

**XXX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA-VENEZUELA 2017**

TÓPICOS EN ANÁLISIS GLOBAL

Gerardo A. Mendoza

MÉRIDA, VENEZUELA, 03 al 08 de septiembre de 2017

XXX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA-VENEZUELA 2017

TÓPICOS EN
ANÁLISIS GLOBAL

Gerardo A. Mendoza

Temple University
gmendoza@temple.edu

MÉRIDA, 3 AL 8 DE SEPTIEMBRE DE 2017

XXX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana.

La XXX Escuela Venezolana de Matemáticas recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), FUNDACITE-Mérida, Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) y Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA).

2010 Mathematics Subject Classification: Primario: 58-01. Secundario: 35-01, 53-01.

©Ediciones IVIC

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Rif: G-20004206-0

Tópicos en análisis global

Gerardo A. Mendoza

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas

Depósito legal DC2017001935

ISBN 978-980-261-178-2

Caracas, Venezuela

2017

Prefacio

El propósito primario de estas notas es complementar con material de base la presentación de cinco tópicos en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales lineales en los que el aspecto global es fundamental para darle sentido al problema: problemas de frontera, Teoría de Hodge, la fórmula de Atiyah-Bott para el número de Lefschetz, el Teorema del Índice de Atiyah-Singer, y la función zeta de un operador elíptico positivo.

Ilustramos el contraste entre problemas locales y problemas globales con algunos ejemplos. No hay obstáculos para la existencia de soluciones de la ecuación $du/d\theta = f$ con θ cerca de 0. Pero no hay solución global si vemos θ como ángulo en un círculo y u como función en ese círculo (esto es, como función periódica), si la integral de f no es 0. Que esta ecuación es en una variable no importa; el mismo tipo de problema ocurre por ejemplo en un toro: si las variables angulares son θ y φ , la ecuación $\partial^2 u/\partial\theta^2 + \partial^2 u/\partial\varphi^2 = f$ siempre tiene soluciones locales pero hay solución global si y solo si la integral de f es nula.

Elaborando algo más en relación a existencia local versus global, si \vec{F} es un campo vectorial suficientemente regular en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y $\nabla \times \vec{F} = 0$, entonces cada punto en Ω tiene un entorno en el cual \vec{F} es el gradiente de una función definida cerca del punto. Pero si Ω es el producto de un anillo en \mathbb{R}^2 y un intervalo, entonces puede no existir una función en Ω cuyo gradiente es \vec{F} . Y si en lugar de $\nabla \times \vec{F} = 0$ suponemos $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, entonces cada punto de Ω tiene un entorno en el cual existe un campo vectorial \vec{G} tal que $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$, pero si Ω es la región entre dos esferas concéntricas, entonces existen campos vectoriales suaves en Ω con divergencia nula que no son de la forma $\nabla \times \vec{G}$ para ningún campo \vec{G} . Estos son ejemplos donde la topología del espacio subyacente (por ejemplo un anillo) impone restricciones a la existencia de soluciones.

Presencia o ausencia de condiciones de frontera: En un disco D en el plano hay muchas funciones armónicas, pero solo una si los valores de tal función se prescriben en la frontera. En el mismo contexto, la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0 \text{ en } D$$

en D tiene soluciones no nulas para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$. Pero si requerimos $u = 0$ en la frontera de D , la ecuación solo tiene soluciones no triviales cuando λ pertenece a cierto subconjunto discreto infinito de $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ sin puntos de acumulación finito. A veces la condición de frontera está escondida en una condición de crecimiento: la ecuación

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2$$

tiene muchas soluciones, pero únicamente $u = \text{constante}$ si pedimos que u sea acotada. Este último es un ejemplo en donde el espacio subyacente (\mathbb{R}^2) no es compacto.

El foco del curso será problemas de tipo global para operadores diferenciales elípticos. Hay también problemas globales interesantes en el caso de otro tipo de operadores (por ejemplo hiperbólicos), pero eso tal vez es tema para otra ocasión: el material ya es suficientemente (tal vez demasiado) extenso para un curso de veinte horas. Estas notas contienen bastante más que lo que se puede discutir en ese tiempo; la expectativa es cubrir el Capítulo I, una colección de ejemplos en dimensión baja, luego discutir con algo de profundidad los Capítulos V-VIII: Teoría de Hodge, la fórmula de Atiyah-Bott para el número de Lefschetz, el Teorema del Índice de Atiyah-Singer, y la función ζ de un operador elíptico.

Los Capítulos II y III, respectivamente sobre variedades y operadores pseudodiferenciales, son auxiliares. En clase discutiré brevemente lo que sea necesario de esos capítulos en el momento particular. El Capítulo IV era originalmente parte del plan del curso propiamente, pero dado lo extenso de los otros tópicos quedó relegado al limbo. Sin embargo contiene algunos puntos que conciernen la existencia de valores de frontera que son interesantes en los dos últimos capítulos.

Los Capítulos IX y X contienen una descripción de la topología diferencial y algo del análisis en variedades no compactas o con singularidades. Este es parte del contexto en que la investigación de problemas de análisis global en el sentido de las presentes notas se ha desarrollado en los últimos veinte o treinta años. Si hay tiempo, discutiremos algo de esto durante el curso. Si no, tal vez estos capítulos junto con las referencias sirvan para orientar al lector un poco en la literatura.

El estilo de estas notas es variable. En algunos momentos es apenas descriptivo, enfocando solo las ideas centrales: cuál es el problema, cuáles son los resultados, algunos detalles importantes—particularmente en los dos últimos capítulos. Pero he tratado de presentar con bastante detalle los elementos básicos (operadores pseudodiferenciales) y algo de geometría diferencial con el objetivo de al menos tener versiones autocontenidas en los capítulos centrales del curso.

Las referencias son bastante completas, creo, en cuanto al origen de las ideas. En muchos casos he incluido lazos a páginas de la red donde el lector

puede encontrar los artículos, a veces libros, citados. Pero hay muchos autores que no han sido mencionados ni siquiera de pasada; hacer algo más completo es imposible desde el punto de vista práctico.

Estas notas están dirigidas a estudiantes de pregrado avanzados o de posgrado con intereses en ecuaciones diferenciales con una componente fuerte de geometría diferencial.

La primera Escuela Venezolana de Matemáticas se llevo a cabo hace ya 30 años; tuve el privilegio de dictar uno de los mini-cursos. Desde entonces se ha celebrado una cada año, y quiero expresar aquí mi agradecimiento a los organizadores de esta trigésima edición de la Escuela por esta nueva oportunidad de dictar uno de los cursos.

También quiero dejar aquí constancia de mi agradecimiento a mi esposa por haber soportado durante varios meses, más aún, apoyado y frecuentemente alentado, mi dedicación casi exclusiva a estas notas, que resultaron considerablemente más extensas de lo que preví inicialmente.

Índice general

Prefacio	I
Capítulo I. Introducción	1
1. Problemas de valores de frontera	1
2. Teoría de Hodge	5
3. El número de Lefschetz y la fórmula de Atiyah-Bott	8
4. La función ζ de un operador elíptico	11
Capítulo II. Variedades y fibrados vectoriales	15
1. Introducción	15
2. Variedades	16
3. Fibrados tangente y cotangente	18
4. El complejo de de Rham	22
5. Fibrados tangente y cotangente de una variedad	25
6. El complejo de de Rham	26
7. Variedades complejas	27
8. El complejo de Dolbeault	30
9. $T^*\mathcal{M}$ como variedad simpléctica	31
10. Fibrados vectoriales	33
Capítulo III. Operadores pseudodiferenciales	37
1. Notación y definiciones	37
2. Operadores elípticos	38
3. Paramétrices de operadores elípticos	39
4. Operadores pseudodiferenciales	46
5. Paramétrices de operadores diferenciales elípticos	54
6. Espacios de funciones	56
7. Continuidad	60
8. Composición	68
9. Acción sobre distribuciones	70
10. Pseudolocalidad	71
11. Globalización	71
12. Operadores pseudodiferenciales en variedades compactas	77
13. Operadores elípticos en variedades compactas	80

Capítulo IV. Problemas de valores de frontera	85
1. Contexto	85
2. Trazas	85
3. Transformada de Mellin	90
4. Valores de frontera: operadores diferenciales ordinarios	93
5. Valores de frontera: en general	97
6. Problemas de frontera clásicos	101
7. El proyector de Calderón	103
8. La condición de Lopatinski-Shapiro	106
9. La obstrucción de Atiyah-Bott	109
Capítulo V. Teoría de Hodge	111
1. El problema	111
2. Ejemplos: estructuras involutivas	112
3. Cohomología en L^2	116
4. Laplacianos y elipticidad	118
5. El complejo adjunto	121
6. Teoría de Hodge en variedades cerradas	124
Capítulo VI. Fórmula de Atiyah-Bott-Lefschetz	129
1. Puntos fijos y el número de Lefschetz	129
2. Triangulaciones, homología simplicial, homología singular	129
3. Complejos de espacios vectoriales de dimensión finita	133
4. El teorema de Lefschetz de Atiyah-Bott	136
Capítulo VII. El Teorema del Índice	153
1. El índice analítico	153
2. Fibrados vectoriales sobre esferas	154
3. Equivalencia de símbolos elípticos y fibrados vectoriales	156
4. Conexiones	157
5. Polinomios invariantes y el anillo de formas pares	161
6. Clases características en cohomología de de Rham	162
7. La fórmula de Atiyah-Singer	164
Capítulo VIII. La función ζ de un operador elíptico	167
1.	167
2. Potencias complejas de A	169
3. Rayos de crecimiento mínimo	173
4. Cálculos locales	177
5. La función zeta	182
6. Estimación de Weyl	184
7. Residuos de ζ_A en los enteros $< n/m$	186
8. El determinante ζ -regularizado de A	187

Capítulo IX. Análisis en variedades no compactas	189
1. El problema	189
2. Variedades con extremos cilíndricos	189
3. Cantos	201
4. Variedades de dispersión	206
Capítulo X. Análisis en variedades con singularidades	211
1. Variedades cónicas	211
2. Variedades cuneiformes	216
Bibliografía	219
Índice alfabético	223

Introducción

1. Problemas de valores de frontera

Tomemos un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ acotado, conexo, cuya frontera, $\partial\Omega$, es una unión finita de curvas de clase C^∞ . Queremos encontrar una función u definida en Ω que satisfaga

$$\Delta u = f \text{ en } \Omega,$$

donde

$$\Delta u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

y f es, para el propósito de esta discusión preliminar, una función continua definida en la clausura, $\text{cl}\Omega$, de Ω . Si u_0 es una solución (ya veremos que hay una) entonces cualquier otra es de la forma $u = u_0 + h$ con h armónica, es decir, $\Delta h = 0$. El conjunto de funciones armónicas en Ω es un espacio vectorial de dimensión infinita. Por ejemplo, todos los polinomios

$$p(x, y) = \sum_{k=0}^N a_k (x + iy)^k$$

son armónicos, y si solo queremos soluciones a valores reales podemos sumar la parte real de p (si no, sumamos p) a u_0 para obtener otra solución.

Sin embargo, si especificamos qué queremos que sean los valores de u en la frontera de Ω , encontraremos que solo hay una solución. Esta condición de frontera es la condición de Dirichlet, y el problema

$$(1.1) \quad \begin{cases} \Delta u = f \text{ en } \Omega, \\ u = g \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

es el problema de Dirichlet para el Laplaciano en Ω .

Otra condición de frontera que implica finitud de la dimensión del espacio de soluciones es la condición de Neumann, en donde en lugar de especificar el valor de u en la frontera, uno especifica el valor de la derivada normal, en los términos siguientes. Sea ν un campo vectorial definido cerca de la frontera de Ω , normal a $\partial\Omega$ y apuntando al exterior (esta última condición no es importante

pero es la convención usual). El problema de Neumann es entonces

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ en } \Omega, \\ \nu \cdot \nabla u = g \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde ∇u es el gradiente de u . La expresión $\nu \cdot \nabla u$ es la derivada normal de u (en $\partial\Omega$), $\nu \cdot \nabla u = \partial u / \partial \nu$. El problema de Neumann tiene ambigüedad en un espacio de dimensión 1: si u es una solución, entonces $u + c$ con una función constante arbitraria c también es una solución.

El tercer ejemplo clásico de condición de frontera es la condición de Robin. Sean a y b funciones arbitrarias, continuas y a valores reales en $\partial\Omega$, con $(a(p), b(p)) \neq 0$ para todo $p \in \partial\Omega$. La condición de Robin es

$$a \frac{\partial u}{\partial \nu} + bu = g \text{ en } \partial\Omega$$

con funciones a, b que no se anulan simultáneamente.

Estas tres condiciones son condiciones locales. “Local” se refiere a que los valores de la incógnita u en la frontera están siendo especificados mediante fórmulas locales. Para explicar el sentido de esto consideremos el siguiente problema:

Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unidad en \mathbb{C} centrado en el origen, y consideremos el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ en } D, \\ u = g \text{ en } \partial D. \end{cases}$$

Aquí $\partial/\partial\bar{z}$ es el operator de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Así planteado, este problema no tiene solución en general. La razón es que estamos exigiendo que u sea holomorfa (compleja-analítica) en D , lo cual implica que en cierto sentido, sus valores de frontera, si existen, deben satisfacer

$$(1.2) \quad \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = 0, \quad \text{si } n < 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por ejemplo, si

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$$

es una solución obtenemos de

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n e^{in\theta}, \quad 0 \leq r < 1, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

que

$$\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-in\theta} d\theta = 0, \quad \text{si } n < 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

si $0 < r < 1$, y pasando al límite $r \rightarrow 1^-$ obtenemos (1.2), al menos formalmente. Incidentalmente, esto trae a colación la cuestión del significado de “valor de frontera.”

Uno puede definir un problema de valores de frontera “bueno,” pero no local, para el operador de Cauchy-Riemann como sigue. Sea

$$\pi : L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$$

la proyección en el subespacio de $L^2(S^1)$ generado por las funciones $e^{in\theta}$ con $n \in \mathbb{N}_0$, es decir,

$$\pi(g)(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\varphi})e^{-in\varphi} d\varphi e^{in\theta}.$$

Sea H la imagen de π . Entonces tenemos

PROPOSICIÓN 1.3. *El problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ en } D, \\ \pi u = g \text{ en } \partial D \end{cases}$$

tiene solución única para cada $g \in H$.

DEMOSTRACIÓN. La función g tiene expansión en serie de Fourier:

$$g(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{in\theta}$$

con

$$g_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\varphi})e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Como $g \in L^2(S^1)$, $\sum |c_n|^2 < \infty$, por lo tanto $|c_n| < 1$ para todo n suficientemente grande. En consecuencia,

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n r^n e^{in\theta}$$

converge uniformemente en la región $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \leq r \leq r_0$ para cada número positivo $r_0 < 1$. Reemplazando $z = re^{i\theta}$ tenemos que la función u definida por

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$$

es holomorfa en D : $\partial u / \partial \bar{z} = 0$ en D .

Consideremos ahora las funciones $u_r : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ definida para $r \in (0, 1)$ por

$$u_r(e^{i\theta}) = u(re^{i\theta}).$$

Siendo continuas ellas pertenecen a $L^2(S^1)$. Además satisfacen

$$\pi(u_r) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n r^n e^{in\theta}$$

tautológicamente. Tenemos

$$\|g - \pi u_r\|_{L^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |g_n|^2 (1 - r^n)^2$$

Evidentemente $|g_n|^2 (1 - r^n)^2 \rightarrow 0$ para cada n cuando $r \rightarrow 1^-$, y $\| |g_n|^2 (1 - r^n)^2 \| \leq 4|g_n|^2$. Usando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue concluimos que

$$\|g - \pi u_r\|_{L^2}^2 \rightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow 1^-.$$

En este sentido, la condición $\pi(h) = g$ en ∂D es satisfecha. \square

La condición $\pi u = g$ es una condición de frontera no local. Esta condición especifica involucrando una proyección asociada al operador $(\partial/\partial\bar{z})$ en este caso) es de tipo Atiyah-Patodi-Singer.

Especificar condiciones de frontera puede ser un asunto delicado. Continuando con el operador de Cauchy-Riemann, el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ en } D, \\ u - \pi u = f \text{ en } \partial D \end{cases}$$

no tiene solución si $f \neq 0$.

También especificar demasiadas condiciones puede llevar a problemas. En el caso del Laplaciano en Ω (como al principio de esta sección), imponer a la vez condición de Dirichlet y de Neumann lleva a una situación donde existencia requiere relaciones muy rígidas entre los datos. Esto se puede entender así. Dadas f en Ω y g en $\partial\Omega$, hay una única u que resuelve el problema (1.1). Por lo tanto la derivada normal de u en $\partial\Omega$ está determinada por f y g . En consecuencia, pedir que además $\partial u/\partial\nu = g_1$ en $\partial\Omega$ requiere fijar g_1 consistentemente, pero entonces la condición es vacua. (El mapa $g \mapsto \partial u/\partial\nu|_{\partial\Omega}$ es el llamado operador Dirichlet a Neumann.)

El último ejemplo de condición de frontera simple que discutiremos en esta sección es la especificación de datos de Cauchy. Estas especifican, en el caso de un operador diferencial de orden m , la función y sus primeras $m - 1$ derivadas en la dirección normal a la frontera. Problemas de este tipo pueden o no tener solución. Como vimos arriba, en el caso del Laplaciano (orden 2) en Ω , especificar datos de Dirichlet y Neumann llevan a un problema sobredeterminado, en general sin solución. Sin embargo, ésta es una condición útil (y apropiada) en el caso de operadores de evolución, operadores en los cuales una de las variables tiene un carácter claro de ser el tiempo, y la condición se

especifica en una hipersuperficie esencialmente descrita como el gráfico de una función del tiempo con respecto a las demás variables (por ejemplo, $t = 0$).

Todas las condiciones anteriores pueden aparecer en el mismo problema, impuestas en distintas regiones de la frontera, regiones cuya unión es toda la frontera, o falla en serlo en un conjunto pequeño en algún sentido. Un problema de este tipo es un problema con condiciones mixtas.

2. Teoría de Hodge

La teoría de Hodge es un esquema general para relacionar la cohomología de ciertos complejo de operadores diferenciales con los núcleos de operadores diferenciales asociados. Explicamos esto con un ejemplo en dimensión 2 (el complejo de de Rham visto con campos vectoriales).

Sea S^1 el círculo unidad en \mathbb{R}^2 con centro en el origen y $\mathcal{M} = S^1 \times S^1$. En esta sección denotaremos por \mathcal{C}^0 el espacio de funciones $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ de clase C^∞ , por \mathcal{C}^1 el espacio $C^\infty(\Omega, \mathbb{C}^2)$, y finalmente por $\mathcal{C}^2 = C^\infty(\mathcal{M})$ (de nuevo funciones en \mathcal{M} a valores complejos). Denotamos por x, y a las funciones ángulo en cada uno de los factores de \mathcal{M} . Estas funciones están definidas solo módulo 2π , pero las derivadas $\partial/\partial x$ y $\partial/\partial y$ están bien definidas.

Definimos operadores

$$A_0 : \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{C}^1, \quad A_0 f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$A_1 : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}^2, \quad A_1 \phi = \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \text{ si } \phi = (a, b).$$

Esto es, $A_0 f$ es el gradiente de f y $A_1(a, b)$ produce el integrando en la integral doble que aparece en el Teorema de Green. Ensamblamos los operadores en una sucesión

$$(2.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{C}^0 \xrightarrow{A_0} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{A_1} \mathcal{C}^2 \rightarrow 0.$$

Esta sucesión es un complejo porque $A_1 \circ A_0 = 0$. Definiendo $A_{-1} = 0$ y $A_3 = 0$, los grupos (en realidad espacios vectoriales) de cohomología del complejo (2.1) son los espacios $H^q = \ker A_q / \text{rg } A_{q-1}$, lo cual funciona precisamente porque $A_q \circ A_{q-1} = 0$ implica $\text{rg } A_{q-1} \subset \ker A_q$. Así,

$$H^0 = \ker A_0, \quad H^1 = \ker A_1 / \text{rg } A_0, \quad H^2 = \mathcal{C}^2 / \text{rg } A_1.$$

El problema es determinar la cohomología del complejo, en particular, determinar si los espacios H^q son finito-dimensionales, en cuyo caso las respectivas dimensiones pueden estar relacionadas con propiedades topológicas de Ω . Desde el punto de vista de ecuaciones diferenciales, la presencia de cohomología no-trivial es la obstrucción a la resolubilidad del problema

dado $\beta \in \mathcal{C}^q$ con $A_q \beta = 0$, encontrar $\alpha \in \mathcal{C}^{q-1}$ tal que $A_{q-1} \alpha = \beta$.

