$, corresponde un único subconjunto *-cerrado de Y, específicamente el *-polar de P. Mas precisamente,

Proposición 1.10. *La función $\rho(*)$ es una biyección entre la familia de subconjuntos cerrados de X y la familia de subconjuntos *-cerrados de Y que invierta el orden por inclusión. $\sigma(*)$ es la función inversa de $\rho(*)$.*

Demostración. $\rho(*)$ es *sobreyectiva* ya que cualquier subconjunto *-cerrados, $P \subseteq X$, es el *-polar de $P^{\sigma(*)}$, el cual es un subconjunto *-cerrado de X por 1.6. La inversa de $\rho(*)$ existe, siendo $\sigma(*)$, ya que $P = (P^{\rho(*)})^{\sigma(*)}$ para todos los subconjunto *-cerrado de X. Pues $\rho(*)$ es una biyección. Por 1.5 sabemos que $\rho(*)$ invierte el orden por inclusión. \square

Observación 1.11. Referimos a un subconjunto *-cerrado de X y su *-polar como un *par *-polar* porque cada uno es el *-polar del otro. En ese sentido, el *-polar da una representación alterna de su contraparte.

Proposición 1.12. *La intersección de dos subconjuntos *-cerrados de X cualesquier es también *-cerrado.*

Demostración. Sean P_1 y P_2 dos subconjuntos *-cerrados de X, es decir $P_1 = P_1^{**}$ y $P_2 = P_2^{**}$. Por 1.6, $P_1 \cap P_2 \subseteq P_i$ implica $(P_1 \cap P_2)^{**} \subseteq P_i^{**}$ para $i=1,2$. Entonces $(P_1 \cap P_2)^{**} \subseteq P_1^{**} \cap P_2^{**} = P_1 \cap P_2$. Pero otra vez por 1.6, $P_1 \cap P_2 \subseteq (P_1 \cap P_2)^{**}$, entonces $P_1 \cap P_2 = (P_1 \cap P_2)^{**}$ y $P_1 \cap P_2$ es *-cerrado. \square

Finalmente, nótese que ambos X y Y son los *-polar del conjunto nulo entonces por Proposición 1.9 tenemos

Proposición 1.13. *Ambos X y Y son *-cerrados.*

Ejemplo 1.14. Amistades entre dos conjuntos de amigos

Sean $X = \{\text{José, Luis, Juan, Josué}\}$, $Y = \{\text{Juanita, Luisa, Julia, Loyi}\}$ los conjuntos y la relación binaria $* \subseteq X \times Y$, las amistades definidas por:

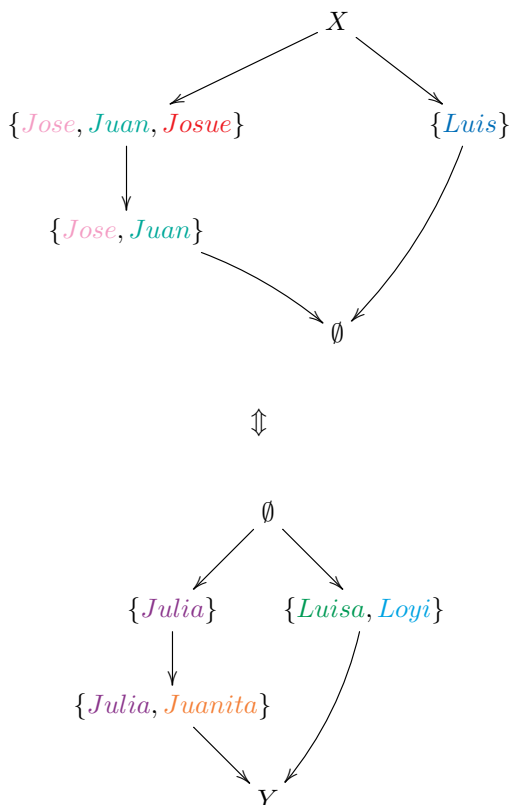
$$\begin{aligned} & \{\text{José, Julia}\}, \{\text{Juan, Julia}\}, \{\text{Josué, Julia}\}, \{\text{Luis, Luisa}\}, \{\text{Luis, Loyi}\}, \\ & \{\text{José, Juanita}\}, \{\text{Juan, Juanita}\} \end{aligned}$$

Veamos que se cumplen las propiedades:

$P \subseteq X$	P^*	P^{**}	*-cerrado
\emptyset	Y	\emptyset	si
{Jose}	{Julia,Juanita}	{Jose,Juan}	no
{Juan}	{Julia,Juanita}	{Jose,Juan}	no
{Luis}	{Luisa,Loyi}	{Luis}	si
{Josue}	{Julia}	{Juan,Jose,Josue}	no
{Jose,Juan}	{Julia,Juanita}	{Jose,Juan}	si
{Jose,Luis}	\emptyset	X	no
{Jose,Josue}	{Julia}	{Jose,Juan,Josue}	no
{Juan,Luis}	\emptyset	{Jose,Juan,Josue}	no
{Luis,Josue}	\emptyset	X	no
{Jose,Juan,Luis}	\emptyset	X	no
{Jose,Juan,Josue}	{Julia}	{Jose,Juan,Josue}	si
{Juan,Luis,Josue}	\emptyset	X	no
{Jose,Luis,Josue}	\emptyset	X	no
X	\emptyset	X	si

$Q \subseteq Y$	Q^*	Q^{**}	*-cerrado
\emptyset	X	\emptyset	si
{Juanita}	{Jose,Josue}	{Julia,Juanita}	no
{Julia}	{Jose,Juan,Josue}	{Julia}	si
{Luisa}	{Luis}	{Luisa,Loyi}	no
{Loyi}	{Luis}	{Luisa,Loyi}	no
{Juanita,Julia}	{Jose,Juan}	{Juanita,Julia}	si
{Juanita,Luisa}	\emptyset	Y	no
{Juanita,Loyi}	\emptyset	Y	no
{Luisa,Julia}	\emptyset	Y	no
{Luisa,Loyi}	{Luis}	{Luisa,Loyi}	si
{Julia,Loyi}	\emptyset	Y	no
{Juanita,Luisa,Julia}	\emptyset	Y	no
{Juanita,Julia,Loyi}	\emptyset	Y	no
{Luisa,Julia,Loyi}	\emptyset	Y	no
{Juanita,Luisa,Loyi}	\emptyset	Y	no
Y	\emptyset	Y	si

Biyección que invierte el orden por inclusión



1.2. Conceptos básicos de poliedros

¿Qué es un poliedro? Posiblemente viene a la mente algunos de los sólidos platónicos como el dodecaedro con 12 caras maximales, 20 vértices y 30 aristas y el icosaedro con 20 caras maximales, 12 vértices y 30 aristas. Se puede considerar cada uno de estos ejemplos como la intersección de los semi-espacios que definen sus caras maximales o también como el conjunto de combinaciones convexas de sus vértices o puntos extremos. Estas dos maneras de definir un poliedro son duales u opuestos en naturaleza: una definición en términos de las caras maximales o facetas y otra en términos de las caras minimales o vértices. El objetivo de esta sección es explorar, en forma intuitiva, definiciones y caracterizaciones de los poliedros convexos y de sus caras, enfatizando la dualidad ya notada y utilizando diferentes polaridades en el desarrollo de la teoría.

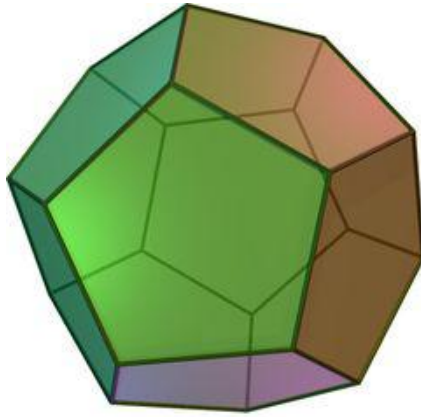


Figura 1.1: Dodecaedro

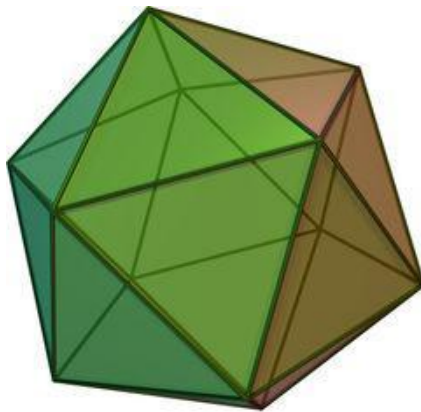


Figura 1.2: Icosaedro

1.2.1. Poliedros definidos por Desigualdades Lineales

Se considerará primeramente el concepto de poliedro como la intersección de un número finito de semi-espacios. Cada semi-espacio es el conjunto de soluciones

de una desigualdad lineal. Un ejemplo de un semi-espacio en tres dimensiones sería $P \equiv \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^K : 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 1\}$ donde $K = \{1, 2, 3\}$.

Definición 1.15. Un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^J$ es el conjunto de soluciones de un conjunto finito de desigualdades lineales, es decir, $P = P(A, b) \equiv \{x \in \mathbb{R}^J : Ax \leq b\}$ para una matriz $A \in \mathbb{R}^{I \times J}$ y vector $b \in \mathbb{R}^I$. El par (A, b) se llama el sistema que define P . Para cada elemento $i \in I$, la i -ésima fila de A y el i -ésimo elemento de b , definen la desigualdad lineal $A_i x \leq b_i$.

Observación 1.16. Nótese que un poliedro según la definición 1.15 no solamente tiene forma y estructura como el dodecaedro mencionado, sino también una ubicación específica en el espacio vectorial. Por ejemplo, el origen 0_J del espacio pertenece a $P(A, b)$ solamente si $b \geq 0_I$.

1.2.2. Eliminación Fourier-Motzkin

Una de las primeras preguntas que uno podría hacer acerca de un sistema de desigualdades es si existe o no un vector $x \in \mathbb{R}^J$ que satisface o cumple cada una de las desigualdades del sistema y si tal solución existe, encontrar una. A continuación describimos el método de Eliminación Fourier-Motzkin descrito por Fourier en 1826 y re-descubierto por Dines en 1919 y por Motzkin en 1936.

Procedimiento 1.17. Sea $A \in \mathbb{R}^{I \times J}$ y $b \in \mathbb{R}^I$ donde I y J son dos conjuntos finitos de índices. Se puede usar el procedimiento descrito a continuación llamado Eliminación Fourier-Motzkin, para encontrar una solución del sistema de desigualdades $Ax \leq b$ si una solución existe, y si no existe ninguna, proveer un certificado que demuestra que no hay.

Para cualquier $j \in J$, sea $IP \equiv \{i \in I : A_{ij} > 0\}$, sea $IN \equiv \{i \in I : A_{ij} < 0\}$ e $IE \equiv \{i \in I : A_{ij} = 0\}$. Para cada $i \in IP$ y cada $k \in IN$, multiplique la desigualdad i por $-A_{kj}/A_{ij}$ y sumar el resultado a la desigualdad k . Este conjunto de nuevas desigualdades junto con las desigualdades originales indexadas por IE no involucran a la variable x_j y definen la proyección de $P(A, b)$ al espacio $\mathbb{R}^{I \times J - \{j\}}$. Observemos que cada desigualdad nueva sería una combinación no-negativa de las desigualdades originales. Si $IP \equiv \emptyset$ o $IN \equiv \emptyset$ no habrá desigualdades nuevas y las restricciones indexadas por IE definen la proyección. Repitiendo este procedimiento sucesivamente al conjunto nuevo de desigualdades, se puede eliminar cada una de las variables restantes para obtener un conjunto de desigualdades en que cada desigualdad es de la forma $\lambda^t Ax \leq \lambda^t b$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}^I$ tal que $\lambda \geq 0, \lambda^t A = 0$. Si el coeficiente al lado derecho de cada desigualdad es no-negativa, es decir $\lambda^t b \geq 0$, se puede

encontrar una solución por inspección del sistema anterior involucrando una sola variable y extenderla sucesivamente para obtener una solución del sistema original. Si el lado derecho de alguna de las restricciones finales es negativa, es decir, $\lambda^t b < 0$, entonces ese λ es un certificado que no existe ninguna solución del sistema original.

Un resultado inmediato de Eliminación Fourier-Motzkin es el siguiente teorema llamada *Lema de Farkas*.

1.2.3. Lema de Farkas:

Teorema 1.18. *Dado $A \in \mathbb{R}^{I \times J}$, $b \in \mathbb{R}^I$, existe $x \in \mathbb{R}^J$ tal que $Ax \leq b$ o existe $\lambda \in \mathbb{R}^I$ tal que $\lambda^t A = 0$, $\lambda \geq 0$, $\lambda^t b < 0$ pero nunca ambos.*

Se deja como ejercicio demostrar el siguiente corolario:

Teorema 1.19. *Dado un poliedro $P = P(A, b) \neq \emptyset$, una desigualdad lineal $c^t x \leq \alpha$ es válida para P , es decir, se cumple por todo $x \in P$, si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^I$ tal que $c = \lambda^t A$ y $\alpha \geq \lambda^t b$.*

Observación 1.20. Se puede usar el procedimiento de Eliminación Fourier-Motzkin para resolver problemas de optimización lineal. Considera el programa lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximice} & z = c^t x \\ \text{sujeta a:} & Ax \leq b \end{array}$$

Incorporar las desigualdades $c^t x - z \leq 0$ y $-c^t x + z \leq 0$ al sistema de desigualdades originales, y eliminar todas las variables salvo la variable z . Determinar el valor máximo posible de z y extender la solución para obtener un valor de x .

1.2.4. Conjuntos finitamente generados

Al considerar algunos ejemplos sencillos de poliedros en 2 o 3 dimensiones, se observa que no todos los poliedros definidos por desigualdades lineales son acotados como el dodecaedro. Considere el caso de $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. Tampoco todos los poliedros tienen puntos extremos o vértices como por ejemplo, $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. Estos casos motivan la siguiente definición de un conjunto finitamente generado que consiste de las combinaciones convexas

de un conjunto finito de puntos mas las combinaciones no-negativas de un segundo conjunto finito de puntos.

Definición 1.21. Para $S_M \in \mathbb{R}^{M \times J}$ y $T_N \in \mathbb{R}^{N \times J}$, $C(S_M, T_N) \equiv \{x \in \mathbb{R}^J : \text{Existe } \lambda \in \mathbb{R}_+^M, \mu \in \mathbb{R}_+^N \text{ tal que } x^t = \lambda^t S_M + \mu^t T_N, \lambda^t \mathbf{1}_M = 1\}$ se llama el conjunto finitamente generado por S_M y T_N y el par (S_M, T_N) se llama su sistema generador.

Definición 1.22. Dado dos subconjuntos X y Y de \mathbb{R}^J , la suma Minkowski de los dos conjuntos es $X + Y \equiv \{x + y : x \in X, y \in Y\}$

$C(S_M, T_N)$ entonces es el subconjunto de \mathbb{R}^J consistiendo de la suma Minkowski del conjunto de todas las combinaciones convexas de las filas de la matriz S_M y el conjunto de combinaciones no-negativas de las filas de T_N .

Observación 1.23. $C(S_M, T_N) = \emptyset$ si y sólo si $M = \emptyset$.

Observación 1.24. $C(S_M, T_N)$ es acotado si y sólo si $N = \emptyset$ o T_N es una matriz de ceros.

El proceso de eliminación Fourier-Motzkin 1.17 puede ser utilizado para eliminar las variables λ y μ del sistema de desigualdades definiendo $C(S_M, T_N)$ para obtener un sistema de desigualdades lineales definiendo $C(S_M, T_N)$ en términos de las variables x solamente. Entonces:

Lema 1.25. Si $P \subseteq \mathbb{R}^J$ es un conjunto finitamente generado, P es un poliedro.

1.2.5. Conos de recesión, espacios de linealidad y flats

Definición 1.26. Dado un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^J$, el cono de recesión de P es $REC(P) \equiv \{x \in \mathbb{R}^J : \text{para cualquier } x^0 \in P, x^0 + \eta x \in P \text{ para todo } \eta \in \mathbb{R}_+\}$.

Ejercicio 1.27. $REC(P(A, b)) = P(A, 0_I) \equiv \{x \in \mathbb{R}^J : Ax \leq 0_I\}$.

Ejercicio 1.28. Para $M \neq \emptyset$,

$REC(C(S_M, T_N)) = C(0_J, T_N) \equiv \{x \in \mathbb{R}^J : \text{existe } \mu \in \mathbb{R}_+^N \text{ tal que } x = \mu^t T_N\}$.

Definición 1.29. Dado un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^J$, el Espacio de Linealidad de P es $LIN(P) \equiv \{x \in \mathbb{R}^J : \text{para cualquier } x^0 \in P, x^0 + \eta x \in P \text{ para todo } \eta \in \mathbb{R}\}$.

El espacio de linealidad de un poliedro $P \neq \emptyset$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^J . En las proposiciones siguientes se relaciona $LIN(P)$ con $REC(P)$ y se caracteriza $LIN(P)$ en términos de sistemas y generadores definiendo P .

Ejercicio 1.30. $LIN(P) = \{x \in REC(P) \text{ tal que } -x \in REC(P)\}$.

Ejercicio 1.31. Para $P(A, b) \neq \emptyset$, $LIN(P(A, b)) = \{x \in \mathbb{R}^J : Ax = 0_I\}$.

Ejercicio 1.32. Para $C(S_M, T_N) \neq \emptyset$, $LIN(C(S_M, T_N)) = \{x \in CONE(T_N) : -x \in CONE(T_N)\}$.

Finalmente, se define el *flat* de cualquier poliedro como el espacio afín generado por él.

Definición 1.33. $FLAT(C(S_M, T_N)) \equiv \{x \in \mathbb{R}^J : \text{Existe } \lambda \in \mathbb{R}^M, \mu \in \mathbb{R}^N, \text{ tal que } x = \lambda^t S_M + \mu^t T_N, \lambda^t 1_M = 1\}$. Nótese que tanto λ como μ no están restringidas en signo.

Ejercicio 1.34. Para $P(A, b) \neq \emptyset$, sea $H \equiv \{i \in I : A_i x = b_i \quad \forall x \in P\}$. Entonces $FLAT(P(A, b)) = \{x \in \mathbb{R}^J : A_H x = b_H\}$.

1.2.6. Desigualdades Válidas y Polaridades dadas por relaciones bilineales

Decir que la desigualdad $c^t x \leq \alpha$ es una desigualdad válida para $P \subseteq \mathbb{R}^J$ es equivalente a decir que $c^t x \leq \alpha$ para todo $x \in P$. Si consideramos a (c, α) como un vector en $\mathbb{R}^{J \cup \{0\}}$, esta desigualdad lineal define una relación binaria δ entre \mathbb{R}^J y $\mathbb{R}^{J \cup \{0\}}$, dado por $(x, (y_J, y_0)) \in \delta$ si y sólo si $x^t y_J \leq y_0$. El conjunto de todos los elementos de $\mathbb{R}^{J \cup \{0\}}$ que definen desigualdades válidas para P es el δ -polar de P según la definición de polaridad dada en la sección anterior. Podemos concluir pues que el estudio de desigualdades lineales válidas para P es equivalente al estudio de polaridades dadas por desigualdades bilineales.

Observación 1.35. Todo poliedro $P(A, b) \in \mathbb{R}^J$ es δ -cerrado.

Esto sigue de inmediato por Proposición 1.9 y el hecho que $P(A, b)$ es el δ -polar del conjunto finito $\{(A_i, b_i) : i \in I\} \subseteq \mathbb{R}^{J \cup \{0\}}$.

