

**XXXI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA-VENEZUELA 2018**

DINÁMICA DE CUBRIMIENTOS DEL ANILLO

Álvaro Rovella

MÉRIDA, VENEZUELA, 2 al 7 de septiembre de 2018

XXXI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de: Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Universidad Central de Venezuela, Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Universidad de Carabobo, Universidad de Oriente y Universidad del Zulia; cuenta con el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana (AMV) y la Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA). La XXXI Escuela Venezolana de Matemáticas es también Escuela de Matemática de América Latina y el Caribe (EMALCA - Venezuela 2018); ha recibido financiamiento de: Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA) y Commission for Developing Countries - International Mathematical Union (CDC-IMU).

2010 Mathematics Subject Classification: 37C05, 37C25

©Ediciones IVIC

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Rif: G-20004206-0

Dinámica de cubrimientos del anillo

Álvaro Rovella

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas

Depósito legal: DC2018001563

ISBN: 978-980-261-193-5

Caracas, Venezuela

2018

XXXI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA - VENEZUELA 2018

DINÁMICA DE CUBRIMIENTOS DEL ANILLO

Álvaro Rovella

Universidad de La República, Uruguay.

leva@cmat.edu.uy

MÉRIDA, 2 al 7 DE SEPTIEMBRE DE 2018

Índice general

1. Introducción.	1
2. Preliminares topológicos.	3
2.1. El anillo abierto.	3
2.2. Cubrimientos, generalidades.	5
2.3. Curvas en el anillo.	6
2.4. Cubrimientos del anillo.	9
3. Puntos periódicos.	13
3.1. Definiciones.	13
3.2. Equivalencia Nielsen.	14
4. Clasificación.	21
4.1. Número de rotación.	21
4.2. Semiconjugaciones.	25
4.3. Conectores.	30
5. Completitud.	35
5.1. Teoría de Brouwer.	35
5.2. Condiciones que aseguran la completitud.	37
5.3. Prueba del Teorema 5.2.1.	39
5.4. Prueba del Teorema 5.2.2.	41
Bibliografía	43

Capítulo 1

Introducción.

El objetivo fundamental en estas notas es dar una introducción a los sistemas dinámicos a través del estudio de los cubrimientos del círculo S^1 y del anillo A . Esta idea tiene una doble intención: por una parte, introducir en un contexto sencillo, los conceptos elementales de la dinámica, (como la periodicidad, la recurrencia, la acción en el espacio de curvas); por otra parte, alcanzar rápidamente temas de investigación actual donde hay planteadas numerosas preguntas. Las notas se basan en los artículos [4] y [5].

Un sistema dinámico (en este caso, discreto) está dado por una transformación f de un espacio X en sí mismo. Dado un punto x del espacio se considera la sucesión de puntos de X que consiste en aplicar la función f sucesivamente, es decir, la sucesión $f(x), f(f(x)), \dots$; esta sucesión se llama la órbita futura del punto x , y reconocer de alguna manera cuál es el comportamiento típico de estas órbitas es uno de los objetivos centrales de estudio en dinámica. Es muy frecuente la aparición de los sistemas dinámicos en los modelos de las ciencias aplicadas, típicamente la economía, ecología, física. El espacio X representa el conjunto de posibles estados, la f indica como se transforma cada estado en una unidad del período de tiempo. Por lo tanto entender el comportamiento de las órbitas de los puntos es predecir el futuro, dentro de los supuestos básicos del modelo. El primer paso es estudiar la posible existencia de ciclos periódicos. Un punto es periódico cuando pertenece a su órbita futura,

y por lo tanto la órbita futura es finita. La comprensión y determinación de los puntos periódicos son problemas básicos para comprender la dinámica.

En estas notas habrá un énfasis especial en la determinación de condiciones que aseguran la existencia de puntos periódicos. Es particularmente sencillo el caso unidimensional. En efecto, cuando f es un cubrimiento (de grado mayor que uno) del círculo S^1 , basta mirar su gráfica para deducir que tiene al menos infinitos puntos periódicos, y de todos los períodos. La misma cuestión es falsa para transformaciones de cubrimiento del anillo abierto, como es muy fácil ejemplificar ya que todos los puntos podrían viajar de un borde al otro del anillo sin que haya recurrencia alguna. Sin embargo, si se supone que el cubrimiento f posee un conjunto compacto e invariante K que separa los bordes del anillo, entonces sí puede demostrarse que hay ‘bastantes’ puntos periódicos. El enunciado concreto de esta afirmación y su demostración es uno de los principales temas en estas notas. La prueba original se encuentra en el artículo [5] y usa fuertemente dos grandes teorías desarrolladas durante el siglo pasado y que poseen múltiples aplicaciones en dinámica: son la teoría de Brouwer y la teoría de Nielsen, cuyas ideas básicas también serán explicadas en estas notas. En el capítulo 2 se presentan los conceptos topológicos elementales en el anillo. No hay nada de dinámica, y el lector que tenga una base en topología puede saltarlo. La elección del anillo como dominio obedece a varias razones; en primer lugar, es la generalización inmediata del círculo en dimensión dos; tiene una topología simple, pero admite cubrimientos de grado mayor que uno. En el anillo cerrado, tanto la existencia de puntos periódicos como la posibilidad de clasificar son fáciles de establecer. Por eso la aparición del anillo cerrado será esencialmente para ejemplificar y sus propiedades se incluyen en los ejercicios. En el capítulo 3 se explica la teoría de Nielsen en el anillo. Se trata de determinar el número de puntos fijos de un mapa cualquiera del anillo. Más adelante, estas ideas se aplican para hallar los puntos fijos de las iteradas sucesivas del mapa. En el capítulo 4 se estudia el problema de la clasificación y en el capítulo final se explica la teoría de Brouwer y se demuestran los teoremas.

Capítulo 2

Preliminares topológicos.

Este capítulo trata sobre las nociones básicas a ser consideradas, el anillo abierto, curvas, cubrimiento universal y cubrimientos del anillo. Para ahorrarle tiempo al lector que ya conoce estos conceptos, incluimos al final del capítulo una lista de notaciones. Muchas referencias son buenas para este tópico, por ejemplo el capítulo 1 de [3].

2.1. El anillo abierto.

Por definición, un anillo abierto es un espacio topológico homeomorfo a un cilindro, o sea $S^1 \times \mathbb{R}$, que también es homeomorfo a $S^1 \times (0, 1)$, el producto de el círculo unidad S^1 por el intervalo abierto $(0, 1)$. Es claro que el cilindro puede verse como el subconjunto de \mathbb{R}^3 formado por los puntos (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 = 1$, pero también hay otras maneras de visualizarlo que pueden ser útiles a lo largo del curso. Conviene convencerse de que el plano menos un punto, el disco unidad \mathbb{D} menos un punto, la esfera de S^2 menos dos puntos o también la diferencia $D_1 \setminus \bar{D}_2$ (donde \bar{D}_2 es un disco cerrado contenido en el disco abierto D_1) representan otras visualizaciones concretas de A . Finalmente, vale la pena tener presente que no es saludable pensar que el anillo abierto tiene borde, ya que éste puede ser casi cualquier cosa; por ejemplo, notar que si K es un compacto conexo en el plano cuyo complemento tiene una sola componente, entonces también se cumple que $A = \mathbb{R}^2 \setminus K$ es un

anillo abierto, pero si se mira A como subconjunto del plano, su frontera tiene una sola componente, con aspecto tan diverso como lo pueda ser el conjunto K .

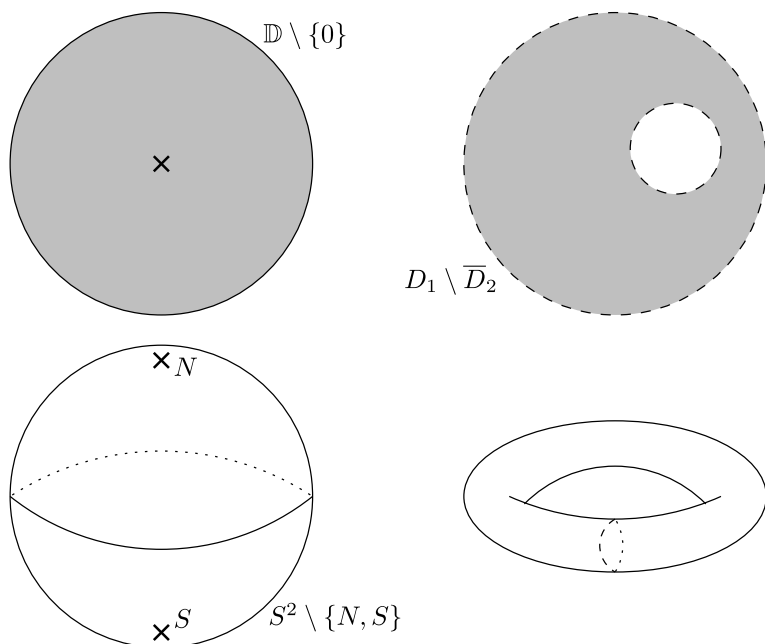


Figura 2.1: Algunas maneras distintas de ver el anillo abierto: disco menos un punto; diferencia de un disco abierto y uno cerrado; esfera menos dos puntos y toro menos una línea

Obviamente el anillo abierto A es conexo por caminos: dos puntos cualesquiera pueden unirse por una curva contenida en A . El anillo abierto no es compacto, y será a veces necesario considerarlo con una compactificación. En general X^* es una compactificación de un espacio X si existe un homeomorfismo de X en un subconjunto denso de X^* y X^* es compacto. Hay muchas maneras de ver A como subconjunto denso de un espacio compacto. Se ha elegido para estas notas una que va a ser útil más adelante, es la compactificación del anillo abierto con dos puntos. Ya que se puede considerar el anillo abierto A como la esfera menos dos puntos, se agregan estos dos puntos para compactificarlo:

Definición 2.1.1. Se denota por A^* al conjunto formado por A unido a dos puntos N y S (que se llaman *polo norte* y *polo sur* respectivamente). Existe una función biyectiva de A^* en la esfera S^2 . Damos a A^* la topología que hace de este mapa un homeomorfismo.

Ejercicio 2.1.1.

1. En la compactificación de A elegida, las componentes de su frontera son dos puntos: $\{N\}$ y $\{S\}$. Describir la frontera de A en cada una de las posibles maneras escritas arriba de ver A como subconjunto de un espacio mayor.
2. Dibujar un anillo abierto A contenido en \mathbb{R}^2 cuya frontera no sea localmente conexa; es decir, para cada $x \in A$ y cada vecindad V de x hay un abierto conexo U tal que $x \in U \subset V$
3. Probar que se puede compactificar el anillo abierto con el toro $T^2 = S^1 \times S^1$. ¿Cuántas componentes tendría su frontera?