La sucesión (2.1) no es exacta (y por eso los grupos H^q no son triviales) pero con la notación simbólica

$$\begin{aligned} a_0(\nu) : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^2, & a_0(\nu)(\gamma) &= \gamma\nu, \\ a_1(\nu) : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}, & a_1(\nu)(\alpha, \beta) &= \beta\xi - \alpha\eta \end{aligned}$$

para cada $\nu = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la sucesión

$$(2.2) \quad 0 \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{a_0(\nu)} \mathbb{C}^2 \xrightarrow{a_1(\nu)} \mathbb{C} \rightarrow 0$$

es exacta: $a_0(\nu)$ es inyectivo, $\text{rg } a_0(\nu) = \ker a_1(\nu)$, y $a_1(\nu)$ es sobreyectivo. El hecho que (2.2) es una sucesión exacta para cada $(\xi, \eta) \neq 0$ dice que (2.1) es un complejo elíptico.

Los grupos de cohomología H^q son fáciles de calcular directamente en este caso; hacemos esto en un capítulo posterior. Por ahora, siguiendo los lineamientos del caso general en Teoría de Hodge, definimos

$$\begin{aligned} A_0^* : \mathcal{C}^1 &\rightarrow \mathcal{C}^0, & A_0^* \phi &= -\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \text{ si } \phi = (a, b) \\ A_1^* : \mathcal{C}^2 &\rightarrow \mathcal{C}^1, & A_1^* \mu &= \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}, -\frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

y con ellos,

$$\begin{aligned} \square_0 : \mathcal{C}^0 &\rightarrow \mathcal{C}^0, & \square_0 &= A_0^* A_0 \\ \square_1 : \mathcal{C}^1 &\rightarrow \mathcal{C}^1, & \square_1 &= A_0 A_0^* + A_1^* A_1 \\ \square_2 : \mathcal{C}^2 &\rightarrow \mathcal{C}^2, & \square_2 &= A_1 A_1^* \end{aligned}$$

Estos son operadores diferenciales de segundo orden. Sea \mathcal{H}^q el núcleo de \square_q . El Teorema de Hodge afirma que \mathcal{H}^q es isomorfo a H^q de manera natural. La base de la demostración es la existencia de operadores

$$G_q, \Pi_q : \mathcal{C}^q \rightarrow \mathcal{C}^q$$

tales que

$$\square_q G_q = G_q \square_q = I - \Pi_q, \quad G_{q+1} A_q = A_q G_q, \quad G_q A_q^* = A_q^* G_{q+1}$$

donde Π_q es la proyección ortogonal en \mathcal{H}^q respecto a los productos internos en \mathcal{C}^q definidos por

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_0 &= \int_{\mathcal{M}} u \bar{v} \, d\lambda, & u, v &\in \mathcal{C}^0 \\ \langle \phi, \psi \rangle_1 &= \int_{\mathcal{M}} \phi \cdot \bar{\psi} \, d\lambda, & \phi, \psi &\in \mathcal{C}^1 \\ \langle \mu, \nu \rangle_2 &= \int_{\mathcal{M}} \mu \bar{\nu} \, d\lambda, & \mu, \nu &\in \mathcal{C}^2 \end{aligned}$$

con $d\lambda$ la medida de Lebesgue y el producto interno en la definición de $\langle \phi, \psi \rangle_1$ tal que la forma es sesquilineal. Con estos productos internos tenemos

$$\langle A_q \theta, \zeta \rangle_{q+1} = \langle \theta, A_q^* \psi \rangle_q, \theta \in \mathcal{C}^q, \zeta \in \mathcal{C}^{q+1}$$

en todos los casos. De hecho, A_q^* se define de manera que esta propiedad sea válida. Escribimos $\| \cdot \|_q$, $q = 0, 1, 2$, para las respectivas normas. Definiendo $A_0^* = 0$, $A_2^* = 0$ tenemos

$$\square_q = A_q^* A_q + A_{q-1} A_{q-1}^*$$

para todo q .

Con estos operadores procedemos de la siguiente manera. Si $\theta \in \mathcal{H}^q$, entonces

$$0 = \langle \square_q \theta, \theta \rangle_q = \langle A_q^* A_q \theta + A_{q-1} A_{q-1}^* \theta, \theta \rangle_q = \|A_q \theta\|_{q+1}^2 + \|A_{q-1}^* \theta\|_{q-1}^2.$$

Por lo tanto, $A_q \theta = A_{q-1}^* \theta = 0$. En particular, $\mathcal{H}^q \subset \ker A_q$ y podemos hablar de la clase $[\theta] \in H^q$ de θ ; tenemos un mapa

$$(2.3) \quad \mathcal{H}^q \ni \theta \mapsto [\theta] \in H^q.$$

Si por otro lado $[\theta] \in \mathcal{H}^q$, entonces $\theta = \Pi_q + \square_q G_q \theta$. Usando la definición de \square_q , las propiedades de G_q y que $A_q \theta = 0$ obtenemos de esto que

$$\theta = \Pi_q \theta + A_q^* G_{q+1} A_q \theta + A_{q-1} G_{q-1} A_q^* \theta = \Pi_q \theta + A_{q-1} G_{q-1} A_q^* \theta$$

y por lo tanto la clase de θ módulo $\text{rg } A_{q-1}$ es igual a la de $\Pi_q \theta$. Esto prueba que el mapa (2.3) es invertible.

La compacidad de \mathcal{M} y la elipticidad del complejo (la sucesión (2.2) es exacta) implican la existencia de los operadores G_q y la finitud de la dimensión de los espacios \mathcal{H}^q .

De hecho, en este ejemplo, \mathcal{H}^0 es el subespacio de \mathcal{C}^0 formado por las funciones constantes, $\mathcal{H}^1 \subset \mathcal{C}^1$ consiste de los pares de funciones constantes, y $\mathcal{H}^2 \subset \mathcal{C}^2$ también está conformado por las funciones constantes. Para ver esto notamos que \square_0 y \square_2 son ambos el operador de Laplace,

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

y \square_1 actúa como Δ en cada factor. Así, para determinar $\ker \square_q$ solo tenemos que calcular $\ker \Delta$, para lo cual usamos series de Fourier.

Si $u \in C^\infty(\mathcal{M})$, entonces, con

$$u_{mn} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int u(e^{ix}, e^{iy}) e^{-i(mx+ny)} dx dy$$

tenemos

$$(2.4) \quad u = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} u_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

con convergencia uniforme, también con derivadas de cualquier orden. Aplicando Δ tenemos

$$\Delta u = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (m^2 + n^2) u_{mn} e^{i(mx+ny)}$$

y por lo tanto, si $u \in \ker \Delta$, entonces $u = u_{00}$.

3. El número de Lefschetz y la fórmula de Atiyah-Bott

Continuamos con el complejo y la notación de la sección anterior. Sea $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ una función C^∞ : las funciones $X = x \circ f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, $Y = y \circ f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ (definidas localmente cerca de cualquier punto, globalmente solo módulo 2π) son de clase C^∞ . Definimos $f_q^* : \mathcal{C}^q \rightarrow \mathcal{C}^q$, $q = 0, 1, 2$, por

$$(f_0^* u)(p) = u(f(p)), \quad u \in \mathcal{C}^0$$

$$(f_1^* \phi)(p) = \left(a(f(p)) \frac{\partial X}{\partial x}(p) + b(f(p)) \frac{\partial Y}{\partial x}(p), a(f(p)) \frac{\partial X}{\partial y}(p) + b(f(p)) \frac{\partial Y}{\partial y}(p) \right),$$

$$\phi \in \mathcal{C}^1, \quad \phi = (a, b)$$

$$(f_2^* \mu)(p) = \left(\frac{\partial X}{\partial x}(p) \frac{\partial Y}{\partial y}(p) - \frac{\partial X}{\partial y}(p) \frac{\partial Y}{\partial x}(p) \right) \mu(\phi(p)), \quad \mu \in \mathcal{C}^2$$

Con estas definiciones,

$$f_{q+1}^* A_q = A_q f_q^*,$$

lo cual implica que $f_q^* \ker A_q \subset \ker A_q$, $f_q^* \operatorname{rg} A_{q-1} \subset \operatorname{rg} A_{q-1}$. Por lo tanto, f_q determina un mapa $\mathbf{f}_q^* : H^q \rightarrow H^q$ para cada q . Como los espacios H^q son de dimensión finita, no hay dificultad alguna en definir la traza de los operadores \mathbf{f}_q^* . El número de Lefschetz [44] de f es

$$L_f = \sum_{q=0}^2 (-1)^q \operatorname{tr} \mathbf{f}_q^*.$$

Lefschetz prueba que si $L_f \neq 0$, entonces f tiene al menos un punto fijo. El número de Lefschetz es inherentemente global, porque los espacios H^q son objetos de naturaleza global. En el caso en que f es un difeomorfismo con puntos fijos no-degenerados (en un momento definimos esto último), la fórmula de Atiyah-Bott calcula otra cantidad en cada uno de los puntos fijos y establece la igualdad de la suma de estos y el número de Lefschetz. Esa otra cantidad puede calcularse por métodos analíticos, como un límite, sin necesidad de información *a priori* sobre la existencia de puntos fijos.

Damos más detalles. Con cada $\theta \in \mathcal{C}^q$ tenemos un mapa

$$\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{C}^{k_q}, \quad p \mapsto \boldsymbol{\theta}(p) = (p, \theta(p))$$

($k_0 = 1$, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$). Usando que f es un difeomorfismo definimos

$$\mathbf{f}_q^* : \mathcal{M} \times \mathbb{C}^{k_q} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{C}^{k_q}, \quad \mathbf{f}_q^*(p, \vartheta) = (f^{-1}(p), \vartheta \cdot \Phi_q(f^{-1}(p)))$$

donde (con $p' = f^{-1}(p)$) $\vartheta \cdot \Phi_q(p')$ es multiplicación del elemento $\vartheta \in \mathbb{C}^{k_q}$ por la matriz $k_q \times k_q$ dada por

$$\begin{aligned}\Phi_0(p') &= 1 \\ \Phi_1(p') &= \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}(p') & \frac{\partial X}{\partial y}(p') \\ \frac{\partial Y}{\partial x}(p') & \frac{\partial Y}{\partial y}(p') \end{bmatrix} \\ \Phi_2(p') &= \frac{\partial X}{\partial x}(p') \frac{\partial Y}{\partial y}(p') - \frac{\partial X}{\partial y}(p') \frac{\partial Y}{\partial x}(p')\end{aligned}$$

La relación entre f_q^* y \mathbf{f}_q^*

$$\mathbf{f}_q^*(\theta(f(p))) = (p, (f_q^*\theta)(p)), \quad \theta \in \mathcal{C}^q.$$

El punto es que si p_0 es un punto fijo de f , entonces \mathbf{f}_q^* mapea $p_0 \times \mathbb{C}^{k_q}$ en si mismo, actuando linealmente en el factor \mathbb{C}^{k_q} vía $\Phi_q(p_0)$. Por lo tanto, tiene sentido calcular la traza de $\mathbf{f}_q^*(p_0)$.

Para completar el cálculo aclaramos lo que significa que p_0 sea un punto fijo no-degenerado. Si $p_0 \in \mathcal{M} = S^1 \times S^1$ corresponde a los ángulos (x_0, x_1) y p es un punto cerca de p_0 correspondiente a los ángulos (x, y) , entonces $f(p)$ corresponde a los ángulos $(X(p), Y(p))$ y

$$\begin{bmatrix} X(p) - x_0 \\ Y(p) - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial X}{\partial y}(p_0) \\ \frac{\partial Y}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial Y}{\partial y}(p_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

módulo términos de orden $\mathcal{O}((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)$. En esta fórmula, la matriz es el Jacobiano, $J_{p_0}(f)$, de f en p_0 (también es $\Phi_1(p_0)$, de una manera distinta). Para que p_0 sea un punto no-degenerado, se requiere que $I - J_{p_0}(f)$ sea no singular:

$$\det(I - J_{p_0}f) \neq 0.$$

La fórmula de Atiyah-Bott para el número de Lefschetz de f , en el ejemplo que estamos describiendo, es

$$(3.1) \quad L_f = \sum_{p_0 \in \text{Fix } f} \sum_{q=0}^2 \frac{(-1)^q \text{tr}(\Phi_q(p_0))}{|\det(I - J_{p_0}(f))|}$$

En este ejemplo, el lado derecho de la fórmula se puede calcular directamente, y resulta ser $\# \text{Fix } f$.

Para calcular el lado derecho en (3.1) usamos el operador del calor asociado a cada uno de los operadores \square_q . El operador del calor asociado a \square_q es el operador

$$C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C}^{k_q}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{k_q}), \quad u \mapsto v$$

(donde $C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{C}^{k_q}) = \mathcal{C}^q$) que produce la solución u del problema

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \square_q v = 0, \quad v|_{t=0} = u$$

dado el dato u . Usualmente este operador se representa como $e^{-t\square_q}$. Existe una función

$$K_q : \mathcal{M} \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{M} \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{k_q} \times \mathbb{C}^{k_q})$$

de clase C^∞ (el núcleo de Schwartz de $e^{-t\square_q}$, llamado el núcleo del operador del calor) tal que

$$u(p, t) = \int_{\mathcal{M}} K_q(p, t, p') v(p') d\lambda(p')$$

con $d\lambda = dx dy$. Restringiendo a $\{(p, t, p) : p \in \mathcal{M}, t > 0\}$, como $K_q(p, t, p) \in \text{End}(\mathbb{C}^{k_q} \times \mathbb{C}^{k_q})$, podemos tomar la traza, y obtenemos una función a valores complejos. Denotamos

$$\begin{aligned} \text{tr } e^{-t\square_q} &= \text{tr } K_q(p, t, p) d\lambda(p) \\ \text{Tr } e^{-t\square_q} &= \int_{\mathcal{M}} \text{tr } K_q(p, t, p) d\lambda(p). \end{aligned}$$

La segunda fórmula es la traza del operador del calor (usualmente llamada la traza del calor). También tenemos que $f_q^* h : \mathcal{M} \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{M} \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{k_q} \times \mathbb{C}^{k_q})$ es de clase C^∞ , y su restricción a $\{(p, t, p) : p \in \mathcal{M}, t > 0\}$ es un mapa con imagen en $\text{End}(\mathbb{C}^{k_q} \times \mathbb{C}^{k_q})$. Tomando traza e integrando obtenemos

$$\text{Tr } f_q^* e^{-t\square_q} = \int_{\mathcal{M}} f_q^* K_q(\cdot, t, p)(p) d\lambda(p)$$

con la notación indicando que f_q^* actúa en la primera variable de K_q .

Más tarde probaremos que

$$L_f = \sum (-1)^q \text{Tr } f_q^* e^{-t\square_q}.$$

Esto no es difícil. Algo más delicado es

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \text{Tr } f_q^* e^{-t\square_q} = \frac{(-1)^q \text{tr}(\Phi_q(p_0))}{|\det(I - J_{p_0}(f))|}.$$

La demostración de (3.1) en [6] sigue el mismo patrón pero no usa el operador del calor. La idea de usar el operador del calor en este contexto aparece por primera vez en [40].

Usando series de Fourier tenemos que

$$K(p, t, p') = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{-t(m^2 + n^2)} e^{i(m(x-x') + n(y-y'))},$$

$$p = (e^{ix}, e^{iy}), \quad p' = (e^{ix'}, e^{iy'}), \quad t > 0,$$

tenemos $K_0 = K = K_2$ y

$$K_1 = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}.$$

4. La función ζ de un operador elíptico

La función ζ de Riemann es la función inicialmente definida para $s \in \mathbb{C}$, $\Re s > 1$ por la fórmula

$$\zeta_{\mathbb{R}}(s) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^s}.$$

Esta puede verse como la función

$$\frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\ell}^{s/2}}$$

donde los λ_{ℓ} son los autovalores $\neq 0$ del operador $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ actuando sobre funciones en el círculo unidad S^1 , repetidos de acuerdo con la dimensión del autoespacio: los autovalores son $\lambda_{\ell} = \ell^2$ y las funciones $u_{\pm\ell} = e^{\pm i\ell x}$ forman una base del autoespacio correspondiente a λ_{ℓ} , $\ell = 1, 2, \dots$ (el número 0 también ocurre como autovalor, el autoespacio es generado por la función constante 1).

En general es de interés, por sus aplicaciones, estudiar la función que resulta insertando los autovalores de otros operadores elípticos A (con condiciones de frontera según el caso). Bajo condiciones con las cuales los autovalores repetidos según multiplicidad forman una sucesión creciente $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, con $\lambda_{\ell} \rightarrow \infty$ suficientemente rápido, la función es

$$\zeta_A(s) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\ell}^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \Re s \gg 1.$$

Es frecuentemente el caso que ζ_A tiene una extensión meromorfa a todo \mathbb{C} con polos en el eje real. Los dos aspectos más relevantes son el primer polo en el eje real y la posible ausencia de un polo en $s = 0$.

El primer polo (el polo con parte real más grande) ocurre en $s_0 = n/m$ donde m es el orden del operador y n la dimensión del dominio de las funciones sobre las cuales actúa A . La serie converge para $\Re s > s_0$. La relevancia del residuo proviene de su relación con la fórmula asintótica de Weyl:

$$(4.1) \quad \#\{\ell : \lambda_{\ell} \leq \lambda\} \approx \frac{m \operatorname{Res}(\zeta_A; m/n)}{n} \lambda^{n/m}$$

Por otro lado, el lado derecho se puede calcular con métodos analíticos, con los cuales el coeficiente resulta ser un número relacionado con la geometría/topología subyacente y el operador mismo.

Ilustramos esto en el caso de $-\partial^2/\partial x^2$ en S^1 visto como mapa del espacio ortogonal a las funciones constantes en si mismo (para eliminar de consideración el autovalor 0 en este ejemplo). Denotemos este operador por A_0 . Tenemos

$$\zeta_{A_0}(s) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2}{\ell^{2s}} = 2\zeta_{\mathbb{R}}(2s)$$

porque los autovalores son $1, 1, 2^2, 2^2, 3^2, 3^2, \dots$ (recordar que hay que incluir la multiplicidad). Usando lo que sabemos de $\zeta_{\mathbb{R}}$, vemos que esta serie converge cuando $\Re s > 1/2$, tiene un polo simple en $1/2$ ($\dim S^1 = 1$, $\text{ord } A_0 = 2$) con residuo 1, y una extensión meromorfa a todo \mathbb{C} con un solo polo. Por otro lado,

$$\begin{aligned} N_{A_0}(\lambda) &= \#\{\ell : \lambda_{\ell} \leq \lambda\} = \#\{\ell : \sqrt{\lambda_{\ell}} < \sqrt{\lambda}\} \\ &= 2\#\{\ell : \ell \leq \sqrt{\lambda}\} \in (2\sqrt{\lambda} - 1, 2\sqrt{\lambda}] \end{aligned}$$

(el factor 2 debido a la multiplicidad) y por lo tanto

$$N_{A_0}(\lambda) \approx 2\lambda^{-1}$$

lo cual está de acuerdo con (4.1) porque $m/n=2$. El cómputo analítico del coeficiente lleva a la fórmula

$$\frac{1}{2\pi} \text{área}(S^1 \times \{\xi \in \mathbb{R} : \xi^2 < 1\}).$$

para el coeficiente. Como el área es 4π , el número que resulta es 2.

Posiblemente la primera aparición de la función ζ asociada a un operador diferencial es en un artículo de T. Carleman [12]. En ese artículo, Ω es un conjunto abierto acotado en el plano cuya frontera consiste de curvas de clase C^2 a trozos (“arcos con curvatura continua”), los números λ_{ℓ} son aquellos para los cuales hay una solución no nula del problema

$$\Delta u - \lambda u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Ordenemos los autovalores como sucesión creciente, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, repitiendo un autovalor según su multiplicidad y tomamos una base ortonormal de autofunciones ϕ_k a valores reales,

$$\int_{\Omega} \phi_k \phi_{\ell} d\lambda(p) = \delta_{k\ell}$$

correspondientes a los λ_k . Carleman usa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-s} \phi_k(p)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda \phi_k(p)^2}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} \lambda^{-s} d\lambda$$

con γ la curva $\Re \lambda = a$, $0 < a < \lambda_1$ para obtener una fórmula asintótica para los autovalores usando el Teorema Tauberiano de Wiener-Ikehara [32].