Las desigualdades lineales válidas para un poliedro dado como un conjunto finitamente generado son caracterizadas por:

Lema 1.36. Dado un poliedro $P = C(S_M, T_N) \neq \emptyset$, $x^t c \leq \alpha$ es una desigualdad válida para P si y sólo si $\begin{cases} S_m c \leq \alpha & \text{para toda fila } S_m \text{ de } S_M \text{ y} \\ T_n c \leq 0 & \text{para toda fila } T_n \text{ y } S_N. \end{cases}$

Ejercicio 1.37. Demostrar este lema el cual es equivalente a la siguiente caracterización del δ -polar de $C(S_M, T_N)$

Lema 1.38. *El δ -polar $C(S_M, T_N)^\delta$ de $C(S_M, T_N)$ es*

$$P(\delta; S_M, T_N) \equiv \left\{ y \in \mathbb{R}^{J \cup \{0\}} : \begin{array}{ll} S_m y_J - y_0 \leq 0 & \text{para todo } m \in M \\ T_n y_J \leq 0 & \text{para todo } n \in N \end{array} \right\}.$$

Dado un sistema generador de un poliedro en $\mathbb{R}^{1 \times J}$ tenemos así, con facilidad, un sistema de desigualdades que definen su δ -polar. Sin embargo, dado un sistema de desigualdades que definen un poliedro $P(A, b) \in \mathbb{R}^J$, recurrimos al Lema de Farkas 1.19, para caracterizar las desigualdades lineales válidas para $P(A, b)$ y así obtener una descripción de $P(A, b)^\delta$.

Por el lema de Farkas 1.19, el δ -polar de $P(A, b)$ es dado por:

Lema 1.39. *Para todo $P(A, b) \neq \emptyset$,*

$$P(A, b)^\delta \equiv \{(y, y_0) \in \mathbb{R}^{J \cup \{0\}} : \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^I \text{ tal que } y = \lambda^t A, y_0 \geq \lambda^t b\}.$$

Eliminando las variables λ de este sistema definiendo $P(A, b)^\delta$ por el proceso de Fourier-Motzkin 1.17, no es difícil mostrar:

Lema 1.40. *Para todo $P(A, b) \neq \emptyset$, existen conjuntos finitos $M \neq \emptyset$ y $N, S_M \in \mathbb{R}^{M \times J}$ y $T_N \in \mathbb{R}^{N \times J}$, tal que el δ -polar de $P(A, b)$ es igual a $P(\delta; S_M, T_N)$, el δ -polar de $C(S_M, T_N)$, es decir, $P(A, b)^\delta = C(S_M, T_N)^\delta$.*

Ejercicio 1.41. Demostrar 1.40

Esto implica que $P(A, b)^{\delta\delta} = C(S_M, T_N)^{\delta\delta}$. Por el hecho, 1.35, que cada poliedro $P(A, b)$ es δ -cerrado y el lema 1.25 el cual asegura que cada $C(S_M, T_N)$ es un poliedro, vemos que $P(A, b) = P(A, b)^{\delta\delta} = C(S_M, T_N)^{\delta\delta} = C(S_M, T_N)$ y hemos demostrado el

Lema 1.42. *Para cualquier $P(A, b) \neq \emptyset$, existe un sistema generador finito (S_M, T_N) con $M \neq \emptyset$ tal que $P(A, b) = C(S_M, T_N)$, es decir, cada poliedro es un conjunto finitamente generado.*

Lemas 1.25 y 1.42 nos demuestra

Teorema 1.43. Doble Representación de Poliedros: *$P \subseteq \mathbb{R}^J$ es un poliedro, es decir, el conjunto de soluciones de un sistema finito de desigualdades lineales, si y sólo si P es un conjunto finitamente generado.*

Figura 1.3 muestra una ilustración sencilla de este teorema básica de la teoría de los poliedros. La demostración presentada sigue el patrón de una demostración dada por Tucker en [44] del Teorema de Minkowski (Cada cono poliedro es finitamente generado) y el Teorema de Wehl (Cada cono finitamente generado es un cono poliedro).

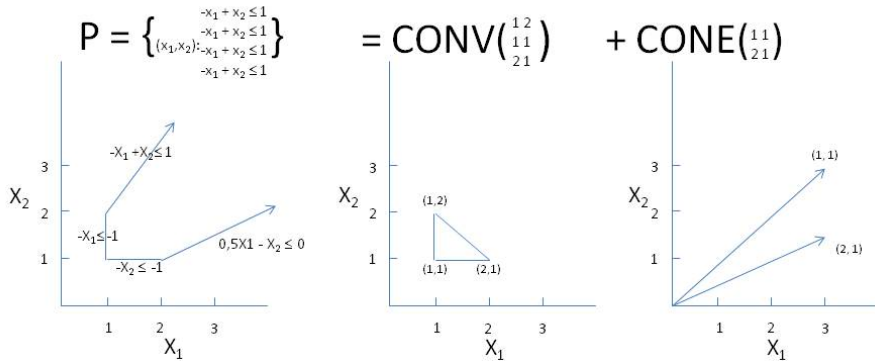


Figura 1.3: Doble Representación de Poliedros

1.2.7. Caras de Poliedros Convexos y Programación Lineal

Se continuará ahora con el estudio de las caras de un poliedro, es decir, su frontera o superficie. Ya hemos visto que para cada poliedro $\emptyset \neq P \subseteq \mathbb{R}^J$ hay dos maneras de representarlo, primeramente en términos de un sistema de desigualdades, $P = P(A, b)$ y en segundo lugar como un conjunto finitamente generado, $P = C(S_M, T_N)$. En realidad hay muchos sistemas de desigualdades lineales y muchos sistemas generadores que definen el mismo poliedro P y además un conjunto finitamente generado se define en términos de desigualdades lineales y ecuaciones entonces uno podría preguntar porque la necesidad de destacar estas dos representaciones específicas. La respuesta es que estas dos representaciones, especialmente cuando son minimales, tienen relación íntima con las caras del poliedro y por eso son importantes.

Definición 1.44. Dado un poliedro, $\emptyset \neq P \subseteq \mathbb{R}^J$, y una desigualdad $c^t x \leq \alpha$ válida para P , si $F \equiv \{x \in P : c^t x = \alpha\} \neq \emptyset$ entonces F se llama una *cara* de P .

Observación 1.45. $\emptyset \neq F \subseteq P$ es una cara de P si y solo si F es el conjunto de soluciones óptimas de un programa lineal sobre P .

Considere el programa lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximice} & z = c^t x \\ \text{sujeta a:} & Ax \leq b \end{array} \quad (1.2.1)$$

y su modelo dual:

$$\begin{aligned} \text{Minimice} \quad & w = y^t b & (1.2.2) \\ \text{sujeta a:} \quad & y^t A = c^t \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Considere también la expresión

$$y^t(b - Ax) + (y^t A - c^t)x = y^t b - c^t x \quad (1.2.3)$$

Si x es factible para el problema 1.2.1 y y es factible para el problema 1.2.2, entonces la expresión 1.2.3 es no-negativa y es igual a 0 si y solo si se satisface las siguientes condiciones llamadas **condiciones de holgura complementaria**:

$$\forall i \in I, y_i = 0 \text{ o } A_i x = b_i \quad (1.2.4)$$

El hecho que la expresión 1.2.3 es no-negativa demuestra el siguiente teorema

Teorema 1.46. Teorema Débil de Dualidad

$c^t x \leq y^t b$ para cualquier solución factible x del primal 1.2.1 y cualquier solución factible y del dual 1.2.2.

Observación 1.47. Según el teorema débil de dualidad, el valor objetivo de cualquier solución factible del programa lineal 1.2.1 es una cota inferior del valor objetivo de cualquier solución factible del problema dual 1.2.2.

Observación 1.48. El método simplex para resolver problemas de programación lineal desarrollado por George Dantzig junto con la reglas de Bland para pivoteo para que sea un procedimiento finito, termina en uno de tres posibles condiciones:

1. el problema primal 1.2.1 no tiene solución factible
2. el problema primal tiene solución factible pero es no-acotado, lo cual implica que el problema dual no tiene solución factible
3. el método simplex produce una solución factible óptima para el primal y una solución factible óptima para el dual que satisfacen las condiciones de holgura complementaria 1.2.4

El método simplex entonces demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1.49. Teorema Fuerte de Dualidad

Si el programa lineal 1.2.1 tiene solución óptima entonces su programa lineal dual 1.2.2 tiene solución óptima con el mismo valor objetivo óptimo.

Ejercicio 1.50. 1. Demostrar el lema de Farkas por medio del teorema fuerte de dualidad de programación lineal.

2. Demostrar el Teorema Fuerte de Dualidad por medio del lema de Farkas.

1.2.8. Caras de $P(A,b)$ y (A,b) -equisetes

Definición 1.51. Sea $\emptyset \neq P = P(A,b)$, es decir, $Ax \leq b$ es un sistema de desigualdades que definen P . Para $F \subseteq P$, el *conjunto de igualdad* (en inglés, *equality set*) de F con respecto al sistema $Ax \leq b$ se define como:

$$(A,b)\text{-equisete}(F) \equiv \{h \in I : A_h x = b_h \text{ para todo } x \in F\}.$$

De interés particular son los conjuntos de igualdad de las caras de $P(A,b)$. Por definición, cada cara F de $P(A,b)$ es el conjunto de soluciones óptimas del programa lineal:

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = c^t x & (1.2.5) \\ \text{sujeta a:} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

para algún vector $c \in \mathbb{R}^J$. Es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $c^t x \leq \alpha \quad \forall x \in P(A,b)$ y $F = \{x \in P(A,b) : c^t x = \alpha\}$.

Pueden haber muchos puntos de una cara F de $P(A,b)$ cuyo (A,b) -equisete no sea igual al (A,b) -equisete de F porque son puntos también de otras caras de $P(A,b)$ que son subconjuntos propios de F , y en realidad caras propias de F .

Definición 1.52. Un punto x de una cara F de $P(A,b)$ se llama un punto interior de F si el (A,b) -equisete de x es igual al (A,b) -equisete de F .

Por definición de (A,b) -equisete, es una tarea trivial determinar el (A,b) -equisete de un solo punto en $P(A,b)$. Es simplemente el conjunto de desigualdades satisfechas que el punto satisface con igualdad.

Ejercicio 1.53. Mostrar que cada cara no-vacía de $P(A,b)$ tiene un punto interior.

¿Como determinar el (A,b) -equisete de la cara de soluciones óptimas de un PL?

El método simplex para resolver programas lineales siempre encuentra una solución básica factible óptima si existe. Cuando hay soluciones óptimas alternas,

tal punto óptima no es un punto interior de la cara de soluciones óptimas. A continuación describimos dos métodos para encontrar el (A, b) -equibite de la cara de soluciones óptimas del modelo dado en ecuación 1.2.5.

1. usar un método de puntos interiores para resolver 1.2.5. El método de puntos interiores para resolver un programa lineal busca por su propia naturaleza, un punto interior de la cara de soluciones óptimas. Sin embargo, muchos de los paquetes que implementan tal método, después de encontrar un punto interior de la cara, ejecuta un segundo procedimiento, para encontrar una solución óptima que es un punto extremo o vértice de la región factible y no presenta como solución el punto interior de la cara de soluciones óptimas. En algunos paquetes de optimización como CPLEX, se puede fijar un parámetro que especifica que no debe ejecutar el segundo procedimiento para que presente como solución el punto interior de la cara óptima ya encontrado.
2. El profesor Fukuda en sus apuntes titulados *Polyhedral Computation* describe el siguiente método.
 - a) Resolver el programa lineal 1.2.5 usando el método simplex o cualquier método.
 - b) Sea α^* el valor óptimo y x^* la solución óptima obtenida. Sea $H \subseteq I$ el A, b -equibite de x^* .
 - c) resolver el programa lineal

$$\begin{aligned}
 & \text{máx } t \\
 & \text{sujeto a:} \\
 & A_{I-H}x \leq b_{I-H} \\
 & A_Hx + tI_H \leq b_H \\
 & c^t x = \alpha^*
 \end{aligned}$$

- d) Sea (x^{**}, t^{**}) la solución óptima del paso anterior. Si $t^{**} = 0$, PARE porque H es el (A, b) -equibite de la cara de soluciones óptimas de 1.2.5 y x^{**} es un punto interior de tal cara. Sino, sea $H \leftarrow \{i \in I : A_i x^{**} < b_i\}$ y repita desde el paso anterior.

Definición 1.54. Una solución óptima x^* del programa lineal 1.2.1 y una solución óptima y^* del programa lineal dual 1.2.2 son estrictamente complementarias si no solamente satisface las condiciones de holgura complementaria

1.2.4 sino que satisfacen las condiciones

$$\forall i \in I, y_i^* > 0 \text{ o } A_i x^* < b_i \quad (1.2.6)$$

es decir, cada variable dual y_i^* es positivo o la holgura en la desigualdad correspondiente del primal es positivo en el punto x^* .

A.W.Tucker en 1956, (ver [44]), demostró el resultado siguiente llamado el *Tucker Key Theorem*.

Teorema 1.55. *Si existe una solución óptima de un programa lineal, existe una solución óptima primal y una solución óptima dual que satisfacen las condiciones 1.2.6 de holgura complementaria estricta.*

Un corolario bien conocido del principio de holgura complementaria de la Programación Lineal, 1.2.4, es $F \subseteq P(A, b)$ es una cara de $P(A, b)$ si y sólo si F es el conjunto de soluciones de un sistema de desigualdades obtenido por fijar algunas de las desigualdades de (A, b) en ecuaciones. Más precisamente,

Proposición 1.56. *F es una cara de $P(A, b)$ si y sólo si existe $H \subseteq I$, tal que: $F = f_{(A, b)}(H) \equiv \{x \in P(A, b) : A_i x = b \text{ para todo } i \in H\}$.*

Observación 1.57. Este proposición no está completamente cierta. Para que sea cierta siempre, hay que declarar que $F = \emptyset$ es una cara de todo poliedro e incluir en el sistema de desigualdades una desigualdad como $0 \leq 1$ que siempre es valida pero nunca se satisface con igualdad.

Ejercicio 1.58. Demostrar proposición 1.56 considerando 1.57.

Siendo I el conjunto de desigualdades lineales ($Ax \leq b$), considere la relación binaria ψ entre $P(A, b)$ e I dado por $(x, i) \in \psi$ si y sólo si $A_i x = b_i$. Por 1.56 y 1.9 los subconjuntos ψ -cerrados de $P(A, b)$ son las caras de $P(A, b)$ y los subconjuntos ψ -cerrados de I son los (A, b) -equesetes. Entonces por 1.10 se tiene;

Proposición 1.59. *La función $f_{(A, b)}$ definida en 1.56 es una biyección que invierte el orden por inclusión entre la familia de los (A, b) -equesetes y las caras de $P(A, b)$.*

Ejercicio 1.60. Si $P(A, b) \subseteq \mathbb{R}^J$ es de dimensión plena, es decir, el espacio de linealidad de $P(A, b)$ es igual a \mathbb{R}^J , entonces hay una única representación minimal (no-redundante) (A', b') de $P(A, b)$ y los (A', b') -equesetes de las caras propias maximales (facetas) de $P(A, b)$ consisten de un solo índice, es decir las facetas de $P(A, b)$ corresponden 1 : 1 a las desigualdades lineales de esa representación minimal.

1.2.9. Caras de $C(S_M, T_N)$ y (S_M, T_N) -soportes

Definición 1.61. Para cualquier subconjunto F de un conjunto finitamente generado $C(S_M, T_N)$, el (S_M, T_N) -soporte de F es (H, I) donde

$$H \equiv \{m \in M : S_m \text{ puede ser utilizado para generar algún punto de } F\}$$

$$I \equiv \{n \in N : T_n \text{ puede ser utilizado para generar algún punto de } F\}.$$

En otras palabras el (S_M, T_N) -soporte de $F \subseteq C(S_M, T_N)$ es el complemento del (S_M, T_N) -equese de F considerando que el sistema de desigualdades y ecuaciones definiendo $C(S_M, T_N)$ es

$$x - \lambda_M^t S_M - \mu_N^t T_N = 0$$

$$\lambda_M 1_M = 1$$

$$\lambda_m \geq 0 \quad \forall m \in M$$

$$\mu_n \geq 0 \quad \forall n \in N$$

Podemos concluir por la Proposición 1.59.

Proposición 1.62. *Existe una biyección definida entre el conjunto de caras de $C(S_M, T_N)$ y la familia de (S_M, T_N) -soportes la cual mantiene el orden por inclusión.*

Observación 1.63. Para problemas de programación lineal expresados en términos de un conjunto finitamente generado, existen métodos análogos a los métodos descritos en la sección 1.2.8 para determinar el (S_M, T_N) -soporte de la cara de soluciones óptimas del programa lineal.

Ejercicio 1.64. Si $P = C(S_M, T_N) \subseteq \mathbb{R}^J$ es punteada, es decir, el espacio de linealidad de cualquier cara minimal (vértice) de P es solo el origen 0_J , entonces hay una única representación minimal (no-redundante) de $C(S_M, T_N)$ y las filas de S_M son las vértices de P y las filas de T_N definen los rayos extremos de $C(0_J, T_N)$.

1.3. Programación Lineal Multi-objetivo

Consideremos ahora problemas de programación lineal multi-objetivo, es decir, modelos de optimización en que se desea maximizar o minimizar más que una función objetivo sujeta a un conjunto finito de restricciones lineales.

Los conceptos de dominancia e eficiencia de Programación lineal multi-objetivo presentadas en esta sección son la base para los modelos aditivos del análisis

envolvente de datos a presentarse en capítulo 3 y el modelo general de programación polar en capítulo 4.

1.3.1. Dominancia y Eficiencia en términos de funciones objetivos multiples

Sea J y K dos conjuntos finitos de índices y $W \in \mathbb{R}^{J \times K}$ una matriz cuyas columnas definen $|K|$ funciones objetivos lineales a ser maximizados sobre subconjuntos de \mathbb{R}^J . (Si una función objetivo es minimizar en vez de maximizar, multiplique la columna respectiva de W por -1 para que todas los objetivos son de maximizar. El valor de la nueva función objetiva en un punto va ser el negativo del valor de la función original en el punto.)

En los modelos clásicos de DEA, cada función objetivo es una función de exactamente una variable: cada variable de output debe ser maximizado y cada variable de input minimizado. La matriz W sería en este caso una matriz diagonal con un 1 en cada columna/fila representando una variable de output y un -1 en cada columna/fila representando una variable de input.

Definición 1.65. Para cualquier x_1 y x_2 in \mathbb{R}^J ,

- x_1 W -domina x_2 si $x_2^t W \leq x_1^t W$ y $x_2^t W \neq x_1^t W$
- x_1 es W -equitativo a x_2 si $x_2^t W = x_1^t W$, es decir $x_2 - x_1$ pertenece al espacio de nulidad de W , .
- Para cualquier $P \subseteq \mathbb{R}^J$ un elemento $x_1 \in P$ es un punto W -no-dominado o W -eficiente de P si ningún otro punto de P lo W -domina. El conjunto de puntos W -no-dominados en P se llama la frontera W -eficiente de P .

En lo que sigue, suponemos que

Suposición 1.66. el espacio de nulidad de W , $\{x \in \mathbb{R}^J : x^t W = 0\}$ es de dimensión cero, es decir consiste solamente del origen.

Ejercicio 1.67. Describe la frontera W -eficiente de un conjunto $P \subseteq \mathbb{R}^J$ cuando el espacio de nulidad de W tiene dimensión mayor que 0.

Cuando P es un poliedro, se puede caracterizar puntos W -no-dominado de P por medio de un programa lineal:

Teorema 1.68. Sean $P \subseteq \mathbb{R}^J$ un poliedro, $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ y e_k el vector unitario (fila) con un 1 en posición $k : k \in K$.