Dadas las visualizaciones del anillo abierto ¿Tiene sentido decir que, intrínsecamente, su *borde* tiene dos componentes? La respuesta es sí (a pesar de la última parte del ejercicio previo) ya que se puede trazar una línea cerrada dentro del anillo abierto que lo separa en dos componentes que son homeomorfas.

2.2. Cubrimientos, generalidades.

En esta sección se definen los cubrimientos del anillo. Antes se dará una definición general de lo que se entiende por cubrimiento y luego se restringirá la atención a los dos casos concernientes: el anillo y el círculo.

Definición 2.2.1. Una función $P : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos X y Y se llama *cubrimiento* si cada punto $y \in Y$ tiene un entorno V tal que $P^{-1}(V)$ es igual a la unión disjunta de una cantidad finita o numerable de conjuntos U_n , abiertos en X , tal que la restricción de P a cada U_n es un homeomorfismo de U_n en V .

Ejercicio 2.2.1. Si $P : X \rightarrow Y$ es un cubrimiento, probar las siguientes propiedades:

1. P es continua.
2. P es sobreyectiva.
3. Si Y es conexo, y algún punto de Y tiene una cantidad finita de preimágenes, entonces todos los puntos de Y tienen la misma cantidad de preimágenes. (Considere el conjunto Y_k de puntos que tienen k preimágenes. La propiedad que define P implica que este conjunto es abierto y cerrado).
4. Si Y es conexo y algún punto tiene infinitas preimágenes, entonces todos tienen infinitas preimágenes.

Definición 2.2.2.

1. Sea $m_d : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $m_d(z) = z^d$. Es un cubrimiento de S^1 en S^1 .
2. Sea $P_0 : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definida por $P_0(t) = \exp(2\pi it)$. Este cubrimiento se llama el *cubrimiento universal* de S^1 .
3. La función $p_d(z) = z^d$ define un cubrimiento del anillo $A = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ en sí mismo.
4. Sea $P : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow S^1 \times (0, 1)$ definida por $P(t, r) = (P_0(t), r)$. Esta función se llama el *cubrimiento universal* del anillo.

2.3. Curvas en el anillo.

Una característica fundamental del anillo es que no es simplemente conexo, esto significa que no toda curva cerrada es homotópicamente trivial en A . Para quien no conoce estas definiciones, ver referencia [3]. De todas maneras se incluyen aquí los resultados y definiciones necesarios.

Definición 2.3.1. Sean γ_0 y γ_1 , definidas en $[0, 1]$ y a valores en A dos curvas cerradas (o sea, $\gamma(0) = \gamma(1)$); se dicen *homotópicas* si existe una función $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow A$ tal que H es continua, $H(0, t) = \gamma_0(t)$, $H(1, t) = \gamma_1(t)$ para todo t , y $H(s, 0) = H(s, 1)$ para todo s .

En otras palabras, se puede deformar γ_0 en γ_1 sin salir de A . No es difícil visualizar que la curva $\gamma_0(t) = (\exp(2\pi it), 1/2)$ es una curva cerrada en A que no es homotópica a una curva constante $\gamma_1(t)$, ni tampoco a la curva $\gamma_2(t) = (\exp(-2\pi it), 1/2)$. En realidad, el hecho de que dos curvas sean homotópicas es equivalente a que le den la misma ‘cantidad de vueltas’ al ‘agujero’ que presenta el anillo. Por eso no es difícil imaginar que hay una biyección entre el conjunto de clases de homotopía de curvas cerradas y \mathbb{Z} , el conjunto de los números enteros. Esta es la primera idea, a continuación se define el índice de una curva cerrada, que cuenta las vueltas alrededor del agujero. Primero se dará el siguiente resultado general, válido para cubrimientos (no sólo del anillo).

Lema 2.3.1 (La propiedad del levantamiento). Sean P un cubrimiento de X en Y , $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ una curva y $p \in X$ un punto tal que $P(p) = \gamma(0)$. Entonces existe una única curva $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $P \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ y $\tilde{\gamma}(0) = p$. La curva $\tilde{\gamma}$ se llama levantamiento de γ .

Demostración. Observar que para cada punto t del dominio de γ existe un entorno V de $\gamma(t)$ cuya preimagen es la unión de conjuntos U_n , y P es inyectiva de U_n sobre V . De este hecho se deduce que el conjunto L de los puntos t tales que existe un levantamiento de γ restringida a $[0, t]$ es un conjunto abierto y cerrado de $[0, 1]$; por lo tanto L es vacío o todo el intervalo. Pero no es vacío porque tiene al 0, una vez que se eligió el punto inicial. Los detalles se dejan de ejercicio. \square

Se considera ahora el cubrimiento universal del anillo $P : \tilde{A} \rightarrow A$ (ver la Definición 2.2.2). Notar que si γ es una curva cerrada en A y $\tilde{\gamma}$ denota su levantamiento, entonces $P(\tilde{\gamma}(1)) = P(\tilde{\gamma}(0))$ y por lo tanto

$$\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = (k, 0), \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Este número entero k no depende de cual haya sido el levantamiento $\tilde{\gamma}$ de la curva γ .

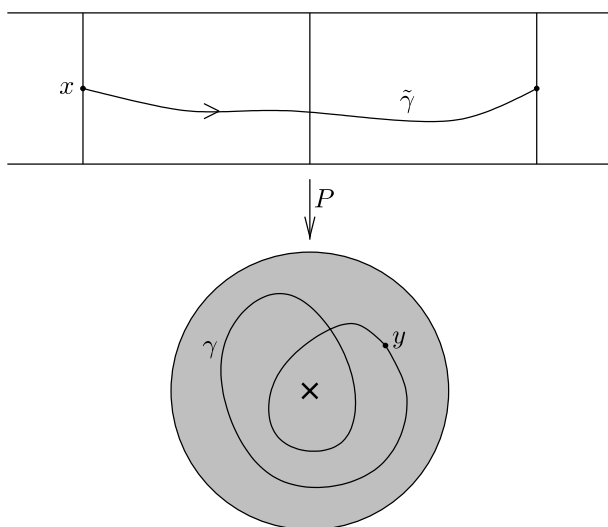


Figura 2.2: Levantamiento de una curva cerrada en el anillo

Definición 2.3.2. Se define el *índice* de una curva cerrada en A como la primera coordenada de $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$. Se denota por Ind_{γ} .

Una curva cerrada se dice *trivial* si es homotópica a una curva constante y *esencial* en caso contrario.

Ejercicio 2.3.1.

1. Probar antes que nada la afirmación que justifica la definición anterior: el número k no depende de la elección del levantado de γ .
2. Probar directamente a partir de la definición que el índice de la curva $\gamma(t) = \exp(2\pi ikt)$ donde $k \in \mathbb{Z}$ es justamente k .
3. Probar que γ es una curva trivial sii su índice es cero.
4. Dos curvas son homotópicas sii tienen el mismo índice.

La relación de homotopía es una relación de equivalencia. La última afirmación permite definir el índice a cada clase de homotopía de curvas cerradas. Esto explica la biyección que existe entre clases de homotopía

y \mathbb{Z} . Luego este espacio posee una estructura de grupo tal que el índice es un isomorfismo.

Definición 2.3.3. Sean $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow A$ y $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow A$ curvas no necesariamente cerradas, tales que $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) := p_0$ y $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) := p_1$; estas curvas se dicen *homotópicas a extremos fijos* si existe una función continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow A$ tal que $H(t, 0) = \gamma_0(t)$, $H(t, 1) = \gamma_1(t)$, $H(0, s) = p_0$ y $H(1, s) = p_1$ para todos s y t . Se usa la notación $\gamma_0 \sim \gamma_1$ para curvas homotópicas a extremos fijos.

Ejercicio 2.3.2. Sea $i = 0, 1$, γ_i como arriba, y sea $\tilde{\gamma}_i$ levantamiento cualquiera de γ_i . Probar que $\gamma_0 \sim \gamma_1$ sii $\gamma_0 \cdot \gamma_1^-$ es trivial sii $\tilde{\gamma}_1(1) - \tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(0) - \tilde{\gamma}_0(0)$. Acá la notación γ^- indica la curva γ recorrida en sentido contrario, mientras que $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ indica la curva γ_2 seguida de la curva γ_1 . Se deja como ejercicio escribir la fórmula de $\gamma_0 \cdot \gamma_1^-$.

2.4. Cubrimientos del anillo.

Se trata del objeto central de estudio de estas notas. Se trabaja con cubrimientos $f : A \rightarrow A$. Se dedicará esta parte al estudio de sus propiedades topológicas. El principal objetivo de esta sección es definir el grado de un cubrimiento y los diferentes levantamientos del cubrimiento. Se denotará por $Cov(A)$ al espacio de cubrimientos del anillo A .

La propiedad que nos permitirá definir el grado es la siguiente:

Ejercicio 2.4.1.

1. Cada cubrimiento del anillo se extiende de una única forma a una aplicación continua de A^* en sí mismo (recordar la definición de A^* , 2.1.1). Además fija los bordes o los intercambia. Sugerencia: si x_n es una sucesión en A que tiende a N , entonces $f(x_n)$ tiene una subsucesión convergente en A^* a un punto y ; si $y \in A$, encuentre una contradicción con el hecho de que la preimagen de un entorno conexo de y debe tener una componente que contiene a infinitos x_n , y por lo tanto contiene una preimagen de y .

2. Si f es un cubrimiento de A en A , entonces cada punto tiene una cantidad finita de preimágenes. Además este número de preimágenes es el mismo para todo $y \in A$. La parte anterior se usa para probar que son finitas preimágenes y en el Ejercicio 2.2.1 se probó que la cantidad de preimágenes no depende de y .
3. Si f es un cubrimiento de A , entonces las imágenes por f de dos curvas homotópicas en A son homotópicas en A .

Definición 2.4.1. El *grado* de un cubrimiento f del anillo se define como el índice de $f(\gamma)$ donde γ es una curva de índice igual a uno. Se denota por $Cov_d(A)$ al conjunto de todos los cubrimientos de grado d del anillo.

La última propiedad del ejercicio anterior muestra que la definición dada no depende de la elección de la curva (siempre que esta tenga índice igual a uno).

Ejemplos. Sea $i = 0, 1$, $h_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dadas por $h_0(r) = r$, $h_1(r) = 1 - r$. Como antes, $m_d(z) = z^d$

1. $f_i(z, r) = (z^d, h_i(r))$ es un cubrimiento de grado d , no importa que sea $i = 0$ o $i = 1$. La diferencia es que, cuando $d > 0$, f_0 preserva orientación, mientras que f_1 no. Exactamente lo contrario ocurre cuando $d < 0$. Notar que a extensión de f_0 a A^* fija los polos mientras que f_1 los intercambia.
2. Sea g definida en $(0, 1)$ por $g(r) = \frac{r}{1-r}$; es creciente de $(0, 1)$ en $(0, +\infty)$. Entonces $f(z, r) = (\exp(ig(r))z^d, r)$ es de grado d , fija los polos de A^* y si se considera el segmento $\sigma(r) = (1, r)$ con $0 < r < 1$, entonces $f(\sigma(r))$ es una curva espiral que se enrosca en el polo N . Por lo tanto f no se puede extender a la circunferencia con $r = 1$.