La otra aplicación importante aprovecha la extensión meromorfa de ζ_A en ausencia de un polo en $s = 0$ para definir un determinante para el operador

A. La motivación proviene del caso en dimensión finita. Supongamos por un momento que A es una matriz Hermitiana ($A = \overline{A}^\dagger$) actuando como operador $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ de la manera usual. Supongamos que los autovalores, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, son estrictamente positivos. El determinante de A es $\lambda_1 \cdots \lambda_N$, y

$$\log \det A = \sum_{\ell=1}^N \log \lambda_\ell = - \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{\lambda_\ell^s}$$

y por lo tanto,

$$\det A = e^{-\zeta'_A(0)}.$$

Volviendo al caso de un operador diferencial A , si este admite una función ζ con extensión meromorfa sin singularidad en 0, la misma fórmula define el así llamado determinante ζ -regularizado de A . En el ejemplo A_0 , usando $\zeta'_R(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi$ y $\zeta_{A_0}(s) = 2\zeta_R(2s)$,

$$\zeta'_{A_0}(0) = 4\zeta'(0) = -2 \log 2\pi$$

y por lo tanto $\det A_0 = (2\pi)^2$.

Variedades y fibrados vectoriales

1. Introducción

Vimos varios ejemplos de problemas con operadores diferenciales donde el dominio de las funciones sobre las que actúa el operador es un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 con frontera suficientemente regular (suficientemente diferenciable), o $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, o $S^1 \times S^2 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$. En general, queremos (más aún, estamos obligados) a trabajar con funciones definidas en conjuntos como los dos últimos, incluso si lo único que queremos es estudiar problemas de valores de frontera en conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n , porque la frontera misma es uno de esos conjuntos.

En general los dominios de interés son variedades de clase C^∞ (tal vez pasando a una extensión apropiada), pero siempre podemos suponer que ellos son subconjuntos de algún espacio euclídeo de dimensión suficientemente alta. (En general, una variedad abstracta de dimensión n puede ser presentada [82, 83] como una subvariedad de \mathbb{R}^{2n} ; el primero de esos artículos es un resumen del segundo.)

Los dos teoremas fundamentales son el Teorema de la Función Implícita y el Teorema de la Función Inversa:

TEOREMA 1.1 (Teorema de la Función Implícita). *Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ entornos de 0 y $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^k con $k \geq 1$ y $F(0) = 0$. Si la matriz Jacobiana de F en 0 es no-singular, entonces hay entornos $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ y $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ de 0 tales que*

$$F|_{\mathcal{U}'} : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{V}'$$

es un difeomorfismo de clase C^k .

TEOREMA 1.2 (Teorema de la Función Implícita). *Sean $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, $p_0 \in \mathcal{W}$, y $F : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ una función de clase C^k con $k \geq 1$ y $F(p_0) = 0$. Si la matriz Jacobiana de F en p_0 tiene rango $N - n$, entonces hay una proyección ortogonal $\pi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ con imagen de dimensión n y conjuntos abiertos $\mathcal{U} \subset \pi(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{W} \subset \pi(\mathbb{R}^N)^\perp$ y una función $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ de clase C^k tales que: $\mathcal{W}' = \{x + y : x \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{V}\} \subset \mathcal{W}$, y si $x + y \in \mathcal{W}'$ con $x \in \pi(\mathbb{R}^N)$, $y \in \pi(\mathbb{R}^N)^\perp$, entonces $F(x + y) = 0 \iff y = f(x)$.*

2. Variedades

Una subvariedad (propia) de \mathbb{R}^N de dimensión n y clase C^∞ es un subconjunto $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$ tal que para cada $p_0 \in \mathcal{X}$ existe un entorno $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^N$ de p_0 y una función $F : \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ de clase C^∞ tal que

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{W} = \{p \in \mathcal{W} : F(p) = 0\}$$

cuya matriz Jacobiana tiene rango $N - n$. En lo sucesivo, si queremos referirnos a \mathcal{X} sin importar el espacio euclídeo ambiente, nos referiremos a ella como una variedad, y omitimos la especificación de que ella sea de clase C^∞ .

Por ejemplo, S^1 , el círculo en el plano con centro 0 y radio 1 es una subvariedad de \mathbb{R}^2 , porque es el conjunto de ceros de la función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$, la cual además tiene matriz Jacobiana

$$J_x F = [2x_1 \quad 2x_2]$$

en $x = (x_1, x_2)$, de rango 1 (rango máximo) cuando x pertenece a un entorno apropiado (por ejemplo $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$) de S^1 .

Otro ejemplo es la frontera de un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si Ω es acotado, su frontera es un conjunto compacto que bien puede ser una subvariedad de clase C^∞ de \mathbb{R}^n , de dimensión $n - 1$. En este caso, el teorema de la función implícita permite describir un entorno de cada punto de $\partial\Omega$ como el gráfico, con las coordenadas ordenadas convenientemente, de una función de un conjunto abierto de \mathbb{R}^{n-1} a \mathbb{R} .

Con p_0 , \mathcal{W} , y F como antes, podemos escoger n funciones entre las funciones coordenadas $y_j : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, N$, tales que ellas, denotadas x_1, \dots, x_n y las funciones coordenadas F_j de F tienen gradientes independientes en p_0 , y por lo tanto el mapa

$$p \mapsto \Phi(p) := (F_1(p), \dots, F_{N-n}(p), x_1(p), \dots, x_n(p))$$

es un difeomorfismo de un entorno $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^N$ de p_0 en uno de $\Phi(p_0)$. La restricción a $\mathcal{U} = \mathcal{U}' \cap M$ de $\phi = (x_1, \dots, x_n)$ es una carta local; ϕ es un homeomorfismo de \mathcal{U} en un conjunto abierto $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$, y dos funciones $\phi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1$ y $\phi_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{V}_2$ construidas de esta manera satisfacen

Si $\phi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1$ y $\phi_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{V}_2$ son miembros de \mathcal{F} , entonces

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \phi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \rightarrow \phi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$$

es de clase C^∞ .

La colección de tales funciones $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ asociadas a \mathcal{X} es un atlas de \mathcal{X} .

La subvariedad \mathcal{X} es un ejemplo de variedad de clase C^∞ (i.e., suave). En general:

DEFINICIÓN 2.1. *Una variedad topológica de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff paracompacto en el cual cada punto tiene un entorno homeomorfo a un conjunto abierto en \mathbb{R}^n . Una variedad suave, o de clase C^∞ ,*

es una variedad topológica \mathcal{X} junto con una familia $\mathcal{F} = \{\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}\}$ de homeomorfismos de conjuntos abiertos de \mathcal{X} en conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n cuyos dominios cubren \mathcal{X} , con la propiedad

$$(2.2) \quad \text{Si } \phi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1 \text{ y } \phi_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{V}_2 \text{ son miembros de } \mathcal{F}, \text{ entonces} \\ \phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \phi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \rightarrow \phi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$$

es de clase C^∞ .

Los elementos de \mathcal{F} son cartas locales, las componentes (funciones coordenadas) de un elemento de \mathcal{F} se llaman coordenadas locales. El teorema de Whitney afirma que toda variedad C^∞ (o C^k) puede presentarse como subvariedad de algún espacio euclídeo.

Con \mathcal{X} y F como en la definición de subvariedad de \mathbb{R}^N de dimensión n y la notación del Teorema 1.2, la función $x \mapsto x + f(x)$ es un mapa biyectivo de \mathcal{U} en $\mathcal{W}'' = \mathcal{W}' \cap \mathcal{X}$ de clase C^k . La función inversa es $p \mapsto \pi(p)$, definida para $p \in \mathcal{W}''$. Esta función inversa tiene una extensión obvia a \mathcal{W}' , la cual, por ser lineal, es de clase C^k (de hecho C^∞ , incluso analítica).

DEFINICIÓN 2.3. Sea \mathcal{X} una subvariedad de \mathbb{R}^N de clase C^∞ y dimensión n . Sea \mathcal{W}'' un conjunto abierto de \mathcal{X} . Una parametrización de \mathcal{W}'' es un mapa biyectivo de clase C^∞ de un conjunto abierto $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^n$ en \mathcal{W}'' cuya inversa tiene una extensión de clase C^∞ a un conjunto abierto $\mathcal{W}' \subset \mathbb{R}^N$ con $\mathcal{W}'' = \mathcal{W}' \cap \mathcal{X}$.

La parametrización descrita antes de la definición exhibe \mathcal{W}' como el gráfico de una función $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, interpretando (con la notación del teorema) $\pi(\mathbb{R}^N)$ como espacio de abscisas y $\pi(\mathbb{R}^N)^\perp$ como espacio de ordenadas.

Ocasionalmente la inversa de una carta local de una variedad abstracta también es llamada una parametrización.

Continuando con la notación del párrafo que precede la definición, tomando un isomorfismo lineal $\theta : \pi(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ obtenemos un nuevo mapa biyectivo $\theta(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{W}''$,

$$\theta(\mathcal{U}) \ni x' \mapsto \theta^{-1}(x') + f(\theta^{-1}(x')) \in \mathcal{W}''$$

con inversa $\theta \circ \pi|_{\mathcal{W}''}$. De nuevo este último mapa tiene una extensión suave a \mathcal{W}' , y es por lo tanto una parametrización de \mathcal{W}''

LEMA 2.4. Sea \mathcal{X} una subvariedad de \mathbb{R}^N de dimensión n y $p_0 \in \mathcal{X}$. Hay un entorno $\mathcal{W}' \subset \mathbb{R}^N$ de p_0 , un entorno $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ de 0 y un difeomorfismo $H : \mathcal{W}' \rightarrow \mathcal{V}$ tal que $H(\mathcal{W}' \cap \mathcal{X}) = \{x \in \mathcal{V} : x_{n-1} = \dots = x_n = 0\}$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\mathcal{X} \cap \mathcal{W}$ es el conjunto de ceros de $F : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ (un mapa con matrix Jacobiana de rango $N-n$) y $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$, π , \mathcal{U} , \mathcal{V} y f son como en el Teorema 1.2, tomemos un isomorfismo $\theta : \pi(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Definimos

$$H : \theta(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^{N-n} \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

$$H(x, y) = \theta^{-1}x + f(\theta^{-1}x) + \sum y_j \nabla F_j(\theta^{-1}x + f(\theta^{-1}x)).$$

La matriz Jacobiana de H es invertible en 0, y por lo tanto G define un difeomorfismo de un entorno de 0 en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$ en uno de p_0 en \mathbb{R}^N . Evidentemente $G(x, 0) \in \mathcal{X} \cap \mathcal{W}$. \square

DEFINICIÓN 2.5. Una función $u : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es suave (de clase C^∞) si para cada parametrización $G : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ se tiene que $u \circ G$ es de clase C^∞ .

También necesitaremos trabajar en variedades con borde. La definición es similar a la de variedad normal, la única diferencia es que el modelo es $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ y no \mathbb{R}^n :

DEFINICIÓN 2.6. Una variedad topológica con borde es un espacio topológico Hausdorff paracompacto \mathcal{X} en el cual cada punto tiene un entorno homeomorfo a un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$. Una variedad suave, o de clase C^∞ , con borde es una variedad topológica con borde \mathcal{X} junto con una familia $\mathcal{F} = \{\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}\}$ de homeomorfismos de conjuntos abiertos de \mathcal{X} en conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ cuyos dominios cubren \mathcal{X} , con la propiedad (2.2). La dimensión de \mathcal{X} es n .

Igual que antes, los elementos de \mathcal{F} son las cartas locales y las componentes (funciones coordenadas) de un elemento de \mathcal{F} son coordenadas locales. La frontera de \mathcal{M} es el conjunto, \mathcal{Y} , de puntos de \mathcal{M} con la propiedad que cualquiera de sus entornos es homeomorfo a un entorno en $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ de un punto en $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. La frontera de \mathcal{M} es una variedad (sin borde) de dimensión $n-1$. Las cartas locales de \mathcal{Y} son las restricciones de los elementos de \mathcal{F} a \mathcal{Y} .

3. Fibrados tangente y cotangente

Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Un vector tangente a Ω en $p \in \Omega$ es un par (p, v) con $v \in \mathbb{R}^n$ considerado como elemento del espacio vectorial \mathbb{R}^n . En general es más razonable, sobre todo si nuestro interés está en ecuaciones diferenciales, ver a (p, v) a través de su acción sobre funciones: identificar (p, v) con el operador

$$f \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + tv),$$

es decir, con

$$(3.1) \quad \sum_{j=1}^n v_j \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p, \quad v = (v_1, \dots, v_n).$$

El conjunto de tales objetos, denotado $T_p\Omega$, es un espacio vectorial, el espacio tangente a Ω en p . Los $\partial/\partial x_j|_p$, $j = 1, \dots, n$, forman una base. Denotemos simplemente por v al elemento (3.1).

Los espacios $T_p\Omega$ y $T_{p'}\Omega$ son disjuntos si $p \neq p'$. Escribimos

$$T\Omega = \bigsqcup_{p \in \Omega} T_p\Omega.$$

Equipado con la proyección canónica $\pi : T\Omega \rightarrow \Omega$, este es un ejemplo de fibrado vectorial (aunque trivial en el sentido usual y también en el técnico), en este caso el fibrado tangente de Ω . Evidentemente la preimagen de $p \in \Omega$ por la proyección es un espacio vectorial, a veces llamado “la fibra sobre p .”

Un campo vectorial en Ω es una función $X : \Omega \rightarrow T\Omega$ tal que $X(p) \in T_p\Omega$ para todo $p \in \Omega$. Por lo tanto, si X es un campo vectorial, entonces

$$X(p) = \sum_{j=1}^n v_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p$$

con ciertas funciones $v_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que X es de clase C^∞ o suave si las funciones v_j son de clase C^∞ . El conjunto de campos vectoriales suaves en Ω es denotado $C^\infty(\Omega; T\Omega)$. El es un espacio vectorial real, también un módulo sobre el anillo $C^\infty(\Omega)$. Cada campo vectorial es un operador diferencial. Campos vectoriales son ejemplos de secciones de un fibrado vectorial: $X : \Omega \rightarrow T\Omega$ es un campo vectorial si y solo si $\pi \circ X = I$.

Si $X, Y \in T\Omega$, definimos $[X, Y]$, el corchete de Lie de X e Y , como el operador diferencial

$$C^\infty(\Omega) \ni f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Si

$$X = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad Y = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

y $f \in C^\infty(\Omega)$, entonces

$$[X, Y]f = \sum_{j=1}^n \left(v_k \frac{\partial w_j}{\partial x_k} - w_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

lo cual nos dice que $[X, Y]$ es de nuevo un campo vectorial. Es evidente que

$$(3.2) \quad [Y, X] = -[X, Y].$$

También es verdad que si Z es otro campo vectorial, entonces

$$(3.3) \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Probar esto, la identidad de Jacobi, es fácil pero tedioso. Las propiedades (3.2), (3.3), junto con la bilinealidad sobre \mathbb{R} de $X, Y \mapsto [X, Y]$ hacen de esta operación un corchete de Lie, y de $C^\infty(\Omega; T\Omega)$, un álgebra de Lie.

A veces es conveniente, incluso necesario, trabajar con campos vectoriales con coeficientes complejos. En este caso, los campos vectoriales son secciones de la complexificación, fibra a fibra, de $T\Omega$. La notación que usaremos para la complexificación es $\mathbb{C}T\Omega$. Todo lo que hemos dicho hasta ahora para $T\Omega$ vale también para $\mathbb{C}T\Omega$, incluyendo el corchete de Lie.

Si f es una función de clase C^1 definida cerca de p , la función

$$T_p\Omega \ni v = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \mapsto v(f) = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$$

(con p fijo) es lineal, y por lo tanto define un elemento del espacio vectorial dual a $T_p\Omega$. Este espacio dual es denotado $T_p^*\Omega$, y el elemento definido por f es df_p (a veces $df(p)$, pero con frecuencia omitimos p):

$$\langle df, v \rangle = v(f), \quad v \in T_p\Omega.$$

Como en el caso del fibrado tangente, los espacios $T_p\Omega$ y $T_{p'}\Omega$ son disjuntos si $p \neq p'$ y escribimos

$$T^*\Omega = \bigsqcup_{p \in \Omega} T_p^*\Omega.$$

Denotando de nuevo la proyección canónica $\pi : T^*\Omega \rightarrow \Omega$, este es el fibrado cotangente de Ω . Sus secciones, los mapas $\alpha : \Omega \rightarrow T^*\Omega$ tales que $\pi \circ \alpha = I$, son 1-formas.

Si $x_1, \dots, x_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son las funciones coordenadas usuales de \mathbb{R}^n vistas como funciones en Ω , los elementos $dx_1, \dots, dx_n : T_p\Omega$ satisfacen

$$\langle dx_k, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \rangle = \delta_{jk},$$

ellos son los elementos de la base dual a la base $\partial/\partial x_j|_p$, $j = 1, \dots, n$. Cada 1-forma α se puede escribir en términos de los dx_j :

$$\alpha(p) = \sum a_j(p) dx_j(p)$$

con funciones $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que α es de clase C^∞ o suave, si estas funciones son de clase C^∞ . El conjunto de 1-formas suaves en Ω es denotado $C^\infty(\Omega; T^*\Omega)$. Este también es un espacio vectorial real y un módulo sobre el anillo $C^\infty(\Omega)$. Campos vectoriales y 1-formas son ejemplos de secciones de un fibrado vectorial.

Notemos que la fórmula

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

(omitiendo p) es una consecuencia de las definiciones, no ella misma la definición de df . El siguiente lema aprovecha esta fórmula, su relación con las filas de la matriz Jacobiana de un mapa, y el Teorema de la Función Inversa.

LEMA 3.4. *Sea $p \in \Omega$, $0 < n' < n$ un entero y $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$ una función suave. La matriz Jacobiano de F en p tiene rango máximo si y solo si los diferenciales en p de las funciones coordenadas de F son elementos independientes de $T_p^*\Omega$, en cuyo caso F es un difeomorfismo.*

LEMA 3.5. Sean $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ funciones de clase C^∞ a valores reales definidas en un entorno de $p_0 \in \Omega$ con diferenciales independientes en p_0 . Existen campos vectoriales X_1, \dots, X_n de clase C^∞ definidos en un entorno de p_0 tales que $X_j \tilde{x}_k = \delta_{jk}$ en ese entorno.

DEMOSTRACIÓN. La matriz Jacobiana de $p \mapsto (\tilde{x}_1(p), \dots, \tilde{x}_n(p))$ tiene rango máximo en p_0 y por lo tanto es invertible (es una matriz $n \times n$) en un entorno de 0. Por lo tanto, los diferenciales $d\tilde{x}_1, \dots, d\tilde{x}_n$ son independientes en un entorno \mathcal{U} de p_0 y proveen una base de $T_p^*\Omega$ para cada $p \in \mathcal{U}$. Para cada $p \in \Omega$ tomamos la base dual $X_1(p), \dots, X_n(p)$. Tenemos

$$\delta_{jk} = \langle d\tilde{x}_j, X_k \rangle = \left\langle \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_\ell} dx_\ell, X_k \right\rangle = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_\ell} \langle dx_\ell, X_k \rangle,$$

de lo cual obtenemos que la matriz $[\langle dx_\ell, X_k \rangle]$ está dada por

$$[\langle dx_\ell, X_k \rangle] = J(\tilde{x})^{-1}$$

y por lo tanto las funciones $\langle dx_\ell, X_k \rangle$ son de clase C^∞ , y por lo tanto también

$$\sum \langle dx_\ell, X_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

es un campo vectorial de clase C^∞ . Como este campo es X_j , la prueba está completa. \square

Otro hecho simple que interesa recordar es:

LEMA 3.6. Para cada $p \in \Omega$ y $\alpha \in T_p^*\Omega$ existe f de clase C^∞ tal que $df(p) = \alpha$.

Simplemente, si $\alpha = \sum_{j=1}^n a_j dx_j \in T_p^*\Omega$ ($a_j \in \mathbb{R}$), sea $f = \sum_{j=1}^p a_j x_j$, es decir, para cada $p' \in \Omega$, $f(p') = \sum a_j x_j(p')$.