$\bar{x} \in P$ es un punto W -no-dominado de P si y solo si el valor óptimo del programa lineal:

$$\text{maximice } \sum_{k \in K} \epsilon \beta_k \tag{1.3.1}$$

sujeta a:

$$x^t W = \bar{x}^t W + \sum_{k \in K} \beta_k e_k$$

$$x \in P$$

$$\beta_k \geq 0 : k \in K$$

1.3.2. Dominancia y Eficiencia en términos de conos de dominancia

Sea J y D dos conjuntos finitos de indices y $T_D \in \mathbb{R}^{D \times J}$ tal que

Suposición 1.69. el cono $C(0_J, T_D)$ es apuntado (pointed), es decir, el espacio de linealidad del cono es solamente el origen, es decir, no hay $x \in C(0_J, T_D)$ tal que $-x \in C(0_J, T_D)$ y $x \neq 0$.

Definición 1.70. Para cualquier x_1 y x_2 in \mathbb{R}^J ,

- x_2 T_D -domina x_1 , o en otras palabras, x_1 es T_D -dominado por x_2 si existe $x_3 \in C(0_J, T_D)$, $x_3 \neq 0$ tal que $x_2 = x_1 + x_3$.
- Para cualquier $P \subseteq \mathbb{R}^J$, un elemento $x_1 \in P$ es un punto T_D -no-dominado o T_D -eficiente de P si ningún otro punto de P lo T_D -domina. El conjunto de puntos T_D -no-dominados en P se llama la frontera T_D -eficiente de P .

Ejercicio 1.71. Describe la frontera T_D -eficiente de un conjunto $P \subseteq \mathbb{R}^J$ cuando el espacio de linealidad de T_D tiene dimensión mayor que 0.

El concepto de W -eficiencia y el concepto de T_D -eficiencia son equivalentes cuando los dos conos involucrados son iguales.

Teorema 1.72. Para cualquier $P \subseteq \mathbb{R}^J$, $W \in \mathbb{R}^{J \times K}$ que satisface 1.66 y $T_D \in \mathbb{R}^{D \times J}$ que satisface 1.69 y tal que

$$\{x \in \mathbb{R} : x^t W \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x = \beta_D^t T_D, \beta_D \geq 0\},$$

$\bar{x} \in P$ es W -eficiente en P si y solo si \bar{x} es T_D -eficiente en P .

Ejercicio 1.73. Demostrar el teorema 1.72

El siguiente teorema, el cual es la base para los modelos radiales y aditivos DEA, caracteriza los puntos T_D -eficientes por medio de un programa lineal.

Teorema 1.74. Sea $\bar{x} \in P \subseteq \mathbb{R}^J$ y $\{p_d \in \mathbb{R} : d \in D\}$ un conjunto de pesos estrictamente positivos. Entonces $S_o \in P$ es un punto T_d -no-dominado de P si el valor óptimo del programa de optimización siguiente es cero.

$$\text{Maximice } \sum_{d \in D} \beta_d p_d \quad (1.3.2)$$

Sujeto a:

$$S_o + \sum_{d \in D} \beta_d T_d = x \in P \quad (1.3.3)$$

$$\beta_d \geq 0 : d \in D$$

Ejercicio 1.75. Demostrar el teorema 1.74.

Soportes de la cara de soluciones óptimas

Cuando el poliedro P en Teorema 1.74 está definido como el conjunto finitamente generado $C(S_M, T_N)$ el programa lineal 1.3.2 sería

$$\text{Maximice } \tau = \sum_{d \in D} \beta_d p_d \quad (1.3.4)$$

Sujeto a:

$$S_o + \sum_{d \in D} \beta_d T_d = \lambda_M^t S_M + \mu_N^t \quad (1.3.5)$$

$$\beta_d \geq 0 : d \in D$$

$$\lambda_m \geq 0 : m \in M$$

$$\mu_n \geq 0 : n \in N$$

y en muchas aplicaciones se desea saber el (S_M, T_N) -soporte de la cara minimal de $C(S_M, T_N)$ y el T_D -soporte de la cara minimal del cono $C(0_J, T_D)$ que contienen el conjunto de soluciones óptimas del programa lineal.

Análogo a los métodos dados en la sección 1.2.8, se puede determinar tales soportes usando un algoritmo de puntos interiores que produce un punto interior de la cara de soluciones óptimas y no un punto extremo del mismo. También se puede usar el método siguiente:

1. Resolver el programa lineal 1.3.4 usando el método simplex o cualquier método.
2. Sea $(\tau^*, \beta_D^*, \lambda_M^*, \mu_N^t)$ una solución óptima de 1.3.4. Sean

$$\begin{aligned} U &\equiv \{d \in D : \beta_d = 0\} \\ V &\equiv \{m \in M : \lambda_m = 0\} \\ Z &\equiv \{n \in N : \mu_n = 0\} \end{aligned}$$

3. Resolver el programa lineal

$$\begin{aligned} &\text{máx} \sum_{d \in U} \beta_d && + \sum_{m \in V} \lambda_m + \sum_{n \in Z} \mu_n \\ &\text{sujeto a:} && (1.3.6) \\ &\sum_{d \in D} \beta_d p_d = \tau^* \\ &S_o + \sum_{d \in D} \beta_d T_d = \lambda_M^t S_M + \mu_N^t \\ &\beta_d \geq 0 : d \in D \\ &\lambda_m \geq 0 : m \in M \\ &\mu_n \geq 0 : n \in N \end{aligned}$$

4. Si el valor óptimo del programa lineal en el paso anterior es 0, PARE porque U, V y Z son los soportes buscados. Sino, repetir los pasos anteriores usando las soluciones del programa lineal 1.3.6 en vez de 1.3.4.

Observación 1.76. Dado matrices $W \in \mathbb{R}^{J \times K}$ y $T_D \in \mathbb{R}^{D \times J}$, para que un punto \bar{x} , T_D -eficiente en $P \in \mathbb{R}^J$, sea también W -eficiente en P , es necesario que $\{x \in \mathbb{R} : x^t W \geq 0\} \subseteq C(0_J, T_D) \equiv \{x \in \mathbb{R} : x = \beta_D^t T_D, \beta_D \geq 0\}$.

1.3.3. Demostración de un Teorema Clásico de PLMO

El teorema siguiente es uno de los resultados mas conocidos en relación con programación lineal multi-objetivo. Lo incluimos, no porque se requiere para los capítulos siguientes sino porque la demostración presentada ilustra la utilidad de polaridad y el teorema de doble representación de poliedros en conjunto con el teorema fuerte de dualidad de Programación Lineal.

Teorema 1.77. Sea $P \subseteq \mathbb{R}^J$ un poliedro y $W \in \mathbb{R}^{J \times K}$ una matriz cuyas columnas son las funciones objetivos del PLMO:

$$\begin{aligned} & \text{maximice } x^t W & (1.3.7) \\ & \text{sujeta a:} \\ & x \in P \end{aligned}$$

Un Punto $\bar{x} \in P$ es W -no-dominado en P , es decir W -eficiente en P si y solo si $\exists \bar{y} \in \mathbb{R}^K, \bar{y} > 0$ tal que \bar{x} es la solución óptima del program lineal

$$\begin{aligned} & \text{maximice } x^t W \bar{y} & (1.3.8) \\ & \text{sujeta a:} \\ & x \in P \end{aligned}$$

Muchos teoremas de tipo *si y solo si* son sencillos a demostrar en una dirección, en este caso (\Leftarrow), pero requieren esfuerzo mayor para demostrarlo en la otra dirección (\Rightarrow).

Demostración.

Ejercicio 1.78. (\Leftarrow) Dado que existe \bar{y} tal que \bar{x} es la solución óptima de 1.3.8 demostrar que \bar{x} es un punto W -eficiente de P .

Para demostrar la parte más difícil (\Rightarrow), sabemos por Teorema 1.74, que $\bar{x} \in P$ es un punto W -no-dominado de P si y solo si el valor óptimo del programa lineal 1.3.2 es 0.

Por el Teorema de Doble Representación de Poliedros 1.43, existen $S_M \in \mathbb{R}^{M \times J}$ y $T_N \in \mathbb{R}^{N \times J}$ tales que

$$P = C(S_M, T_N) = \{x \in \mathbb{R}^J : x^t = \lambda_M S_M + \mu_N T_N, \lambda_M 1_M = 1, \lambda_M \geq 0, \mu_N \geq 0\}.$$

Entonces se puede escribir 1.74 como

$\bar{x} \in P = C(S_M, T_N)$ es un punto W -no dominado si y solo si el valor óptimo del programa lineal siguiente es 0. Sea $\epsilon \in \mathbb{R} > 0$

$$\begin{aligned}
 & \text{minimizar } -\epsilon \sum_{k \in K} \beta_k \\
 & \text{sujeto a:} \\
 & \lambda_M^t S_M + \mu_N^t T_N)W - \sum_{k \in K} \beta_k e_k = \bar{x}W \\
 & -\lambda_M 1_M = -1 \\
 & \lambda_M \geq 0 \\
 & \mu_N \geq 0 \\
 & \beta_k \geq 0
 \end{aligned}$$

El dual de este Programa lineal con variables duales (y, y_0) es:

$$\begin{aligned}
 & \text{maximizar } \bar{x}W y - y_0 \\
 & \text{Sujeto a :} \\
 & S_M W y - y_0 \leq 0 \tag{1.3.9} \\
 & T_N W y \leq 0 \tag{1.3.10} \\
 & -y_k \leq -\epsilon \quad \forall k \in K \tag{1.3.11}
 \end{aligned}$$

Ya que el programa primal es factible y tiene solución óptima con valor objetivo óptimo 0, por el teorema fuerte de dualidad, existe una solución (\bar{y}, \bar{y}_0) del programa dual, (\bar{y}, \bar{y}_0) que por 1.3.11 es estrictamente positivo que por 1.3.9 y 1.3.10 pertenece al Ω -polar de P donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^J_x \mathbb{R}^{K \cup \{0\}}$ está definida por la desigualdad bilineal $x^t W y - y_0 \leq 0$. Esto quiere decir que $x^t W \bar{y} - \bar{y}_0 \leq 0 \quad \forall x \in P$, es decir \bar{x} es una solución óptima del programa lineal 1.3.8. \square

1.3.4. Métodos para resolver PLMO

Existen diferentes métodos y estrategias para determinar puntos en la frontera W -eficiente de la región factible de un programa lineal multi-objetivo.

1. Usando el **Teorema 1.77** con diferentes valores de (y, y_0) .
2. **Programación Genética** generando una población inicial de soluciones factibles y mejorando la población con las técnicas de generar hijos y mutación.
3. **Programación por Objetivos o metas**, convirtiendo todas las funciones objetivas en restricciones salvo una.

Capítulo 2

Polaridades dadas por una desigualdad bilineal general

2.1. Introducción

En la sección 1.2.6 vimos que el estudio de todas las desigualdades lineales válidas para un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^J$ es equivalente al estudio de polaridad dada por la relación bilineal $\delta \subseteq \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^{J \cup \{0\}}$ definida por $(x, (y, y_0)) \in \delta$ si y sólo si $x^t y \leq y_0$. Ahora vamos a considerar desigualdades lineales válidas de formas particulares. Para considerar todos los casos posibles, veremos la polaridad dada por una relación bilineal arbitraria, Ω . El hecho visto en 1.6 que $P \subseteq P^{\Omega\Omega}$, la Ω -clausura de P , implica que el estudio de estas polaridades provee una fuente natural de diferentes clases de envolventes de poliedros.

Después de las definiciones iniciales, presentaremos, sin demostración, una descripción de la Ω -clausura de cualquier conjunto finitamente generado y después una caracterización de los poliedros que son Ω -cerrados. Esta caracterización, publicada en [8], distingue seis clases de relaciones bilineales. Cuando P es Ω -cerrado, sabemos que toda la estructura de P es reflejado de alguna manera en propiedades de P^Ω y se evidencia esto por la relación entre las caras de P y las caras de P^Ω .

Debido a la generalidad de la relación bilineal Ω , hay peligro de que la notación dificulte la comprensión de los resultados y, por tal motivo, definiremos un prototipo de cada una de las seis clases de desigualdades bilineales distinguidas en el análisis para ilustrar, para cada prototipo, algunos de los resultados más llamativos.

La polaridad clásica de *Minkowski* ω , definida por la relación bilineal, $x^t y \leq 1$, es el prototipo de la primera clase donde un poliedro $P \neq \emptyset$ es ω -cerrado si y sólo si P contiene el origen. Esta polaridad da las propiedades polares de inversión de caras de los sólidos platónicos (vértices del dodecaedro corresponden a las caras maximales del icosaedro y sus caras maximales con los vértices del icosaedro, los del cubo con los del octaedro, etc.) cuando el punto origen se encuentra en el centro del poliedro. Cuando el origen se encuentra en una cara propia de P , el ω -polar de P , P^ω , no es acotado y las caras que contienen el origen corresponden, invirtiendo el orden por inclusión, a las caras del cono de recesión de P^ω ; las caras de P que no contienen el origen corresponden en orden inverso a las caras de P^ω que no contienen el origen y las caras del cono de recesión de P , $REC(P)$, en igual manera a las caras de P^ω que contienen el origen. Un punto interior de una cara de P o de $REC(P)$ es todo lo requerido para definir la cara correspondiente del ω -polar. Cuando un poliedro P no es ω -cerrado, es decir $0 \notin P$, se obtiene la ω -clausura de P por agregar a P las combinaciones convexas del origen y puntos en P , eliminando en efecto todas las restricciones que excluyen el origen, es decir, que son de forma $x^t y \leq -1$ y agregando posiblemente algunas restricciones de la forma $x^t y \leq 1$ o $x^t y \leq 0$. Todas las caras que pueden ser especificadas con desigualdades de la forma $x^t y \leq 1$ o $x^t y \leq 0$ corresponden a caras del P^ω y de $REC(P^\omega)$ en la forma descrita anteriormente.

La segunda polaridad prototipo β , definida por $x^t y \geq 1$ fue estudiada por [5] quien caracterizó los poliedros β -cerrados y relacionó las facetas de un poliedro β -cerrado P con los vértices y rayos extremos de su β -polar y vice versa. Como resumen de los resultados principales tenemos lo siguiente. Un poliedro P es β -cerrado si y sólo si $0 \notin P$ y $P \subseteq REC(P)$. Si $0 \in P$, el β -polar de P es \emptyset y la β -clausura es todo el espacio. Si $0 \notin P$ entonces hay por lo menos una restricción de la forma $xy \geq 1$ y se obtiene la β -clausura de P por sumar a P todas los múltiplos no negativos de puntos en P , en efecto eliminando todas las restricciones que no excluyen el origen, es decir las que tienen forma $x^t y \leq 1$ y agregando posiblemente algunas restricciones de la forma $x^t y \geq 0$. Las caras de P definidas por desigualdades lineales de $x^t y \geq 1$, es decir que excluyen el origen, corresponden en orden inverso a las caras de P^β del mismo tipo. Las caras de $REC(P)$ que no pasan por P corresponden en orden inverso a las caras de P^β definidas por desigualdades lineales de la forma $x^t y \geq 0$ cuyos conos de recesión son precisamente las caras de $REC(P^\beta)$ que tienen intersección con P^β . Igualmente, las caras de P definidas por desigualdades de forma $x^t y \geq 0$ corresponden en orden inverso a las caras de $REC(P^\beta)$ que no

tienen intersección con P^β . Cuando P es β -cerrado los conos de recesión de estas mismas caras de P definidas por desigualdades de forma $x^t y \geq 0$ son las caras de $REC(P)$ que pasan por P .

La tercera polaridad prototipo γ , definida por $x^t y \leq 0$, es una polaridad clásica llamada *polaridad de conos*. Un poliedro P es γ -cerrado si y sólo si $P = REC(P)$, es decir P es un cono. Todas las caras de cualquier cono corresponden en orden inverso a las caras de su γ -polar.

La cuarta polaridad prototipo $\Upsilon \subseteq \mathbb{R}^{J \cup \{0\}} \times \mathbb{R}^J$ es dado por la desigualdad $x^t y \leq x_0$. Un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^{J \cup \{0\}}$ es Υ -cerrado si y sólo si es un poliedro cono (es decir $P = REC(P)$), tal que el punto $(0_J, 1) \in P$ y el punto $(0_J, -1) \notin P$. Las caras de P que no contienen el punto $(0_J, 1)$ corresponden en orden inverso a las caras de P^Υ mientras que las caras de P que si contienen el punto $(0_J, 1)$ corresponden en orden inverso a las caras de $REC(P^\Upsilon)$.

La quinta polaridad prototipo es la relación $\delta \subseteq \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^{J \cup \{0\}}$, definida por $x^t y \leq y_0$ que ya fue introducido en sección 1.2.6 de este trabajo y es el espejo o contraparte del prototipo anterior Υ . Todo poliedro P es δ -cerrado y su δ -polar es un cono. Si definimos un orden parcial \preceq sobre el conjunto de caras de P , junto con las caras de su cono de recesión $REC(P)$ por

$F_1 \preceq F_2$ si y sólo si

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_1 \subseteq F_2 & \text{para } F_1, F_2 \text{ caras de } P, \\ F_1 \subseteq F_2 & \text{para } F_1, F_2 \text{ caras de } REC(P) \\ F_1 \subseteq REC(F_2) & \text{para } F_1 \text{ cara de } REC(P) \text{ y } F_2 \text{ cara de } P, \end{array} \right.$$

entonces las caras de P^δ ordenadas por inclusión corresponden en orden inverso a las caras de P y $REC(P)$ ordenado por \preceq .

Nos queda la última polaridad prototipo $\theta \subseteq \mathbb{R}^{J \cup \{0\}} \times \mathbb{R}^{J \cup \{0\}}$ dado por la desigualdad bilineal $x_J^t y_J - x_0 - y_0 \leq 0$. Un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^{J \cup \{0\}}$ es θ -cerrado si y sólo si el vector $(0_J, 1) \in REC(P)$ y $(0_J, -1) \notin REC(P)$. Las caras de P^θ corresponden a las caras de P cuyo cono de recesión no contienen a $(0_J, 1)$. Las caras de $REC(P^\theta)$ corresponden a las caras de P cuyo cono de recesión si contienen a $(0_J, 1)$. Se puede considerar a esta polaridad como una técnica de homogeneización para poder trabajar con desigualdades con lado derecho 0 y conos en vez de poliedros. Cualquier poliedro arbitrario en \mathbb{R}^J puede ser considerado como la proyección en \mathbb{R}^J de un poliedro θ -cerrado en $\mathbb{R}^{J \cup \{0\}}$.

2.2. Definiciones y notación

Definición 2.1. Para J y K dos conjuntos finitos no-vacíos, definimos una relación bilineal general $\Omega \subseteq \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^K$ por

$$(x, y) \in \Omega \text{ si y sólo si } x^t W y + x^t u + v^t y \leq \alpha$$

donde $W \in \mathbb{R}^{J \times K}, u \in \mathbb{R}^J, v \in \mathbb{R}^K$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias dadas.

El Ω -polar de $P \subseteq \mathbb{R}^J$, $P^\Omega \equiv \{y \in \mathbb{R}^K : (x, y) \in \Omega \quad \forall x \in P\}$ es entonces el conjunto de todos los $y \in \mathbb{R}^K$ tal que $x^t W y + x^t u + v^t y \leq \alpha$ es una desigualdad válida para P .