Otro ejercicio importante es el siguiente, dice que el grado puede definirse a partir de la cantidad de preimágenes de un punto:

Ejercicio 2.4.2.

1. Si γ es una curva simple y trivial, entonces $f^{-1}(\gamma)$ es la unión de $|d|$ curvas simples, cerradas y triviales, donde d es el grado de f .
2. Si γ es una curva cerrada esencial y simple en A y f es un cubrimiento de grado d , entonces $f^{-1}(\gamma)$ es una curva simple cerrada y esencial, además f es una aplicación $|d|$ a 1 de $f^{-1}(\gamma)$ en γ .

La propiedad del levantamiento de cubrimientos. Recordar la Definición 2.2.2 del cubrimiento universal del anillo $P : \tilde{A} \rightarrow A$.

Teorema 2.4.1. *Sea f un cubrimiento del anillo. Entonces existe un homeomorfismo $F : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ tal que $P \circ F = f \circ P$. Una tal función F se denomina levantamiento de f .*

Demostración. Se fija un punto $\tilde{x} \in \tilde{A}$. Dado un punto \tilde{y} tal que $P(\tilde{y}) = f(P(\tilde{x}))$, se mostrará que existe un único levantamiento F de f tal que $F(\tilde{x}) = \tilde{y}$. En efecto, sea \tilde{z} un punto cualquiera en \tilde{A} , y γ una curva que une \tilde{x} con \tilde{z} . Entonces $P(\gamma)$ es una curva en A que une x con $z = P(\tilde{z})$. Por lo tanto, $f(P(\gamma))$ es una curva en A que une $y = f(x)$ con $f(z)$. Sea $\alpha = f\tilde{P}\gamma$ el único levantado de $fP\gamma$ que cumple $\alpha(0) = \tilde{y}$ y defina $F(\tilde{z}) = \alpha(1)$. Notar que esta definición no depende de la elección de γ ya que si γ' es otra curva que une \tilde{x} con \tilde{z} , entonces γ y γ' son homotópicas en \tilde{A} de donde se deduce que $fP\gamma$ y $fP\gamma'$ son homotópicas en A y esto implica que terminan en el mismo punto, por el Ejercicio 2.3.2.

Es claro por la definición de F que

$$PF(\tilde{z}) = P(\alpha(1)) = fP\gamma(1) = f(P(\tilde{z})),$$

es decir, F es levantamiento de f . De aquí también se deduce la continuidad de F . \square

Ejercicio 2.4.3. Hallar todos los levantados de $m_d(z) = z^d$ en S^1 y todos los de $p_d(z) = z^d$ en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$

Ejercicio 2.4.4. Probar las siguientes propiedades:

1. Sea F un levantamiento de un cubrimiento de grado d del anillo. Entonces $F(x + 1, y) = F(x, y) + (d, 0)$ para todo par de puntos $(x, y) \in \tilde{A} = \mathbb{R} \times (0, 1)$.

2. Si F_1 y F_2 son levantamientos de f , entonces existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $F_1(x, y) - F_2(x, y) = (j, 0)$ para todo (x, y) .

Ejercicio 2.4.5. La pregunta que se busca responder en este ejercicio es: ¿cuándo una función de \tilde{A} en sí mismo es levantada de una f del anillo A ? Sea X el anillo abierto o S^1 , y sea (\tilde{X}, P) su cubrimiento universal. Sea ahora $F : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$; entonces existe $f : X \rightarrow X$ tal que $PF = fP$ sii $F(x + J) = F(x) + dJ$, donde d es algún entero y $J = j$ es un entero si $X = S^1$ o $J = (j, 0)$ si $X = A$.

Notar que entonces d es el grado de f .

Lista de notaciones y símbolos.

- A denota al anillo abierto, un espacio topológico homeomorfo a $S^1 \times (0, 1)$.
- A^* denota a la compactificación de A con dos puntos N y S , resulta homeomorfo a la esfera S^2 .
- $p_d(z)$ denota al mapa $p_d(z) = z^d$ que se puede definir en la esfera S^2 o en varias restricciones.
- m_d denota en particular a la restricción de p_d al círculo unidad S^1 .
- $P_0 : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ es el cubrimiento universal de S^1 , $P_0(t) = \exp(2\pi it)$.
- $P : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow S^1 \times (0, 1)$ denota al cubrimiento universal del anillo A , $P(t, r) = (P_0(t), r)$.
- Por Ind_γ se denota el índice o número de vueltas de una curva cerrada γ en el anillo A .
- $Cov_d(A)$ denota al conjunto de todos los cubrimientos de grado d del anillo abierto A en sí mismo.

Capítulo 3

Puntos periódicos.

En este capítulo se inicia el estudio de la dinámica de las transformaciones de $Cov(A)$. En primer lugar se define punto periódico, se establece la equivalencia Nielsen y se demuestran las propiedades fundamentales que permiten encontrar puntos periódicos y distinguirlos.

3.1. Definiciones.

Una de las primeras formas de comenzar a entender la dinámica de una transformación es conociendo sus puntos periódicos. Si f es una aplicación de X en X , se puede considerar las iteradas sucesivas de f . Si $k > 0$, se define f^k como la composición de f consigo misma k veces. Es obviamente una aplicación de X en X . Cuando $k = 0$ entonces f^k es la función identidad y cuando $k > 0$ la notación f^{-k} denota la preimagen de f^k , o sea $(f^k)^{-1}$, que como se sabe, no es necesariamente una función de X en X , sino una función de las partes de X en las partes de X .

Definición 3.1.1. Sea f una aplicación de un espacio X en sí mismo. Un punto $p \in X$ se dice *fijo* para f si $f(p) = p$. Un conjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\}$ de puntos diferentes de X se dice un *ciclo periódico* de período n si $f(x_i) = x_{i+1}$ para cada $1 \leq i \leq n - 1$ y $f(x_n) = x_1$. A cada punto x_i se le llama *punto periódico* de período n .

Ejercicio 3.1.1.

1. Probar que si x es un punto periódico de f de período n , entonces x es un punto fijo de f^n . Si x es un punto fijo de f^n , entonces x es un punto periódico de f con período que divide a n .
2. Para cada $d \in \mathbb{Z}$, sea $m_d(z) = z^d$ de S^1 en S^1 . Notar que $m_d^n = m_{d^n}$. Probar que m_d tiene $|d - 1|$ puntos fijos. Hallar todos los puntos periódicos de la transformación m_2 . Probar que son densos en S^1 .
3. Probar que toda función continua de $[0, 1]$ en sí mismo tiene un punto fijo. ¿Es verdad lo mismo para una función continua de S^1 en sí mismo?
4. Probar que todo cubrimiento de grado $d > 1$ de S^1 tiene al menos $d - 1$ puntos fijos. ¿Puede tener más?
5. Probar que $p_d(z) = z^d$ es un cubrimiento de grado d del anillo abierto $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ en sí mismo y que no tiene puntos periódicos.

3.2. Equivalencia Nielsen.

La teoría de Nielsen trata sobre la equivalencia de puntos fijos para mapas en variedades; acá apenas se presenta el concepto en el anillo, donde resulta bastante simple. Unas referencias básicas para consulta son [6] y [7]

Definición 3.2.1. Sean p y q puntos fijos de un cubrimiento f de X en X donde X puede ser S^1 o A . Se dice que p y q son *equivalentes Nielsen* si existe una curva γ que va de p a q tal que γ y $f(\gamma)$ son homotópicas a extremos fijos en X (ver Definición 2.3.3). Se usa la notación $p \sim q$.

Ejemplo 3.2.1. Notar que \sim es una relación de equivalencia. Probar que $m_d(z) = z^d$ tiene exactamente $|d - 1|$ clases de equivalencia, es decir que no hay dos puntos fijos de m_d que sean equivalentes.

Ejercicio 3.2.1. Sea $m_3(z) = z^3$ en S^1 . Recordar que tiene dos puntos fijos 1 y -1 . Hallar todos los levantamientos de m_3 y verificar que

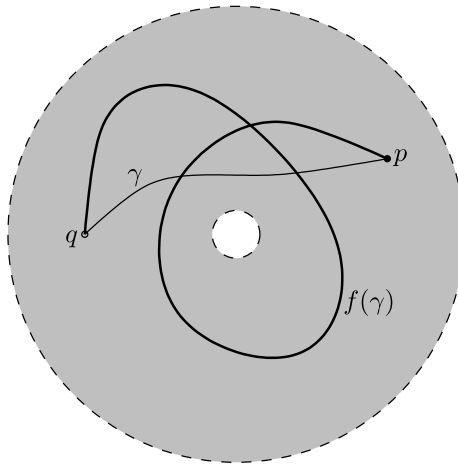


Figura 3.1: Puntos no equivalentes Nielsen

cada uno de ellos fija un punto. Para cada uno de estos levantamientos determinar si el punto que fijan es levantado del 1 o del -1 .

El ejercicio anterior da la idea de que las clases de equivalencia Nielsen de puntos fijos de un cubrimiento de X pueden entenderse en el cubrimiento universal de X . Es lo que establece el próximo teorema. Antes conviene familiarizarse un poco más con la relación que existe entre los fijos de f y de sus levantados.

Ejercicio 3.2.2. Probar que si \tilde{p} es un punto fijo de un levantamiento F de f , entonces $p = P(\tilde{p})$ es fijo de f . Por otro lado, si p es fijo de f y F es un levantamiento de f , entonces $F(\tilde{p}) - \tilde{p} = (k, 0)$ para algún entero k . Probar finalmente que para cualquier punto fijo p de f existe un levantamiento F de f que fija algún \tilde{p} tal que $P(\tilde{p}) = p$. Además, si F' es otro levantamiento de f que fija algún levantado de p , entonces $F' - F = dJ$ para algún entero j y $J = (0, j)$.

Ahora sí se puede enunciar uno de los dos teoremas más importantes de esta sección.

Teorema 3.2.1. Sean p y q puntos fijos de un cubrimiento f de X , donde X puede ser A o S^1 . Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- (a) $p \sim q$.
- (b) Existe un levantamiento F de f que fija un levantado de p y un levantado de q .
- (c) Si F es cualquier levantado de f y \tilde{p} cualquier levantado de p , entonces existe \tilde{q} levantado de q tal que $F(\tilde{p}) - \tilde{p} = F(\tilde{q}) - \tilde{q}$.

Demostración. Se probará que (a) implica (c). El resto se sugiere en los ejercicios de más abajo.