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega' \subset \mathbb{R}^{n'}$ conjuntos abiertos y $F: \Omega \rightarrow \Omega'$ un mapa de clase C^∞ . Sea $p \in \Omega$. Si h es una función a valores reales definida en un entorno de $p' = F(p)$, entonces $h \circ F$ está definida cerca de p , y podemos calcular $d(h \circ F)(p)$, es decir, la función

$$v \mapsto v(h \circ F).$$

Usando la regla de la cadena vemos que el resultado depende linealmente de $dh(p')$, y solo de éste, y por lo tanto, debido al Lema 3.6, obtenemos un mapa lineal

$$dF_p^*: T_{F(p)}^*\Omega' \rightarrow T_p^*\Omega$$

El mapa dual,

$$dF_p: T_p\Omega \rightarrow T_{F(p)}\Omega'$$

es el Jacobiano de F . Las funciones coordenada x_1, \dots, x_n de \mathbb{R}^n y las funciones $y_1, \dots, y_{n'}$ de $\mathbb{R}^{n'}$ nos proveen de una base de $T_p\Omega$ (las $\partial/\partial x_j|_p$) y una de

$T_{F(p)}\Omega'$ (las $\partial/\partial y_k$). La matriz de dF_p respecto a estas bases es la matriz Jacobiana usual de F en p .

Es fácil probar que si $\Omega'' \subset \mathbb{R}^{n''}$ es abierto y $G : \Omega' \rightarrow \Omega''$ es otro mapa de clase C^∞ , entonces

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p.$$

En particular, si $\Omega'' = \Omega$ y $G \circ F = I$ cerca de p_0 , entonces $dG_{F(p_0)} \circ dF_p = I : T_{p_0}(\Omega) \rightarrow T_{p_0}(\Omega)$. En este caso dF_{p_0} es inyectiva y $dG_{F(p_0)}$ sobreyectiva.

4. El complejo de de Rham

Continuamos con un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se denota por $T_p^*\Omega \otimes T_p^*\Omega$ al espacio vectorial real cuyos elementos son las funciones bilineales

$$T_p\Omega \times T_p\Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Si $\alpha, \beta \in T_p^*\Omega$, definimos $\alpha \otimes \beta$ como el elemento de $T_p^*\Omega \otimes T_p^*\Omega$ mediante la fórmula

$$(v, w) \mapsto \alpha(v)\beta(w).$$

Si η_1, \dots, η_n es una base de $T_p^*\Omega$, entonces

$$\eta_j \otimes \eta_k, \quad 1 \leq j, k \leq n$$

forman una base de $T_p^*\Omega \otimes T_p^*\Omega$. Los elementos $\psi \in T_p^*\Omega \otimes T_p^*\Omega$ con la propiedad

$$\psi(v, w) = -\psi(w, v) \quad \text{para todo } (v, w) \in T_p\Omega \times T_p\Omega$$

forman un subespacio denotado $\bigwedge_p^2\Omega$ con base

$$\eta_j \wedge \eta_k, \quad 1 \leq j < k \leq n.$$

Aquí hemos usado la notación

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha), \quad \alpha, \beta \in T_p^*\Omega.$$

Los conjuntos $T^*\Omega \otimes T^*\Omega$ se definen como antes lo hicimos con $T\Omega$ y $T^*\Omega$, igualmente $\bigwedge^2\Omega$ y las nociones de sección y sección de clase C^∞ . Los elementos de $C^\infty(\Omega; \bigwedge^2\Omega)$ son 2-formas “suaves.”

Si $\alpha \in C^\infty(\Omega; T^*\Omega)$, entonces $\alpha = \sum a_j dx_j$. Sea

$$(4.1) \quad \beta = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \right) dx_j \wedge dx_k.$$

LEMA 4.2. *Para cada par de campos vectoriales $X, Y \in C^\infty(\Omega; T\Omega)$,*

$$2\beta(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]).$$

El punto del lema es que la forma β , aunque está definida usando coordenadas, en realidad no depende de éstas.

DEMOSTRACIÓN. Con

$$\alpha = \sum a_j dx_j, \quad X = \sum v_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad Y = \sum w_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

tenemos

$$\alpha(X) = \sum a_j v_j, \quad \alpha(Y) = \sum a_j w_j, \quad \alpha([X, Y]) = \sum a_j \left(v_k \frac{\partial w_j}{\partial x_k} - w_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right)$$

y

$$\begin{aligned} X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) &= \sum v_k \frac{\partial(\alpha_j w_j)}{\partial x_k} - \sum w_k \frac{\partial(\alpha_j v_j)}{\partial x_k} \\ &= \sum v_k w_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k} - \sum w_k v_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k} + \sum \alpha_j v_k \frac{\partial w_j}{\partial x_k} - \sum \alpha_j w_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \\ &= \sum v_k w_j \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} \right) + \sum \alpha_j \left(v_k \frac{\partial w_j}{\partial x_k} - w_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]) = \sum_{j,k=1}^n v_k w_j \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} \right).$$

Escribimos el término de la derecha como

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq j < k \leq n} v_k w_j \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} \right) + \sum_{1 \leq k < j \leq n} v_k w_j \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} v_k w_j \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} \right) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} v_j w_k \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} (v_k w_j - v_j w_k) \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$dx_j \wedge dx_k(X, Y) = \frac{1}{2}(v_j w_k - v_k w_j),$$

de lo cual obtenemos

$$\beta(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k} \right) (v_j w_k - v_k w_j).$$

Intercambiando k y j en esta última fórmula obtenemos la igualdad del lema. \square

DEFINICIÓN 4.3. *El diferencial de $\alpha \in C^\infty(\Omega, T^*\Omega)$ es la 2-forma $d\alpha$ tal que*

$$2d\alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]).$$

En general, $\bigotimes_{j=1}^k T_p^* \Omega = \overbrace{T_p^* \Omega \otimes \cdots \otimes T_p^* \Omega}^{k \text{ factores}}$ es el espacio de mapas k -lineales $\prod_{j=1}^k T_p \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in T_p^* \Omega$, definimos

$$\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k : \prod_{j=1}^k T_p \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k)(v_1, \dots, v_k) = \alpha_1(v_1) \cdots \alpha_k(v_k).$$

Similarmente se define $\alpha \otimes \beta \in \bigotimes_{j=1}^{k+\ell} T_p^* \Omega$ si $\alpha \in \bigotimes_{j=1}^k T_p^* \Omega$ y $\beta \in \bigotimes_{j=1}^{\ell} T_p^* \Omega$. Con las coordenadas usuales x_1, \dots, x_n de \mathbb{R}^n ,

$$\{dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_k} : 1 \leq i_j \leq n, j = 1, \dots, k\}$$

es una base de $\bigoplus_{j=1}^k T_p \Omega$ para cada p .

El subespacio de $\bigotimes_{j=1}^k T_p^* \Omega$ cuyos elementos son antisimétricos es $\bigwedge_p^k \Omega$. Tenemos que $\alpha \in \bigotimes_{j=1}^k T_p^* \Omega$ es un elemento de $\bigwedge_p^k \Omega$ si y solo si

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (-1)^{\text{sgn } \sigma} \alpha(v_1, \dots, v_k) \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$$

con \mathfrak{S}_k el grupo de permutaciones de $\{1, \dots, k\}$ y $\text{sgn } \sigma$ el signo de la permutación σ . El mapa

$$\text{Alt} : \bigotimes_{j=1}^k T_p^* \Omega \rightarrow \bigwedge_p^k \Omega, \quad \text{Alt}(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \frac{(-1)^{\text{sgn } \sigma}}{k!} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

es una proyección, y si $\alpha \in \bigwedge_p^k \Omega$ y $\beta \in \bigwedge_p^{\ell} \Omega$, entonces

$$\alpha \wedge \beta = \text{Alt}(\alpha \otimes \beta) \in \bigwedge_p^{k+\ell} \Omega.$$

Con las coordenadas usuales x_1, \dots, x_n de \mathbb{R}^n ,

$$\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$$

es una base de $\bigwedge_p \Omega$ para cada p . En particular, la dimensión de este espacio es $\binom{n}{k}$. Es conveniente usar la notación

$$\mathcal{I}_k = \{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in \{1, 2, \dots, n\}^k : i_j \neq i_\ell \text{ para todo } j, \ell\}.$$

Si $I \in \mathcal{I}_k$, escribimos $|I| = k$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T_p \Omega$ y $I = (i_1, \dots, i_k)$, entonces $\alpha_I = \alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k}$ si . Un elemento $\alpha \in \bigwedge_p^k \Omega$ se escribe de manera única como

$$(4.4) \quad \alpha = \sum'_{|I|=k} a_I dx_I$$

con números $a_I \in \mathbb{R}$, donde $'$ significa que la suma es solo sobre los índices ordenados $(i_1 < i_2 < \dots < i_k)$ de \mathcal{I}_k y $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

El significado de $\pi : \bigotimes_{j=1}^k T^*\Omega \rightarrow \Omega$ y $\pi : \bigwedge^k \Omega \rightarrow \Omega$ está claro. Las secciones de $\bigwedge^k \Omega \rightarrow \Omega$ son k -formas. Una k -forma es de clase C^∞ si escrita como

$$\alpha = \sum'_{|I|=k} a_I dx_I,$$

los coeficientes a_I son funciones de clase C^∞ .

El diferencial

$$d : C^\infty(\Omega; \bigwedge^k \Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega; \bigwedge^{k+1} \Omega)$$

está definido por

$$(4.5) \quad d\alpha = \sum'_{|I|=k} da_I \wedge dx_I,$$

donde da_I es el diferencial de la función α_I . Con esta fórmula es fácil probar que $d(d\alpha) = 0$ aprovechando que $d(df) = 0$ si f es una función. El complejo de de Rham en Ω es el complejo

$$0 \rightarrow C^\infty(\Omega; \mathbb{R}) \xrightarrow{d} C^\infty(\Omega; \bigwedge^1 \mathcal{X}) \rightarrow \dots \rightarrow C^\infty(\Omega; \bigwedge^{n-1} \mathcal{X}) \xrightarrow{d} C^\infty(\Omega; \bigwedge^n \mathcal{X}) \rightarrow 0$$

donde n es, como ya sabemos, la dimensión de Ω .

5. Fibrados tangente y cotangente de una variedad

Sea $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$ una subvariedad de dimensión n y clase C^∞ . Fijemos $p_0 \in \mathcal{X}$ y tomemos una función $F : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ suave en el entorno $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^N$ de p_0 con matriz Jacobiana de rango máximo, tal que $p \in \mathcal{W} \cap \mathcal{X}$ si y solo si $F(p) = 0$. El mapa

$$dF_{p_0} : T_{p_0} \mathbb{R}^N \rightarrow T_0 \mathbb{R}^{N-n}$$

es sobreyectivo, y por lo tanto su núcleo es un subespacio de $T_{p_0} \mathbb{R}^N$ de dimensión n . Este subespacio es el espacio tangente de \mathcal{X} en p_0 .

Equivalentemente, usando las funciones coordenada F_j de F , tenemos que $v \in \ker dF_{p_0}$ si y solo si $v(F_j) = 0$ para todo j , esto es, si y solo si $\langle dF_j, v \rangle = 0$. Como los diferenciales $dF_j(p_0)$ son independientes en p_0

$$\{v \in T_{p_0} \mathbb{R}^N : dF_j(v) = 0, j = 1, \dots, N - n\}$$

es un subespacio de $T_{p_0} \mathbb{R}^N$ de dimensión n . Este subespacio es por definición $T_{p_0} \mathcal{X}$.

Usando las coordenadas usuales y_1, \dots, y_N de \mathbb{R}^N escribimos $v \in T_{p_0} \mathbb{R}^N$ como

$$\sum_{k=1}^N v_k \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_{y=p_0}$$

(como en (3.1)). Vemos que la condición $\langle dF_j, v \rangle = 0$ para todo j es

$$\sum_k v_k \frac{\partial F_j}{\partial y_k}(p_0) = 0 \text{ para todo } j$$

lo cual es lo mismo que $v \cdot \nabla F_j(p_0) = 0$ para todo j . Por lo tanto, (v_1, \dots, v_N) es geoméricamente tangente al conjunto de nivel $\{p \in \mathcal{W} : F(p) = 0\}$ en p_0 .

Otra descripción útil usa parametrizaciones de abiertos de \mathcal{X} (ver la Definición 2.3) como sigue. Supongamos que $G : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ es una parametrización de un conjunto abierto $\mathcal{W}'' \subset \mathcal{W} \cap \mathcal{X}$. En particular $G(\mathcal{U}) = \mathcal{W}''$ para todo $q \in \mathcal{U}$, y por lo tanto $F \circ G = 0$. Además existe una función H de clase C^∞ definida en un abierto en \mathbb{R}^N que contiene a \mathcal{W}'' tal que $H \circ G = I$ en \mathcal{U} . Si $q \in \mathcal{U}$ y $v \in T_q \mathcal{U}$, entonces $dG_q(v) \in T_p \mathbb{R}^N$ con $p = G(q)$ y como $F \circ G = 0$ (el mapa constante), $0 = d(F \circ G)_q = dF_p(dG_q(v))$, por lo tanto $dG_q(v) \in T_p \mathcal{X}$ según la definición. Como $H \circ G = I$, dG_q es inyectivo lo cual implica que su imagen tiene dimensión n . En consecuencia, la imagen de dG_q es $T_p \mathcal{X}$.

Definimos

$$T\mathcal{X} = \bigsqcup_{p \in \mathcal{X}} T_p \mathcal{X}, \quad \pi : T\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \text{ la proyección canónica}$$

Una sección de $T\mathcal{X}$ es una función $X : \mathcal{X} \rightarrow T\mathcal{X}$ tal que $\pi(X(p)) = 0$ para todo $p \in \mathcal{X}$. Las secciones de $T\mathcal{X}$ son campos vectoriales en \mathcal{X} . Un campo vectorial X en \mathcal{X} es de clase C^∞ (suave) si para cada función u definida y de clase C^∞ en un entorno de \mathcal{X} se tiene que Xu es de clase C^∞ como función en \mathcal{X} (según la Definición 2.5).

LEMA 5.1. *Si X es un campo vectorial suave en \mathcal{X} , entonces cada $p_0 \in \mathcal{X}$ tiene un entorno \mathcal{W}' en \mathbb{R}^N al cual la restricción de X a $\mathcal{X} \cap \mathcal{W}'$ tiene una extensión a \mathcal{W}' como campo de clase C^∞ .*

Definimos

$$T^* \mathcal{X} = \bigsqcup_{p \in \mathcal{X}} T_p^* \mathcal{X}, \quad \pi : T^* \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \text{ la proyección canónica}$$

Una sección de $T^* \mathcal{X}$ es una función $\alpha : \mathcal{X} \rightarrow T^* \mathcal{X}$ tal que $\pi(\alpha(p)) = 0$ para todo $p \in \mathcal{X}$. Las secciones de $T^* \mathcal{X}$ son 1-formas en \mathcal{X} . Una 1-forma α en \mathcal{X} es de clase C^∞ (suave) si para cada campo vectorial de \mathcal{X} de clase C^∞ se tiene que

$$\mathcal{X} \ni p \mapsto \langle \alpha(p), X(p) \rangle \in \mathbb{R}$$

es de clase C^∞ como función en \mathcal{X} (según la Definición 2.5).

6. El complejo de de Rham

El diferencial $d : C^\infty(\mathcal{X}; \wedge^k \mathcal{X}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; \wedge^{k+1} \mathcal{X})$ puede definirse localmente (usando coordenadas, la fórmula (4.5) y probando que la fórmula es

independiente de coordenadas). Otra manera de definir d cuya ventaja reside en que no usa coordenadas locales, es la siguiente. Si $\alpha \in C^\infty(\mathcal{X}; \bigwedge^k \mathcal{X})$ y X_1, \dots, X_{k+1} son campos vectoriales X_1, \dots, X_{k+1} de clase C^∞ , entonces

$$(6.1) \quad d\alpha(X_0, \dots, X_k) = \frac{1}{k+1} \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(\alpha(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)) \right. \\ \left. + \sum_{i < j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \right).$$

Esta es la fórmula de Cartan para el diferencial (Helgason [25, p. 19]). El $\hat{}$ significa que ese ítem se omite. Es fácil verificar con esta fórmula que con funciones f_i se tiene

$$(d\alpha)(f_0 X_0, \dots, f_k X_k) = f_0 \dots f_k (d\alpha)(X_0, \dots, X_k).$$

Esto significa que los coeficientes de los X_j no aparecen con derivadas en la fórmula para $d\alpha$. Con esta definición es tedioso, pero no imposible, probar directamente¹ que $d \circ d = 0$, y por lo tanto tenemos de nuevo un complejo

$$0 \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; \mathbb{R}) \xrightarrow{d} C^\infty(\mathcal{X}; \bigwedge^1 \mathcal{X}) \rightarrow \dots \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; \bigwedge^{n-1} \mathcal{X}) \xrightarrow{d} C^\infty(\mathcal{X}; \bigwedge^n \mathcal{X}) \rightarrow 0$$

Este es el complejo de de Rham en \mathcal{X} .

Igual como en abiertos de \mathbb{R}^n , a veces conviene trabajar con coeficientes complejos. Todas las fórmulas siguen siendo válidas.

7. Variedades complejas

Una categoría importante de variedades consiste de la colección de variedades complejas.

DEFINICIÓN 7.1. *Una variedad compleja es una variedad \mathcal{X} de clase C^∞ de dimensión (real) par $2n$ junto con una subfamilia $\mathcal{F}_\mathbb{C}$ de la familia de difeomorfismos $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ de abiertos de \mathcal{M} en abiertos de $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ cuyos dominios cubren \mathcal{M} , con la propiedad*

Si $\phi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1$ y $\phi_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{V}_2$ son miembros de $\mathcal{F}_\mathbb{C}$, entonces

$$(7.2) \quad \phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \phi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \rightarrow \phi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$$

es holomorfa.

La dimensión compleja de \mathcal{X} es $\dim_\mathbb{C} \mathcal{X} = n$, la dimensión real es $\dim_\mathbb{R} \mathcal{X} = 2n$.

¹Es mejor usar que la definición lleva a que si α se representa como en (4.4), entonces

$$d\alpha = \sum_{|I|=k} da_I \wedge dx_I.$$

Con esto es inmediato que $d \circ d = 0$

Si \mathcal{M} es una variedad compleja con estructura $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ y $\phi \in \mathcal{F}_{\mathbb{C}}$, podemos denotar por z_1, \dots, z_n las funciones coordenada de ϕ como mapa en \mathbb{C}^n . Las funciones $x_j = \Re z_j$, $y_j = \Im z_j$, $j = 1, \dots, n$, son coordenadas reales. A veces es más conveniente denotar las y_j por x_{j+n} , entonces las coordenadas reales son x_1, \dots, x_{2n} . Si $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, n$ y $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $j = 1, \dots, n$ son dos cartas locales complejas, entonces, como consecuencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en una variable compleja,

$$\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} = \frac{\partial y_j}{\partial \eta_k}, \quad \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} = -\frac{\partial y_j}{\partial \xi_k}.$$

Los fibrados tangente y cotangente de \mathcal{X} son los fibrados usuales en la categoría C^∞ .

La estructura compleja determina un mapa $J : T\mathcal{X} \rightarrow T\mathcal{X}$ que preserva fibras (manda $T_p\mathcal{X}$ a $T_p\mathcal{X}$ para cada p) tal que $J \circ J = -I$. Este mapa, llamado la estructura casi-compleja de \mathcal{X} , está definido de la siguiente manera. Si $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, n$ es un sistema de coordenadas locales complejas, entonces

$$J\partial_{x_j} = \partial_{y_j}, \quad J\partial_{y_j} = -\partial_{x_j}$$

Esta definición no depende de la carta local compleja escogida. en efecto, si $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $j = 1, \dots, n$ es otro sistema de coordenadas complejas locales, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_k} &= \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial y_j} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_k} &= \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial \eta_k} \frac{\partial}{\partial y_j}. \end{aligned}$$

Aplicando J usando su definición de acuerdo a la carta z_j tenemos

$$J\left(\frac{\partial}{\partial \xi_k}\right) = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial y_j} - \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial \eta_k} \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial \eta_k}$$

gracias a las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y similarmente $J(\partial_{\eta_k}) = -\partial_{\xi_k}$.