2.3. El Ω -polar de $C(S_M, T_N)$

Un sistema de desigualdades que define el Ω -polar de un poliedro dado por un conjunto generador finito es un resultado inmediato de 1.36

Teorema 2.2. *El Ω -polar de un poliedro $P \equiv C(S_M, T_N)$ es \mathbb{R}^K si $P = \emptyset$ sino*

$$P(\Omega; S_M, T_N) \equiv \left\{ y \in \mathbb{R}^K : \begin{array}{l} S_M W y + S_M u + v^t y \leq \alpha_M \\ T_N W y + T_N u \leq 0_N \end{array} \right\}.$$

La función Ω -polar, $\rho(\Omega)$ es, según 1.10, una biyección que invierte el orden por inclusión entre los subconjuntos Ω -cerrados de \mathbb{R}^J y los subconjuntos Ω -cerrados de \mathbb{R}^K . Por 2.2 y el Teorema Fundamental de Poliedros, 1.43, esta biyección envía cada poliedro sobre un poliedro, entonces concluimos:

Observación 2.3. La función Ω -polar, $\rho(\Omega)$ es una biyección que invierte el orden por inclusión entre los poliedros Ω -cerrados de \mathbb{R}^J y los poliedros Ω -cerrados de \mathbb{R}^K .

Esto quiere decir que podemos hacer más fuerte la Proposición 1.9 a

Proposición 2.4. *Un poliedro P es Ω -cerrado si y sólo si P es el Ω -polar de un poliedro*

y entonces tenemos:

Teorema 2.5. Caracterización de poliedros Ω -cerrados de \mathbb{R}^K *Un poliedro $Q \subseteq \mathbb{R}^K$ es Ω -cerrado si y sólo si $Q = \mathbb{R}^K$ o existe conjuntos finitos $M \neq \emptyset$ y N con matrices $S_M \in \mathbb{R}^{M \times J}$ y $T_N \in \mathbb{R}^{N \times J}$ tal que $Q = P(\Omega; S_M, T_N)$.*

2.4. La Ω -clausura de $C(S_M, T_N)$

Para poder determinar y especificar un sistema generador para la Ω -clausura de $C(S_M, T_N) \neq \emptyset$; es necesario definir varios conjuntos determinados por la relación y clasificar las posibles relaciones bilineales en términos de ellos. Para las demostraciones de los resultados en ésta y las próximas secciones, ver [25] o [8].

2.4.1. Conjuntos relacionados con Ω :

1. $X_\Omega \equiv \{x \in \mathbb{R}^J : x^t W + v = 0_K\}$,
2. $Y_\Omega \equiv \{y \in \mathbb{R}^K : W y + u = 0_J\}$,
3. $X_\Omega^0 \equiv \{x \in \mathbb{R}^J : x^t W = 0_K\}$, el espacio de W -equidad,
4. $X_\Omega^1 \equiv \{x \in \mathbb{R}^J : x^t W = 0_K, x^t u \leq 0\}$,
5. $X_\Omega^2 \equiv \{x \in \mathbb{R}^J : x^t W = 0_K, x^t u > 0\}$,
6. $X_\Omega^3 \equiv \{x \in X_\Omega : x^t u \geq \alpha\}$ y
7. $X_\Omega^4 \equiv \{x \in X_\Omega : x^t u > \alpha\}$.

Observación 2.6. $X_\Omega \neq \emptyset$ si y sólo si el vector v pertenece al espacio vectorial generado por las filas de W .

Observación 2.7. $Y_\Omega \neq \emptyset$ si y sólo si el vector u pertenece al espacio vectorial generado por las columnas de W .

Nótese además si $x_o \in X_\Omega$, entonces $x_o^t W y + x_o^t u + v^t y \leq \alpha$ reduce a $x_o^t u \leq \alpha$. Los dos conjuntos X_Ω y Y_Ω y el valor de $\alpha - x_o^t u$ para $x_o \in X_\Omega$ son críticos en determinar el Ω -polar de $P(\Omega; S_M, T_N)$.

Lema 2.8. Si $Y_\Omega \neq \emptyset$, entonces $x^t u = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^J$ que satisface $x^t W = 0$.

Lema 2.9. Si $X_\Omega \neq \emptyset$ y $Y_\Omega \neq \emptyset$ entonces $x^t u = v^t y \quad \forall x \in \mathbb{R}^J$ y $y \in \mathbb{R}^K$.

Lema 2.10. Si $X_\Omega \neq \emptyset$ y $Y_\Omega \neq \emptyset$ entonces para cualquier $\beta \in \mathbb{R}$ existe $x_o \in X_\Omega$ tal que $x_o^t u = \beta$.

Cuando $X_\Omega \neq \emptyset$, escojamos cualquier punto $S_0^t \in \mathbb{R}^J$ sujeto a la condición que $S_0 u = \alpha$ cuando $Y_\Omega = \emptyset$. Llamamos a S_0 un X_Ω origen y denotamos el número $\alpha - S_0 u$ por $i(X_\Omega)$. Los lemas 2.9 y 2.10 aseguran que $i(X_\Omega)$ es una constante bien definida cuando $X_\Omega \neq \emptyset$.

Observación 2.11. $i(X_\Omega) \neq 0$ solo si $X_\Omega \neq \emptyset$ y $Y_\Omega \neq \emptyset$;

Observación 2.12. $X_\Omega^4 = \{S_0\} + X_\Omega^2$ para S_0 cualquier X_Ω origen.

Observación 2.13. $Y_\Omega \neq \emptyset$ si y sólo si $X_\Omega^2 = \emptyset$ y $X_\Omega^1 = X_\Omega^0$.

Los dos resultados siguientes son ejemplos ilustrativos de como estos conjuntos se involucran en la caracterizaciones de Ω -polar y Ω -clausura.

Observación 2.14. Si $REC(P) \cap X_\Omega^2 \neq \emptyset$ para algún $P \subseteq \mathbb{R}^J$ entonces $P^\Omega = \emptyset$ y $P^{\Omega\Omega} = \mathbb{R}^J$;

Observación 2.15. Si $x^o \in B^\Omega$ para algún $B \subseteq \mathbb{R}^K$, entonces $\{x^o\} + X_\Omega^1 \subseteq B^\Omega$.

2.4.2. Clasificación de relaciones Ω

El cuadro siguiente resume muchos de los resultados que acabamos de presentar, clasificando las desigualdades bilineales Ω en forma exhaustiva. Las columnas del dos al cuatro dan la clasificación y las demás columnas especifican el contenido particular de cada conjunto según la clasificación. Si una posición está en blanco quiere decir que el conjunto es según su definición en 2.4.1.

Teorema 2.16. Ω -clausura de $C(S_M, T_N)$

Sean $M \neq \emptyset$ (para que $C(S_M, T_N) \neq \emptyset$), N, L conjuntos finitos tal que $0 \notin M$. Sean

- a) $S_{M \cup \{0\}} \in \mathbb{R}^{(M \cup \{0\}) \times J}$ y $T_{N \cup M \cup L} \in \mathbb{R}^{(N \cup M \cup L) \times J}$ donde S_0 es un X_Ω origen si $X_\Omega \neq \emptyset$;
- b) $T_M = S_M - (S_0)_M$, la matriz obtenida por restar S_0 de cada fila de S_M ; y
- c) T_L es tal que $CONE(T_L) = X_\Omega^1$.

TIPO	X_Ω	Y_Ω	$i(X_\Omega)$	X_Ω^1	X_Ω^2	X_Ω^3	X_Ω^4
1	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$	> 0	X_Ω^0	\emptyset	\emptyset	\emptyset
2	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$	< 0	X_Ω^0	\emptyset	X_Ω	X_Ω
3	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$	$= 0$	X_Ω^0	\emptyset	X_Ω	X_Ω
4	$\neq \emptyset$	\emptyset	$= 0$				
5	\emptyset	$\neq \emptyset$	-	X_Ω^0	\emptyset	\emptyset	\emptyset
6	\emptyset	\emptyset	-			\emptyset	\emptyset

Cuadro 2.1: Clasificación de Relaciones Ω

La Ω -clausura de $C(S_M, T_N)$ es, según su tipo

TIPO 1: $C(S_{M \cup \{0\}}, T_{N \cup L})$;

TIPO 2: $\begin{cases} C(S_M, T_{NUM \cup L}) & \text{si } C(S_M, T_N) \cap X_\Omega \neq \emptyset, \\ \mathbb{R}^J & \text{en otro caso;} \end{cases}$

TIPO 3: $C(S_{\{0\}}, T_{NUM \cup L})$;

TIPO 4: $\begin{cases} C(S_{\{0\}}, T_{NUM \cup L}) & \text{si } CONE(T_N) \cap X_\Omega^2 \neq \emptyset \text{ y} \\ & C(S_M, T_N) \cap X_\Omega^4 \neq \emptyset, \\ \mathbb{R}^J & \text{en otro caso;} \end{cases}$

TIPO 5: $C(S_M, T_{N \cup L})$;

TIPO 6: $\begin{cases} C(S_M, T_{N \cup L}) & \text{si } CONE(T_N) \cap X_\Omega^2 \neq \emptyset, \\ \mathbb{R}^J & \text{en otro caso.} \end{cases}$

2.5. Caracterizaciones de poliedros Ω -cerrados

Ya que un poliedro P es Ω -cerrado si y sólo si $P = P^{\Omega\Omega}$ podemos derivar de 3.3.13 una caracterización de poliedros Ω -cerrado en \mathbb{R}^J .

Teorema 2.17. *Caracterización de poliedros Ω -cerrados*

1. \mathbb{R}^J es Ω -cerrado.
2. El poliedro vacío es Ω -cerrado si y sólo si $i(X_\Omega) < 0$ o $X_\Omega = \emptyset$.
3. Sea $P \subseteq \mathbb{R}^J$, $P \neq \emptyset$ y S_0 un X_Ω origen en el caso que $X_\Omega \neq \emptyset$. Entonces P es Ω -cerrado si y sólo si

TIPO1: $X_\Omega \subseteq P$ (o equivalente, $S_0 \in P$, $X_\Omega^1 \subseteq REC(P)$)

TIPO2: $P \subseteq \{S_0\} + REC(P)$, $X_\Omega^1 \subseteq REC(P)$, $P \cap X_\Omega = \emptyset$

TIPO3: $P = \{S_0\} + REC(P)$, $X_\Omega \subseteq REC(P)$

TIPO4: $P = \{S_0\} + REC(P)$, $X_\Omega^1 \subseteq REC(P)$, $REC(P) \cap X_\Omega^2 = \emptyset$

TIPO5: $X_\Omega^1 \subseteq REC(P)$

TIPO6: $X_\Omega^1 \subseteq REC(P)$, $REC(P) \cap X_\Omega^2 = \emptyset$

Una buena manera de ilustrar este teorema es especializarlo para cada uno de las seis relaciones prototipo dadas en la introducción 3.1. Primeramente vemos las propiedades que distinguen los tipos de polaridad.

<i>Tipo</i>	Ω	<i>Relación</i>	X_Ω	Y_Ω	$i(X_\Omega)$
1	ω	$xy \leq 1$	$\{0_J\}$	$\{0_J\}$	1
2	β	$xy \geq 1$	$\{0_J\}$	$\{0_J\}$	-1
3	γ	$xy \geq 0$	$\{0_J\}$	$\{0_J\}$	0
4	ν	$x_J y \leq x_0$	$\{(0_J, x_0)\}$	\emptyset	0
5	δ	$xy_J \leq y_0$	\emptyset	$\{(0_J, y_0)\}$	-
6	θ	$x_J y_J \leq x_0 + y_0$	\emptyset	\emptyset	-

Cuadro 2.2: Características de prototipos de polaridades

Vemos en el cuadro 2.3 para cada prototipo, la caracterización de estar cerrado para la polaridad.

Tipo	Ω	Relación	X_{Ω}^1	X_{Ω}^2	Cerrado sii
1	ω	$xy \leq 1$	$\{0_J\}$	\emptyset	$0_J \in P$
2	β	$xy \geq 1$	$\{0_J\}$	\emptyset	$0_J \notin P$ $P \subseteq REC(P)$
3	γ	$xy \geq 0$	$\{0_J\}$	\emptyset	$P = REC(P)$
4	ν	$x_J y \leq x_0$	$\{(0_J, x_0)\}$ $x_0 \geq 0$	$\{(0_J, x_0)\}$ $x_0 < 0$	$P = REC(P)$ $(0_J, 1) \in P$ $(0_j, -1) \notin P$
5	δ	$xy_J \leq y_0$	$\{0_J\}$	\emptyset	todo P
6	θ	$x_J y_J \leq x_0 + y_0$	$\{(0_J, x_0)\}$ $x_0 \geq 0$	$\{(0_J, x_0)\}$ $x_0 < 0$	$(0_J, 1) \in REC(P)$ $(0_j, -1) \notin REC(P)$

Cuadro 2.3: Caracterización de Ω -cerrados

Capítulo 3

Análisis Envolvente de Datos (DEA)

3.1. Historia y Conceptos

Este capítulo tiene como base el buen artículo de Juan Aparicio, [3], titulado *Una Introducción al Análisis Envolvente de Datos*. El contenido ha sido ampliado mostrando los diferentes modelos clásicos en formas alternativas preparando el camino para presentar el modelo general en el capítulo siguiente e incluyendo algunos modelos que han surgido desde 2007 cuando Aparicio escribió su artículo. Veremos que los modelos radiales y aditivos de DEA son aplicaciones de la teoría de programación lineal multi-objetivo visto en sección 1.3 de capítulo 1 mientras que los enhanced Russell measures [] y los modelos SBM de Tone [] no pueden considerarse, de primera vista, como problemas de programación lineal multi-objetivo.

El DEA es una importante y altamente fructífera técnica de Investigación Operativa centrada en la medición y análisis de la eficiencia con que se producen bienes y se proporcionan servicios. La naturaleza de las actividades de producción susceptibles de estudio mediante esta técnica varía ampliamente: desde las industrias manufactureras de todo tipo a entidades sin ánimo de lucro dedicadas a proporcionar diversos servicios tanto públicos como privados. En este contexto, al agente objetivo de la medición de la eficiencia se le suele denominar DMU (Decision Making Unit), con el propósito de enfatizar su grado de independencia a la hora de modificar sus niveles de insumo y producción. La historia del DEA comenzó con la tesis de Edwardo Rhodes, en la Carnegie Me-

llon University en Pittsburgh, dirigida por W. W. Cooper. Rhodes trabajaba en la evaluación de programas educacionales para estudiantes desaventajados que se aplicaban en escuelas públicas de los Estados Unidos subvencionadas por el Gobierno Federal. En particular, se centraron en el programa conocido como Follow Through. Este proyecto del Departamento de Educación de los Estados Unidos pretendía aplicar los principios estadísticos del diseño de experimentos para realizar un estudio a nivel nacional sobre el comportamiento de un conjunto de escuelas. La base de datos utilizada era lo suficientemente grande como para que problemas que se presentan con cierta frecuencia, tales como los grados de libertad, no representaran un serio inconveniente en el análisis, a pesar del elevado número de variables (inputs y outputs) involucradas. Sin embargo, la aplicación de las técnicas clásicas de carácter estadístico o econométrico condujeron a resultados poco satisfactorios mientras que, en contraposición, el DEA se reveló como una herramienta de enorme potencial. La parte más substancial del conjunto de fundamentos teóricos en los que se sustentó la tesis de Rhodes vieron la luz en un famoso artículo publicado en 1978 por Abraham Charnes, William W. Cooper y Eduardo Rhodes con el título de *Measuring the efficiency of decision making units* en *European Journal of Operational Research*, [14]. Anteriormente al trabajo de Charnes, Cooper y Rhodes, fue Farrell con su artículo *The Measurement of Productive Efficiency* (publicado en 1957 por la revista *Journal of the Royal Statistical Society*), [21] el autor más influyente en temas relacionados con la medición de la eficiencia y la productividad. Farrell propuso una medida de la eficiencia de una empresa dividida en dos componentes: eficiencia técnica y eficiencia de asignación. Éstas se combinan en una medida única de eficiencia global: la denominada eficiencia económica. No obstante, para ser capaces de calcular una medida de eficiencia es necesario conocer previamente la forma explícita de la función de producción. Dado que, en la práctica, la frontera de producción nunca es conocida, Farrell sugirió que esta función podría ser estimada a partir de una muestra de datos usando, alternativamente, una tecnología no paramétrica lineal a trozos, o bien, una función de producción paramétrica. Estas ideas condujeron, décadas más tarde, a dos metodologías claramente diferenciadas: el DEA y las fronteras estocásticas, respectivamente. Mientras que el DEA utiliza herramientas de la programación matemática, la aproximación a la medición de la eficiencia a través de fronteras estocásticas recurre a técnicas de carácter puramente estadístico/econométrico. Cabe destacar, desde un punto de vista histórico a la par que científico, otros esfuerzos fundacionales en la investigación y la medición de la eficiencia. En particular, nos estamos refiriendo a los trabajos de Koopmans

[28] y Debreu [19]. Koopmans adaptó algunas ideas generales del economista Vilfredo Pareto para definir lo que se entendería por un vector de inputs y outputs técnicamente eficiente (no dominado). Mientras que Koopmans ofreció una definición y caracterización de la eficiencia técnica, fue Debreu el primero que propuso una medida del grado de ésta con su *coeficiente de utilización de recursos*. A partir de él, Debreu obtuvo medidas de la magnitud y el coste de la ineficiencia técnica, aunque sólo en su versión más débil. En cuanto a las aplicaciones del DEA, cabe señalar la extensa variedad de campos en los que ha sido utilizado con contrastado éxito. Inicialmente, las aplicaciones se desarrollaron en ámbitos relacionados con la educación. Pero desde entonces, han sido muchos los sectores en los que el DEA ha demostrado satisfactoriamente su aplicabilidad. Así, nos gustaría destacar las aplicaciones que se han desarrollado en el entorno sanitario (gestión de hospitales o farmacias), en el mundo financiero (estudio de entidades bancarias) e incluso en los análisis de economías municipales, estatales o nacionales. Pero éstas representan exclusivamente una exigua selección de las múltiples áreas en las que el DEA se ha aplicado con éxito. En [38] podemos encontrar una extensa relación de trabajos relacionados con las distintas aplicaciones del DEA. Huelga decir que el enfoque dado a este artículo refleja, en todo momento, los propios conocimientos e intereses del autor. En particular, la revisión que aquí se realiza tiene como objetivo dar a conocer la existencia de una herramienta cuya aplicación permite extraer inferencias relacionadas con la manera de operar de un conjunto de productores, entendido siempre este concepto en su sentido más amplio: una entidad que mediante ciertos inputs produce unos outputs.

3.1.1. Los modelos DEA más sencillos

El DEA ha supuesto un enfoque alternativo a los planteamientos paramétricos clásicos del análisis de fronteras de producción. A diferencia de estos, cuyo objetivo es el ajuste a unos datos mediante herramientas estadísticas de una forma funcional previamente especificada, en DEA se optimiza para cada DMU un modelo de programación matemática con el deseo de estimar una frontera lineal a trozos, determinada por las DMU eficientes en el sentido de Pareto; es decir, aquéllas no dominadas (ver la Figura 3.1, donde las DMU vienen representadas por puntos en el plano en el caso de un input $[X]$ y un output $[Y]$). A través del enfoque paramétrico, se asume que el modelo ajustado es aplicable a cada unidad en la muestra. Por el contrario, en DEA se optimiza de manera particular la medida de *lo bien o mal que opera* cada DMU. Lógicamente, al igual que en el planteamiento paramétrico, en DEA se utiliza toda la infor-

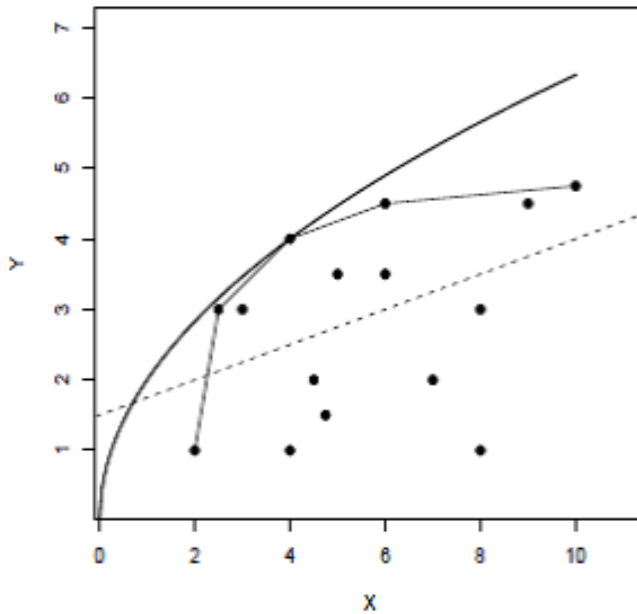


Figura 3.1: Figura 1: El DEA frente al enfoque paramétrico

mación que proporcionan los datos observados, en este caso recurriendo a los modelos de programación matemática.