Suponiendo que $p \sim q$ se tiene una curva γ de p a q tal que γ y $f(\gamma)$ son homotópicas. Sea $\tilde{\gamma}$ la curva que levanta γ y que empieza en \tilde{p} . Definiendo \tilde{q} como el punto final de esta curva se tiene que \tilde{q} levanta q , ya que γ termina en q . Notar que $F(\tilde{\gamma})$ es el (único) levantamiento de $f(\gamma)$ que empieza en $F(\tilde{p})$. Usando que γ y $f(\gamma)$ son homotópicas junto con el Ejercicio 2.3.2 se tiene lo afirmado en (c). \square

Ejercicio 3.2.3. Probar que (c) implica (a) notando que el Ejercicio 2.3.2 usado es un si y sólo si.

Para demostrar que (b) y (c) son equivalentes use Ejercicio 3.2.2 para tomar una F que levanta f y fija \tilde{p} y el Teorema 2.4.1 para ver que si F levanta f , entonces todos los levantados son $F + (0, j)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Lema 3.2.1. Sea f un cubrimiento de X de grado d . Sean F_1 y F_2 levantamientos de f que fijan puntos P_1 y P_2 respectivamente. Entonces P_1 y P_2 son levantados de puntos fijos equivalentes de f sii $F_1 - F_2$ es múltiplo de $d - 1$.

Demostración. Para ahorrar tinta, se denota por J al par $(0, j)$ cuando $j \in \mathbb{Z}$, así además la prueba queda escrita tanto para $X = A$ como para $X = S^1$. Por el Teorema 2.4.1, $F_2 - F_1 = J$ para algún entero j .

Se supone primero que p_1 y p_2 son equivalentes Nielsen, donde P_1 baja en p_1 y P_2 en p_2 . Por la parte (c) del Teorema 3.2.1 existe un punto P'_2 tal que $F_1(P'_2) = P'_2$ y P'_2 es otro levantado de p_2 . Por lo tanto existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tal que $P'_2 = P_2 + L$ para algún $L = (0, \ell)$. Usando esto se tiene, por un lado, que $F_2(P'_2) = F_2(P_2) + dL = P_2 + dL$. Pero por otro lado, $F_2(P'_2) = F_1(P'_2) + J = P'_2 + J$. De estas dos ecuaciones se obtiene

que $P_2 + dL = P'_2 + J$. Luego, usando que $P'_2 = P_2 + L$ se tiene que $(d - 1)L = J$, esto es, J es múltiplo de $d - 1$.

Se supone ahora que $J = (d - 1)L$ para algún L . Notar que entonces $F_1(P_2 + L) = F_1(P_2) + dL = F_2(P_2) - (d - 1)L + dL = F_2(P_2) + L = P_2 + L$, o sea que $P_2 + L$ es fijo por F_1 , y otra vez usando la parte (c) del Teorema 3.2.1 se deduce que p_1 y p_2 son equivalentes. \square

Esto nos conduce al siguiente resultado:

Teorema 3.2.2. *Sea f un cubrimiento de grado d de X . Entonces f tiene a lo más $|d - 1|$ clases de equivalencia Nielsen de puntos fijos.*

La demostración es un corolario inmediato del lema anterior junto con el Teorema 3.2.1.

Ejercicio 3.2.4. Dar un ejemplo de un cubrimiento del anillo abierto A sin puntos fijos. Y uno sin periódicos. Y otro, de grado $d > 1$, tal que la cantidad de puntos fijos de f^n sea $d^n - 1$.

Queda el siguiente concepto un poco complicado que es definir el verdadero período de un ciclo periódico. Tener en cuenta el próximo ejercicio podrá ayudar a iluminar la definición que sigue.

Ejercicio 3.2.5. Mostrar que m_{-2} en S^1 no tiene puntos de período dos. Construir un cubrimiento g de grado -2 en S^1 que sí tenga una órbita de período dos.

Construir un ejemplo en el anillo de la forma $f(z, r) = (g(z), \varphi_z(r))$ tal que: la función $g : S^1 \rightarrow S^1$ es la de arriba, f tiene una órbita de período dos pero no tiene puntos fijos.

Definición 3.2.2. Sea f un cubrimiento del anillo abierto A . Sea T un ciclo periódico de f de período n . Diremos que T tiene *período efectivo* k si hay k clases de equivalencia de puntos fijos de f^n contenida en T . Sea L una clase de Nielsen de puntos fijos de f^n ; se define el *período de* L como el período efectivo de cualquier punto en L .

Ejercicio 3.2.6. En realidad para definir período de L hay que probar antes que no importa cuál punto se tome en la clase de Nielsen, el período efectivo es el mismo.

Tomar como ejemplo la g del Ejercicio 3.2.5 de arriba, hay una clase de Nielsen de puntos fijos de g^2 que contiene un punto fijo de g y un ciclo de período dos. En este caso, el período efectivo de cada uno de ellos es uno. El conjunto L formado por esos tres puntos es una sola clase de Nielsen de g^2 con período efectivo igual a uno. La función f del anillo del mismo ejercicio tiene una órbita de período dos, con período efectivo igual a uno, pero f no tiene fijos.

Una cuestión interesante es determinar el número de puntos de período n de la transformación $m_d(z) = z^d$ definida en S^1 . Recordar que $m_d^n = m_{d^n}$ de donde m_d^n tiene $|d^n - 1|$ puntos fijos. Esta transformación tiene exactamente $|d^n - 1|$ clases de período n , es decir, para cada órbita se cumple que el período y el período efectivo coinciden. Pero de los puntos fijos de f^n , ¿cuántos son de período n ? Para comenzar, en los fijos de m_d^n están los fijos de m_d y los fijos de m_d^k cuando k divide a n . Se tiene entonces la siguiente fórmula. Si $\alpha_d(n)$ da el número de puntos de período n de m_d , entonces

$$|d^n - 1| = \sum_{k|n} \alpha_d(k),$$

donde la suma recorre todos los k tal que k divide a n , incluyendo $k = 1$ y $k = n$. Si $\alpha_d(n)$ es el número de puntos de período n , el número de ciclos de período n de m_d será igual a $\alpha_d(n)/n$.

Ejercicio 3.2.7. Una aplicación en divisibilidad sería la siguiente: Probar que p es primo y k natural, entonces p^k divide a $d^{p^k} - 1$ (sug. hallar $\alpha_d(p^k)$ cuando p es primo).

Definición 3.2.3. Una aplicación de cubrimiento f de grado d de X se dice *completa* si para todo n hay $\alpha_d(n)/n$ clases de período efectivo igual a n .

Ejercicio 3.2.8. Probar que todo cubrimiento de S^1 es completo. Para entender el porqué de la definición de completo, vale repasar el Ejercicio 3.2.5

Finalmente se obtiene el siguiente corolario de los teoremas de arriba.

Corolario 3.2.1. *Sea f una aplicación de cubrimiento del anillo abierto A . Si todo levantado de toda f^n tiene punto fijo, entonces f es completa.*

Terminando con este capítulo, es conveniente aclarar porqué son importantes los teoremas 3.2.1 y 3.2.2. Es que dan una caracterización de los cubrimientos que son completos en términos de los levantamientos de f (por el corolario de recién). Uno podría pensar: se cambió el problema de hallar periódicos de f en el anillo por hallar periódicos de su levantado. La ventaja de trabajar en el levantado es que su dominio es homeomorfo al plano y los levantados son homeomorfismos. Hay una riquísima teoría al respecto de la existencia de puntos periódicos de homeomorfismos del plano. Eso se verá más adelante en estas notas, cuando se introduzca la teoría de Brouwer.

Ejercicio 3.2.9. Una caracterización de la completitud es la siguiente: Un mapa f de grado d en el anillo abierto A es completo si existe una función $h : Per(f) \rightarrow Per(m_d)$ que cumple:

1. Si $h(p) = q$, entonces el período efectivo de p es igual al período de q .
2. h es sobreyectiva

Problema. Si f es completa, ¿se puede elegir la función h del ejercicio anterior de manera que sea continua?

Capítulo 4

Clasificación.

En este capítulo se estudia el problema de la clasificación dinámica de los cubrimientos del anillo. Se introduce el número de rotación para construir semiconjugaciones, que para mapas de cubrimiento de S^1 constituye una herramienta fundamental. Sin embargo, como se verá al final del capítulo, no es posible generalizar estas construcciones a aplicaciones del anillo. De todas maneras, la teoría desarrollada permitirá, junto con los teoremas del capítulo anterior, encontrar condiciones que aseguren la completitud de una aplicación de cubrimiento del anillo que cumple ciertas condiciones adicionales.

4.1. Número de rotación.

Sea f una transformación de cubrimiento de grado d del círculo. Notar que si F es un levantado de f y $d > 1$, entonces $F(x+1) = F(x) + d$, se deduce que $F(x+n) = F(x) + dn$ y esto implica que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = \pm\infty$.

Ejercicio 4.1.1. Probar las afirmaciones anteriores. Enunciar y probar resultados similares cuando $d < -1$. En realidad vale algo más general que eso:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x} = d$$

Si para algún a vale $F(a) > a + 1$, entonces

$$F^2(a) > F(a + 1) = F(a) + d > a + 1 + d.$$

Usando inducción pruebe la validez de $F^n(a) \geq k \cdot d^n$ para alguna constante k y todo $n \geq 0$.

En realidad el ejercicio anterior se puede generalizar:

Teorema 4.1.1. *Sea f un cubrimiento de grado d de S^1 , donde d es un entero de valor absoluto mayor que 1. Si $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un levantamiento de f , entonces para cada $x \in \mathbb{R}$ existe el límite:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x)}{d^n}$$

Además, denotando por $\rho(x)$ a ese límite, la función ρ cumple las siguientes propiedades

1. ρ es continua
2. $\rho(x + 1) = \rho(x) + 1$
3. $\rho(F(x)) = d\rho(x)$

Demostración. Se hace la prueba para el caso $d > 1$, quedando como ejercicio el caso $d < -1$. Se hacen dos demostraciones bien diferentes de la existencia del límite, la primera en el mismo camino del ejercicio anterior, más bien manual, y la segunda usando técnica del análisis: el teorema de punto fijo de Banach. En ambas demostraciones se usa lo siguiente:

Afirmación 4.1.1. *Existe una constante K tal que $|F(x) - dx| \leq K$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Para probarla, observe primero que existe K tal que $|F(x) - dx| \leq K$ si se restringe a $x \in [0, 1]$, ya que $F(x) - x$ es continua. Luego, usando que $F(x \pm 1) - d(x \pm 1) = F(x) \pm d - (x \pm d) = F(x) - x$ se concluye que la misma constante K sirve para todo x .