Pasando a la complexificación de $T\mathcal{X}$ y la extensión por linealidad de J a un homomorfismo $\mathbb{C}T\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}T\mathcal{X}$, el hecho que $J^2 = -I$ implica que los autovalores J (fibra a fibra) son $+i, -i$. La unión de los autoespacios (fibra a fibra) asociados a $+i$ es $T^{0,1}\mathcal{X}$, la asociada a $-i$ es $T^{1,0}\mathcal{X}$. Estos son subfibrados de $\mathbb{C}TM$, ambos de rango n . Para dar un marco de referencia locales para estos subfibrados escogemos un sistema de coordenadas locales $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, n$ y definimos

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

La fórmula para J en coordenadas locales lleva de inmediato a que, por ejemplo, $J\partial_{\bar{z}_j} = i\partial_{z_j}$.

Parte del siguiente lema es trivial, la otra parte es fácil de probar

LEMA 7.3. *El fibrado $CT\mathcal{X}$ se descompone como suma directa*

$$CT\mathcal{X} = T^{1,0}\mathcal{X} \oplus T^{0,1}\mathcal{X}.$$

Los subfibrados $T^{1,0}\mathcal{X}$ y $T^{0,1}\mathcal{X}$ son involutivos: sus espacios de secciones son cerrados bajo el corchete de Lie. Explícitamente, si X, Y son secciones de clase C^∞ de $T^{0,1}\mathcal{X}$, entonces $[X, Y]$ también es una sección de $T^{0,1}\mathcal{X}$, y similarmente con $T^{1,0}\mathcal{X}$.

Si $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un mapa de clase C^∞ (de clase C^1 ya es suficiente²), decimos que f es holomorfo si $vf = 0$ para todo $v \in T^{0,1}\mathcal{X}$. Como v es, en coordenadas locales, una combinación lineal de los campos vectoriales $\partial_{\bar{z}_j}$, vemos que la condición $vf = 0$ es que f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todas las variables.

Si \mathcal{Y} es otra variedad compleja y $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un mapa suficientemente regular, decimos que f es un mapa holomorfo si la imagen de $T^{0,1}\mathcal{X}$ por df es un subconjunto de $T^{1,0}\mathcal{Y}$ (equivalentemente, la imagen de $T^{0,1}\mathcal{X}$ es un subconjunto de $T^{0,1}\mathcal{Y}$). Alternativamente, f es un mapa holomorfo la composición de f con las componentes de cualquier carta local compleja de \mathcal{Y} es holomorfa.

Como ya dijimos, J es una estructura casi-compleja en \mathcal{X} . En general, una variedad casi-compleja es una variedad real \mathcal{X} junto con un endomorfismo $J : T\mathcal{X} \rightarrow T\mathcal{X}$ que preserva fibras, tal que $J^2 = -I$. Para definir los subfibrados $T^{0,1}\mathcal{X}$ y $T^{1,0}\mathcal{X}$ solo necesitamos J . La condición de involutividad,

$$X, Y \in C^\infty(\mathcal{X}; T^{0,1}\mathcal{X}) \implies [X, Y] \in C^\infty(\mathcal{X}; T^{0,1}\mathcal{X})$$

es una condición extra que podemos agregar. Una variedad casi-compleja en la cual $T^{0,1}\mathcal{X}$ es involutivo, es una variedad casi-compleja formalmente integrable.

TEOREMA 7.4 (Newlander-Nirenberg [57]). *Si \mathcal{X} es una variedad casi-compleja formalmente integrable, entonces \mathcal{X} es una variedad compleja. Eso es, hay una subfamilia (de la familia original de cartas C^∞) de cartas locales complejas tales que el operador J definido por esas cartas coincide con el dado inicialmente.*

El artículo de Webster [80] incluye algo de la historia del problema, en particular una referencia a una demostración de Malgrange fácil de entender que solo usa existencia de soluciones para ciertas ecuaciones no lineales. Para otros resultados más recientes, consultar Hill y Taylor [27].

El artículo de Hill y Webster debilita la hipótesis al mínimo formalmente requerido en lo que a regularidad inicial se refiere. En el otro extremo, en la categoría real-analítica, el teorema es muy fácil de probar.

²Uno puede dar condiciones mucho más débiles que ya implican holomorficidad

8. El complejo de Dolbeault

Continuamos con una variedad compleja \mathcal{X} de dimensión compleja n . Pasando ahora a la complexificación de $T^*\mathcal{X}$, definimos

$$\bigwedge_p^{1,0} \mathcal{X} = \{\alpha \in \mathbb{C}T_p^* \mathcal{X} : \langle \alpha, v \rangle = 0 \ \forall v \in T_p^{0,1} \mathcal{X}\}, \quad \bigwedge_p^{1,0} \mathcal{X} = \bigcup_{p \in \mathcal{X}} \bigwedge_p^{1,0} \mathcal{X}.$$

En otras palabras, $\bigwedge_p^{1,0} \mathcal{X}$ es el aniquilador de $T^{0,1} \mathcal{X}$. Igualmente definimos $\bigwedge_p^{0,1} \mathcal{X}$ como el aniquilador de $T^{1,0} \mathcal{X}$. Si z_1, \dots, z_n es una carta local compleja con $z_j = x_j + iy_j$, entonces los diferenciales $dz_j = dx_j + idy_j$ forman un marco de referencia local de $\bigwedge^{1,0} \mathcal{X}$ y los diferenciales $d\bar{z}_j = dx_j - idy_j$ uno de $\bigwedge^{0,1} \mathcal{X}$. El siguiente lema es esencialmente una tautología

LEMA 8.1. *Sea $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ suficientemente regular. Entonces f es holomorfa si y solo si df es una sección de $\bigwedge^{1,0} \mathcal{X}$.*

Como $\mathbb{C}T^* \mathcal{X} = \bigwedge^{1,0} \mathcal{X} \oplus \bigwedge^{0,1} \mathcal{X}$, tenemos en general

$$\bigwedge^k \mathcal{X} = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^{p,q} \mathcal{X}$$

con $\bigwedge^{p,q} \mathcal{X}$ el producto exterior de p copias de $\bigwedge^{1,0} \mathcal{X}$ con q copias de $\bigwedge^{0,1} \mathcal{X}$. Una sección de $\bigwedge^{p,q} \mathcal{X}$ es una forma de tipo (p, q) , también decimos que es una (p, q) -forma.

Denotemos por $\pi^{p,q}$ la proyección de $\bigwedge^k \mathcal{X}$ en $\bigwedge^{p,q} \mathcal{X}$. El diferencial de de Rham en grado k se descompone de acuerdo a esta descomposición. Sin embargo, es un hecho que

$$\alpha \in C^\infty(\mathcal{X}; \bigwedge^{p,q} \mathcal{X}) \implies d\alpha = \pi^{q+1,p} d\alpha + \pi^{p,q+1} d\alpha.$$

La manera más sencilla de ver esto es usando coordenadas locales z_1, \dots, z_n . Si f es una función, entonces $df = \pi^{1,0} df + \pi^{0,1} df$, en coordenadas

$$df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \sum_j \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j,$$

y si

$$\alpha = \sum'_{I \in \mathcal{I}_p, J \in \mathcal{I}_q} \alpha_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

(la notación es como en (4.4)), entonces

$$d\alpha = \sum'_{|I|=p, |J|=q} \sum_j \frac{\partial \alpha_{I,J}}{\partial z_j} dz_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J + \sum'_{|I|=p, |J|=q} \frac{\partial \alpha_{I,J}}{\sum_j} \partial \bar{z}_j d\bar{z}_j \alpha_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

lo cual es la suma de una $(p+1, q)$ -forma y una $(q, p+1)$ -forma. Escribimos

$$\partial = \pi^{p+1,q} \circ d, \quad \bar{\partial} = \pi^{p,q+1} \circ d,$$

por lo tanto

$$d = \partial + \bar{\partial}.$$

Del hecho que $d \circ d = 0$ obtenemos que

$$0 = (\partial + \bar{\partial}) \circ (\partial + \bar{\partial}) = \partial \circ \partial + (\bar{\partial} \circ \partial + \partial \circ \bar{\partial}) + \bar{\partial} \circ \bar{\partial}$$

Aplicando esto a una (p, q) -forma, el primer término a la derecha produce una $(p+2, q)$ -forma, el segundo una $(p+1, q+1)$ -forma, y el tercero una $(p, q+2)$ -forma. Estas tres componentes, por estar en distintos sumandos de una suma directa, son todos nulos. Tenemos en particular, para cada p , un complejo

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; \Lambda^{p,0} \mathcal{X}) \xrightarrow{\bar{\partial}} C^\infty(\mathcal{X}; \Lambda^{p,1} \mathcal{X}) \rightarrow \\ \dots \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; \Lambda^{p,n-1} \mathcal{X}) \xrightarrow{\bar{\partial}} C^\infty(\mathcal{X}; \Lambda^{p,n} \mathcal{X}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Este es el complejo de Dolbeault en \mathcal{X} .

9. $T^*\mathcal{M}$ como variedad simpléctica

El espacio $T^*\mathcal{X}$ por si mismo una variedad de clase C^∞ , de la siguiente manera. Si $\phi = (x_1, \dots, x_n)$ es una carta local $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ ($\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ abierto), cualquier elemento $\xi \in T_p^*\mathcal{X}$ con $p = \pi(\xi) \in \mathcal{U}$ se expresa expresado unívocamente como

$$(9.1) \quad \xi = \sum_{j=1}^n \xi_j(\xi) dx_j(p)$$

con ciertos coeficientes $\xi_j(p)$. Asociando a ξ el punto

$$\tilde{\phi}(\xi) = (x_1(\pi(\xi)), \dots, x_n(\pi(\xi)), \xi_1(\xi), \dots, \xi_n(\xi)) \in \mathbb{R}^{2n}$$

obtenemos un mapa biyectivo $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n$, potencialmente una carta local. Usando otras coordenadas x'_1, \dots, x'_n el mismo punto ξ se expresa como

$$\xi = \sum_{j=1}^n \xi'_j(\xi) dx'_j(p)$$

y obtenemos otro mapa

$$\tilde{\phi}'(\xi) = (x'_1(\pi(\xi)), \dots, x'_n(\pi(\xi)), \xi'_1(\xi), \dots, \xi'_n(\xi)) \in \mathbb{R}^{2n}$$

De

$$\xi = \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \xi_j(\xi) \frac{\partial x_j}{\partial x'_k}(\pi(\xi)) \right] dx'_k(\pi(\xi))$$

lo cual da la relación

$$\xi'_k(\xi) = \sum_{j=1}^n \xi_j(\xi) \frac{\partial x_j}{\partial x'_k}(\pi(\xi))$$

Esta implica que los cambios de marco de referencia son no singulares: como la matriz $[\frac{\partial x_j}{\partial x_k}]$ es no singular con entradas C^∞ , el mapa $\tilde{\phi}' \circ \phi^{-1}$ es de clase C^∞ .

En particular podemos hablar de vectores y covectores, campos vectoriales y formas diferenciales en $T^*\mathcal{X}$. Hay en particular una 1-forma natural, definida como sigue. Si $\xi \in T^*\mathcal{X}$ y $v \in T_\xi(T^*\mathcal{X})$, entonces, como ξ es un mapa lineal $T_p\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $p = \pi(\xi)$, y $d\pi(v) \in T_p\mathcal{X}$, la fórmula

$$\langle \alpha_\xi, v \rangle = \langle \xi, d\pi(v) \rangle$$

tiene sentido. Esto define una 1-forma: en cada ξ , el elemento α_ξ . Escribimos α en coordenadas locales. Dadas coordenadas x_1, \dots, x_n en el entorno \mathcal{U} de $\pi(\xi)$, definimos $\tilde{x}_j = x_j \circ \pi$ en $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ y las funciones $\xi_j(\xi)$ como los únicos números con los cuales (9.1) vale. Si

$$\xi = \sum_j \xi_j dx_j \text{ y } v = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \Big|_\xi + \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \Big|_\xi$$

entonces

$$d\pi(v) = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\pi(\xi)}$$

y

$$\langle \alpha_\xi, d\pi(v) \rangle = \sum_j \xi_j a_j = \left\langle \sum_j \xi_j d\tilde{x}_j, \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \Big|_\xi + \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \Big|_\xi \right\rangle$$

Por lo tanto,

$$\alpha_\xi = \sum_j \xi_j(\xi) d\tilde{x}_j(\xi)$$

Aliviando un poco la notación, escribimos $\alpha = \sum \xi_j dx_j$ aun cuando las x_j son funciones en \mathcal{X} , no en $T^*\mathcal{X}$. Esta forma α es la “1-forma canónica” de $T^*\mathcal{X}$. La 2-forma

$$\omega = -d\alpha,$$

localmente

$$\omega = \sum_j dx_j \wedge d\xi_j$$

es la 2-forma canónica. Ella es una forma simpléctica: satisface $d\omega = 0$ y

si $v \in T_\xi T^*\mathcal{X}$ y $\omega(v, w) = 0$ para todo $w \in T_\xi T^*\mathcal{X}$, entonces $v = 0$.

Por ser no degenerada, la forma

$$(9.2) \quad \lambda = \frac{1}{n!} \omega^n = \frac{1}{n!} \overbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}^{n\text{-veces}}$$

no se anula nunca y define una orientación en $T^*\mathcal{X}$. Esta forma de grado tope $(2n)$ es la medida de Liouville. En coordenadas locales, $\lambda = dx_1 \wedge d\xi_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge d\xi_n$.

Más adelante usaremos la orientación y la medida de Liouville.

La forma simpléctica cumple un papel importante en mecánica clásica, óptica geométrica, y la teoría de operadores integrales de Fourier.

10. Fibrados vectoriales

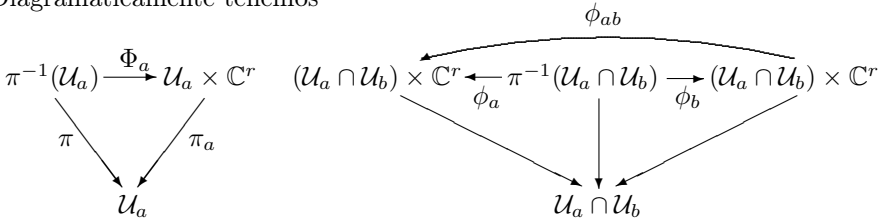
Sea \mathcal{X} una variedad de clase C^∞ . Un fibrado vectorial complejo de rango r sobre \mathcal{X} es una variedad E de clase C^∞ junto con los siguientes elementos (ver Husemoller [31] para más detalles). Un mapa $\pi : E \rightarrow \mathcal{X}$ de clase C^∞ llamado la proyección tal que existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a \in A}$ de \mathcal{X} y difeomorfismos de clase C^∞

$$\Phi_a : \pi^{-1}(\mathcal{U}_a) \rightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{C}^r$$

llamadas trivializaciones tales que con la proyección canónica $\pi_a : \mathcal{U}_a \times \mathbb{C}^r \rightarrow \mathcal{U}_a$,

- 1) $\pi = \pi_a \circ \Phi_a$;
- 2) $\Phi_a \circ \Phi_b^{-1}(p, z) = (p, \phi_{ab}(p, z))$ con $\mathbb{C}^r \ni z \mapsto \phi_{ab}(p, z) \in \mathbb{C}$ lineal.

Diagramáticamente tenemos



El mapa $\Phi_a \circ \Phi_b^{-1}$ está definido en $(\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b) \times \mathbb{C}^r$. Escribimos $\phi_{ab}(p)$ (con $p \in \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b$) para referirnos al mapa lineal $\mathbb{C}^r \ni z \mapsto \phi_{ab}(p, z) \in \mathbb{C}$. Este mapa es invertible, con inversa $\phi_{ba}(p)$: Esto es,

$$\phi_{ab} : \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b \rightarrow \text{Gl}(r, \mathbb{C}).$$

Las funciones ϕ_{ab} son las funciones de transición. Ellas satisfacen

$$\phi_{aa} = I, \quad \phi_{ab} = \phi_{ba}^{-1}, \quad \phi_{ab}\phi_{bc}\phi_{ca} = I$$

y determinan el fibrado (módulo isomorfismos). En VII.2 construimos un fibrado vectorial a partir de sus funciones de transición. Cuando hablamos de un fibrado vectorial, usualmente nos referimos a él como el fibrado vectorial $E \rightarrow \mathcal{X}$ (por ejemplo), y dejamos la especificación de las funciones de transición, las cuales son fundamentales, implícitas.

El fibrado trivial es $\mathcal{U} \times \mathbb{C}^r$. La fibra de E sobre p es la preimagen de p por π , denotada E_p . Si $p \in \mathcal{U}_a$, $\Phi_a|_{E_p} : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{C}^r$ es un difeomorfismo. La estructura lineal de \mathbb{C}^r se transfiere a una estructura de espacio vectorial de E_p . Las propiedades de linealidad de las funciones de transición aseguran que la estructura lineal de E_p es independiente de la trivialización usada para definirla.

Un fibrado vectorial real se define de la misma manera, usando \mathbb{R} en lugar de \mathbb{C} . Los fibrados tangente y cotangente de \mathcal{X} y las potencias exteriores $\bigwedge^q \mathcal{X}$ son todos ejemplos de fibrados vectoriales reales.

Una sección de E es una función $\eta : \mathcal{X} \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \eta = I$. Una sección local es un mapa como η pero definido solo en un conjunto abierto de \mathcal{X} . Una sección es de clase C^∞ si como mapa entre variedades es de clase C^∞ . Un marco de referencia local del fibrado vectorial E es una lista ordenada η_1, \dots, η_r de secciones de E definidas sobre un abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ tales que $\eta_1(p), \dots, \eta_r(p)$ son independientes (por lo tanto una base) de E_p para cada $p \in \mathcal{U}$. Si $\Phi : \pi^{-1}(\mathcal{U})$ es una trivialización de E y e_1, \dots, e_r son los elementos de una base de \mathbb{C}^r , por ejemplo la base canónica, entonces las secciones de E sobre \mathcal{U} definidas por

$$\eta_j(p) = \Phi^{-1}(p, e_j), \quad j = 1, \dots, r$$

forman un marco de referencia de E sobre \mathcal{U} de clase C^∞ . Recíprocamente, un marco de referencia suave determina una trivialización. Para ver un ejemplo de esto, ver la construcción de fibrados vectoriales sobre esferas en la Sección VII.2.

Dado un fibrado vectorial $E \rightarrow \mathcal{X}$, definimos el fibrado dual como

$$E^* = \bigsqcup_{p \in \mathcal{X}} E_p^*, \quad \pi : E^* \rightarrow \mathcal{X} \text{ la proyección canónica}$$

donde E_p^* es el espacio vectorial dual a E_p . Si η_1, \dots, η_r es un marco de referencia local de E sobre \mathcal{U} y η_j^* denota las secciones duales (esto tiene sentido una vez que $\pi : E^* \rightarrow \mathcal{X}$ ha sido definido), entonces por definición ellas son un marco de referencia de clase C^∞ para E^* . Esto determina una estructura de variedad de clase C^∞ para E^* y una estructura de fibrado vectorial de rango r .

En general, cualquier procedimiento algebraico que permite obtener un espacio vectorial a partir de otro (u otros) puede ser transferido al contexto de fibrados vectoriales usando la construcción fibra por fibra. El resultado es otro fibrado vectorial de clase C^∞ . Así, si $E, F \rightarrow \mathcal{X}$ son fibrados vectoriales, tenemos por ejemplo

$$E^* \rightarrow \mathcal{X}, \quad E \otimes F \rightarrow \mathcal{X}, \quad \bigwedge^q E \rightarrow \mathcal{X}, \quad \text{Hom}(E, F) \rightarrow \mathcal{X}, \quad \text{Aut}(E) \rightarrow \mathcal{X}.$$

Si $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ es un mapa de clase C^∞ y $\pi : E \rightarrow \mathcal{X}$ un fibrado vectorial, definimos $f^*E \rightarrow \mathcal{Y}$ de la siguiente manera. Como variedad,

$$f^*E = \{(q, \eta) \in \mathcal{Y} \times E : f(q) = \pi(\eta)\}$$

La proyección $f^*E \rightarrow \mathcal{Y}$, denotada $f^*\pi$, está definida por la fórmula

$$f^*\pi(q, \eta) = q.$$

Si η es una sección de E sobre \mathcal{U} , definimos

$$f^*\eta : f^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow f^*E, \quad (f^*\eta)(q) = (q, \eta(f(q))).$$

Usando esta definición y marcos de referencia locales de $E \rightarrow \mathcal{X}$ obtenemos marcos de referencia para f^*E ; los marcos de referencia de \mathcal{X} de clase C^∞ determinan, por definición, marcos de referencia de clase C^∞ de f^*E , con lo que se obtiene una estructura de variedad C^∞ en f^*E y de fibrado vectorial de $f^*E \rightarrow \mathcal{Y}$. La estructura de variedad C^∞ de f^*E es la inducida por la inclusión $f^*E \subset \mathcal{Y} \times E$.

$$\begin{array}{ccc} f^*E & & E \\ \pi^*f \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{f} & \mathcal{X} \end{array}$$

Sean $E \rightarrow \mathcal{X}$, $F \rightarrow \mathcal{Y}$ fibrados vectoriales. Un morfismo del primer fibrado en el segundo es un mapa $\Phi : E \rightarrow F$ (de clase C^∞) junto con un mapa $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ tal que $\Phi(E_p) \subset F_{f(p)}$ para todo $p \in \mathcal{X}$, y

$$\phi_{E_p} : E_p \rightarrow F_{f(p)}$$

es lineal. Decimos que Φ cubre f .