Hasta la publicación del trabajo de Aigner y Chu (ver [1]), los economistas habían tenido que conformarse con la estimación de funciones *promedio*, al hacer uso de modelos de regresión dependientes de la especificación del término estocástico de error con media cero. En la Figura 3.1, la línea discontinua representaría una de tales funciones de producción. Tras el trabajo de estos autores, el término de error se restringió a la toma de valores no negativos. Un ejemplo de este tipo de enfoque viene representado en la Figura 3.1 por la línea curva que envuelve bajo ella a todos los datos observados. Ahora bien, en el planteamiento paramétrico tradicional se requiere de la especificación de una forma funcional particular, que relacione la variable dependiente con las variables independientes (por ejemplo, una función de producción Cobb-Douglas). Y no sólo eso, sino que además es necesario asumir algunas hipótesis relativas a la distribución probabilística del término de error y sobre la independencia de las

observaciones. De trabajos como el de Aigner y Chu, que se encuadrarían en lo que se conoce actualmente como *deterministic frontier*, al ser el error resultante únicamente de ineficiencias técnicas de la empresa, surgieron las fronteras de producción estocásticas. En estos modelos una nueva variable aleatoria es añadida al error, de forma tal que éste queda compuesto aditivamente por dos términos, uno referido a la ineficiencia técnica y otro dependiente de factores externos a la industria, tales como azar, lluvias, huelgas, errores de medida, etc. En DEA, por el contrario, no se requiere de ninguna hipótesis sobre la forma funcional, ni tampoco sobre la distribución de los errores. Simplemente se calcula una medida de eficiencia relativa a una frontera *extrema*, lineal a trozos, construida a partir de las observaciones muestrales, con la única condición de que todas las DMU queden envueltas por dicha frontera. Un ejemplo de tal frontera aparece también en la Figura 3.1.

De ahora en adelante supondremos que se desea evaluar la eficiencia de un conjunto de n DMU que consumen m inputs para producir s outputs. Concretamente, cada DMU_j ; $j = 1 \dots n$, que puede describirse por un par $(X_j ; Y_j)$, utiliza los inputs $X_j = (x_{1j} \dots x_{mj})$ para producir los outputs $Y_j = (y_{1j} \dots y_{sj})$. Asumiremos adicionalmente que tanto los inputs como los outputs son estrictamente positivos. Para entender cómo funcionan los modelos DEA necesitaremos introducir algunos conceptos básicos de la teoría económica de la producción. En este sentido, la medida de productividad comunmente utilizada (en el caso de $s = 1$ y $m = 1$), asume la forma de ratio del output producido por input consumido: $\frac{y}{x}$. Cuando esta medida es usada con el fin de evaluar el rendimiento, por ejemplo, de obreros o empleados, es interpretada como *output producido por hora de trabajo* u *output producido por trabajador*. Es obvio, por otro lado, que el gestor de una empresa o entidad cualquiera desea que dicho ratio sea lo más grande posible. La cuestión que dilucidar, cuando nos enfrentamos a situaciones más complejas en contextos de múltiples outputs y múltiples inputs, es cómo lograr expresar un término agregado para los outputs producidos y un término agregado para los inputs consumidos; de forma que en la expresión anterior estos sustituyan a numerador y denominador, respectivamente. En el caso del DEA, el output global se obtiene como combinación lineal de los outputs observados multiplicados por unos pesos. De manera similar se determina un nivel de input global para el caso de la agregación de los recursos. De esta forma una generalización de y/x quedaría como:

$$\frac{\sum_{r=1}^s y_r \mu_r}{\sum_{i=1}^m x_i \nu_i} \tag{3.1.1}$$

donde μ_r y ν_i son los pesos utilizados por DEA, que pueden ser interpretados

económicamente como precios por output producido y costes por input consumido, respectivamente. Dado que en ciertos contextos estos precios y costes son desconocidos, son poco fiables o se encuentran distorsionados por las regulaciones y condiciones del mercado, la filosofía DEA aboga por establecer como única restricción requerida para estos pesos, que sean no negativos. Esta libertad es usada para el cálculo de la medida de eficiencia para cada DMU de forma que sea maximizado el ratio del output global entre el input global. Más concretamente, el modelo seminal propuesto por Charnes et al. (1978), denominado CCR, para evaluar el grado de eficiencia de una DMU genérica, DMU_o, viene dado por:

$$\begin{aligned}
 \text{Máx } E_o &= \frac{\sum_{r=1}^s y_{ro} u_{ro}}{\sum_{i=1}^m x_{io} v_{io}} \\
 &\text{s.a.} \\
 \frac{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{ro}}{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{io}} &\leq 1 \quad \forall j \\
 u_{ro} &\geq 0 \quad \forall r \\
 v_{io} &\geq 0 \quad \forall i
 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Según las restricciones de 3.1.2, el ratio del output global frente al input global no debería nunca exceder la unidad para ninguna de las DMUs observadas. Además el objetivo del anterior programa se centra en la determinación de unos pesos (u_{ro}^*) y (v_{io}^*) que maximicen el ratio de la DMU_o, la DMU que está siendo evaluada. Obviamente, $0 < E_o^* \leq 1$.

3.1.2 es un modelo de programación fraccional lineal que puede ser transformado en un modelo de programación lineal, a través del cambio de variables propuesto por Charnes y Cooper (ver [13]).

$$\begin{aligned}
 \text{Máx } E_o &= \sum_{r=1}^s y_{ro} u_{ro} \\
 &\text{s.a.} \\
 \sum_{i=1}^m x_{io} v_{io} &= 1 \\
 \sum_{r=1}^s y_{rj} u_{ro} &\leq \sum_{i=1}^m x_{ij} v_{io} \quad \forall j \\
 u_{ro} &\geq 0 \quad \forall r \\
 v_{io} &\geq 0 \quad \forall i
 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

A 3.1.3 también se le conoce como el modelo DEA CCR en su versión de los multiplicadores. A partir de 3.1.3 obtenemos, de manera computacionalmente sencilla, el valor del score de eficiencia en 3.1.2, E_o^* de la DMUo.

Si denotamos por (E_o^*, v_o^*, u_o^*) a una de las soluciones óptimas de 3.1.3, entonces podremos identificar si la DMU evaluada es eficiente o no, haciendo uso de la siguiente definición:

Definición 3.1. La DMUo es eficiente si $E_o^* = 1$ y existe al menos una solución óptima (v_o^*, u_o^*) con $v_o^* > 0$ y $u_o^* > 0$. En cualquier otro caso, diremos que la DMUo es ineficiente.

Por otro lado, el problema dual asociado a 3.1.3 da lugar a la formulación del modelo DEA CCR orientado al input en su versión envolvente:

$$\begin{aligned}
 & \min \theta_o \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jo} \leq x_{io} \theta_o \\
 & \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_{jo} \geq y_{ro} \\
 & \lambda_{jo} \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Por el teorema fuerte de dualidad 1.49, tenemos que $E_o^* = \theta_o^*$. De este problema surge la interpretación del score de eficiencia DEA, como la máxima reducción equiproporcional de todos los inputs de la DMUo que es factible conseguir a la vista de los datos observados. Además, los términos $x_{io}^* = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jo}^*$ para los inputs y $y_{ro}^* = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_{jo}^*$ para los outputs permiten determinar unos *niveles objetivo*, llamados targets, situados sobre la frontera y que la DMUo debería imitar para convertirse en eficiente. En consecuencia, DEA es capaz de proporcionar al gestor de la DMUo su nivel de eficiencia relativo al conjunto muestral de DMU homogéneas observado, E_o^* , y unas guías de cómo lograr ser eficiente a través de los targets en inputs y outputs. Por supuesto que de la misma manera que se ha definido un modelo DEA CCR de *orientación input*, es decir, centrado en la reducción equiproporcional o *radial* de los inputs, puede definirse, análogamente, un modelo DEA CCR de *orientación output*. Con las posteriores repercusiones sobre eficiencia y targets que ello conlleva.

3.1.2. Representación Geométrica del modelo CCR

Antes de seguir con otros modelos clásicos de Análisis Envolvente de Datos (DEA) veremos otra manera de representar el modelo CCR enfatizando que consiste de un modelo de optimización en que la región factible es la intersección de dos poliedros: el primero llamado *el envolvente* y el segundo *el dominante*. Esta representación nos conducirá al modelo general presentado en el capítulo siguiente.

El envolvente CCR

Sea JI el conjunto de los índices de input y JO el conjunto de índices de las variables de output. Sea $J = JI \cup JO$. Sea E el conjunto de índices de los entes (DMU) involucrados en el análisis. Sea $M = E \cup \{0\}$ donde 0 es un índice para el punto origen. Sea $S_M \in \mathbb{R}^{M \times J}$ la matriz cuyas filas están definido como

$$S_m = \begin{cases} (X_m, Y_m) & : m \in E \\ 0_J, \text{el origen} & : m = 0 \end{cases}$$

es decir $S_m : m \in E$ es el vector de datos, tanto variables de input como de output, representando el ente DMU_m y S_0 un vector de 0s, el origen. En el modelo CCR, se debe considerar el origen como un punto en el envolvente ya que el modelo asume que cualquier múltiple no-negativo de un punto de datos también es un punto posible representando así retorno constante al escala (constant rts).

Sea $N = E \cup J$.

Sea $T_N \in \mathbb{R}^{N \times J}$ definido como

$$T_n = \begin{cases} S_e & : n \in E \\ e_j & : j \in JI \\ -e_j & : j \in JO \end{cases}$$

donde e_j es el vector unitario con 1 en posición j y los demás elementos igual a 0. La fila T_e para $e \in E$ sería entonces el vector fila representando la dirección desde el origen hacia el DMU_e y la fila T_j para $j \in J$ sería una dirección hacia puntos dominados, es decir, puntos que son menos eficientes porque utilizan más input o producen menos output. El poliedro $C(0_J, T_N)$ es un cono saliendo del origen 0_J generado por las direcciones hacia los puntos de datos y las direcciones hacia puntos dominados. Este cono se llama el envolvente o el Conjunto de Puntos Posibles (en inglés Production Possibility Set (PPS)) El hecho que cualquier múltiple de un punto de datos pertenece al envolvente hace que este

modelo representa el concepto de retorno a escala constante (Constant RTS). El hecho de que el envolvente incluye el origen y cada elemento de datos implica que el envolvente $C(0_J, T_N)$ es igual a $C(S_M, T_N)$ en que las filas de S_E son realmente redundantes.

El Dominante CCR

Definición 3.2. Para el modelo CCR, el dominante es una función del punto siendo analizado. Se dice que el modelo CCR es un modelo *radial* porque el dominante consiste de una sola dirección desde el punto siendo analizado hacia la frontera del envolvente. Sea $S_o = (X_o, Y_o)$ el vector de datos del ente (DMUo) siendo analizado. Sea $D = \{1\}$ un conjunto de un solo índice y $T_1 \equiv (-X_o, 0_{JO})$. Entonces

$$C(S_o, T_D) \equiv \{x \in \mathbb{R}^J : x = S_o + \beta T_1 : \beta \geq 0\}$$

es un poliedro, llamado el *poliedro dominante del modelo CCR orientado al input*, que consiste del punto S_o y los puntos representando entes que producen la misma cantidad de output pero utilizan proporcionalmente menos cantidad de input. Cuando $T_1 \equiv (0_{JI}, Y_o)$ se dice que el modelo es *orientado al output* porque va en la dirección que mantiene constante las variables de input y aumenta proporcionalmente las variables de output. Cuando se utiliza otra dirección hacia la frontera eficiente, el modelo se titula un *modelo de distancia direccional (directional distance model)*.

Ejercicio 3.3. Demostrar que el modelo envolvente CCR orientado al input, (3.1.4), es equivalente a:

$$\begin{aligned} &1 - \max \beta_1 \\ &s.a. \\ &\sum_{n \in N} \mu_n T_n = S_o + \beta_1 T_1 \\ &\mu_n \geq 0 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Asumiendo que el punto S_o pertenece al envolvente, se puede añadir la restricción $\beta_1 \geq 0$ sin perder generalidad entonces el lado derecho de la ecuación en 3.1.5 describe el dominante y se podría describir el modelo como... Buscar el punto en la intersección del envolvente y el dominante que mas T_D -domina a S_o según la orientación (dirección) seleccionado previamente. Claramente el valor óptimo de la función objetivo está entre 0 y 1, asumiendo que el punto S_o pertenece al envolvente. Simplificando la función objetivo a Maximizar β_1 el

valor óptimo va a ser no-positivo. Según el teorema 1.74, S_o es T_D -no-dominado o T_D -eficiente si y solo si el valor de la función objetivo, Maximizar $beta_1$, es 0. Sin embargo, el hecho de que un punto S_o es T_D -eficiente no implica que S_o es eficiente en el sentido de Pareto, Koopmans y Debreu que ven el problema de punto de vista multi-objetivo...maximizar cada variable de output y minimizar cada variable de input. Si \overline{W} es la matriz cuyas columnas representan tales funciones objetivos, según 1.76, para que un punto T_D -eficiente sea W -eficiente, hace falta que $\{x \in \mathbb{R} : x^t W \geq 0\} \subseteq C(0_J, T_D) \equiv \{x \in \mathbb{R} : x = \beta_D^t T_D, \beta_D \geq 0\}$. Veremos esto en mas detalle mas adelante en sección ??.

la matriz \overline{W} de transformación DEA

Definición 3.4. Sea $\overline{W} \in \mathbb{R}^{J \times J}$ una matriz diagonal con -1 en el diagonal para las variables de input y 1 en el diagonal para las variables de output. En otras palabras, la columna j de \overline{W} sería

$$\overline{W}_j = \begin{cases} -e_j & : j \in JI \\ e_j & : j \in JO \end{cases}$$

Nótese que las columnas de \overline{W} son precisamente las funciones objetivos a ser maximizadas según Koopmans y Debreu. Sin embargo \overline{W} puede ser considerado simplemente como una transformación lineal de los datos. Obviamente \overline{W} es invertible, siendo igual a su inversa. Se puede multiplicar la ecuación en 3.1.5 por cualquier matriz invertible a la derecha sin cambiar la región factible.

Ejercicio 3.5. Multiplicar la ecuación en 3.1.5 por \overline{W} y mostrar que el dual del programa lineal resultante es equivalente al modelo CCR en su versión de pesos o multiplicadores, 3.1.3.

Observación 3.6. Si el punto siendo analizado, S_o , no pertenecería al envolvente, sería posible que los dos poliedros no tuviera intersección evidenciado por el hecho que el programa lineal no tendría solución factible.

Se ha hecho un esfuerzo para mostrar en detalle que el modelo CCR es un caso especial del modelo general presentado en el capítulo siguiente. El detalle más importante en tal desarrollo ha sido primeramente representar el poliedro envolvente como un conjunto finitamente generado $C(S_M, T_N)$ donde $E \subseteq M$, es decir, las filas de S_M incluye todos los puntos de datos y en segundo lugar, determinar el poliedro dominante como otro conjunto finitamente generado. Esto no es difícil al visualizar el envolvente y el dominante en términos geométricos. En los siguientes modelos, vamos a limitar la discusión a describir en

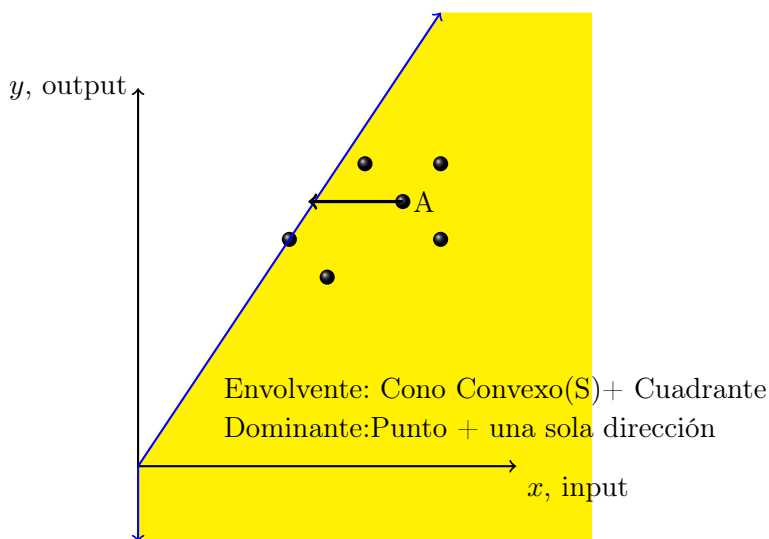


Figura 3.2: Modelo CCR Orientado al Input

cada caso los dos conjuntos finitamente generados que definen el envolvente y el dominante

3.1.3. El modelo DEA BCC [12]

El artículo seminal de Charnes, Cooper y Rhodes dio pie al desarrollo de posteriores modificaciones y mejoras del modelo CCR. Una famosa versión del modelo inicial es la conocida como modelo DEA BCC (de nuevo, dicho apelativo proviene del uso de las iniciales de sus autores: Banker, Charnes y Cooper [ver [12]]). En dicho artículo, se propone un enfoque alternativo de tipo axiomático para la evaluación de la eficiencia que permite además trabajar bajo la hipótesis de que las DMU observadas operan a escala variable. Aunque el grado de eficiencia de cada DMU se continuaría determinando a través de proyecciones equiproporcionales (radiales). Hemos visto hasta el momento que los modelos DEA CCR y BCC proporcionan medidas de eficiencia técnica en un sentido radial, y que sesgan el estudio exclusivamente a la medición de ineficiencia con respecto al lado de los inputs o al lado de los outputs.

Se puede escribir el modelo BCC en el espacio de los datos como 3.1.6 y como 3.1.9 en el espacio de los pesos donde:

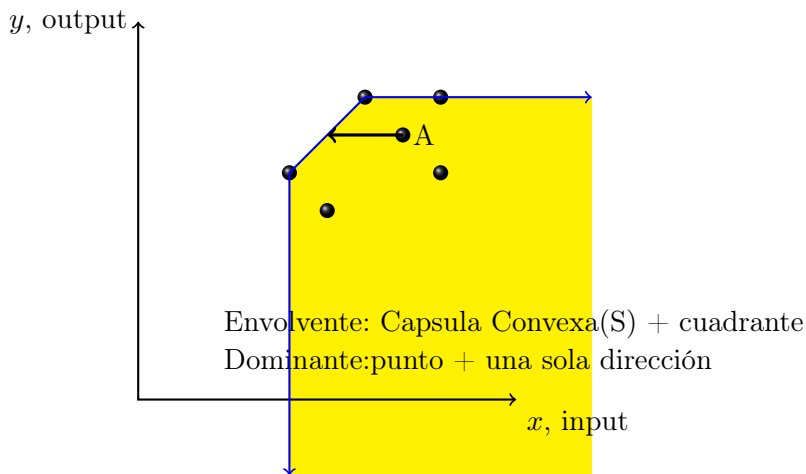


Figura 3.3: Modelo BCC orientado al input

$$\begin{aligned}
 M &= E, N = J = JI \cup JO \\
 S_M &= S_E \text{ los puntos de datos} \\
 T_n &= e_n : n \in JI \\
 T_n &= -e_n : n \in JO \\
 \bar{W} &= -T_N \\
 S_o &\text{ punto siendo analizado} \\
 D \text{ y } T_D &\text{ como en el modelo CCR}
 \end{aligned}$$

En Figura 3.3 se muestra el modelo BCC orientado al input cuando hay una sola variable de input y una sola de output. El modelo orientado al output es similar con la única dirección de dominancia hacia arriba.