Primera prueba. Usando la afirmación para $y = F^{n-1}(x)$ se tiene que $|F^n(x) - dF^{n-1}(x)| = |F(y) - dy| \leq K$. Aplicando esta misma idea, se prueba, por inducción, que si $n > m$, entonces

$$|F^n(x) - d^{n-m}F^m(x)| \leq K + Kd + Kd^2 + \dots + Kd^{n-m-1} = K \frac{d^{n-m} - 1}{d - 1}.$$

Dividiendo esta ecuación por d^n se deduce que la sucesión $\{F^n(x)/d^n\}_n$ es de Cauchy, ya que

$$\left| \frac{F^n(x)}{d^n} - \frac{F^m(x)}{d^m} \right| \leq \frac{K}{d-1} \left(\frac{1}{d^n} - \frac{1}{d^m} \right)$$

que obviamente tiende a 0 cuando n y m tienden a $+\infty$, ya que $d > 1$.

Segunda prueba. Sea \mathcal{H} el conjunto de todas las funciones $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que:

- (1) H es continua
- (2) La función que a cada $x \in \mathbb{R}$ asocia $|H(x) - x|$ es una función acotada.

En el espacio \mathcal{H} se considera la distancia

$$D(H_1, H_2) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |H_1(x) - H_2(x)|.$$

Notar que D está bien definida porque $H_1 - H_2$ está acotado en virtud de la propiedad (2), si bien cada H_i no es acotada. Es sencillo probar que D es una distancia en \mathcal{H} y que con esta distancia \mathcal{H} es un espacio métrico completo. Se considera el operador Φ definido en \mathcal{H} por:

$$\Phi(H) = \frac{1}{d}H \circ F$$

Se va a probar primero que Φ lleva \mathcal{H} en sí mismo; sea pues H dada y se considera la función $\Phi(H)$. Es obvio que cumple (1), así que basta ver que se cumple (2). Notar que

$$\begin{aligned} \Phi(H)(x) - x &= H(F(x))/d - x = (H(F(x)) - dx)/d \\ &= \frac{1}{d}[(H(F(x)) - F(x)) + (F(x) - dx)]. \end{aligned}$$

En el último término el primer paréntesis está acotado porque H está en \mathcal{H} y el segundo por la afirmación de más arriba. Se concluye que Φ lleva \mathcal{H} en \mathcal{H} . Por último, notar que Φ es una contracción: en efecto, $D(\Phi(H_1), \Phi(H_2)) = \frac{1}{d}D(H_1, H_2)$. Se concluye por el teorema de punto fijo de Banach que Φ tiene un único punto fijo. Esta función H verifica $H \circ F = dH$. Ahora resulta que la existencia de H con las propiedades descritas implica que el límite buscado existe y es igual a H . Para ver esto, notar que

$$\frac{F^n(x)}{d^n} = \frac{F^n(x) - H(F^n(x))}{d^n} + \frac{H(F^n(x))}{d^n}$$

El primer sumando tiende a 0 ya que $|H(y) - y|$ es una función acotada. El segundo término es igual $\Phi^n(H)$ calculado en x ; como H es punto fijo de Φ también lo es de Φ^n : se deduce que el límite existe y es igual a $H(x)$. En definitiva, es $\rho = H$.

Resta aún probar las propiedades de la función ρ . Las propiedades (2) y (3) son inmediatas a partir de la definición de ρ mientras que la continuidad se deduce del hecho que la función ρ es igual a H , que pertenece a \mathcal{H} , y las funciones de \mathcal{H} son continuas por definición. \square

Ejercicio 4.1.2.

1. Probar el teorema anterior para $d < -1$ (sólo hay que hacer algún cambio en la primera demostración).
2. Demostrar la continuidad de la ρ directamente a partir de la definición, sin usar la segunda prueba.
3. Demostrar que ρ es creciente.

Ejercicio 4.1.3. Definir el espacio \mathcal{H}_- de las funciones continuas $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $|H(x) + x|$ es una función acotada; asimismo, defina la distancia en \mathcal{H}_- igual que arriba. Probar que Φ definido en \mathcal{H}_- igual que en la segunda demostración del teorema anterior lleva \mathcal{H}_- en sí mismo y es una contracción, y por ende tiene un punto fijo H_- . Probar que $\lim F^n(x)/d^n = -H_-(x)$ para todo x , que $H_-(x+1) = H_-(x) - 1$ y que H_- es decreciente.

4.2. Semiconjugaciones.

Antes de comenzar con esta sección es conveniente pensar un poco acerca de la equivalencia entre dinámicas. Diremos que dos sistemas dinámicos f y g son conjugados o equivalentes cuando existe un homeomorfismo h del dominio de f al dominio de g tal que $hf = gh$. Esto implica que desde el punto de vista dinámico los sistemas f y g son indistinguibles, ya que toda el comportamiento dinámico de f se traduce por el homeomorfismo h en un comportamiento idéntico para el sistema g . Sería lógico, pero como pronto se verá, muy ambicioso, proponerse el siguiente plan: establecer una familia de sistemas conocidos y/o más fáciles de entender y luego probar que todos los demás son conjugados a uno de estos sistemas más familiares.

Dentro del conjunto de todos los sistemas que se están considerando en estas notas, hay una subfamilia particularmente interesante y rica: es la clase de todos los cubrimientos $m_d(z) = z^d$ de S^1 con $d \in S^1$. Es claro que muy pocos cubrimientos de S^1 y ningún cubrimiento de A es conjugado a algún m_d , pero sí se puede definir un concepto un poco más débil que permite decir mucho acerca de la dinámica de los cubrimientos del anillo.

Definición 4.2.1. Sea f un cubrimiento de grado d de X , donde X puede ser S^1 o A . Una función $h : X \rightarrow S^1$ es una *semiconjugación* de f si se cumple que $hf = m_d h$ y que la imagen por h de una curva de índice uno es una curva de índice ± 1 . Esta condición es lo mismo que decir que el grado de h es ± 1 .

Notar antes que nada que la segunda condición impuesta a la semiconjugación es simplemente para evitar trivialidades, ya que si f es cualquier cubrimiento de X y $h(x) = 1$ para todo x entonces la ecuación $hf = m_d h$ se cumple, pero no tiene implicación alguna.

Ejercicio 4.2.1. Probar que si h es una semiconjugación de f , entonces $h(p)$ es periódico si p es periódico, pero puede ser $h(p)$ periódico sin que lo sea p .

Probar que si I es un conjunto conexo y f -invariante (o sea $f(I) \subset I$),

entonces $h(I)$ es un conjunto conexo y m_d -invariante. Se deduce que $h(I)$ es un punto fijo de m_d o todo S^1 .

Como consecuencia del Teorema 4.1.1 se tiene el siguiente hecho:

Corolario 4.2.1. *Si f es un cubrimiento de grado d de S^1 y $|d| > 1$, entonces f es semiconjugado a m_d .*

Demostración. La función ρ obtenida en el Teorema 4.1.1 cumple $\rho(x+1) = \rho(x) + 1$. Recordar del Ejercicio 2.4.5 que esto implica que ρ es levantada de una función h de S^1 en sí mismo con grado uno. O sea, se tiene $P_0\rho = hP_0$.

Además se cumple que

$$hfP_0 = hP_0F = P_0\rho F = P_0M_d\rho = m_dP_0\rho = m_dhP_0$$

y como P_0 es sobreyectiva, esta ecuación implica que $m_dh = hf$. \square

Continuando con los cubrimientos de S^1 se verá a seguir una aplicación de la existencia de semiconjugaciones. Antes de esto, un ejercicio acerca de las semiconjugaciones de m_d .

Ejercicio 4.2.2. Sea h una semiconjugación de m_d . Probar que h es una conjugación, es decir, es un homeomorfismo. Probar que el conjunto de todas las semiconjugaciones de m_d es un grupo con la composición, isomorfo al grupo dihedral con $|d-1|$ elementos. Si h es una semiconjugación de un cubrimiento f , entonces toda otra semiconjugación h' se obtiene componiendo h con un semiconjugación de m_d .

Definición 4.2.2. Sea f un cubrimiento de S^1 y defina Λ_f como el conjunto de los puntos x tales que $h^{-1}(h(x))$ contiene algún punto diferente de x .

Teorema 4.2.1. *Si f es un cubrimiento de S^1 , entonces el conjunto Λ_f , que fue definido a partir de h (una semiconjugación de f) no depende en realidad de h . Además se tienen las siguientes propiedades:*

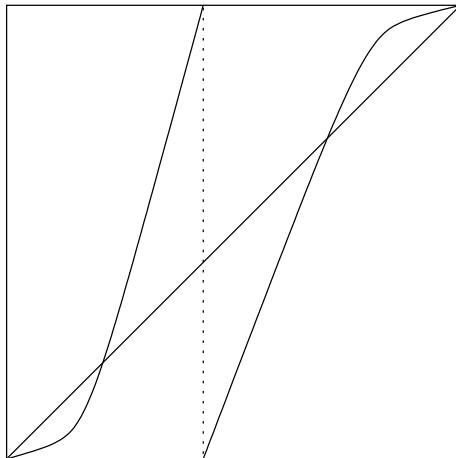
1. Λ_f es completamente invariante (es decir, $f^{-1}(\Lambda_f) = \Lambda_f$).

2. Cada $h^{-1}(h(x))$ es un intervalo (puede ser un punto).
3. Si L es una componente de Λ_f , entonces el interior de L es (pre-periódico) periódico o errante y la restricción de f a esa componente es inyectiva.
4. Λ_f es vacío sii f es conjugada a m_d .

Demostración. Sea h' otra semiconjugación de f ; por el ejercicio anterior, existe un homeomorfismo c tal que $h' = ch$. De esto se deduce la primera afirmación. Las afirmaciones 1 a 4 se dejan de ejercicio (a continuación). □

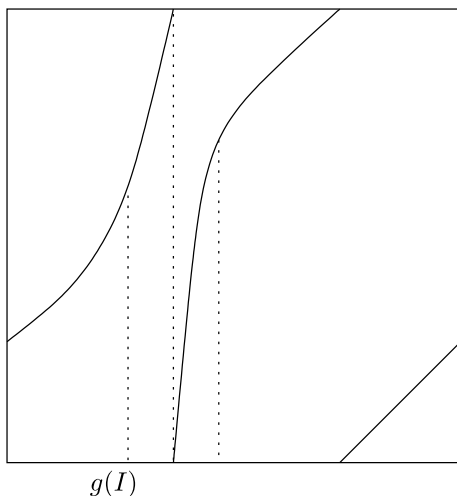
Ejercicio 4.2.3. Probar el teorema anterior. Usar que como ρ es una función creciente, entonces un punto x está en Λ sii $h^{-1}(h(x))$ es un intervalo cerrado no trivial.

Ejemplo 4.2.1. Vienen dos ejemplos en que Λ no es vacío. En el primero, el interior de Λ es la cuenca de atracción de un punto fijo atractor. Sea f definida en S^1 de grado dos cuya gráfica se muestra en la figura.



Entonces hay un punto fijo atractor y la imagen por h de los puntos del intervalo I cuyos extremos son p_1 y p_2 es 1. Luego cada componente de una preimagen por f^n de este intervalo está contenido en Λ_f .