Dos fibrados vectoriales $\rho_E : E \rightarrow \mathcal{X}$, $\rho_F : F \rightarrow \mathcal{X}$ son isomorfos si hay un morfismo $\Phi : E \rightarrow F$ biyectivo que cubre el mapa identidad $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. La inversa es también un morfismo C^∞ .

Operadores pseudodiferenciales

1. Notación y definiciones

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, x_1, \dots, x_n as coordenadas usuales. Definimos

$$\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D_{x_j} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

El factor $1/i$ es útil. Un multi-índice es una n -tupla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ de enteros no-negativos. Denotamos

$$|\alpha| = \sum \alpha_j, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}, \quad D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n}.$$

El número $|\alpha|$ es la longitud de α . Denotamos por $C^k(\Omega)$ al espacio de funciones de clase C^k a valores complejos, $k = 0, 1, \dots, \infty$, y por $C^k(\Omega, \mathbb{R})$ a aquellas a valores reales. El espacio de funciones de clase C^k a soporte compacto en Ω es $C_c^\infty(\Omega)$. El soporte de una función continua $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, denotado $\text{sop } u$, es la clausura de $\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$.

Un operador diferencial lineal escalar de orden $m \in \mathbb{N}_0$ con coeficientes C^∞ en Ω es un operador $A : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ de la forma

$$(1.1) \quad (Au)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x), \quad u \in C^\infty(\Omega),$$

donde al menos uno de los coeficientes a_α con $|\alpha| = m$ no es idénticamente 0. Denotamos $\text{Dif}^m(\Omega)$ al conjunto de operadores lineales escalares de orden a lo sumo m ; así, $\text{Dif}^{m-1}(\Omega)$ es un subespacio de $\text{Dif}^m(\Omega)$ si $m > 0$.

También estaremos interesados en sistemas (y generalizaciones): operadores $A : C^\infty(\Omega, \mathbb{C}^{r_1}) \rightarrow C^\infty(\Omega, \mathbb{C}^{r_2})$ de la forma

$$(1.2) \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{r_1} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r_1} \\ \vdots & & \\ A_{r_21} & \cdots & A_{r_2r_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{r_1} \end{bmatrix}$$

donde A_{ij} es un operador diferencial lineal escalar de orden m_{ij} con coeficientes C^∞ . El orden de A en este caso es $m = \max\{m_{ij}\}$. Denotamos por $\text{Dif}^m(\Omega; \mathbb{C}^{r_1}, \mathbb{C}^{r_2})$ al conjunto de todos los operadores diferenciales lineales

$$A : C^\infty(\Omega, \mathbb{C}^{r_1}) \rightarrow C^\infty(\Omega, \mathbb{C}^{r_2})$$

de orden a los sumo m .

Si $A \in \text{Dif}^m(\Omega)$ está dado por (1.1), su símbolo principal (de orden m) es la función $\Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\sigma_m(A)(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

donde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Esta función puede ser nula, en cuyo caso A es de orden menor que m .

En el caso de un sistema $A \in \text{Dif}^m(\Omega; \mathbb{C}^{r_1}, \mathbb{C}^{r_2})$ de la forma (1.2), el símbolo principal es la función $\sigma_m : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^{r_1}, \mathbb{C}^{r_2})$ dada por

$$\sigma_m(A) = \begin{bmatrix} \sigma_m(A_{11}) & \cdots & \sigma_m(A_{1r_1}) \\ \vdots & & \\ \sigma_m(A_{r_21}) & \cdots & \sigma_m(A_{r_2r_1}) \end{bmatrix}.$$

EJERCICIO 1.3. Sea $S_{\text{hp}}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{r_1}, \mathbb{C}^{r_2})$ el conjunto de funciones $\Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^{r_1}, \mathbb{C}^{r_2})$, polinomiales y homogéneas de grado m en ξ y de clase C^∞ . Sea $\iota_{m-1} : \text{Dif}^{m-1}(\Omega; \mathbb{C}^{r_1}, \mathbb{C}^{r_2}) \rightarrow \text{Dif}^m(\Omega; \mathbb{C}^{r_1}, \mathbb{C}^{r_2})$ la inclusión. Verificar que la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Dif}^{m-1}(\Omega; \mathbb{C}^{r_1}, \mathbb{C}^{r_2}) \xrightarrow{\iota_{m-1}} \text{Dif}^m(\Omega; \mathbb{C}^{r_1}, \mathbb{C}^{r_2}) \xrightarrow{\sigma_m} S_{\text{hp}}^m(\Omega; \mathbb{C}^{r_1}, \mathbb{C}^{r_2}) \rightarrow 0$$

es exacta.

2. Operadores elípticos

Decimos que $A \in \text{Dif}^m(\Omega; \mathbb{C}^r, \mathbb{C}^r)$ es elíptico si $\sigma_m(A)(x, \xi)$ es invertible para todo $\xi \neq 0$. Si $r = 1$ y A está dado por (1.1), entonces A es elíptico si

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \neq 0 \quad \text{para todo } (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

En el caso del sistema (1.2), el operador es elíptico si y solo si el determinante de la matriz $[\sigma_p(A_{ij})(x, \xi)]$ satisface

$$\det[\sigma_m(A_{ij})(x, \xi)] \neq 0 \quad \text{para todo } (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Por ejemplo, el Laplaciano en \mathbb{R}^n , el operador

$$\Delta = \sum_{j=1}^n D_{x_j}^2,$$

es elíptico:

$$\sigma(\Delta)(x, \xi) = \sum_{j=1}^n \xi_j^2$$

es diferente de 0 si $\xi \neq 0$. Un ejemplo de un sistema elíptico 2×2 en \mathbb{R}^2 es

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

El símbolo principal (orden 1) es

$$\sigma_1(A)(x, \xi) = \begin{bmatrix} i\xi_1 & -i\xi_2 \\ i\xi_2 & i\xi_1 \end{bmatrix}$$

el cual es invertible si $(\xi_1, \xi_2) \neq 0$.

3. Paramétrices de operadores elípticos

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $A \in \text{Dif}^m(\Omega)$ un operador diferencial. Una parametriz de A es, en el sentido más general, un operador $B : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ tal que existen operadores integrales R_1, R_2 con núcleo de integral (núcleo de Schwartz) suficientemente regular tales que

$$BA = I - R_1, \quad AB = I - R_2.$$

De R_1 y R_2 se pide que mejoren la regularidad de su argumento. Por ejemplo, podemos pedir que definan operadores $C_c^k(\Omega) \rightarrow C^{k+1}(\Omega)$. En el mejor caso B es tal que ambos operadores son 0, pero frecuentemente no es fácil, a veces imposible resolver el problema exacto, en cuyo caso la situación óptima es que ellos sean operadores con núcleo de clase C^∞ .

Un operador $R : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ con núcleo de integral de clase C^∞ es un operador de la forma

$$Ru(x) = \int_{\Omega} r(x, x')u(x') dx', \quad u \in C_c^\infty(\Omega)$$

con $r \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$. Operadores de este tipo son llamados regularizantes, a veces, dependiendo del contexto, residuales. El término “regularizante” viene de la propiedad que Ru es de clase C^∞ incluso si la regularidad de u es baja, por ejemplo apenas en $C_c(\Omega)$, o en $L^1(\Omega)$, o una incluso una distribución de Schwartz (siempre con soporte compacto). El término “residual” viene de que son “errores” que pueden ser no removibles o que requieren técnicas más sofisticadas para ser removidos.

TEOREMA 3.1. *Operadores diferenciales elípticos poseen parametrices.*

La idea de parametriz como inversa aproximada de un operador elíptico viene de E. E. Levi [46] y D. Hilbert [26, pp. 223-231]. Hilbert fue quien le dio el nombre de parametriz.¹ Para Levi y Hilbert, la parametriz era el núcleo

¹Hadamard [23, p. 278] en el contexto del problema de Cauchy para operadores hiperbólicos.

integral del operador. Hoy en día el término es usado para referirse al operador mismo, no al núcleo. En el caso de un operador elíptico, la parametriz es un operador pseudodiferencial. Estos operadores son de importancia central en la teoría, y ellos enfocamos la atención en la siguiente sección, después de la cual daremos algunos detalles de la demostración.

La construcción de parametrices para operadores elípticos sigue varios pasos que ilustramos en el resto de esta sección en el caso de un operador diferencial ordinario elíptico de segundo orden,

$$Au = a_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + a_1 \frac{du}{dx} + a_0 u$$

en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$. Los coeficientes a_2 , a_1 y a_0 son funciones suaves y a_2 no se anula en ningún punto (elipticidad).

El **primer paso** es encontrar un operador que resuelve el problema $Au = f$ módulo errores de orden más bajo que el orden de A . El dato f puede ser meramente continuo, o meramente integrable, o peor, pero con soporte compacto; supondremos que es continuo para no distraernos con dificultades innecesarias. Escribimos

$$Au = a_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + A_1 u, \quad A_1 u = a_1 \frac{du}{dx} + a_0 u$$

La ecuación

$$a_2 \frac{d^2 u}{dx^2} = f$$

tiene solución

$$u(x) = \int_{x_0}^x \left(\int_a^y \frac{f(x')}{a_2(x')} dx' \right) dy, \quad x \in I$$

con $x_0 < \inf \text{supp } f$ arbitrario. Otras soluciones difieren en una solución de la ecuación homogénea pero no nos ocupamos de eso. Invertiendo el orden de integración obtenemos

$$u(x) = \int_{x_0}^x \frac{f(x')}{a_2(x')} \left(\int_{x'}^x dy \right) dx' = \int_{x_0}^x (x - x') \frac{f(x')}{a_2(x')} dx'.$$

En la última integral tomamos ventaja de que f tiene soporte compacto y reemplazamos x_0 por $-\infty$. Definimos

$$(B_{-2}f)(x) = \int_{-\infty}^x (x - x') \frac{f(x')}{a_2(x')} dx', \quad x \in I.$$

Volviendo a la ecuación original, tenemos

$$AB_2 f = f + A_1 B_{-2} f.$$

Con la notación

$$R_{-1} f = -A_1 B_{-2} f$$

tenemos

$$AB_{-2} = I - R_{-1}$$

En términos de regularidad, $R_{-1}f$ es mejor que f : si f es continua,

$$x \mapsto (R_{-1}f)(x) = - \int_{-\infty}^x \frac{a_1(x) + a_0(x)(x - x')}{a_2(x')} f(x') dx'$$

es diferenciable ($x \in I$), y así B_{-2} ya es una parametriz de A . Mejor aún, para cualquier $k \in \mathbb{N}_0$, si f es de clase C^k , entonces $R_{-1}f$ es de clase C^{k+1} .

El **segundo paso** es corregir usando algún proceso iterativo. En este ejemplo el proceso es como sigue.

La composición $B_{-2}R_{-1}$ es legal porque $(R_{-1}f)(x) = 0$ si $x < \inf \text{sop } f$. Lo mismo ocurre con $\text{sop } A_1B_{-2}R_{-1} = -R_{-2}^2$, y usando inducción, podemos definir $R_{-\ell} = R_{-1}^\ell$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$, notando que $R_0 = I$. Definiendo también $B_{-2-\ell} = B_{-2}R_{-\ell}$ tenemos

$$\begin{aligned} A \sum_{\ell=0}^k B_{-\ell} &= A \sum_{\ell=0}^k B_{-2}R_{-\ell} = (a_2 \frac{d^2}{dx^2} + A_1)B_{-2} \sum_{\ell=2}^k R_{-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^k R_{-\ell} + A_1B_{-2} \sum_{\ell=2}^k R_{-\ell} = I + \sum_{\ell=1}^k B_{-\ell} - \sum_{\ell=1}^{k+1} R_{-\ell} = I - R_{-k-1}. \end{aligned}$$

El operador R_{-k-1} mejora la regularidad de su argumento en $k+1$. El operador $\sum_{\ell=2}^k B_{-\ell}$ también es una parametriz de A , mejor que solo B_{-2} .

El **tercer paso** es de alguna manera sumar los operadores $B_{-\ell}$. Necesitamos algunos preparativos.

Con la notación $t_+^k = 0$ si $t < 0$, $t_+^k = t^k$ si $t \geq 0$ reescribimos B_{-2} y R_{-1} como

$$\begin{aligned} (B_{-2}f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} (x - x')_+^1 \frac{f(x')}{a_2(x')} dx', \\ (R_{-1}f)(x) &= - \int_{\mathbb{R}} (x - x')_+^0 \frac{a_1(x) + a_0(x)(x - x')}{a_2(x')} f(x') dx. \end{aligned}$$

Estos son operadores integrales cuyo núcleo tiene soporte en $x' \leq x$, en ambos casos de la forma $(x - x')_+^\ell h(x, x')$ con $h \in C^\infty(I \times I)$. El siguiente lema describe algunas de sus propiedades. Denotamos por $C_{c^-}^\ell(I)$ al subespacio de $C^\ell(I)$ cuyos elementos se anulan cerca del extremo inferior del intervalo I .

LEMA 3.2. Sean $h_1, h_2 \in C^\infty(I \times I)$, ℓ_1, ℓ_2 enteros no-negativos. El operador

$$(H_j f)(x) = \int_{\mathbb{R}} (x - x')_+^{\ell_j} h_j(x, x') f(x') dx', \quad f \in C_{c^-}^0(I), \quad x \in I,$$

tiene imagen en $C_c^{\ell_j+1}(I)$, $j = 1, 2$. La composición $H_1 \circ H_2$ está bien definida, y existe $h_3 \in C^\infty(I \times I)$ tal que

$$(H_2 \circ H_1 f)(x) = \int_{\mathbb{R}} (x - x')_+^{\ell_1 + \ell_2 + 1} h_3(x, x') f(x') dx'.$$

Además, para cada $(x, x') \in I \times I$,

$$(3.3) \quad |h_3(x, x')| \leq \frac{\ell_1! \ell_2!}{(\ell_1 + \ell_2 + 1)!} \max_{y \in J_{x, x'}} |h_2(x, y)| \max_{y \in J_{x, x'}} |h_1(y, x')|$$

donde $J_{x, x'}$ es el intervalo cerrado con extremos x, x' .

DEMOSTRACIÓN. El hecho que $H_j f \in C_c^{\ell_j+1}(I)$ se deja como ejercicio. La razón para incluirlo en el enunciado del lema es que esta propiedad asegura que la composición $H_2 \circ H_1$ está bien definida.

La composición $(H_2 \circ H_1)(f)$ evaluada en $x \in I$ con $f \in C_c^0(I)$ es la integral iterada

$$H_2(H_1(f))(x) = \int_{\mathbb{R}} (x - y)_+^{\ell_2} h_2(x, y) \left[\int_{\mathbb{R}} (y - x')_+^{\ell_1} h_1(y, x') f(x') dx' \right] dy.$$

Cambiando el orden de integración obtenemos

$$(H_2 \circ H_1 f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} (x - y)_+^{\ell_2} (y - x')_+^{\ell_1} h_2(x, y) h_1(y, x') dy \right] f(x') dx'$$

Esto es legal porque si $x, x' \in I$, entonces también $y \in I$. De hecho, $(x - y)_+^{\ell_1} (y - x')_+^{\ell_2} \neq 0$ implica $y \leq x$, $x' \leq y$, esto es, $x' \leq y \leq x$. Introduciremos el cambio de variables

$$y = tx' + (1 - t)x, \quad t \in [0, 1]$$

en la integral entre corchetes. Observamos primero que

$$x - y = t(x - x'), \quad y - x' = (1 - t)(x - x'), \quad dy = (x - x') dt.$$

Como $t \in [0, 1]$,

$$(x - y)_+^{\ell_1} (y - x')_+^{\ell_2} dy = (x - x')_+^{\ell_1 + \ell_2 + 1} t^{\ell_1} (1 - t)^{\ell_2} dt$$

Por lo tanto, definiendo

$$h_3(x, x') = \int_0^1 h_2(x, tx' + (1 - t)x) h_1(tx' + (1 - t)x, x') t^{\ell_1} (1 - t)^{\ell_2} dt,$$

$$(x, x') \in I \times I,$$

tenemos la fórmula para el núcleo integral de la composición como en el enunciado del lema. Esta expresión tiene sentido para cualquier par de elementos $x, x' \in I$, no solo aquellos con $x' \leq x$ y por lo tanto también muestra que $h_3 \in C^\infty(I \times I)$ y que

$$|h_3(x, x')| \leq \max_{y \in J_{x, x'}} |h_2(x, y)| \max_{y \in J_{x, x'}} |h_1(y, x')| \int_0^1 t^{\ell_1} (1 - t)^{\ell_2} dt.$$

Integrando por partes repetidamente obtenemos el coeficiente en la estimación (3.3). (El coeficiente en esa fórmula es $B(\ell_1 + 1, \ell_2 + 1)$ donde B es la función Beta [1].) \square

Retornando a la ecuación diferencial, el lema (aplicado repetidas veces) nos permite escribir los operadores B_ℓ, R_ℓ como operadores integrales, respectivamente con núcleos

$$(x - x')_+^{\ell-1} b_{-\ell}(x, x'), \quad (x - x')_+^{\ell-1} r_{-\ell}(x, x');$$

las funciones b_ℓ, r_ℓ son elementos de $C^\infty(I \times I)$ y las funciones $(x - x')_+^{\ell-1} b_{-\ell}$ y $(x - x')_+^{\ell-1} r_{-\ell}$ son de clase $C^{\ell-2}$.

Usamos ahora el siguiente lema, una variante de un lema usualmente atribuido a E. Borel [9, p. 44]²

LEMA 3.5 (Suma asintótica). *Existen funciones $b, \beta_k, \in C^\infty(I \times I)$, $k = 2, 3, \dots$, tales que*

$$b(x, x') - \sum_{\ell=2}^k (x - x')_+^{\ell-1} b_{-\ell}(x, x') = (x - x')^k \beta_{-k-1}$$

para todo $(x, x') \in I \times I$.

Definiendo

$$(Bf)(x) = \int_{\mathbb{R}} (x - x')_+^0 b(x, x') f(x') dx'$$

tenemos, con k arbitrario:

$$\begin{aligned} A(Bf)(x) - f(x) &= A \int_{\mathbb{R}} (x - x')_+^0 (b(x, x') - \sum_{\ell=2}^k (x - x')_+^{\ell-1} b_{-\ell}(x, x')) f(x') dx' \\ &\quad + A \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{\ell=2}^k (x - x')_+^{\ell-1} b_{-\ell}(x, x') \right) f(x') dx' - f(x) \\ &= A \int_{\mathbb{R}} (x - x')_+^k \beta_{-k-1}(x, x') f(x') dx' \\ &\quad + A \left(\sum_{\ell=2}^k B_{-\ell} f \right)(x) - f(x) \\ &= A \int_{\mathbb{R}} (x - x')_+^k \beta_{-k-1}(x, x') f(x') dx' - (R_{-k-1} f)(x) \end{aligned}$$

²Buscando esta referencia al artículo de Borel en el internet encontré vía [73] y [8] que el lema fue enunciado y probado años antes por Peano en las notas de un libro de cálculo [18, nota 67, p. xvii]. El lema de Borel (o Peano) es:

LEMA 3.4. *Para cualquier sucesión en \mathbb{R} existe una función de clase C^∞ en \mathbb{R} cuyos coeficientes de Taylor son los términos de la sucesión.*

El propósito de Peano es producir ejemplos de funciones de clase C^∞ en \mathbb{R} cuya serie de Taylor centrada en 0 (su serie de MacLaurin) converge solo en $x = 0$.

usando $A \sum_{\ell=2}^k B_{-\ell} - I = -R_{-k-1}$. La última línea puede ser escrita como

$$- \int_{\mathbb{R}} (x - x')_+^{k-2} \rho_{k-1}(x, x') f(x') dx'$$

diferenciando bajo el signo integral y extrayendo $(x - x')_+^{k-2}$ como factor común. La función ρ_{k-1} es de clase C^∞ , la función $(x - x')_+^{k-2} \rho_{k-1}(x, x')$ es de clase C^{k-2} , por lo tanto lado derecho en

$$ABf(x) - f(x) = - \int_{\mathbb{R}} (x - x')_+^{k-2} \rho_{k-1}(x, x') f(x') dx'$$

es de clase C^{k-1} . Como k es arbitrario, $ABf - f$ es de clase C^∞ . En esta misma fórmula, el lado izquierdo es independiente de k , y por lo tanto el lado derecho también es independiente de k . Pero el núcleo de un operador integral está determinado por el operador mismo, así $(x - x')_+^{k-2} \rho_{k-1}$ es una función independiente de k , y por lo tanto es de clase C^∞ en $I \times I$ con soporte en $x \geq x'$.