3.1.4. Modelos radiales de otras direcciones (Directional Distance Models)

En vez de proporcionalmente reducir input solamente o aumentar output solamente, los modelos de distancia direccional son modelos radiales que buscan el punto de referencia en la frontera del envoltorio yendo en cualquier direc-

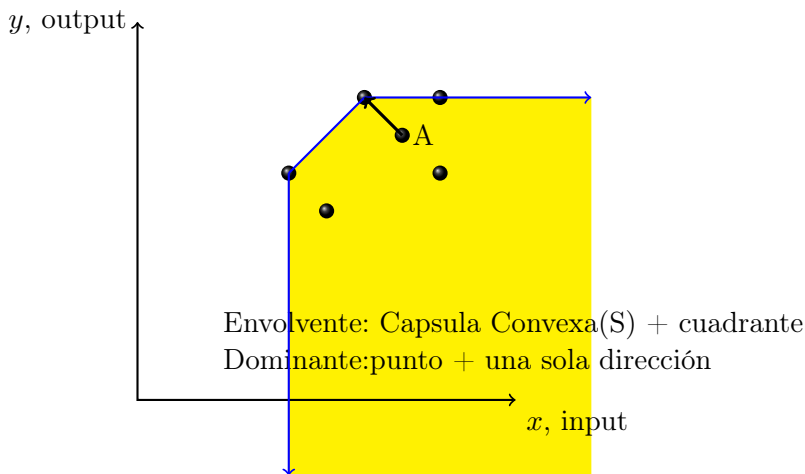


Figura 3.4: Modelo BCC orientado en otra dirección

ción previamente especificado por el analista, [22]. Tal dirección podría reducir input y aumentar output simultáneamente.

3.1.5. Modelos radiales con restricciones adicionales sobre los multiplicadores o pesos

Un modelo radial en su forma envolvente es equivalente a determinar el punto que más T_D -domina a S_o en la intersección del poliedro envolvente (S_M, T_N) y el poliedro dominante $C(S_o, T_D)$ donde T_D consiste de una sola fila o dirección. Se puede describir el modelo general como:

$$1 - \max \beta_1 p_1$$

s.a.

$$\lambda_M S_M + \mu_N T_N = S_o + \beta_1 T_1 \tag{3.1.6}$$

$$\lambda_M 1_M = 1 \tag{3.1.7}$$

$$\lambda_M \geq 0, \mu_N \geq 0, \beta_1 \geq 0$$

donde $p_1 > 0$ es un parámetro positivo.

Definiendo las variables duales del programa lineal 3.1.5 como $y = (y_j : j \in J)$ y la variable dual y_0 correspondiente a la restricción de convexidad, el programa

lineal dual en el espacio de los multiplicadores o pesos es:

$$\begin{aligned}
 & \max S_o \overline{W}y - y_0 \\
 & \text{s.a.} \\
 & S_M \overline{W}y - y_0 \leq 0 \\
 & T_N \overline{W}y \leq 0 \\
 & -T_1 \overline{W}y \leq -p_1
 \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Las variables en el espacio de los multiplicadores o pesos, $y_j : j \in J$, tienen interpretación económica como costos y/o precios unitarios. Hay situaciones en que los analistas desean incluir en el modelo restricciones sobre los pesos que reflejan la opinión de expertos y para que se modele mejor una situación específica. Cada restricción adicional de la forma $T_n W y \leq 0$ corresponde a incluir una dirección nueva T_n en la definición del envolvente. Cada restricción nueva de la forma $S_m W y - y_0 \leq 0$ corresponde a incluir un nuevo punto teórico S_m en el envolvente. Cada restricción nueva de la forma $-T_d W y \leq -p_d$ para un parámetro $p_d > 0$ corresponde a agregar una dirección nueva T_d al dominante y un nuevo término $+\beta_d p_d$ en la función objetivo.

Thomson et al, (ver por ejemplo [40]) introdujeron restricciones adicionales de esta forma llamadas *Assurance Regions*. Charnes et al [16] introdujeron restricciones llamadas *Cone/Ratio*.

3.1.6. Modelos radiales modificados para lograr eficiencia Koopmans/Debreu

Los modelos radiales DEA ya presentados determinan en cada caso si un punto es T_D -eficiente o no pero esto no garantiza que sea eficiente en el sentido de Koopmans y Debreu, es decir \overline{W} -eficiente para \overline{W} definido en 3.4.

Para asegurar que un punto T_D -eficiente S_o sea también W -eficiente, es necesario, según 1.76, que $\{x \in \mathbb{R} : x^t W \geq 0\} \subseteq C(0_J, T_D) \equiv \{x \in \mathbb{R} : x = \beta_D^t T_D, \beta_D \geq 0\}$. Para cumplir esta condición para la matriz diagonal \overline{W} , es suficiente incluir en T_D , las filas de \overline{W} . El programa lineal en espacio de los datos que implementa esta modificación sería:

$$1 - (\max \beta_1 + \epsilon \sum_{j \in J} \beta_j)$$

Sujeto a:

$$\lambda_M S_M + \mu_N T_N = S_o + \beta_1 T_1 + \sum_{j \in JO} \beta_j e_j - \sum_{j \in JI} \beta_j e_j \tag{3.1.9}$$

$$\lambda_M 1_M = 1 \tag{3.1.10}$$

$$\lambda_M \geq 0, \mu_N \geq 0, \beta_1 \geq 0, \beta_J \geq 0$$

El coeficiente de $\beta_j : j \in J$ en la función objetivo es un infinitesimal $\epsilon > 0$ para que no cambie la medida de eficiencia dada por el valor objetivo óptimo. El problema con hacer esto es que el punto de referencia o target del punto siendo analizado podría ser muy lejos del punto de referencia obtenida por el modelo original.

Es interesante considerar el efecto de las nuevas variables $\beta_j \in J$ en el modelo dual. Cada variable primal corresponde a una restricción dual que en este caso son $y_j \geq \epsilon : j \in J$. Es conveniente que las variables duales sean estrictamente mayor que cero porque una variable dual y_j igual a cero es equivalente a no tomar en cuenta, en el análisis, el input o output correspondiente a tal variable. En ese sentido, lograr eficiencia Koopmans-Debreu es equivalente a tomar en cuenta todos los datos. Hacer esta modificación ha sido una práctica común en la aplicación de los modelos radiales aunque así ya no debe llamarse un modelo radial porque el punto de referencia (target) puede ser muy lejos de la solución obtenida por el modelo radial original. Los valores de $\beta_j : j \in J$ no se toman en cuenta para calcular la medida de eficiencia pero si para determinar el punto de referencia. Por eso se desarrollaron los modelos aditivos descritos a continuación.

3.1.7. Modelos aditivos (No-radiales)

Ahora nos centraremos, en un nuevo modelo: el modelo aditivo, cuyos resultados si responden al concepto económico de optimalidad de Pareto tal y como ya había sido interpretado anteriormente por Koopmans. Dicho modelo, introducido en 1985 por Charnes, Cooper, Golany, Seiford y Stutz (ver [15]), incorpora en la medida de eficiencia ineficiencias de todo tipo; es decir, radiales y no radiales, tanto de origen input como output. La formulación del envolvente considerando retorno de escala variable es sencillamente la cápsula convexa de los datos, es decir, el envolvente es $C(S_M, T_N)$ con $M = E$ y $N = \emptyset$. El

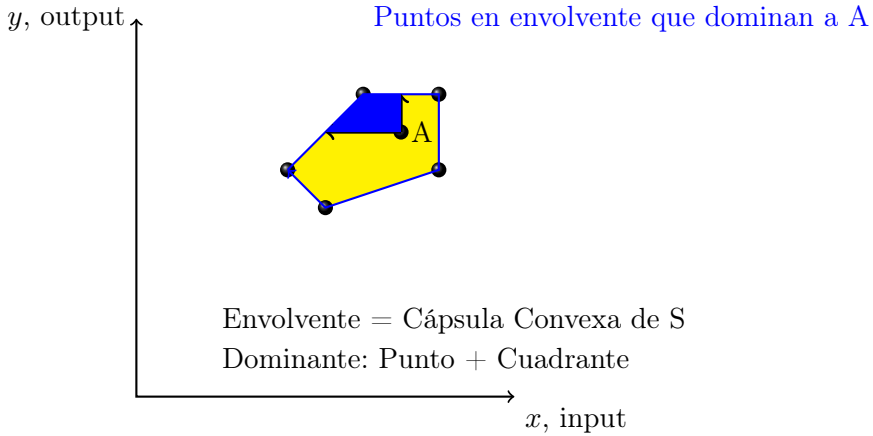


Figura 3.5: Modelo Aditivo

dominante para analizar el punto S_o sería $C(S_o, T_D)$ donde $T_D \equiv \overline{W}$ definida en 3.4. Esto quiere decir que el dominante es el cono trasladado con su origen en el punto S_o a ser analizado y las direcciones hacia puntos que dominan S_o son las direcciones hacia puntos que producen mas output y/o utilicen menos input.

El programa lineal que implementa el modelo en el formato del modelo general es:

Maximice $\beta_D 1_D$

Sujeto a:

$$\lambda_M S_M = S_o + \beta_D T_D \quad (3.1.11)$$

$$\lambda_M 1_M = 1 \quad (3.1.12)$$

$$\lambda_M \geq 0, \beta_D \geq 0$$

donde $M = E, D = J, T_D = \overline{W}$.

Hay otras versiones del modelo aditivo en que el envoltente incluye direcciones hacia puntos W -dominados, es decir, hacia puntos que utilicen menos input o producen mas output como en los modelos CCR y BCC pero el dominante siempre es el mismo cono trasladado $C(S_o, T_D)$.

Al resolver el modelo se maximiza la distancia L1 desde la DMUo hasta la frontera eficiente en la dirección noroeste. Concretamente, para una DMUo se

selecciona el punto sobre la frontera eficiente que maximiza la distancia L1 de entre todos aquellos que dominan, en el sentido de Pareto, a dicha DMU. La DMUo se considerará, entonces, eficiente si y sólo si el valor óptimo A_o es 0. Por tanto, dicha unidad será ineficiente si no se encuentra localizada sobre la frontera eficiente; esto es, si alguna variable β_j es no nula, lo que, por otro lado, nos indica las fuentes y la magnitud de la ineficiencia en los correspondientes inputs y outputs. Además, pueden obtenerse targets para la DMUo a través de $\lambda_M^* S_M = S_o + \beta_D^* T_D$ donde (λ_M^*, β_D^*) es la solución óptima. Es obvio que los valores de la función objetivo del modelo aditivo, 3.1.11, dependen de las unidades de medida de las variables (inputs/outputs). Por esta razón, sus mismos autores propusieron la siguiente normalización en la función objetivo:

$$\text{maximice } \beta_D \alpha_D$$

donde $\alpha_j \equiv 1/S_{oj} \quad \forall j \in D$

dando lugar a una nueva variante conocida como el modelo aditivo extendido.

3.2. El modelo SBM de Tone 2001

En los modelos DEA vistos hasta ahora se ha considerado una variedad de envolventes, hasta considerar envolventes arbitrarios de los datos, pero en todos los modelos vistos, el dominante ha sido un cono traslado punteado $C(S_o, T_D)$ con su origen en el punto siendo analizado S_o y su objetivo es encontrar el punto del envolvente que mas T_D -dominan a S_o según unos pesos dados p_D . El modelo SBM introducido por Tone en 2001 (ver [42]), inspirado en parte por medidas de Russell,[32], introduce un nuevo tipo de modelo en que el dominante es el mismo cono $C(S_o, T_D) = \{x \in \mathbb{R}^J : x^t = S_o + \sum_{j \in D} \beta_j T_j\}$ con sus direcciones T_j definidas por las filas de la matriz \overline{W} pero en que el cono está truncado por medio de una restricción de convexidad,

$$\beta_o S_o + \sum_{j \in JI} \beta_j = 1$$

donde JI son los índices de las variables de input. El dominante ya no sería un cono sino un poliedro que incluye el punto S_o siendo analizado y puntos correspondiendo a las variables de input y cuyo cono de recesión sería $\{x \in \mathbb{R}^J : x^t = S_o + \sum_{j \in JO} \beta_j T_j\}$ donde JO son las índices de las variables de output.

A pesar que el dominante no fuese un cono y no se puede usar la definición 1.70 de T_D -dominancia y Teorema 1.72, Tone demostró que para su modelo, eficiencia era equivalente a W -eficiencia y T_D -eficiencia.

Se han desarrollado modelos similares al modelo SBM que difieren mayormente en como definir los pesos p_D para usar en la función objetivo del modelo en forma envolvente y en restricciones adicionales. Por el ejemplo el modelo RAM (Range Adjusted Measure) (ver [17]) y el modelo BAM (Bound Adjusted Measure) (ver [18] y [33]).

El lector habrá notado que el énfasis de este libro no es en definir medidas precisas de eficiencia para DEA sino en desarrollar un modelo general de análisis envolvente de datos que sirva como base para modelos nuevos de DEA y para otros tipos de análisis y minería de datos.

3.3. Presente y futuro del DEA

En la anterior sección mostramos algunos de los modelos básicos en DEA a partir de los cuales se han desarrollado otros mucho más complejos, respondiendo a la dificultad de la naturaleza de las situaciones de producción abordadas. En esta sección, expondremos algunas de las vías abiertas de investigación más notables y prolíficas, siempre considerando el carácter más teórico del DEA. Las líneas de investigación que destacar serían las siguientes: Uno de los aspectos relacionados con la medición de la eficiencia que ha despertado un gran interés recientemente ha sido el desarrollo de las medidas de eficiencia generalizadas. El objetivo inicial de dichas medidas es el diseño de indicadores que tengan en cuenta todo tipo de ineficiencias (tanto radial como no radial) a la hora de evaluar a una DMU. Además, se intenta que estas medidas satisfagan ciertas propiedades deseables. Concretamente, algunas de las medidas que más repercusión han producido en los círculos económicos son: la medida de Russell (tanto orientada como no orientada) y la medida Enhanced Russell Graph (ver, por ejemplo, [32]). Los modelos DEA clásicos suelen producir los niveles de targets más alejados de la DMUo evaluada. Véase, por ejemplo, el caso del modelo aditivo donde la expresión de la distancia L1 es maximizada en lugar de minimizada. Este hecho ha motivado la aparición de diversos artículos orientados a la determinación de los targets *más cercanos* a la unidad que está siendo evaluada (ver, por ejemplo, [4] y [35]). Otro problema que ha suscitado un gran interés, sin lugar a dudas, ha sido el tema de la determinación de una clasificación de las DMU. Con este objetivo se ha desarrollado el concepto de *supereficiencia* (ver [2]), que permite discriminar entre DMU eficientes, y el concepto de common set of weights (ver [36] y citeRG1993), mediante el cual se restringe la libertad de los pesos DEA obligando a que el ratio de eficiencia de toda DMU se mida a través de los mismos pesos.

Otro aspecto que ha surgido en diferentes artículos durante los últimos años es la determinación de lo que se llaman *el global reference set* el cual es sencillamente el (S_M, T_N) -soporte de la cara minimal del envolvente $C(S_M, T_N)$ que contiene el conjunto de soluciones óptimas del programa lineal que implementa el modelo en forma del envolvente. Los métodos descritos en la sección 1.3.2 son una contribución al tema.

Desde hace bastante tiempo, prácticamente desde la misma concepción del DEA, se ha pretendido dotar a esta herramienta de cierto carácter estadístico-econométrico. En este sentido, cabe destacar los esfuerzos realizados en los últimos tiempos ligando la determinación de intervalos de confianza sobre los scores de eficiencia a la metodología bootstrap (ver [39]). Otra area de investigación muy activa es la de modelos DEA difusos en que se incorpora medidas de incertidumbre en los datos. El modelo general presentado en el próximo capítulo es capaz de modelar incertidumbre en una forma sencilla.

Varios autores han hecho esfuerzos de desarrollar modelos generales que incluyen como casos especiales algunos de los modelos ya presentados. Algunos ejemplos son:

1. Yu, Wei, Brouck 1996 [45]
2. Kleine 2004 [27]
3. Dulá 2009 [20]
4. Tone y Tsutsui 2010 [43]
5. Pastor, Lovell, Aparicio 2012 [34]
6. Mehdiloozad, Sahoo, Roshdi 2014 [30]

El capítulo próximo presenta uno más.

Capítulo 4

Programación Polar

4.1. Introducción

Las técnicas de análisis de datos descritas en este capítulo, titulado Programación Polar, fueron motivados por lo que vimos en el capítulo anterior sobre Análisis Envolverte de Datos, técnicas que relacionan cada punto de un conjunto finito de datos con la frontera de un envolvente poliédrico de los datos. Podría llamar este capítulo *Análisis Envolverte de Datos Generalizado* porque, no solamente se presenta un modelo general que incluye como casos particulares los modelos descritos en el capítulo anterior sino que siempre se trabaja con envolventes poliédricos de conjuntos finitos de datos. Muchos nuevos modelos para analizar eficiencia y productividad resultarían también como instancias particulares del modelo general pero la motivación principal para este estudio ha sido destacar sus bases teóricas en polaridades de poliedros y la teoría de dualidad de programación lineal y motivar su aplicación a explorar y conocer las características de un conjunto finito de datos arbitrario. El énfasis de aplicación pues está en la minería de datos y no solamente en el análisis de eficiencia y productividad que comúnmente se asocia con el sentido clásico del termino *Análisis Envolverte de Datos*.

El envolvente poliédrico mas pequeño de un conjunto finito de datos es la cápsula convexa de los datos, es decir, el conjunto de todas las combinaciones convexas de los datos. Veremos como usar técnicas de programación lineal para explorar y determinar características de las caras que forman la frontera de la cápsula convexa de los datos. Para cada cara explorado, conoceremos su soporte, es decir los puntos de datos en la cara, y también encontraremos una

desigualdad lineal valida para el envolvente que define la cara como los puntos del envolvente que satisface la desigualdad con igualdad.

Cualquier poliedro P que contienen todos los datos es un envolvente poliédrico de los datos y las técnicas aquí desarrolladas permiten trabajar con envolventes poliédricos *arbitrarios* del conjunto de datos y no solamente la cápsula convexa. Puede haber puntos teóricos y uno desea relacionar cada punto de datos real con las caras de un envolvente que incluye tales puntos teóricos. También puede haber direcciones hacia puntos que no tienen interés para el analista y al incluir tales direcciones en el cono de recesión del envolvente, se elimina porciones no interesantes de la frontera de la cápsula convexa. Modelos clásicos de análisis envolvente de datos como el modelo CCR y el modelo BCC, incluyen en el cono de recesión del envolvente las direcciones hacia puntos que utilizan mas recursos o producen menos resultados, es decir, hacia puntos menos eficientes que son dominados por otros puntos. El envolvente en ese contexto se llama **el conjunto de Producciones posibles**.

Dado un punto de datos particular, So , las técnicas de programación polar definen un segundo poliedro llamado *el dominante* que debe ser apuntada (su espacio de linealidad es el origen) que contiene So . Primero un entorno acotado convexo $Entorno(So)$ de So y en segundo lugar un cono arbitrario $Dom(So)$ apuntada de direcciones hacia puntos que si son de interés porque son mejores o dominan a los puntos en $Entorno(So)$ en algún sentido. El dominante es entonces la suma Minkowski de $Entorno(So)$ y $Dom(So)$ y puede ser expresado como un conjunto finitamente generado $C(S_{Bo}, T_D)$. Se desea determinar los puntos del envolvente, mas específicamente, puntos en la intersección del envolvente con el dominante, que mas $C(S_{Bo}, T_D)$ -dominan a So . Tales puntos van a estar en la frontera del envolvente. En el caso que no hay ningún punto que domina a So , se podría decir que So es un punto $C(S_{Bo}, T_D)$ -no-dominado o $C(S_{Bo}, T_D)$ -eficiente.