Para el segundo ejemplo se va a usar el famoso homeomorfismo Denjoy g de S^1 que no tiene puntos periódicos pero existe un arco I contenido en S^1 cuyas iteradas futuras son todas disjuntas, es decir $g^n(I)$ no corta $g^m(I)$ si m y n son enteros positivos diferentes. Tal intervalo I se denomina *errante*. Se modifica g en el intervalo $g(I)$ de la forma que se muestra en la figura.



Se obtiene una función f de grado dos. Como f y g son iguales en el complemento de I , entonces iterar por f el intervalo I_1 es lo mismo que iterarlo por g , ya que nunca volverá a I . Por lo tanto I es errante para f . La función h transforma el intervalo I en un único punto.

Estos resultados permiten dar una descripción dinámica bastante precisa de los cubrimientos de S^1 , ya que cuando Λ_f es vacío f es conjugado a m_d y si no, la restricción de f a un intervalo de Λ es un homeomorfismo. Ver un resultado más preciso en [4].

La cuestión ahora es ver qué de todo esto puede generalizarse a cubrimientos de A . Es decir, se vio en las secciones anteriores que siempre existe una semiconjugación de cualquier f que sea un cubrimiento de S^1 . Esto se basaba en la existencia del número de rotación, cuya prueba se basa, a su vez, en la afirmación demostrada al principio del Teorema 4.1.1. Vea el próximo ejercicio donde se pide explicar porqué la prueba

de la validez de la afirmación dada en el mencionado teorema, no puede adaptarse al caso del anillo abierto.

Ejercicio 4.2.4. Sea F un levantamiento de un cubrimiento f del anillo abierto A . Sea $[F(x, y)]_1$ la primer coordenada de $F(x, y)$, y defina la función $\varphi : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ como $\varphi(x, y) = [F(x, y)]_1 - dx$.

Probar que φ es continua y que cumple $\varphi(x + 1, y) = \varphi(x, y)$.

Pensar primero porqué la demostración de la afirmación 4.1.1 no sirve para probar que φ está acotada en el caso del anillo abierto.

Probar que si f es un cubrimiento del anillo cerrado, entonces φ está acotada.

Probar que la propiedad de acotación de φ no depende de cual sea el levantamiento F elegido.

Probar que si φ está acotada, entonces todas las conclusiones del Teorema 4.1.1 se pueden adaptar y son válidas. Es decir, probar el teorema siguiente.

Teorema 4.2.2. *Sea f un cubrimiento de grado d del anillo abierto, donde $|d| > 1$. Sea F un levantamiento cualquiera de f y suponga que la función φ definida en el ejercicio anterior está acotada. Entonces para cada $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1)$ se cumple que existe*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[F^n(x, y)]_1}{d^n}$$

Además, denotando por $\rho(x, y)$ a ese límite, la función $\rho : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ cumple las siguientes propiedades

1. ρ es continua
2. $\rho(x + 1, y) = \rho(x, y) + 1$
3. $\rho(F(x, y)) = d\rho(x, y)$

La demostración se sugiere en el ejercicio previo. El siguiente corolario es importante en la demostración de completitud en el próximo capítulo:

Corolario 4.2.2. *Sea f un cubrimiento del anillo A y K un compacto f invariante. Sea $\tilde{K} = P^{-1}(K)$. Valen las siguientes afirmaciones:*

1. Usando que P es el cubrimiento universal del anillo abierto A , se tiene que $(x, y) \in \tilde{K}$ si y sólo si $(x + 1, y) \in \tilde{K}$.
2. Dado cualquier levantamiento F de f , se cumple que la función φ definida como en el Ejercicio 4.2.4 está acotada en \tilde{K} .
3. Se deduce que existe una función $\rho_K : \tilde{K} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las propiedades enumeradas en el teorema anterior.
4. Si K es esencial, entonces \tilde{K} separa los bordes de \tilde{A} y resulta que ρ_K es sobreyectiva.

4.3. Conectores.

A partir de este momento se define un objeto geométrico simple cuya existencia resulta ser equivalente a la existencia del número de rotación. Recordar que A^* denota la compactificación con dos puntos del anillo abierto, y que entonces A^* es homeomorfo a la esfera S^2 .

Definición 4.3.1. Se llama *conector* a cualquier subconjunto cerrado y conexo K contenido en A , que cumple dos propiedades:

- (1) $K \cup \{N, S\}$ es conexo en A^* .
- (2) $A \setminus K$ es conexo.

Se podría definir conector de otra forma, diciendo que un conector es $K = K^* \setminus \{N, S\}$, donde K^* es un conjunto compacto y conexo en A^* que contiene N y S y cuyo complemento en A^* es conexo. O también un conector es un conjunto que conecta N con S . Por ejemplo, $K_1 := \{(x, 1) : x \in (0, 1)\}$ es un conector en A . Otro ejemplo: sea h es un homeomorfismo de $(0, 1)$ en \mathbb{R} y $\bar{h} : (0, 1) \rightarrow S^1$ definida por $\bar{h} = P_0 h$. Entonces la curva $K_2 = \{(\bar{h}(x), x) \in S^1 \times (0, 1) : x \in (0, 1)\}$ es una curva que se enrosca en ambas componentes de la frontera del anillo: es un conector.

En general una curva simple $\gamma : (0, 1) \rightarrow A$ tal que $\gamma(t) \rightarrow S$ cuando $t \rightarrow 0$ y $\gamma(t) \rightarrow N$ cuando $t \rightarrow 1$ es un conector. Pero no todo conector

contiene necesariamente una curva tal.

No es un conector si separa el anillo, por ejemplo si a una curva como la γ de recién se le une una curva esencial cualquiera del anillo.

La prueba de las propiedades y ejemplos de conectores se deja de ejercicio.

Ejercicio 4.3.1. En este ejercicio K denota un conector de A y f un cubrimiento de grado d de A .

1. La preimagen por f de un conector es igual a la unión de d conectores.
2. f es una biyección de cada componente de $A \setminus f^{-1}(K)$ sobre $A \setminus K$.
3. Un conexo K conecta N con S sii corta toda curva esencial en A .

El resultado fundamental de esta sección es que una condición puramente analítica como es la existencia del número de rotación resulta ser equivalente a una de apariencia geométrica, como es la existencia de un conector libre, o sea tal que no se corta con su imagen.

Teorema 4.3.1. *Sea f un cubrimiento de grado d del anillo abierto A , donde $|d| > 1$. Se consideran las siguientes propiedades:*

- (a) *Para cualquier levantamiento F de f existe el número de rotación y es una función continua.*
- (b) *Existe una semiconjugación de f .*
- (c) *Existe un conector libre para f .*
- (d) *Existe un conector invariante para f .*

Entonces (b), (c) y (d) son equivalentes y (a) implica cada una de ellas. Si la función que a cada (x, y) asocia $x_1 - dx$ es acotada (donde $(x_1, y_1) = F(x, y)$, ver el Ejercicio 4.2.4), entonces valen todas las propiedades.

Que (a) implica (b) se demuestra igual que el Corolario 4.2.1. La última afirmación es el contenido del Teorema 4.2.2. La siguiente secuencia de lemas implicará el resto del teorema.

Lema 4.3.1. *Si K es un conector libre para f (o sea que $f(K) \cap K = \emptyset$), entonces existen $|d - 1|$ conectores invariantes.*

Demostración. Se hará la prueba para $d = 2$ para ahorrar discusiones. Notar que $f^{-1}(K) \cap K = \emptyset$ (caso contrario K no es libre). Además $f^{-1}(K)$ es la unión de 2 conectores. Como K es conexo y no corta $f^{-1}(K)$, resulta que una sola de las dos componentes de $A \setminus f^{-1}(K)$ contiene K ; se denota por U a esta componente y V a la otra. Entonces resulta que $f(V)$ contiene a la clausura de V y f es inyectiva en V (ver Ejercicio 4.3.1). Para cada $N \in \mathbb{N}$ se define:

$$V_N = \bigcap_{n=0}^N f^{-n}(V).$$

Es conexo porque es intersección de conexos: no porque cada $f^{-n}(V)$ sea conexo, sino porque sólo una componente de $f^{-n}(V)$ está contenida en V_{n-1} . Además cada V_N es abierto y contiene a la clausura de V_{N+1} . Se define K' como la intersección de todos los V_N . Se deduce que K' es conexo por ser intersección de conexos encajados, es cerrado porque es también la intersección de las clausuras de los V_N , conecta S y N porque cada V_N los conecta y su complemento tiene una sola componente porque lo mismo ocurre para cada V_N . Se concluye que K' es un conector, y es invariante por construcción. \square

Lema 4.3.2. *Si un cubrimiento de grado d de A (con $|d| > 1$) tiene un conector invariante, entonces es semiconjugado a m_d .*

Demostración. La idea (para $d = 2$) es ir definiendo la h así: h vale 1 en el conector invariante y ha de valer -1 en su preimagen, si se espera que la ecuación $hf = m_2h$ se cumpla. Tomando f -preimágenes sucesivas de K y m_2 -preimágenes del 1 y ordenándolas se va definiendo la h . Esto define h apenas en un subconjunto de A , exactamente el subconjunto R formado por aquellos puntos que alguna iterada positiva de f lleva a K . Un instante de observación permite concluir que hay una única manera de definir h en cada componente del complemento de R de manera que sea continua. \square

Lema 4.3.3. *Sea h una semiconjugación de $f \in \text{Cov}_d(A)$. Entonces $h^{-1}(1)$ contiene un conector invariante.*

Demostración. Es claro que la preimagen de 1 es un conjunto invariante, no tiene que ser conexo necesariamente pero es seguro que contiene un conector. Si no fuese así, usando la tercera de las propiedades de los conectores, se tiene una curva esencial γ que no corta la preimagen de 1. Quiere decir que $h\gamma$ tiene índice 0 lo que contradice la definición de semiconjugación. \square

La conjunción de estos lemas prueba el Teorema 4.3.1. Como se vio en la sección anterior, todas estas condiciones valen cuando f es un cubrimiento de S^1 . Aún no se ha respondido esta cuestión cuando se trata de un cubrimiento f del anillo abierto. La condición del Teorema 4.2.2 da una hipótesis de acotación que implica que estas condiciones valen, aunque esta condición no es necesaria:

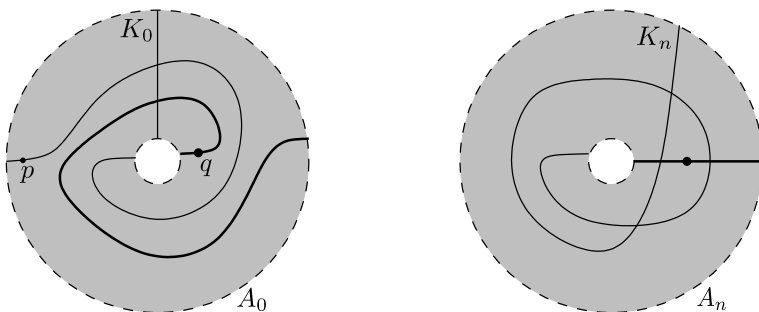
Ejercicio 4.3.2. Probar que existe un cubrimiento de A que tiene un conector invariante que se enrosca en ambos bordes N y S como en el ejemplo K_2 a continuación de la Definición 4.3.1; para este ejemplo no vale la hipótesis del Teorema 4.2.2.