Esto completa los tres pasos básicos en la construcción de una parametriz de A con error regularizante.

En el caso concreto del ejemplo que estamos discutiendo, la serie

$$(3.6) \quad \sum_{\ell=k}^{\infty} (x - x')_+^{\ell-1} b_{-\ell}(x, x')$$

converge absoluta y uniformemente junto con sus primeras $k-2$ derivadas en cualquier subconjunto compacto de $I \times I$:

LEMA 3.7. *La serie (3.6) converge en la topología de $C^{k-2}(I \times I)$.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que la serie

$$\sum_{\ell=k+1}^{\infty} (x - x')_+^{\ell-1} r_{-\ell}(x, x')$$

converge en C^∞ . Aplicando B_2 término a término obtenemos el resultado del lema. Sea $\mathcal{K} \in I$ un intervalo compacto y $C = \sup_{x, x' \in \mathcal{K}} |r_{-1}(x, x')|$. La fórmula (3.3) implica

$$|r_{-2}(x, x')| \leq \sup_{y \in J_{x, x'}} |r_{-1}(x, y)| \sup_{y \in J_{x, x'}} |r_{-1}(y, x')| \leq C^2.$$

para cada $x, x' \in \mathcal{K}$. En general, la fórmula para $r_{-\ell-1}$ en la composición $R_{-1} \circ R_{-\ell}$ conduce a

$$\begin{aligned} |r_{-\ell-1}(x, x')| &\leq \frac{0!(\ell-1)!}{\ell!} \sup_{y \in J_{x, x'}} |r_{-1}(x, y)| \sup_{y \in J_{x, x'}} |r_{-\ell}(y, x')| \\ &\leq \frac{C}{\ell} \sup_{y, x' \in \mathcal{K}} |r_{-\ell}(y, x')|, \end{aligned}$$

de lo cual obtenemos $\sup_{x, x' \in \mathcal{K}} |r_{-\ell-1}(x, x')| \leq (1/\ell) \sup_{x, x' \in \mathcal{K}} |r_{-\ell}(x, x')|$. Por lo tanto,

$$\sup_{x, x' \in \mathcal{K}} |r_{-\ell-1}(x, x')| \leq \frac{1}{\ell!} C^{\ell+1}.$$

En consecuencia,

$$\sum_{\ell=k+1}^{\infty} (x - x')_+^{\ell-1} r_{-\ell}(x, x')$$

converge absoluta y uniformemente en conjuntos compactos de $I \times I$.

Para cualquier $\ell \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y $j, j' \in \mathbb{N}$ con $j + j' < \ell$ tenemos que $R_{-\ell} = R_{-j} \circ R_{\ell-j-j'} \circ R_{-j'}$, por lo tanto el núcleo integral de $R_{-\ell}$ es

$$\tilde{r}_{-\ell}(x, x') = \int \tilde{r}_{-j}(x, y)(y - z)_+^{\ell-j-j'-1} r_{-\ell-j-j'}(y, z) \tilde{r}_{-j'}(z, x') dz dy.$$

con la notación $\tilde{r}_{-\ell}(x, x') = (x - x')_+^{\ell-1} r_{-\ell}$. Podemos diferenciar \tilde{r}_{-j} y $\tilde{r}_{-j'}$ hasta orden $j - 1$ y $j' - 1$, respectivamente, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d^{j+j'-2} \tilde{r}_{-\ell}}{dx^{j-1} dx'^{j'-1}}(x, x') = \\ \int \frac{d^{j-1} \tilde{r}_{-j}}{dx^{j-1}}(x, y)(y - z)_+^{\ell-j-j'-1} r_{-\ell-j-j'}(y, z) \frac{d^{j'-1} \tilde{r}_{-j'-1}}{dx'^{j'-1}}(z, x') dz dy. \end{aligned}$$

En esta integral ambos y, z pertenecen al intervalo con extremos x, x' . Si $x, x' \in \mathcal{K}$, entonces para tales y, z tenemos

$$|(y - z)_+^{\ell-1} r_{-\ell-j-j'}(y, z)| \leq \frac{C^{\ell-j-j'-1} (\dim \mathcal{K})^{\ell-j-j'-1}}{(\ell - j - j' - 1)!}$$

Esto nos lleva a la estimación

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^{j+j'-2} \tilde{r}_{-\ell}}{dx^{j-1} dx'^{j'-1}}(x, x') \right| \leq \\ \frac{C^{\ell-j-j'-1} (\dim \mathcal{K})^{\ell-j-j'-1}}{(\ell - j - j' - 1)!} \sup_{x, y \in \mathcal{K}} \left| \frac{d^{j-1} \tilde{r}_{-j}}{dx^{j-1}}(x, y) \right| \sup_{x, y \in \mathcal{K}} \left| \frac{d^{j'-1} \tilde{r}_{-j'}}{dx'^{j'-1}}(z, x') \right| \end{aligned}$$

lo cual implica la convergencia absoluta y uniforme de las derivadas hasta orden $k - 2$ de la serie en

$$\sum_{\ell=k}^{2k-1} (x - x')_+^{\ell-1} r_{-\ell} + \sum_{\ell=2k}^{\infty} (x - x')_+^{\ell-1} r_{-\ell}.$$

□

En particular, las singularidades de (3.6) ocurren solo en la diagonal de $I \times I$.

4. Operadores pseudodiferenciales

La motivación de la construcción de parametrices pseudodiferenciales para operadores elípticos proviene del caso de un operador con coeficientes constantes usando como herramienta básica la transformada de Fourier y su fórmula de inversión: si $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix' \cdot \xi} u(x') dx'$$

es la transformada de Fourier de u (con $x' \cdot \xi$ el producto interno usual de x' y ξ en \mathbb{R}^n), y la fórmula

$$\mathcal{F}^{-1}v(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} v(\xi) d\xi.$$

es la inversa. Casi siempre escribimos \widehat{u} en lugar de $\mathcal{F}u$. Así, la fórmula

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \widehat{u}(\xi) d\xi.$$

reconstruye u a partir de su transformada.

Supongamos por un momento que $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D_x^\alpha$ tiene coeficientes constantes y que $a(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ no tiene ceros reales (esta condición no es equivalente a elipticidad; solamente la parte principal, $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$, de a es relevante en lo que concierne a elipticidad). Si definimos B por la fórmula

$$Bu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \frac{\widehat{u}(\xi)}{a(\xi)} d\xi,$$

resulta de inmediato que

$$AB = I$$

en vista de la fórmula de inversión de Fourier.

Adaptando la idea al caso de un operador elíptico general, supongamos que $a_m(x, \xi)$ es el símbolo principal de un tal operador, de orden m , en Ω . No podemos dividir entre $a_m(x, \xi)$ porque este se anula en $\xi = 0$. Pero si $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi(\xi) = 1$ si $|\xi| < 1$ y $\chi(\xi) = 0$ si $|\xi| > 1$ ($|\xi|$ es la norma euclidiana de ξ), entonces la función

$$(4.1) \quad b_{-m}(x, \xi) = \frac{1 - \chi(\xi)}{a_m(x, \xi)}$$

está bien definida y es de clase C^∞ , y podemos tratar de construir una parametriz comenzando con el operador

$$B_{-m}u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} e^{i(x-x') \cdot \xi} b(x, \xi) u(x') dx' d\xi, \quad u \in C_c^\infty(\Omega).$$

Que esto realmente funciona (es el **primer paso** en la construcción de parametrices de operadores elípticos) es el tópico de la próxima sección. Por ahora enfocamos la atención en la teoría general de este tipo de operadores.

Todavía en referencia al operador A , comenzamos motivando las estimaciones que definirán los espacios de símbolos. Denotando $\hat{\xi} = |\xi|^{-1}\xi$ si $\xi \neq 0$ tenemos que

$$a_m(x, \xi) = |\xi|^m a_m(x, \hat{\xi}).$$

Por elipticidad $|a_m(x, \hat{\xi})|$, como función en $\Omega \times S^{m-1}$ está acotada por debajo uniformemente por una constante positiva en cada conjunto $\mathcal{K} \times S^{m-1}$ con $\mathcal{K} \subset \Omega$ compacto. Esto lleva a la desigualdad

$$|b_{-m}(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-m}, \quad (x, \xi) \in \mathcal{K} \times \mathbb{R}^n$$

con algún $C > 0$. Usando esta desigualdad e inducción uno prueba que b_{-m} satisface

para todo compacto $\mathcal{K} \Subset \Omega$, multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ existe $C > 0$ tal que

$$(4.2) \quad |D_x^\alpha \partial_\xi^\beta b(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|^{\mu - |\beta|})$$

para todo $(x, \xi) \in \mathcal{K} \times \mathbb{R}^n$.

con b_μ en lugar de b y con $\mu = -m$.

DEFINICIÓN 4.3. *Una función con la propiedad (4.2) es un símbolo de orden μ y tipo $(1, 0)$. El espacio de tales funciones es $S_{1,0}^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, y $S_{1,0}^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n) = \bigcap_\mu S_{1,0}^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n)$.*

Si $b \in S_{1,0}^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, podemos definir $\text{op}(b) : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ mediante la fórmula

$$(4.4) \quad (\text{op}(b)u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} e^{i(x-x') \cdot \xi} b(x, \xi) u(x') dx' d\xi,$$

una integral iterada y, como antes, $(x - x') \cdot \xi$ es el producto interno usual de $(x - x')$ y ξ . Explicamos: como $u \in C_c^\infty(\Omega)$, la integral en x' puede verse como integral en \mathbb{R}^n , y como tal es igual a $\hat{u}(\xi)$:

$$(4.5) \quad (\text{op}(b)u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Omega} e^{ix \cdot \xi} b(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi,$$

La función $\hat{u}(\xi)$ es de clase C^∞ , es más, satisface

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ existe $C > 0$ tal que

$$(4.6) \quad |\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{u}(\xi)| \leq C$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Por lo tanto, como $b(x, \xi)$ apenas crece polinomialmente en ξ , si acaso, la integral en (4.5) converge absolutamente para cada $x \in \Omega$, y por la uniformidad de las cotas (4.2), define una función de clase C^∞ en Ω .

DEFINICIÓN 4.7. *Un operador $B : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ es un operador pseudodiferencial de orden μ y tipo $(1, 0)$ si existen $b \in S_{1,0}^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ y un operador integral $R : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ con núcleo de clase C^∞ tales que $B = \text{op}(b) - R$*

con $\text{op}(b)$ definido por (4.4). La función b es su símbolo total. El conjunto de operadores pseudodiferenciales de orden μ y tipo $(1, 0)$ será denotado por $\Psi_{1,0}^\mu(\Omega)$.

Los operadores diferenciales son ellos mismos ejemplos de operadores pseudodiferenciales, de la siguiente manera. Supongamos que

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha.$$

Si $u \in C_c^\infty(\Omega)$, obtenemos

$$\begin{aligned} Au &= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \widehat{u}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \widehat{u}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

usando la fórmula de inversión de Fourier. La función $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ es un símbolo en $S^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Nos referimos a a como el símbolo total de $A = \text{op}(a)$.

El símbolo total de A es una suma finita de términos homogéneos en ξ de órdenes decrecientes. Sumas ‘infinitas’ aparecen con frecuencia y para ellos, el siguiente lema, similar al lema de Borel, provee una base firme:

LEMA 4.8 (Sumas asintóticas). Si $\{b_\ell\} \in S_{1,0}^{\mu_\ell}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ es una sucesión de símbolos con $\{\mu_\ell\}$ decreciente y $\lim \mu_\ell = -\infty$, entonces existe $b \in \mu_0$ tal que

$$b - \sum_{\ell=0^N} b_\ell \in S_{1,0}^{\mu_N+1}(\Omega \times \mathbb{R}^n).$$

Decimos que b es la suma asintótica de los símbolos b_ℓ y escribimos

$$b \sim \sum_{\ell=0^\infty} b_\ell$$

en ese caso. El símbolo b no es único, pero si también $b' \sim \sum_{\ell=0^\infty} b_\ell$, entonces

$$b - b' = (b - \sum_{\ell=0^N} b_\ell) - (b' - \sum_{\ell=0^N} b_\ell) \in S_{1,0}^{\mu_N+1}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$$

para todo N , y concluimos que $b - b' \in S_{1,0}^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$.

Una observación que interesa recordar es:

LEMA 4.9. Si $b \in S_{1,0}^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ con $\mu < -n - k$ ($k \in \mathbb{N}_0$), entonces $\text{op}(b)$ es un operador integral con núcleo de clase C^k . En particular, si $b \in S_{1,0}^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, entonces $\text{op}(b)$ es un operador integral con núcleo de clase C^∞ .

DEMOSTRACIÓN. En la situación del lema, el decaimiento de b en ξ nos permite cambiar el orden de integración en la integral que define $\text{op}(b)$ e integrar primero en ξ . Obtenemos

$$\text{op}(b)(u) = \int_{\Omega} K_{\text{op}(b)}(x, x')u(x') dx'$$

con

$$K_{\text{op}(b)}(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-x') \cdot \xi} b(x, \xi) d\xi.$$

Esta función es continua si $\mu < -n$, de clase C^1 si $\mu < -n - 1$, etc. \square

Es conveniente extender la definición de símbolo de orden μ e incluir funciones $b \in C^\infty(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ tal que estimaciones al estilo de (4.2) son válidas también con derivadas en x' . Naturalmente, denotamos el espacio resultante por $S_{1,0}^\mu(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ y definimos

$$(\text{op}(b)(u))(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} e^{i(x-x') \cdot \xi} b(x, x', \xi) u(x') dx' d\xi$$

Todavía en este sentido ligeramente ampliado, b es un símbolo de orden μ , y escribimos $b \in S_{1,0}^\mu(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$. La definición del operador como integral iterada aclara el sentido de la definición de la misma manera que en (4.5) y el Lemma 4.9 es igualmente válido. La razón por la cual esto no representa un cambio radical es:

PROPOSICIÓN 4.10. *Sea $\tilde{b} \in S_{1,0}^\mu(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ y sea $b \in S_{1,0}^\mu(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tal que*

$$b(x, \xi) - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x'^\alpha} \Big|_{x'=x} \tilde{b}(x, x', \xi) \in S^{\mu-N-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

Entonces existe $r \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ tal que

$$\text{op}(\tilde{b}) = \text{op}(b) - \text{op}(r).$$

donde $\text{op}(r)$ es el operador integral con núcleo r . En otras palabras, $\text{op}(\tilde{b})$ también es un operador pseudodiferencial.

DEMOSTRACIÓN. La expansión de Taylor de \tilde{b} de orden N en la variable x' centrada en x ,

$$\tilde{b}(x, x', \xi) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha \tilde{b}(x, x, \xi) (x' - x)^\alpha + \sum_{|\alpha| = N+1} \tilde{b}_\alpha(x, x', \xi) (x' - x)^\alpha,$$

es válida en una bola $\{x' : |x - x'| < \text{dist}(x, \partial\Omega)\}$. Para obtener una expresión uniformemente válida para todo $x \in \Omega$, tomamos una función $\rho \in C^\infty(\Omega)$ tal que $0 < \rho(x) < \text{dist}(x, \partial\Omega)$ y una función $\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\chi_1(t) = 1$ si $|t| \leq 1/4$ y $\chi_1(t) = 0$ si $|t| \geq 1/2$, y definimos

$$\chi(x, x') = \chi_1\left(\frac{|x - x'|}{\rho(x)}\right) \chi_1\left(\frac{|x' - x|}{\rho(x')}\right)$$

Esta función satisface

$$(4.11) \quad \chi(x, x') = \begin{cases} 1 & \text{si } |x - x'| \leq \frac{1}{4} \max\{f(x), f(x')\} \\ 0 & \text{si } |x - x'| \geq \frac{1}{2}f(x) \text{ ó } |x - x'| \geq \frac{1}{2}f(x'). \end{cases}$$

En particular, $(1 - \chi) = 0$ cerca de la diagonal $\text{diag}(\Omega) = \{(x, x) : x \in \Omega\}$, y por lo tanto en la descomposición $\tilde{b} = \chi\tilde{b} + (1 - \chi)\tilde{b}$, podemos sustituir la expansión de Taylor de \tilde{b} en el primer sumando mientras que el segundo sumando es 0 cerca de la diagonal. La descomposición de \tilde{b} se refleja en

$$\text{op}(\tilde{b}) = \text{op}(\chi\tilde{b}) + \text{op}((1 - \chi)\tilde{b}).$$

Las funciones $\chi(x, x')\partial_x^\alpha \tilde{b}(x, x, \xi)$ y $\chi(x, x')\tilde{b}_\alpha(x, x', \xi)$ son símbolos de orden μ . Trabajando con el primer sumando, observamos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} e^{i(x-x')\cdot\xi} \chi(x, x') \partial_x^\alpha \tilde{b}(x, x, \xi) (x' - x)^\alpha u(x') dx' d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} (-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha e^{i(x-x')\cdot\xi} \chi(x, x') \partial_x^\alpha \tilde{b}(x, x, \xi) u(x') dx' d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} e^{i(x-x')\cdot\xi} \chi(x, x') \partial_x^\alpha D_\xi^\alpha \tilde{b}(x, x, \xi) u(x') dx' d\xi \end{aligned}$$

usando integración por partes (la validez de este paso puede verificarse integrando primero en x'). En la última integral observamos que $b_\alpha(x, \xi) := \partial_x^\alpha D_\xi^\alpha \tilde{b}(x, x, \xi) \in S^{\mu-|\alpha|}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Igualmente

$$\text{op}(\chi\tilde{b}_\alpha(x' - x)^\alpha) = \text{op}(\chi D_\xi^\alpha \tilde{b}_\alpha)$$

con $D_\xi^\alpha \tilde{b}_\alpha \in S^{\mu-|\alpha|}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$. Usando

$$\text{op}(\chi b_\alpha) = \text{op}(b_\alpha) - \text{op}((1 - \chi)b_\alpha).$$

obtenemos

$$\text{op}(\tilde{b}) = \text{op}\left(\sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!} b_\alpha\right) + \text{op}\left(\sum_{|\alpha| = N+1} \chi \tilde{b}_\alpha\right) + \text{op}\left((1 - \chi)(\tilde{b} - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!} b_\alpha)\right).$$

La función $c_N = \tilde{b} - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!} b_\alpha$ es un símbolo de orden μ . Pero si c es un símbolo arbitrario, $\text{op}((1 - \chi)c)$ es regularizante. Para ver esto usamos el mismo truco que antes: cada vez que tenemos un factor $(x - x')^\alpha$ podemos eliminarlo usando integración por partes, reduciendo así el orden en $|\alpha|$:

$$\text{op}((1 - \chi)c) = \text{op}(|x - x'|^{2N} \left(\frac{1 - \chi}{|x - x'|^{2N}} c\right)) = \text{op}\left(\frac{1 - \chi}{|x - x'|^{2N}} \Delta_\xi^N c\right)$$

con $\Delta_\xi = -\sum_{j=1}^n \partial_{\xi_j}^2$. Como $\frac{1 - \chi}{|x - x'|^{2N}} \Delta_\xi^N c \in S^{\mu-2N}$, tomando N suficientemente grande tenemos que $\text{op}((1 - \chi)c)$ es un operador integral con núcleo

$K_{\text{op}((1-\chi)c)}$ de clase C^k para k el mayor entero menor que $-\mu - n + N$. Como N es arbitrario, $K_{\text{op}((1-\chi)c)}$ es de clase C^∞ .