Veremos como los diferentes modelos clásicos de análisis envolvente de datos son casos particulares del modelo general. Los modelos radiales y los modelos aditivos tienen el $Entorno(So)$ igual al punto So pero los modelos SBM desarrollados por Tone y los modelos difusos tiene un $Entorno(So)$ mas amplio.

A continuación vemos el programa lineal y su dual que implementan estos conceptos de programación polar. La sección que sigue describe el programa lineal en términos geométricas: los datos, el envolvente y el dominante. Después veremos brevemente una aplicación sencilla de las técnicas para aproximar la cápsula convexa de un conjunto finito de datos.

4.2. Un Programa Lineal Base y su Dual para analizar un punto de datos

4.2.1. Parámetros y Variables

J : Conjunto finito de índices de las variables de datos

E : Conjunto finito de índices de los entes o puntos de datos

$C(S_M, T_N)$: El Envolvente donde:

$\{S_m : m \in M \supseteq E\}$: Puntos en \mathbb{R}^J que incluyen los puntos de datos

$\{T_n : n \in N\}$: Direcciones en \mathbb{R}^J hacia puntos dominados

S_o : Punto en \mathbb{R}^J a analizar

$\{T_d : d \in D\}$: Direcciones en \mathbb{R}^J hacia puntos que dominan a S_o

$\{p_d : d \in D\}$: Coeficientes positivos de peso

$C(S_{Bo}, T_D)$: El poliedro dominante donde:

$\{S_b : b \in Bo \supseteq \{o\}\}$: Puntos en \mathbb{R}^J que incluyen a S_o

Variables de Decision: $\lambda_m : m \in M, \mu_n : n \in N, \gamma_b : b \in Bo, \beta_d : d \in D$

4.2.2. Programa Lineal Espacio de Datos

$$\text{Maximice } z = \sum_{d \in D} p_d \beta_d \tag{4.2.1}$$

Sujeta a:

$$\sum_{m \in M} \lambda_m S_m + \sum_{n \in N} \mu_n T_n = \sum_{b \in Bo} \gamma_b S_b + \sum_{d \in D} \beta_d T_d \tag{4.2.2}$$

$$\sum_{m \in M} \lambda_m = 1 \tag{4.2.3}$$

$$\sum_{b \in Bo} \gamma_b = 1 \tag{4.2.4}$$

$$\lambda_m \geq 0 : m \in M$$

$$\mu_n \geq 0 : n \in N \tag{4.2.5}$$

$$\gamma_b \geq 0 : b \in Bo$$

$$\beta_d \geq 0 : d \in D$$

4.2.3. Programa Lineal dual en espacio polar

- Parametro Adicional: matriz invertible $W \in R^{J \times J}$
- Variables: $y_0, y_1, y_j : j \in J$
- Programa Lineal

$$\text{Minimice } y_0 + y_1 \quad (4.2.6)$$

Sujeta a:

$$S_m^t W y \leq y_0 : m \in M \quad (4.2.7)$$

$$T_n^t W y \leq 0 : n \in N \quad (4.2.8)$$

$$-S_b^t W y \leq y_1 : b \in B_o \quad (4.2.9)$$

$$-T_d^t W y \leq -p_d : d \in D \quad (4.2.10)$$

4.3. Interpretación geométrica del modelo general

Definición 4.1. La región factible del programa lineal 4.2.2 es la intersección de los dos poliedros, $P = C(S_M, T_N)$ llamado el **envolvente** y $C(S_{B_o}, T_D)$ llamada el **dominante**.

4.3.1. El Envolvente:

Por el teorema de doble representación de poliedros, sabemos que cualquier poliedro es un conjunto finitamente generado, es decir, $P = C(S_M, T_N)$ para algún $S_M \in \mathbb{R}^{M \times J}$ y $T_N \in \mathbb{R}^{N \times J}$. Si el conjunto de datos está representado como el conjunto de filas $S_e, e \in E$, de una matriz $S_E \in \mathbb{R}^{E \times J}$, sin pérdida de generalidad podemos representar un envolvente poliédrico arbitrario de los datos como $C(S_M, T_N)$ donde $M \supseteq E$ y T_N genera un cono de recesión arbitrario. Los puntos del envolvente suelen denominarse *Puntos Posibles* ya que en los modelos clásicos de Análisis Envolvente de Datos, el envolvente muchas veces está referido como el *Conjunto de Producciones Posibles*, o en inglés, *Production Possibility Set*. Los puntos S_m para $m \in M - E$ podrían representar entes no existentes físicamente pero que se consideran posibles teóricamente y se incluyen para compararlos con los entes reales.

Las filas de T_N representan direcciones que llevan desde un punto posible a otros puntos posibles. Cualquier punto posible mas una combinación no-negativa de las filas de T_N también sería posible.

Observación 4.2. El cono $C(0_J, T_N)$ puede ser considerado como un cono de dominancia cuyos elementos son direcciones hacia puntos T_N -dominados por otros puntos del envolvente. En casi todos los modelos clásicos, incluyendo los modelos CCR y BCC, la matrix T_N es una matrix en $\mathbb{R}^{J \times J}$, cuadrada diagonal y el cono generado es un cuadrante del espacio \mathbb{R}^J . Cada fila correspondiente a una variable de input in J tiene un 1 en el diagonal ya que esa dirección lleva a puntos que representan entes que usan mayor input. Cada fila correspondiente a una variable de output in J tiene un -1 en el diagonal ya que esa dirección lleva a puntos que representan entes que producen menos output. Estas direcciones resultan en que las variables duales en 4.2.3 sean no-negativas. Los modelos descritos en [?] incluyen otras direcciones fuera del cuadrante mencionado para que las variables duales en 4.2.3 tengan restricciones adicionales a las restricciones no-negativas.

4.3.2. El Dominante

Observación 4.3. Cuando el dominante es el cono traslado $C(S_o, T_D)$, es decir cuando $B_o = \{o\}$, el modelo 4.2.2 generaliza los modelos radiales y los modelos aditivos. Cuando B_o contiene puntos adicionales al punto S_o siendo analizado, se generaliza los modelos ERM (Enhanced Russell Measure) y SBM (Slacks Based Measure) de Tone además de modelos de datos difusos DEA.

Observación 4.4. El Cono hacia puntos que dominan: Para un punto de datos S_o y $T_D \in \mathbb{R}^{D \times J}$, D un conjunto finito de índices, el objetivo de programación polar es buscar la cara de la intersección del envolvente con el dominante que mas T_D -domina al punto de datos S_o . La medida de dominancia se defina en términos de pesos positivos, $\alpha_d > 0$, asociados con las direcciones $T_d, d \in D$.

Observación 4.5. El programa lineal 4.2.2 no tiene solución factible si y solo si la intersección del envolvente y el dominante es vacía. Si hay solución factible, hay dos condiciones para que el modelo sea acotado y tenga solución óptima. Primeramente, el espacio de linealidad del dominante debe ser solamente el origen 0_J (se dice que un poliedro así es punteado) y en segundo lugar, la intersección de los dos conos de dominancia involucrados, generados respectivamente por T_N y T_D , sea solamente el origen 0_J .

Definición 4.6. Un punto \bar{x} del envolvente, es (S_{B_o}, T_D) -no-dominado, es decir, (S_{B_o}, T_D) -eficiente si y solo si el valor óptima de 4.2.2 con $S_o = \bar{x}$ es O .

Observación 4.7. Se puede considerar la matriz W como una transformación lineal de los datos o de las variables duales. Si W es invertible, su introducción en el dual no afecta la solución del programa lineal primal pero si afecta la solución dual y suelen ser utilizada en aplicaciones como análisis de eficiencia y productividad (modelos de DEA) para facilitar la interpretación de las variables duales como precios o pesos de los insumos y productos. En todo caso, si (\bar{y}, \bar{y}_0) es una solución óptima dual, la desigualdad $x^t W \bar{y} \leq \bar{y}_0$ es una desigualdad válida del envolvente que define una cara del envolvente.

Ejercicio 4.8. Si las soluciones óptimas primal y dual son estrictamente complementarias entonces la desigualdad dada por la solución óptima dual define la cara minimal que contiene el conjunto de soluciones óptimas del primal.

Observación 4.9. Para una solución óptima específica, $(\bar{\lambda}_M, \bar{\mu}_N, \bar{\beta}_D)$ de 4.2.2, el punto $S_o + \sum_{d \in D} \bar{\beta}_d^t T_d = \bar{\lambda}_M^t S_M + \bar{\mu}_N^t T_N$ se llama un *punto de referencia para S_o en la frontera del envolvente* y los valores de las variables $\bar{\beta}_d : d \in D$, da una medida intuitiva de distancia desde el punto S_o hasta el punto de referencia. Por ejemplo, si las direcciones T_D son ortonormales (ortogonales y unitarios) entonces la suma de $\bar{\beta}_d : d \in D$ sería la distancia Tchebychev entre S_o y el punto de referencia. (AQUÍ SE PODRÍA HACER REFERENCIA AL USO DE PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS PARA COMPLEMENTAR EL ANÁLISIS)

Observación 4.10. La definición siguiente es una extensión de la definición de (S_M, T_N) -soporte de subconjuntos de $C(S_M, T_N)$ a subconjuntos de la región factible de 4.2.2, $C(S_M, T_N) \cap C(S_o, T_D)$.

Definición 4.11. El (S_M, T_N, T_D) soporte de un subconjunto F de la región factible del PL 4.2.2 es (H, I, K) donde:

$$\begin{aligned} H &= \{m \in M : \lambda_m \text{ puede ser } > 0 \text{ para generar algún } x \in F\} \\ I &= \{n \in N : \mu_n \text{ puede ser } > 0 \text{ para generar algún } x \in F\} \\ K &= \{d \in D : \beta_d \text{ puede ser } > 0 \text{ para generar algún } x \in F\} \end{aligned}$$

Ejercicio 4.12. El (S_M, T_N, T_D) -soporte de la cara de soluciones óptimas de 4.2.2 es igual al Conjunto de igualdad (Equality set) de un punto interior de la cara de soluciones óptimas del programa lineal dual 4.2.3 el cual es igual a los índices de las variables primales mayores de cero en soluciones estrictamente complementarias de 4.2.2 y 4.2.3

Observación 4.13. Un punto S_o factible para 4.2.2 es T_D -eficiente en el conjunto $C(S_M, T_N)$ si y solo si el (S_M, T_N, T_D) soporte de S_o , (H, I, K) , tiene $K = \emptyset$. En aplicaciones de DEA, las direcciones en T_D suelen incluir las negativas de direcciones en T_N para que un punto T_D -eficiente también sea T_N -eficiente.

Ejercicio 4.14. Si el (S_M, T_N, T_D) soporte de la cara de soluciones óptimas del PL 4.2.2 es (H, I, K) entonces (H, I) es el (S_M, T_N) -soporte de la cara minimal del envolvente que contiene la cara de soluciones óptimas de 4.2.2 y (o, K) es el (S_o, T_D) -soporte de la cara minimal de $C(S_o, T_D)$ que contiene la cara de soluciones óptimas de 4.2.2.

Ejercicio 4.15. Cualquier punto interior \bar{x} de la cara de soluciones óptimas de 4.2.2 es un punto interior de la cara minimal de $C(S_M, T_N)$ que contiene \bar{x} y también un punto interior de la cara minimal de $C(S_o, T_D)$ que contiene \bar{x}

Observación 4.16. En Análisis Envolvente de Datos clásico, se utiliza un punto interior de la cara minimal de $C(S_M, T_N)$ que contiene la cara de soluciones óptimas de 4.2.2 o equivalente su (S_M, T_N) -soporte para determinar el factor *retorno a escala*, (*rts*) del punto de referencia encontrado para S_o .

4.4. Envoltentes poliédricos Particulares

Algunos envoltentes poliédricos surgen en forma natural, viéndose en los modelos clásicos de Análisis Envolvente de Datos y también en Ω -clausuras del conjunto de datos como visto en Capítulo 3. Algunos ejemplos se encuentran a continuación:

1. El envolvente poliédrico más pequeño de los datos sería cuando $M = E$ y $N = \emptyset$. En este caso, el envolvente, $C(S_E, \emptyset)$ sería la cápsula convexa de los datos. Los modelos aditivos de Análisis Envolvente de datos trabajan con este tipo de envolvente el cual es independiente de cualquier origen. Este envolvente es la Ω -clausura de S_E donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^{J \cup \{0\}}$ se define por la desigualdad $x^t W y \leq y_0$, $W \in \mathbb{R}^{J \times J}$ invertible.
2. $S_M = S_{E \cup \{o\}}$, para algún S_o considerado como un punto origen. La porción de la frontera de $CONV(S_E)$ entre S_o y $CONV(S_E)$ se elimina y la frontera restante consiste de los puntos de $CONV(S_E)$ mas lejanos de S_o . Este envolvente es la Ω -clausura de S_E donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^J$ se define por la desigualdad $x^t W y - S_o^t y \leq 1$, $W \in \mathbb{R}^{J \times J}$ invertible.

3. $S_M = S_E$, $N = E$ y $T_e = (S_e - S_o) \forall e \in E$ para algún S_o que no pertenece a la cápsula convexa de S_E . En este caso S_o podría considerarse como un punto *utopia* porque la porción de la frontera de $CONV(S_E)$ que pertenece a la frontera de este envolvente sería la frontera mas cercana al punto S_o . Este envolvente es la Ω -clausura de S_E donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^J$ está definida por la desigualdad $x^t W y - S_o^t y \leq -1$, $W \in \mathbb{R}^{J \times J}$ invertible.
4. $S_M = S_{E \cup \{o\}}$, $N = E$ y $T_e = (S_e - S_o) \forall e \in E$ para algún S_o que no pertenece a la cápsula convexa de S_E . Este envolvente es igual a $C(S_o, T_E)$, un cono trasladado con origen en S_o y es la Ω -clausura de S_E donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^J$ está definida por la desigualdad $x^t W y - S_o^t y \leq 0$, $W \in \mathbb{R}^{J \times J}$ invertible. Notase que este envolvente es la unión de los tres envolventes anteriores.
5. El envolvente es $C(S_M, T_N \cup L)$ donde S_M y T_N están definidos como en cualquier de los 4 envolventes anteriores y T_L es tal que $CONE(T_L) \equiv \{x \in \mathbb{R}^J : x^t B \leq 0\}$ donde $B \in \mathbb{R}^{J \times K}$ es una matriz cuyas columnas pueden ser considerados como funciones objetivos y el envolvente incluye los puntos B -dominados por $C(S_M, T_N)$. Los modelos CCR y BCC usan envolventes de este tipo para B una matriz diagonal con 1 en el diagonal para cada variable de output y -1 en el diagonal para cada variable de input. T_L sería el negativo de B .

4.5. El Dominante, política de frontera

Habiendo escogido o definido un envolvente poliédrico $C(S_M, T_N)$ de los datos que se han de usar en un análisis, para cada punto S_o que se desea analizar, hay que definir el poliedro dominante $C(S_{B_o}, T_D)$ y unos pesos α_D para poder maximizar $\beta_D^t \alpha_D$ para puntos en la intersección del envolvente y el dominante. Si hay una intersección no-trivial (es decir distinto a 0_J) de los conos generados por T_N y T_D respectivamente, entonces el programa polar sería no-acotado. Si no, cualquier punto en la cara de soluciones óptimas del programa polar descrito sería un punto de referencia para S_o . En particular, cada uno de los puntos de datos en el (S_M, T_N, T_D) soporte de la cara de soluciones óptimas serían puntos de referencia para S_o y los entes asociados con estos puntos de datos serviría para benchmarking. Uno podría calcular la distancia entre S_o y cada uno de tales puntos de referencia según alguna métrica conveniente para escoger el mas cercano o el mas lejano según el criterio deseado.

4.5.1. Modelos Radiales: una sola dirección desde o hacia un origen

Cuando el cono generado por T_D consiste de una sola dirección para cada punto S_o siendo analizado, se dice que el modelo es de tipo **radial**. De particular utilidad son modelos radiales en que las direcciones utilizadas son desde o hacia un punto fijo S_f . Si las direcciones son $S_o - S_f$ para cada S_o , se podría referirse al punto S_f como un punto *nadir* ya que los puntos de referencia serían lo mas lejos posible en línea recta desde S_f hasta la frontera del envolvente. Si las direcciones son $S_f - S_o$ para cada S_o y S_f no pertenece al envolvente, se podría referirse al punto S_o como un punto *utopia* ya que los puntos de referencia serían lo mas cercano posible a S_f en línea recta desde S_o hasta la frontera del envolvente. En la medida que S_f se aleja del envolvente, las direcciones no dependen tanto de S_o y en el caso extremo, la dirección usada para cada S_o sería sencillamente S_f o $-S_f$.

4.6. Aproximación de la Cápsula Convexa de los datos

Una aplicación específica del uso de direcciones radiales es para aproximar la cápsula convexa de un conjunto de datos. Sea el envolvente igual a $C(S_E, \emptyset)$ y el origen S_f igual al barycenter (promedio) de todos los puntos de datos. Para cada punto de datos $S_o = S_m, m \in E$, resuelva el programa lineal dos veces. Primeramente con T_D igual al vector $S_m - S_f$ y después igual a $S_f - S_m$. Los dos puntos de referencia en la frontera de $C(S_E, \emptyset)$ encontradas definen una cuerda del envolvente que pasa por el centro S_f . Se puede calcular la distancia Euclidiano u otra medida entre los dos puntos de referencia para saber la longitud de tal cuerda. El soporte de cada punto de referencia describe el soporte de la cara minimal que contiene el punto y las variables duales provee una desigualdad lineal que define la cara. Repitiendo estos cálculos por cada punto de datos, $S_m : M \in E$, se obtiene $2|E|$ desigualdades lineales (no necesariamente todos diferentes) que deben dar una buena aproximación a la cápsula convexa de los datos. También las longitudes de las cuerdas obtenidas dan mucha información sobre la dispersión de los datos. Los soportes obtenidas de caras de la frontera ofrece información para uso en *benchmarking* ya que para cada punto de datos, el soporte de uno de los dos puntos de referencia da el soporte de una de las caras mas cercanas al punto y el soporte del otro punto de referencia da el soporte de una de las caras mas lejanas del punto.

La técnica descrita también sirve para envolventes poliédricos arbitrarios, aún envolventes con conos de recesión. Si el programa lineal es no-acotada esto indica que la dirección usada está en el cono de recesión del envolvente y la cuerda es infinita. Cuando el programa lineal es acotada, tenemos la información de la cara que contiene el punto de referencia obtenido. Al resolver los dos programas lineales para cada punto de datos se obtiene un conjunto de desigualdades lineales que da una buena aproximación del envolvente. Los soportes de los puntos de referencia obtenidos también sirven para *benchmarking*.

4.7. Extensión a Modelos Difusos

Varios autores han diseñado modelos de datos difusos para el análisis envolvente de datos incluyendo Aquí presentamos un modelo de datos difusos para programación polar, el cual generaliza muchos de los modelos difusos de DEA.