También se vio en el Ejercicio 4.2.4 que si f es un cubrimiento del anillo cerrado, entonces se cumple la condición de acotación y por lo tanto todas las condiciones equivalentes se verifican. Pero en el anillo abierto esto no es verdad, es decir, existe un cubrimiento de A que no cumple estas condiciones.

Contraejemplo. Existe un cubrimiento f de grado d del anillo abierto A que no es semiconjugado a m_d . La transformación f se construye a partir de un cubrimiento de A por anillos A_n ($n \in \mathbb{Z}$) donde los anillos se tocan solo en su frontera y de forma tal que $f : A_n \rightarrow A_{n+1}$ es un cubrimiento de grado 2 para todo $n \in \mathbb{Z}$. Fijando el anillo A_0 se puede conseguir que se cumplan las siguientes propiedades, para cada $n > 0$:

1. Existen dos curvas γ_n^i ($i = 1, 2$) conectores de A_0 que tienen la misma imagen por f^n .

2. Existen puntos $P_i^n \in \gamma_i^n$ que tienen la misma imagen por f^n y cumplen que P_1^n tiende al borde interior de A_0 y P_2^n tiende al borde exterior de A_0 cuando n tiende a $+\infty$.
3. Cada una de las curvas γ_i^n corta al menos n veces y en el mismo sentido a la curva $\{(x, y) \in A_0 : x = 1\}$ contenida en A_0 .



Esta construcción no es difícil, se prueba por inducción en n suponiendo que se cumple hasta n y luego construyendo con cuidado la restricción de f al anillo A_n .

Una vez construida f , observe que no puede haber un conector invariante: En efecto, si K es un conector, tómesese una componente K_0 de $A_0 \cap K$ que sea un conector de A_0 . Note que si n es grande, A_0 debe intersectar γ_1^n después de P_1^n y γ_n^n antes de P_n^n . Esto implica que $f^n(K_0)$ tiene autointersección esencial. Por lo tanto, si $f(K) = K$, entonces $K_0 \subset K$ implica que $f^n(K_0) \subset K$ y de allí se deduce que K no es un conector ya que $f^n(K_0)$ es esencial.

Resulta entonces que el número de rotación no existe para este cubrimiento. Y que no tiene un conector libre.

Capítulo 5

Complejidad.

El objetivo de este capítulo final es el de establecer condiciones que aseguren la existencia de suficientes puntos periódicos de cubrimientos del anillo abierto. Para esto se usarán dos técnicas esenciales: una es la teoría de Nielsen, ver Sección 3.2, que permite asegurar la completitud de un mapa cuando todos los levantamientos de todas sus iteradas tienen al menos un punto fijo. Y la otra es para probar la existencia de los puntos fijos de homeomorfismos del plano: para esto se usa la teoría de Brouwer que ahora se introduce. La demostración original de Brouwer se encuentra en [1]. Este artículo está escrito en alemán; otra demostración dio Fathi, ver [2], y una generalización Le Calvez [9].

Ya fue visto que un cubrimiento de S^1 es completo. El teorema principal que se probará acá es el Teorema 5.2.1, donde se prueba la completitud de un cubrimiento de A cuando se supone que f deja invariante un continuo esencial. Esta afirmación sería evidente si K es una curva simple, pero un compacto esencial puede tener un aspecto más complicado.

5.1. Teoría de Brouwer.

Se consideran en esta sección homeomorfismos del plano que preservan orientación.

El resultado fundamental que se comentará aquí es el teorema de Brou-

ver que data de principios del siglo XX. Esta es la primera versión.

Teorema 5.1.1. *Sea f un homeomorfismo del plano que preserva orientación. Si f no tiene puntos fijos, todos los puntos son errantes.*

Un punto p se dice errante para f cuando existe un abierto U que contiene a p y tal que $f^n(U) \cap U = \emptyset$ para todo $n > 0$. El conjunto de los puntos no errantes de f se denota $\Omega(f)$. El omega-límite de un punto x es el conjunto de puntos de acumulación de la sucesión $\{f^n(x)\}_{n>0}$ y se denota $\omega_f(x)$; el alfa-límite de x es la unión de los puntos de acumulación de las preórbitas de x , es decir de las sucesiones $\{x_n\}_{n\leq 0}$ tales que $f(x_n) = x_{n+1}$ para todo $n < 0$, siendo $x_0 = x$.

Ejercicio 5.1.1. Probar las siguientes propiedades

1. Todo punto periódico de f está en $\Omega(f)$.
2. $\Omega(f)$ es un conjunto cerrado.
3. $\Omega(f)$ es f -invariante, más aún se cumple la igualdad $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$, pero no es necesariamente cierto que $f^{-1}(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$ (considere por ejemplo un mapa unidimensional con un punto fijo que tenga otra preimagen).
4. Un punto p es errante para f sii existe U abierto que contiene a p tal que $f^{-n}(U) \cap U = \emptyset$ para algún $n > 0$.
5. $\omega_f(x) \cup \alpha_f(x) \subset \Omega(f)$ para todo x .
6. Si K es un compacto no vacío y f -invariante, entonces $\Omega(f) \cap K \neq \emptyset$.

Ejercicio 5.1.2. Recordar el Teorema 4.2.1 donde se define el conjunto $\Lambda(f)$ para un cubrimiento f de S^1 . Comparar $\Lambda(f)$ con $\Omega(f)$.

El siguiente corolario del teorema de Brouwer es usado más adelante.

Corolario 5.1.1. *Si F es un homeomorfismo del plano que preserva orientación y existe un compacto F -invariante, entonces F tiene un punto fijo.*

Demostración. Sea x un punto de K , un compacto F -invariante. Entonces para todo $n \geq 0$ se tiene que $F^n(x) \in K$; y se deduce que $\omega_F(x) \neq \emptyset$. Por la parte 5 del Ejercicio 5.1.1 se deduce que $\Omega(f) \neq \emptyset$ y por el Teorema de Brouwer se deduce que f tiene punto fijo. \square

Es fácil construir ejemplos de homeomorfismos del plano (que no preservan orientación) y que tienen puntos de período dos pero no fijos.

Ejemplo 5.1.1. Una f tal que $f(x, y) = (h_y(x), -y)$ y para cada y , $h_y(x)$ es una traslación de \mathbb{R} puede servir para mostrar un homeomorfismo del plano que tiene puntos de período dos pero ningún fijo.

Por lo tanto, la hipótesis de preservar orientación en el teorema de Brouwer es inevitable. También se usará una versión para homeomorfismos que revierten orientación. Se tiene el siguiente teorema de Kuperberg. Ver [8].

Teorema 5.1.2. *Sea f un homeomorfismo del plano que revierte orientación y X un continuo tal que $f(X) \subset X$. Entonces f tiene un punto fijo en X .*

Recordar que un continuo es un conjunto compacto y conexo. Notar que si f preserva orientación entonces la existencia de un continuo X invariante implica que f tiene punto fijo. Pero aquí la afirmación es que el punto fijo está en X . Si f es una rotación de 90° alrededor del origen, entonces la circunferencia unidad X es invariante pero no contiene puntos fijos de f . Este ejemplo muestra que la afirmación del Teorema 5.1.2 no es válida si f preserva orientación.

Existen ríos de tinta escritos sobre sus demostraciones y extensiones, acá no hay posibilidad de comentar mucho acerca de la prueba, nos limitaremos a hacer uso del resultado.

5.2. Condiciones que aseguran la completitud.

En esta sección se supone que f es un cubrimiento del anillo abierto y que su grado es de módulo mayor que uno. Se demuestran dos teoremas que

aseguran la completitud bajo ciertas hipótesis. Ya se han visto ejemplos en el anillo abierto donde no hay punto periódico alguno, basta definir $f(z, r) = (z^d, g(r))$ donde g es un homeo de $(0, 1)$ en sí mismo tal que $g(r) > r$ para todo r o $g(r) < r$ para todo r . Sin embargo, si f es un cubrimiento de S^1 de grado d con $|d| > 1$, la completitud está asegurada (ver el Ejercicio 3.1.1 donde se probó la parte esencial de esta afirmación).

Ejercicio 5.2.1. Probar que todo cubrimiento de grado d (con $|d| > 1$) del anillo cerrado es completo.

El objetivo de este capítulo es probar los teoremas siguientes. Se recuerda antes que un continuo es un conjunto compacto y conexo y que un continuo contenido en A es esencial si separa los bordes N y S de A^* . Un continuo es esencial si corta todo conector. Caso contrario, se llama trivial.

Teorema 5.2.1. *Sea f un cubrimiento de grado d del anillo abierto A , donde $|d| > 1$. Si existe un continuo esencial K invariante por f (o sea tal que $f(K) \subset K$), entonces f es completa.*

Notar que con la misma idea de arriba se puede construir un cubrimiento de grado d del anillo $f(z, r) = (z^d, g(r))$ que tenga un punto fijo y ningún otro punto periódico, el conjunto formado por este único punto fijo es un continuo trivial invariante, y f no es completa. Por eso la hipótesis de esencialidad es necesaria.

El próximo teorema pide una hipótesis extra al continuo esencial K , pide que su complemento este formado sólo por las dos componentes que seguro ha de tener el complemento de un continuo esencial. En compensación, la conclusión es que la abundancia de puntos periódicos ocurre en el propio conjunto K .

Teorema 5.2.2. *Si K es un continuo invariante esencial cuyo complemento tiene exactamente dos componentes, entonces f es completa en K , o sea que puede asegurarse que hay representantes de cada clase de Nielsen en el conjunto K .*

5.3. Prueba del Teorema 5.2.1.

Comenzando con la demostración del Teorema 5.2.1, sea G un levantado cualquiera de una iterada cualquiera de f . Si se demuestra que G tiene un punto fijo, entonces el Corolario 3.2.1 implica que f es completa.

Como K es invariante para f , también es invariante para cualquier f^n y por lo tanto \tilde{K} es invariante para G , un levantado cualquiera de f^n .

Parte 1: Cuando f preserva.