4.7.1. Parámetros y Variables: Difuso

Conjunto finito de índices	:	J
Conjunto de datos en R^J	:	$\{S_m : m \in M\}$
Puntos que definen entorno difuso	:	$\{F_b : b \in B\}$
Tamaño relativo de entorno difuso	:	$\alpha > 0$
Direcciones hacia puntos dominados	:	$\{T_n : n \in N\}$
Punto a analizar	:	S_o
Direcciones hacia puntos que dominan a S_o	:	$\{T_d : d \in D\}$
Coefficientes positivos de peso	:	$\{p_d : d \in D\}$

Variables de Decision: $\lambda_m : m \in M, \lambda_b : b \in B, \mu_n : n \in N, \beta_d : d \in D$

4.7.2. Programa Lineal Espacio de datos: Difuso

$$\text{Maximice } z = \sum_{d \in D} p_d \beta_d \quad (4.7.1)$$

Sujeta a:

$$S_o + \sum_{d \in D} \beta_d T_d = \sum_{m \in M} \lambda_m S_m + \sum_{b \in B} \lambda_b F_b + \sum_{n \in N} \mu_n T_n \quad (4.7.2)$$

$$\sum_{m \in M} \lambda_m = 1 \quad (4.7.3)$$

$$\sum_{b \in B} \lambda_b \leq \alpha \quad (4.7.4)$$

$$\lambda_m \geq 0 : m \in M \cup B$$

$$\mu_n \geq 0 : n \in N \quad (4.7.5)$$

$$\beta_d \geq 0 : d \in D$$

4.7.3. Programa Lineal dual en espacio polar: Difuso

- Parametro Adicional: matriz invertible $W \in R^{J \times J}$
- Variables: $y_o, y_f, y_j : j \in J$
- Programa Lineal

$$\text{Maximice } -y_o + \alpha y_f + S_o W y \quad (4.7.6)$$

Sujeta a:

$$-y_o + S_m W y \leq 0 : m \in M \quad (4.7.7)$$

$$T_n W y \leq 0 : n \in N \quad (4.7.8)$$

$$-y_f + F_b W y \leq 0 : b \in B \quad (4.7.9)$$

$$-T_d W y \leq -p_d : d \in D \quad (4.7.10)$$

$$y_f \geq 0 \quad (4.7.11)$$

4.7.4. Características de los modelos

- Envoltentes poliédricos arbitrario, $C(S_M, T_N)$
- Entorno difuso poliédrico arbitrario, $C(F_{B \cup \{o\}}, 0)$. Restricción (4.7.4) siendo una desigualdad asegura que el entorno difuso contiene el origen $F_o = 0$

- El entorno difuso alrededor de cada punto S_m contiene el punto S_m .
- Cono de dominancia arbitrario, $C(0, T_D)$
- Matriz invertible arbitraria W para en la definición del dual que puede ser considerado como una transformación lineal tanto de los datos o de los pesos.
- Restricciones 4.7.7 y 4.7.8 definen el Δ -polar del envolvente no-difuso $C(S_M, T_N)$ donde la polaridad Δ está definido por la desigualdad bilineal $-y_o + xWy \leq 0$
- Restricciones 4.7.9 y 4.7.11 definen el m -polar del entorno difuso $C(F_B, 0)$ donde la polaridad m está definido por la desigualdad bilineal $xWy \leq \alpha$ donde $\alpha > 0$. Casos particulares del entorno difuso corresponden a restricciones simétricas y no-simétricas sobre los pesos (variables duales, y .)
- Restricciones 4.7.10 definen el β -polar del poliedro $C(T_D^*, 0)$ donde $T_d^* = T_d/p_d$ for all $d \in D$ y la polaridad β está definido por la desigualdad bilineal $xWy \geq 1$
- El programa lineal tiene solución factible si y solo si la intersección del envolvente $C(S_M, F_B, T_N)$ y el cono de dominancia $C(S_o, T_D)$ tiene intersección no-vacía. Obviamente esto se cumple cuando S_o is a row of S_M as in DEA.
- Si el programa lineal(4.7.7-4.7.10) es factible entonces el mismo es acotado (y el dual tiene solución factible) si y solo si
 - El poliedro $C(T_D, 0)$ no contenga el origen 0 o lo que es equivalente, que el vértice del cono $C(0, T_D)$ tenga dimensión 0 es decir el cono es "pointed" y
 - La intersección de los dos conos, $C(0, T_N)$ y $C(0, T_D)$ es únicamente el origen 0.
- El parámetro $\alpha \geq 0$ determina el tamaño relativo del entorno difuso de cada punto de datos. Cuando α es igual a cero, el modelo es igual al modelo no-difuso de programación polar presentado anteriormente. En la medida que α aumenta el entorno difuso aumenta en tamaño y importancia relativa a los puntos de datos S_M .

Capítulo 5

Proceso básico de modelado para aplicaciones de minería de Datos

5.1. Definir objetivos del proyecto

- Nombrar el patrocinador (el que provee los recursos para llevar a cabo el estudio)
- Enumerar los accionistas del estudio (los interesados en los resultados)
- Describir el alcance del estudio
 - la población de entes E a analizar y el periodo o periodos de tiempo involucrado
 - la duración estimada del proyecto
 - el costo estimado del proyecto

5.2. Definir variables homogéneas de datos para comparar los entes entre si

- Sea J el conjunto finito de variables que describen constitutivamente cada ente

- Definir la naturaleza de cada variable $j \in J$: datos precisos o datos difusos. Si son difusos hay que definir el entorno difuso que va a utilizar en el modelo.
- Definir las unidades de medida de cada variable; las variables podrían tener unidades distintas
- Definir como tratar datos faltantes
- Para que el análisis sea efectivo, la cantidad de entes debe ser por lo menos dos veces la cantidad de variables

5.3. Colección de datos

- Usar cualquier herramienta como Excel que facilita la organización y archivo de los datos
- Hacer un análisis preliminar de los datos para identificar datos erróneos, outliers, etc.
- Sea $S_E \in \mathbb{R}^{E \times J}$ la matriz cuyas filas son el conjunto depurado de datos

5.4. Definir un envolvente poliédrico para los datos

Cualquier poliedro que contiene los datos (filas de S_E) es un envolvente poliédrico de los datos. Los puntos en el envolvente se llaman *puntos posibles* conforme a las aplicaciones de Análisis Envolvente de Datos que comparan entes productivos y en las cuales, el envolvente se llama el conjunto de producciones posibles (Production Possibility set). La suposición que el envolvente sea poliédrico implica que el envolvente sea convexo, es decir, cualquier punto entre dos puntos posibles también es posible.

Por la doble descripción de poliedros, sabemos que se puede describir un envolvente poliédrico arbitrario de los datos como $C(S_M, T_N)$ donde $E \subseteq M$ y $T_N \in \mathbb{R}^{N \times J}$ donde M y N son conjuntos finitos de índices. Los puntos S_m para $m \in M - E$ podrían representar entes no existentes físicamente pero que se consideran posibles teóricamente y se incluyen para compararlos con los entes reales.

Las filas de T_N representan direcciones que llevan desde un punto posible a otros puntos posibles. Cualquier punto posible mas una combinación no-negativa de

las filas de T_N también sería posible. Suponemos sin pérdida de generalidad que no hay ninguna fila de puro ceros en T_N .

Cualquier punto $\bar{x} \in C(S_M, T_N)$ cuyo (S_M, T_N) -soporte contiene por lo menos un elemento de N sería entonces T_N -dominado por otro punto en $C(S_M, T_N)$. Los puntos de $C(S_M, T_N)$ cuyo (S_M, T_N) -soporte tiene algún elemento de N son los puntos T_N -dominados de $C(S_M, T_N)$ y los demás puntos, cuyos (S_M, T_N) -soportes no tiene ningún elemento de N son los puntos $no-T_N$ -dominados de $C(S_M, T_N)$.

5.5. Seleccionar entes a analizar en detalle

Cuando hay pocos entes involucrados en el estudio (por ejemplo, pocas decenas) es razonable imprimir un informe detallado indicando cuales de los puntos de datos son $no-T_D$ -dominados y para los demás dar el (S_M, T_N, T_D) -soporte de un punto de referencia en el interior de la cara de soluciones óptimas del programa polar. Por defecto, se asume que se debe evaluar a todos los puntos de datos, sin embargo, cuando la cantidad de puntos de datos aumenta, podría ser conveniente permitir al usuario indicar para cuales de los puntos de datos se desea un informe detallado.

5.6. Definir el dominante, es decir, una política de frontera

Habiendo definido un envolvente poliédrico $C(S_M, T_N)$ de los datos que se han de usar en el análisis, para cada punto S_o que se desea analizar, hay que definir un conjunto de direcciones T_D y unos pesos α_D para poder maximizar $\beta_D^t \alpha_D$ sujeto a que $S_o + \beta_D^t T_D$ pertenezca al envolvente, es decir, buscar el punto en la frontera del envolvente que también pertenece al cono trasladado $\{x \in \mathbb{R}^J : x = S_o + \beta_D^t T_D, \beta_D \geq 0\}$ que mas T_D -domina al punto S según los pesos dados, α_D .

5.7. Llevar a cabo el análisis de los puntos seleccionados

Resolver el modelo de programación lineal o su dual. Resultados posibles:

1. El programa lineal en el espacio de los datos, 4.2.2, no tiene solución factible. Esto indica que no hay intersección entre el envolvente y el cono trasladado $C(S_o, T_D)$. En este caso debe revisar la definición de S_o y T_D .
2. El programa lineal 4.2.2 tiene solución pero es no-acotado. Esto indica que el cono generado por T_D contiene un espacio de linealidad mayor que el punto origen o que la intersección de los conos generados por T_N y T_D respectivamente tiene intersección distinto al origen. En este caso debe revisar las definiciones de T_N y T_D .
3. El programa lineal 4.2.2 tiene solución factible y óptima. En este caso las soluciones óptimas del primal y dual, estrictamente complementarias, proveen:
 - a) Un Punto de referencia en la frontera
 - b) El soporte de la cara minimal del envolvente que contiene los puntos que más dominan al ente siendo analizado. Cada uno de los puntos de datos en el (S_M, T_N, T_D) soporte de la cara de soluciones óptimas serían puntos de referencia para S_o . Uno podría calcular la distancia entre S_o y cada uno de tales puntos de referencia según alguna métrica conveniente para escoger el mas cercano o el mas lejano según el criterio deseado.
 - c) Los valores óptimas de las variables duales son coeficientes de una desigualdad lineal valida para el envolvente que define la cara minimal del envolvente que contiene las soluciones óptimas del modelo primal.

5.8. Cosas por terminar

1. Terminar la tesis de Abad que consiste en comparar 5 métodos distintos para encontrar el soporte de la cara de soluciones óptimas de un programa polar.
 - a) resolver el modelo primal (espacio de los datos) usando un método de puntos interiores
 - b) resolver el modelo dual (espacio de los pesos, espacio polar) usando un método de puntos interiores
 - c) resolver el modelo primal (espacio de los datos) resolviendo con el método simplex una secuencia de Programas lineales

- d)* resolver el modelo dual (espacio de los pesos, espacio polar) resolviendo con el método simplex una secuencia de Programas Lineales
 - e)* maximizar el mínimo sobre todas las variables primales, la suma del valor de la variable primal y la holgura en la restricción dual correspondiente.
- 2. Describir un modelo de Programación Lineal Entera para encontrar los soportes de las caras mas cercanos al punto de datos analizado
- 3. Terminar un software en R con entrada y salida de datos en excel para apoyar el usuario llevar a cabo un análisis de programación polar.

Bibliografía

- [1] D.J. Aigner, and S.F. Chu, (1968), On Estimating the Industry Production Function, *Amer. Econ. Rev.*, 58, 826-839.
- [2] P. Andersen and N.C. Petersen (1993), A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis, *Manage. Sci.*, 39, 1261-1264.
- [3] J. Aparicio (2007), Una Introducción al Análisis Envoltante de Datos, en *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, ISSN 1889-3805, Vol. 23, Nro. 1, 2007, pp 12-17.
- [4] J. Aparicio ,J.L. Ruiz and I. Sirvent, Closest Targets and Minimum Distance to the Pareto-Efficient Frontier in DEA, *J. Productivity Analysis* (2007) 28: 209. <https://doi.org/10.1007/s11123-007-0039-5>
- [5] J. Aráoz , "Polyhedral neopolarities", Doctoral Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario (November 1973).
- [6] J. Aráoz, "Blocking and antiblocking extensions", in: W. Oettli and F. Steffans, eds., *Operations Research Verfahren 32* (Athenäum, Meisenheim am Glan, 1979) pp. 5-18.
- [7] J. Aráoz, J. Edmonds and V. Griffin, "Polarities of polyhedra", Workshop on integer programming, Bonn (September 1975).
- [8] J. Aráoz, J. Edmonds and V. Griffin, "Polyhedral Polarity defined by a general bilinear inequality", *Mathematical Programming*, Vol 23, No. 1, (February 1982) pp 117-137
- [9] J. Aráoz, J. Edmonds and V.Griffin, "Polarities given by systems of bilinear inequalities", *Mathematics of Operations Research*, Vol 8, No. 1, (February 1983)
- [10] J. Aráoz, J. Edmonds and V. Griffin, "Extensions of facets", *Progress in Combinatorial Optimization*, Academic Press 1984 pp 3-12

- [11] E. Balas, "Integer programming and convex analysis: Intersection cuts from outer polars" *Mathematical Programming* 2 (1972) 330-382.
- [12] Banker, R.D., Charnes A. and Cooper W.W. (1984). Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Manage. Sci.*, 30, 1078-1092.
- [13] Charnes A. and Cooper W.W. (1962). Programming with Linear Fractional Functionals. *Naval Res. Logist. Quart.*, 9, 181-186.
- [14] Charnes A., Cooper W.W. and Rhodes E. (1978). Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *Europ. J. Operational Res.*, 2, 429-444.
- [15] Charnes A., Cooper W.W., Golany B., Seiford L. and Stutz J. (1985). Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions. *J. Econometrics*, 30, 91-107.
- [16] Charnes A., Cooper W.W., Golany B., Huang Z.M. and Sun D.B. (1990). Polyhedral Cone/ratio DEA models with an Illustrative Application to Large Commercial Banks. *J. Econometrics*, 46, 73 - 91.
- [17] Cooper W, K.S.Park, J.Pastor, RAM: A range adjusted measure of Inefficiency for use with Additive models and relations to other models and measures in DEA, *Journal of Productivity Analysis* 11, 5-42 (1999).
- [18] W.Cooper,J.Pastor,F.Borras,J.Aparicio,D.Pastor BAM: a bounded adjusted mesasure of efficiency for use with bounded additive models, *Journal of Productivity Analysis* 2001 35(2) 85-94.
- [19] Debreu, G. (1951). The Coefficient of Resource Utilisation. *Econometrica*, 19, 273-292.
- [20] Dulá J.H., A geometrical approach for generalizing the production possibility set in DEA., *J. Oper. Res. Soc.*, in press
- [21] Farrell, M.J. (1957). The Measurement of Productive Efficiency. *J. Roy. Statistical Society, Series A, CXX, Part 3*, 253-290.
- [22] Fukuyama H. and Weber W. (2017) Directional Distance DEA Models. Chapter in *Advances in DEA Theory and Applications: With Extensions to Forecasting Models* Book Editor(s): Kaoru Tone
- [23] D.R. Fulkerson, "Blocking polyhedra", in: B. Harris, ed., *Graph theory and its applications*, Academic Press, New York (1970) pp. 93-112.

- [24] R.E. Gomory, "Some polyhedra related to combinatorial problems", *Linear Algebra and its Applications* 2 (1969) 451-558.
- [25] V. Griffin, "Polyhedral polarity", Doctoral Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario (July 1977).
- [26] E.L. Johnson, "Support functions, blocking pairs, and anti-blocking pairs", *Mathematical Programming Study* 8 (1978) 167-196.
- [27] A.Kleine, A general model framework for DEA, *Omega* 32 (2004) 17-23
- [28] Koopmans, T.C. (1951). *An Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities*, Ed. Wiley, New York.
- [29] H.W. Kuhn and A.W. Tucker, eds., *Linear inequalities and related systems* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1956).
- [30] M.Mehdiloo, B.Sahoo and I.Roshdi, A generalized multiplicative directional distance function for efficiency measurement in DEA, *European Journal of Operational Research* 232(3):679-688
- [31] R.T. Rockafellar, *Convex analysis* (Princeton University Press, Princeton, N J, 1969).
- [32] Pastor J.T., Ruiz J.L. and Sirvent I. (1999). An Enhanced DEA Russell Graph Efficiency Measure. *Europ. J. Operational Res.*, 115, 596-607.
- [33] J.Pastor, J.Aparicio, J.Alcaraz, F.Vidal, D.Pastor, An enhanced BAM for unbounded or partially bounded CRS additive models, *Omega* 56 (2015) 16-24
- [34] J.T.Pastor, C.Lovell, J.Aparicio (2012), Families of linear efficiency programs based on Debreu loss function, *Journal of Productivity Analysis* 38(2) : 1-12
- [35] Portela M.C.S., Borges P.C and Thanassoulis E. (2003). Finding Closest Targets in Non- Oriented DEA Models: The Case of Convex and Non-Convex Technologies. *J. Productiv. Anal.*, 19, 251-269.
- [36] Roll Y., Cook W.D. and Golany B. (1991). Controlling Factor Weights in Data Envelopment Analysis. *IIE Transactions*, 23, 2-9.
- [37] Roll Y. and Golany B. (1993). Alternate Methods of Treating Factor Weights in DEA. *Omega*, 21, 99-109.
- [38] Seiford, L.M. (1996). *Data Envelopment Analysis: The Evolution of the State of the Art (1978-1995)*. *J. Productiv. Anal.*, 7, 99-138.

- [39] Simar L. and Wilson P.W. (1998). Sensitivity Analysis of Efficiency Scores: How to Bootstrap in Nonparametric Frontier Models. *Manage. Sci.*, 44, 49-61.
- [40] Thompson R.G., Langemeier L.N., Lee C.T., Lee E. and Thrall R.M. (1990). The Role of Multiplier Bounds in Efficiency Analysis with Application to Kansas Farming. *J. Econometrics*, 46, 93-108.
- [41] J. Tind, On antiblocking sets and polyhedra, in: P.L. Hammer, E.L. Johnson, B.H. Korte and G.L. Nemhauser, eds., *Studies in integer programming*, *Annals of Discrete Mathematics*, Vol. 1, (North-Holland, Amsterdam, 1977) pp, 507-516.
- [42] K. Tone, A slack based measure of efficiency en data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research* 130 (2001) 498-509.
- [43] K.Tone and M.Tsutsui, An epsilon-based measure of efficiency in DEA revisited, GRIPS Policy Information Center discussion paper 09-21.
- [44] A. W. Tucker (1956), Dual systems of homogeneous linear relations; in H. W. Kuhn and A. W. Tucker (Eds.), *Linear Inequalities and Related Systems*, Princeton University Press, Princeton, 3-18.
- [45] Yu G, Wei Q, Brockett P [1996] .^A generalized data envelopment analysis model: A unification and extension of existing methods for efficiency analysis of decision making units", *Annals of Operation Research* 66 (1996) 47-89

Instituciones y organismos patrocinadores



Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas



Universidad Central de Venezuela



Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado



Universidad de Carabobo



Universidad de Los Andes



Universidad de Oriente



Universidad del Zulia



Universidad Simón Bolívar



Fundación Empresas Polar



Asociación Matemática Venezolana



Commission Developing Countries - IMU



Centre International de Mathématiques Pure et Appliquées



Unión Matemática de América Latina y El Caribe

Consejo Directivo

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC)

Director

Eloy Sira

Subdirector

Alexander Briceño

**Representante del Ministerio del Poder Popular para
Educación Universitaria, Ciencia y Tecnología**

Guillermo Barreto

Gerencia General

Dori Mujica

**Ediciones IVIC
Comisión Editorial**

Coordinador

Eloy Sira

Horacio Biord

Jesús Eloy Conde

María Teresa Curcio

Pamela Navarro

Héctor Suárez

Erika Wagner