En este caso f^n preserva orientación y también G preserva orientación. Además G es un homeomorfismo de $\tilde{A} = \mathbb{R} \times (0, 1)$, que es homeomorfo al plano \mathbb{R}^2 . Como antes se dijo, \tilde{K} es un conjunto G invariante, pero no es compacto, si lo fuese, se tendría el punto fijo en virtud del Corolario 5.1.1. El conjunto \tilde{K} no es compacto porque no es acotado. Sin embargo, el Corolario 4.2.2 implica que existe una función ρ con determinadas propiedades, en particular, el hecho de que K sea esencial implica que ρ es sobre \mathbb{R} . Por lo tanto $\rho_K^{-1}(0)$ es un conjunto no vacío, es un conjunto cerrado y es acotado. Además es G invariante porque $\rho G = d\rho$. Se concluye por el Corolario 5.1.1 que G tiene punto fijo, lo que termina la prueba en este caso.

Parte 2: Cuando f revierte.

En esta parte se necesita un resultado previo que tiene que ver con la existencia del número de rotación y por lo tanto con la existencia de conectores invariantes para f .

Lema 5.3.1. *Sea g un cubrimiento de A y K un compacto invariante. Existe g_0 , cubrimiento del anillo, que coincide con g en K y tal que g_0 tiene un conector invariante.*

Demostración. Se supone que f fija los bordes N y S de la compactificación A^* del anillo A ; el otro caso es similar. Sea G levantamiento de g y $V_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1) : \epsilon < y < 1 - \epsilon\}$ un entorno de $\tilde{K} = P^{-1}(K)$. Se afirma ahora que existe un homeomorfismo G_0 de $\mathbb{R} \times [0, 1]$ que cumple $G_0(x, y) = (dx, y)$ en $y = 0$ e $y = 1$, $G_0 = G$ en V_ϵ y $G_0(x + 1, y) = G_0(x, y) + (d, 0)$ para todo (x, y) , donde d es el grado de g . Se considera el rectángulo R definido por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \epsilon$.

Notar que las propiedades impuestas a G_0 implican que ya está definida en los lados horizontales de R . Sea s un arco simple en A que une $G_0(0, 0) = (0, 0)$ con $G_0(0, \epsilon) = G(0, \epsilon)$ y que es disjunto de $G(y = \epsilon)$. A seguir se define G_0 en el segmento $x = 0, 0 \leq y \leq \epsilon$ como un homeomorfismo sobre s . Luego se define G_0 en $x = 1, 0 \leq y \leq \epsilon$ de forma que se cumpla $G_0(1, y) = G_0(0, y) + (d, 0)$. Por ahora se ha definido el mapa G_0 en el borde de R como un homeomorfismo. Ha de recurrirse al teorema de Jordan-Schoenflies para extender G_0 a un homeomorfismo del rectángulo R . Una vez definida G_0 en R se extiende a la banda horizontal $0 \leq y \leq \epsilon$ de forma que cumpla $G_0(x + 1, y) = G_0(x, y) + (d, 0)$. Luego se repite la construcción en la banda horizontal entre $y = 1 - \epsilon$ y $y = 1$. El mapa G_0 así obtenido es un homeomorfismo de la clausura de \tilde{A} sobre sí mismo y satisface lo pedido.

Notar que la función $\varphi(x, y) = [G_0(x, y)]_1 - dx$ asociada a esta G_0 está acotada por la propiedad que cumple cerca de los bordes de \tilde{A} : Por lo tanto existe el número de rotación, y por el Teorema 4.3.1, se tiene que existe un conector invariante para la proyección g_0 de G_0 . \square

Hay dos maneras de revertir orientación:

Caso 1. g fija los bordes N y S de la compactificación del anillo y tiene grado negativo. Sea G levantado de g ; por el lema anterior se puede suponer que el mapa G se puede extender a $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Esta extensión induce un homeomorfismo de la compactificación con dos puntos $+\infty$ y $-\infty$ de la banda $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Es claro que G lleva $-\infty$ en $+\infty$ y viceversa, ya que su grado es negativo. Entonces G es un homeomorfismo de una bola cerrada y se puede extender por lo tanto a un homeomorfismo del plano que revierte orientación. Si \tilde{K} era la preimagen por la proyección P de K , entonces el conjunto $K' = \tilde{K} \cup \{-\infty, +\infty\}$ es compacto conexo e invariante. Por lo tanto el teorema 5.1.2 implica que G tiene punto fijo en K' de donde se deduce que este punto está en \tilde{K} ya que $\pm\infty$ constituyen un ciclo de período dos. Como G y G_0 son iguales en \tilde{K} se concluye que g tiene punto fijo en K .

Caso 2. f intercambia los bordes de A^* y tiene grado positivo. Por el lema previo se puede modificar el mapa g de forma que tenga un conector

invariante. Como g revierte los bordes, este procedimiento no modifica el conjunto de puntos fijos de g . Además es consecuencia de la prueba de ese lema que todo levantado G de g tiene también un conector invariante, es decir, un conjunto K' compacto y conexo que conecta los bordes $\mathbb{R} \times \{0\}$ y $\mathbb{R} \times \{1\}$ de \tilde{A} . Se extiende entonces G a un homeomorfismo del plano y se aplica nuevamente el Teorema de Kuperberg 5.1.2 para obtener un punto fijo de G que pertenece al conector invariante K' pero no está en los bordes de \tilde{A} . Este punto fijo es por lo tanto genuino del levantado G de g .

5.4. Prueba del Teorema 5.2.2.

Hay que demostrar que cada levantado de cualquier iterada de f tiene un punto fijo en $\tilde{K} = P^{-1}(K)$. Como en el Teorema 5.2.1, se supone que K es un compacto invariante esencial. La hipótesis nueva sobre K es que su complemento tiene exactamente dos componentes. Por lo tanto el conjunto \tilde{K} es un conjunto cerrado, no acotado, y separa los bordes de la banda $\mathbb{R} \times (0, 1)$. Lo nuevo es que su complemento tiene exactamente dos componentes. Hay que tener un poco de cuidado porque a pesar de que K es conexo y esencial, \tilde{K} no es necesariamente conexo aunque corta todo conector de la banda \tilde{A} . Se denota por D a la compactificación con dos puntos de $\mathbb{R} \times [0, 1]$, que es homomorfo a una bola cerrada, como se vio en en la prueba del teorema anterior. Si se llama K' al conjunto $\tilde{K} \cup \{\pm\infty\}$ se obtiene un subconjunto de A' que es conexo y compacto y que separa la bola cerrada D en dos componentes. Se divide la prueba en tres casos:

Caso 1: g preserva orientación. Sea $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un levantado de g , donde g puede ser cualquier iterada de f . Por el Lema 5.3.1 se puede suponer que G se extiende con continuidad al borde de D . También se sabe, como en la prueba del teorema anterior, que el conjunto obtenido como la intersección de un conector invariante para G con el propio \tilde{K} contiene un conjunto conexo no vacío invariante por G , que se denota por K_0 . Se supone por contradicción que G no tiene puntos fijos en \tilde{K} . Sea U la componente conexa de $D^\circ \setminus \text{Fix}(G)$ que contiene \tilde{K} , donde $\text{Fix}(G)$

es el conjunto de puntos fijos de G . Notar que $Fix(G)$ no acumula en $\pm\infty$. Sea (\tilde{U}, π) el cubrimiento universal de U . Se afirma ahora que existe un levantado \tilde{G} de $G|_U$ que tiene un compacto invariante en \tilde{U} . Para ver esto, notar primero que existe un entorno $V \subset U$ de \tilde{K} que es conexo abierto y simplemente conexo. Esto en virtud de la nueva hipótesis del teorema, ya que \tilde{K} no puede separar un punto fijo de G de ambas componentes del borde de \tilde{A} . Se sigue que la restricción de π a cada componente de $\pi^{-1}(V)$ es un homeomorfismo sobre V . Por lo tanto cualquier \tilde{G} deja invariante una componente \tilde{V} de V y por lo tanto un compacto contenido en esa componente, a saber, la preimagen por π de K_0 . Por el teorema de Brouwer y usando que G preserva orientación (y por lo tanto también \tilde{G}), se deduce que \tilde{G} tiene un punto fijo en \tilde{V} , luego G tiene un punto fijo en V , contrariamente a lo que se supuso. Esto prueba que G tiene punto fijo en \tilde{K} .

Caso 2: g revierte orientación, y $d < -1$. Ver la demostración del caso 1 de la prueba del Teorema 5.2.1 cuando g revierte.

Caso 3: g revierte orientación, y $d > 1$. Sean U_1 y U_2 las componentes conexas de $\tilde{A} \setminus \tilde{K}$. Sigue de las hipótesis que $G(U_i) \cap U_i = \emptyset$, $i = 1, 2$. Por lo tanto los puntos fijos de G están en \tilde{K} , pero ya se sabe, del teorema anterior, que G tiene punto fijo.

Bibliografía

- [1] L.E.J. Brouwer. *Beweis des ebenen Translationssatzes*. Math. Annalen 72 35-54 (1912)
- [2] A. Fathi. *An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs*. L'enseignement Math. 33 (1987), 315–322.
- [3] A. Hatcher *Algebraic topology*, Cambridge University press, 2002.
- [4] J.Iglesias, A.Portela, A.Rovella, J.Xavier. *Dynamics of covering maps of the annulus I: semiconjugacies*. Math Z, vol 284, 209-229 (2016)
- [5] J.Iglesias, A.Portela, A.Rovella, J.Xavier. *Dynamics of annulus maps II: Periodic points*. Fundamenta Math. vol 235, 257-276 (2016)
- [6] B. Jiang. *Lectures on Nielsen fixed point theory*. Contemporary math. 14 (1983)
- [7] M. Kelly. *Minimizing the number of fixed points for self maps of compact surfaces*. Pacific J. of Math. vol 126, 81-123 (1987)
- [8] K. Kuperberg *Fixed points of reversing homeomorphisms of the plane*. Proc. AMS 112, 223-229 (1991) European J. Combin. **13** (1992), 141 - 151.
- [9] P. Le Calvez *Une version feuilletée équivariante du théoreme des translations de Brouwer*. PM de l'Inst. des hautes Etudes Scient., 102 1-98 (2005)

Instituciones y organismos patrocinadores



Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas



Universidad Central de Venezuela



Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado



Universidad de Carabobo



Universidad de Los Andes



Universidad de Oriente



Universidad del Zulia



Universidad Simón Bolívar



Fundación Empresas Polar



Asociación Matemática Venezolana



Commission Developing Countries - IMU



Centre International de Mathématiques Pure et Appliquées



Unión Matemática de América Latina y El Caribe

Consejo Directivo

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC)

Director

Eloy Sira

Subdirector

Alexander Briceño

Representante del Ministerio del Poder Popular para Educación Universitaria, Ciencia y Tecnología

Guillermo Barreto

Gerencia General

Dori Mujica

Ediciones IVIC

Comisión Editorial

Coordinador

Eloy Sira

Horacio Bior

Jesús Eloy Conde

María Teresa Curcio

Pamela Navarro

Héctor Suárez

Erika Wagner