Si b es como en el enunciado, entonces

$$\text{op}(\tilde{b} - b) = \text{op}\left(\sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!} b_\alpha - b\right) + \text{op}\left(\sum_{|\alpha|=N+1} \chi \tilde{b}_\alpha\right) + \text{op}((1-\chi)c_N).$$

El lado derecho es un operador con núcleo integral de clase C^∞ . Ya vimos que eso es cierto en el caso de $\text{op}((1-\chi)c_N)$. Y si $k < -\mu - n + N$, entonces ambos $\text{op}(\sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!} b_\alpha - b)$ y $\text{op}(\sum_{|\alpha|=N+1} \chi \tilde{b}_\alpha)$ son operadores integrales con núcleo de clase C^k . Por lo tanto,

$$\text{op}\left(\sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!} b_\alpha - b\right) + \sum_{|\alpha|=N+1} \chi \tilde{b}_\alpha + (1-\chi)c_N$$

es un operador integral con núcleo de clase al menos $N - \mu - n$. Como este es igual a $\text{op}(\tilde{b} - b)$, el cual es independiente de N y como el operador determina su núcleo, $\text{op}(\tilde{b} - b)$ tiene núcleo de clase C^∞ . \square

DEFINICIÓN 4.12. Sea $B = \text{op}(\tilde{b})$ con $\tilde{b} \in S_{1,0}^\mu(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$. Un símbolo total a izquierda de B es un símbolo $b \in S_{1,0}^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\text{op}(\tilde{b}) = \text{op}(b) + K$$

con K un operador integral con núcleo de clase C^∞ . El símbolo principal de B es $b \pmod{S_{1,0}^{\mu-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)}$.

En la demostración de la Proposición 4.10 usamos que si $b \in S_{1,0}^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ se anula en la diagonal $\text{diag}(\Omega)$ entonces $\text{op}(b) = \text{op}(b')$ con $b' \in S_{1,0}^{\mu-1}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$. Este es el ingrediente que demuestra:

LEMA 4.13. Si $b \in S_{1,0}^\mu(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ y $b^{(k)}(x, x', \xi) = |x - x'|^{2k} b(x, x', \xi)$, $k \in \mathbb{N}_0$, entonces $\text{op}(b^{(k)})$ es un operador integral con símbolo de clase C^ℓ , $\ell \in \mathbb{N}_0$, si $2k > \ell + \mu + n$. En particular, si $\mu < -n - \ell$ entonces $\text{op}(b)$ tiene núcleo integral de clase C^ℓ .

El significado de este lema es el siguiente. La integral formal

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-x') \cdot \xi} b(x, x', \xi) d\xi$$

tiene una interpretación como distribución (función generalizada) en $\Omega \times \Omega$, denotada $K_{\text{op}(b)}$, llamada el núcleo de Schwartz de $\text{op}(b)$. El lema dice que $|x - x'|^{2k} K_{\text{op}(b)}$ es de clase C^ℓ si $2k > \ell + \mu + n$. Por lo tanto, en el abierto $\Omega \times \Omega \setminus \text{diag}(\Omega)$, $K_{\text{op}(b)}$ es una función de clase C^∞ , porque allí ella es igual a $|x - x'|^{-2k} K_{\text{op}(b^{(k)})}$. Dicho de otro modo, las singularidades de $K_{\text{op}(b^{(k)})}$ forman un subconjunto de $\text{diag}(\Omega)$. Si $\mu < -n$, la integral formal existe como integral de Lebesgue, el resultado de la integración es continuo. Y si $\mu < -n - \ell$ con ℓ entero

positivo, entonces el resultado de la integración en ξ es incluso diferenciable de orden ℓ .

DEFINICIÓN 4.14. *El soporte de $\text{op}(b)$ es el soporte de su núcleo de Schwartz.*

Omitimos la demostración del siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 4.15. *El símbolo total a izquierda de un operador $B \in \Psi_{1,0}^\mu(\Omega)$ está determinado por B módulo $S_{1,0}^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Esto es, si b y b' son símbolos totales a izquierda de $B = \text{op}(\tilde{b})$ con $\tilde{b} \in S_{1,0}^\mu(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$, entonces $b - b' \in S_{1,0}^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$.*

Admitir símbolos en $S^{\mu-1,0}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ permite absorber operadores integrales con núcleo de clase C^∞ :

LEMA 4.16. *Si $R = \text{op}(K)$ con $K \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$, entonces hay $\kappa \in S_{1,0}^\mu(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ tal que $\text{op}(\kappa) = R$. De hecho tal κ puede ser tomado en $S_{1,0}^{-\infty}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos

$$\kappa(x, x', \xi) = (2\pi)^{n/2} K(x, x') e^{(|x-x'|^2 - |\xi|^2)/2}$$

Entonces

$$\text{op}(\kappa) = R$$

porque

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2/2} e^{i(x-x') \cdot \xi} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-|x-x'|^2/2}.$$

Claramente $\kappa \in S_{1,0}^{-\mu}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ para todo μ . □

En la mayoría de las aplicaciones en capítulos posteriores los símbolos totales, b tienen la propiedad de ser sumas asintóticas

$$(4.17) \quad b \sim \sum_{j=1} b_{\mu-j}, \quad b_{\mu-j} \in S_{1,0}^{\mu-j}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$$

con $b_{\mu-j}$ eventualmente positivamente homogéneo de orden $\mu - j$, esto es, para cada j y para cada conjunto compacto $\mathcal{K} \Subset \Omega$ existe $\tau_0 > 0$ tal que

$$b_{\mu-j}(x, \tau\xi) = \tau^{\mu-j} b_{\mu-j}(x, \xi) \text{ si } x \in \mathcal{K}, \tau > \tau_0, \text{ y } |\xi| > 1.$$

En este caso, la clase de b mód $S_{1,0}^{\mu-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ está determinada por b_μ .

DEFINICIÓN 4.18. *El elemento $b \in S_{1,0}^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ es un símbolo clásico si es asintótico a una suma (4.17) con cada $b_{\mu-j}$ eventualmente homogéneo de orden $\mu - j$. El subespacio de $S_{1,0}^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ cuyos elementos son símbolos clásicos es*

$S^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Si $B = \text{op}(b)$ con $b \in S^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ con b como antes, decimos que $B \in \Psi^\mu(\Omega)$. En este caso, la función

$$(4.19) \quad \sigma_\mu(B)(x, \xi) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{-\mu} b_\mu(x, \tau\xi), \quad (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$$

es el símbolo principal de B . Esta función está bien definida porque B determina su símbolo total. Si $\sigma_\mu(B)(x, \xi)$ es invertible para cada $(x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$, decimos que B es *elíptico*.

Dos observaciones y un comentario: *i*) la función $\sigma_\mu(B)(x, \xi)$ es positivamente homogénea de grado μ ; *ii*) $S_{1,0}^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n) = \bigcap_\mu S^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n)$; y *iii*) en lo sucesivo usaremos exclusivamente símbolos y operadores clásicos, solo para descargar algo de la notación: la regla general es, si un resultado depende solo de estimaciones, entonces vale con símbolos y operadores de tipo $(1, 0)$, pero si depende del uso de un símbolo principal como función, entonces posiblemente solo valga en el contexto clásico.

Sea $S_h^\mu(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0))$ el espacio de funciones $b : \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0) \rightarrow \mathbb{C}$ (positivamente) homogéneas de grado μ .

PROPOSICIÓN 4.20. *La sucesión*

$$0 \rightarrow \Psi^{\mu-1}(\Omega) \xrightarrow{\iota} \Psi^\mu(\Omega) \xrightarrow{\sigma_\mu} S_h^\mu(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)) \rightarrow 0,$$

en donde ι es la inclusión, es exacta.

DEMOSTRACIÓN. Sobreyectividad de σ_μ : sea $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\chi(\xi) = 1$ si $|\xi| < 1$. Si $b_\mu \in S_h^\mu(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0))$, entonces $b = (1 - \chi)b_\mu \in S^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, y $\sum_\mu (\text{op}(b)) = b_\mu$. La inyectividad de ι es trivial. La composición $\sigma_\mu \circ \iota = 0$ es obvia.

Finalmente, supongamos que $B \in \Psi^\mu(\Omega)$ y $\sigma_\mu(B) = 0$. Esto dice: si $B = \text{op}(b)$ con $b \in S^\mu(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ entonces la parte principal (de orden μ) del símbolo total a izquierda de B , la cual es eventualmente homogénea, es en realidad eventualmente nula. Si $b(x, x', \xi) \sim b_\mu(x, x', \xi) + b_{\mu-1}(x, x', \xi) + \dots$, el símbolo total a izquierda de B es asintótico a

$$b_\mu(x, x, \xi) + b_{\mu-1} + \sum_{\alpha=1} \partial_\xi^\alpha (D_x^\alpha b_\mu)(x, x, \xi) + \dots$$

debido a la Proposición 4.10. Como $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{-\mu} b_\mu(x, x, \tau\xi) = 0$, podemos escoger $\chi \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ cuidadosamente tal que para cada conjunto compacto $\mathcal{K} \Subset \Omega$ tenemos $\chi(x, \xi) = 0$ si $x \in \mathcal{K}$ y $|\xi|$ es suficientemente grande, de manera que $(1 - \chi)b_\mu = 0$. En

$$b_\mu(x, x', \xi) = (1 - \chi(x))b_\mu(x, x', \xi) + \chi(x, \xi)b_\mu(x, x', \xi)$$

los dos términos de la derecha son símbolos, con el segundo en $S^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. La restricción del primero a $x' = x$ se anula, por lo cual podemos escribirlo

como

$$\sum_{j=1}^n b'_j(x, x', \xi)(x_j - x'_j)$$

con otros símbolos $b'_j \in S^\mu(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$. Usando integración por partes en ξ como en la demostración de la Proposición 4.10, los operadores definidos por los símbolos $b'_j(x, x', \xi)(x_j - x'_j)$ son iguales a aquellos definidos por $D_{\xi_j} b'_j(x, x', \xi)$, los cuales son de orden $\mu - 1$. En conclusión $\text{op}(b) = \text{op}(b'')$ con $b'' \in S^{\mu-1}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$, es decir, $B \in \Psi^{\mu-1}(\Omega)$. \square

5. Paramétrices de operadores diferenciales elípticos

Si $A \in \text{Dif}^m(\Omega)$ con símbolo total $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ y $b \in S^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, entonces

$$(5.1) \quad A \text{op}(b)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} e^{i(x-x') \cdot \xi} c(x, \xi) u(x') dx' d\xi,$$

donde

$$(5.2) \quad c(x, \xi) = \sum_{|\beta| \leq m} \frac{1}{\beta!} (\partial_\xi^\beta a)(x, \xi) (D_x^\beta b)(x, \xi).$$

Esta fórmula se puede verificar usando diferenciación bajo la integral, la fórmula de Leibniz

$$D_x^\alpha (f(x)g(x)) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} (D_x^{\alpha - \beta} f)(x) (D_x^\beta g)(x),$$

y la fórmula

$$\partial_x^{\alpha'} \xi^\alpha = \frac{\alpha!}{(\alpha - \alpha')!} \xi^{\alpha - \alpha'}.$$

Es fácil ver que $c \in S^{m+\mu}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Así, $A \text{op}(b)$ es un operador pseudodiferencial de orden $m + \mu$ con símbolo total c dado por la fórmula (5.2).

Sea A elíptico de orden m con símbolo principal a , sea b_{-m} definida como en (4.1), por

$$b_m(x, \xi) = (1 - \chi(\xi))a(x, \xi)^{-1}$$

y B_{-m} definido por (4.5) con b_{-m} en lugar de b . La fórmula (5.1) aplicada a AB_{-m} lleva a un operador con símbolo total c_0 dado por (5.2). Escribiendo $a = \sum_{\ell=0}^m a_{m-\ell}$ con

$$a_k(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

y separando por orden de homogeneidad (de a), tenemos

$$c_0(x, \xi) = \sum_{k=0}^m \sum_{|\beta| + \ell = m - k} \frac{1}{\beta!} (\partial_\xi^\beta a_{m-\ell})(x, \xi) (D_x^\beta b_{-m})(x, \xi)$$

El término de orden más alto corresponde a $k = 0$, es decir, $\ell = |\beta| = 0$. Así, este término es

$$a_m b_{-m} = a_m(1 - \chi(\xi))a_m(x, \xi)^{-1} = 1 - \chi(\xi).$$

Usando la fórmula de inversión de Fourier vemos que el operador pseudodiferencial definido por este símbolo es

$$\begin{aligned} u &\mapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} e^{i(x-x') \cdot \xi} (1 - \chi(\xi)) u(\xi) dx' d\xi \\ &= u(x) - \int_{\Omega} \tilde{\chi}(x - x') u(x') dx' \end{aligned}$$

con

$$\tilde{\chi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \chi(\xi) d\xi$$

La función $\tilde{\chi}$ satisface las estimaciones (4.6) (en la variable x). Por lo tanto, el operador de convolución que ella define es un operador regularizante. Los demás términos en c_0 junto con $\chi(\xi)$ producen un símbolo de orden -1 :

$$c_0 = 1 - r_{-1}$$

con

$$r_{-1}(x, \xi) = \chi(\xi) - \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{|\beta|+\ell=m-k} \frac{1}{\beta!} (\partial_{\xi}^{\beta} a_{m-\ell})(x, \xi) (D_x^{\beta} b_{-m})(x, \xi)$$

Así, si R_{-1} es el operador definido por r_{-1} , tenemos

$$AB_{-m} = I - R_{-1}$$

y concluimos que B_m es una parametriz de A . Esto completa el **primer paso** en la construcción de una parametriz para un operador elíptico general.

El truco esencial ahora es añadir a B_{-m} un operador pseudodiferencial de orden $-m - 1$ que elimine parte del residuo, de manera de obtener como error un operador pseudodiferencial de orden de orden -2 : sea

$$b_{-m-1}(x, \xi) = -r_{-1}(x, \xi)(1 - \chi)a_m(x, \xi)^{-1}.$$

Descomponiendo de nuevo por el orden de homogeneidad de a vemos que la fórmula para el símbolo de AB_{m-1} es $r_{-1} - r_{-2}$ con r_{-2} un símbolo de orden -2 . Así, la fórmula para el símbolo de $A(B_{-m} + B_{-m-1})$ es

$$c_{-1} = 1 - r_1 + r_1 - r_2 = 1 - r_2.$$

Continuando de esta manera uno obtiene sucesiones de símbolos $\{b_{-m-\ell}\}_{\ell=0}^{\infty}$ y $\{r_{-\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ con $b_{-m-\ell} \in S^{-m-\ell}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ y $r_{\ell} \in S^{-\ell}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ tales que con los respectivos operadores $B_{m-\ell}$ y $R_{-\ell}$ tenemos

$$A\left(\sum_{\ell=0}^N B_{m-\ell}\right) = I - R_{-N-1}$$

para cada $N \in \mathbb{N}_0$. Esto completa el **segundo paso** en la construcción de paramétrices.

El **tercer paso** es usar el Lema 4.8: sea $b \in S^{-m}(\Omega \times \mathbb{R})$ tal que

$$b \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_{-m-j}.$$

Entonces con $B = \text{op}(b)$ tenemos

$$AB = I - R$$

con R un operador integral con núcleo de clase C^∞ .

6. Espacios de funciones

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Los espacios básicos de funciones serán $L^2(\Omega)$, el espacio de funciones $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ medibles tales que $\int_\Omega |u(x)|^2 dx < \infty$, subespacios de estos cuyos elementos tienen diferenciabilidad relacionada con el problema a estudiar, y sus espacios duales. En el caso de sistemas, en lugar de imagen en \mathbb{C} tendremos funciones a valores en \mathbb{C}^r para algún $r \in \mathbb{N}$.

Podemos ver $L^2(\Omega)$ como la completación del espacio de funciones continuas (o de clase C^∞ , da igual) con soporte compacto, $C_c(\Omega)$, con la norma inducida por el producto interno

$$(u, v)_0 = \int_\Omega u(x) \overline{v(x)} dx.$$

usando integral de Riemann. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $H^k(\Omega)$ es el subespacio de $L^2(\Omega)$ cuyos elementos u tiene la propiedad

$$u \in H^k(\Omega) \iff u \in L^2(\Omega) \text{ y para cada } \alpha \text{ con } |\alpha| \leq k \text{ existe } u_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ tal que}$$

$$(6.1) \quad \int_\Omega u_\alpha(x) \varphi(x) dx = (-1)^\alpha \int_\Omega u(x) \partial_x^\alpha \varphi(x) dx$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Este es el espacio de Sobolev³ en Ω de orden k basado en L^2 . Si $u \in H^k(\Omega)$, el elemento u_α es único. Si u es de clase C^k en Ω y $\partial_x^\alpha u \in L^2(\Omega)$ si $|\alpha| \leq k$, entonces $u \in H^k(\Omega)$ y vale

$$\int_\Omega \partial_x^\alpha u_\alpha(x) \varphi(x) dx = (-1)^\alpha \int_\Omega u(x) \partial_x^\alpha \varphi(x) dx, \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

³El libro de Treves [75] contiene una introducción eficiente a espacios de Sobolev. Una exposición considerablemente más extensa que la de Treves es el libro de Adams [2]; este incluye espacios basados en L^p con $1 \leq p \leq \infty$, no solo L^2 .

Eso justifica denotar al elemento u_α asociado a $u \in H^k(\Omega)$ de acuerdo a (6.1) por $\partial_x^\alpha u$. A veces nos referimos a $\partial_x^\alpha u$ como la derivada débil de orden α de u . Si $u, v \in H^k$, definimos

$$(6.2) \quad (u, v)_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D_x^\alpha u(x) \overline{D_x^\alpha v(x)} dx;$$

usar D_x en lugar de ∂_x no tiene ningún efecto.

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ podemos definir $H^k(\mathbb{R}^n)$ también como la completación de $C_c^k(\mathbb{R}^n)$ con respecto a la norma inducida por el producto interno (6.2); naturalmente en este caso la integral es sobre \mathbb{R}^n . Este espacio es igual al espacio de funciones $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que existe una sucesión $\{u_\nu\}_{\nu=1}^\infty \subset C_c^k(\mathbb{R}^n)$ con límite u en L^2 y tal que $D_x^\alpha u_\nu$ converge en $L^2(\mathbb{R}^n)$ para cada $|\alpha| \leq k$. Si la frontera de Ω es suficientemente regular el espacio $H^k(\Omega)$ consiste de las restricciones a Ω de los elementos de $H^k(\mathbb{R}^n)$. Es importante notar que la clausura de $C_c^k(\Omega)$ en $H^k(\Omega)$ es un subespacio propio de $H^k(\Omega)$ denotado $H_0^k(\Omega)$. El espacio dual de $H_0^k(\Omega)$ es $H^{-k}(\Omega)$. Este último es también un espacio de Hilbert.

En el caso de \mathbb{R}^n , el Teorema de Plancherel nos permite escribir (6.2) como

$$(u, v)_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2 \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi.$$

En la sucesión de desigualdades

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k} \eta_1^{\alpha_1} \eta_2^{\alpha_2} \dots \eta_n^{\alpha_n} &\leq \sum_{\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_n = k} \frac{k!}{\beta_0! \beta_1! \dots \beta_n!} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \dots \eta_n^{\beta_n} \\ &\leq \max_{\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_n = k} \frac{k!}{\beta_0! \beta_1! \dots \beta_n!} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k} \eta_1^{\alpha_1} \eta_2^{\alpha_2} \dots \eta_n^{\alpha_n}, \end{aligned}$$

con $\eta_j \geq 0$ y $\alpha_j, \beta_\ell \in \mathbb{N}_0$, el término intermedio es $(1 + \sum_{j=1}^n \eta_j)^k$. Con $\eta_j = \xi_j^2$ y escribiendo C_k para el coeficiente en el último término, obtenemos

$$\sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2 \leq (1 + |\xi|^2)^k \leq C_k \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2$$

En consecuencia, la norma definida por (6.2) es equivalente a la norma

$$\|u\|_k^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^k d\xi.$$

El valor de esta observación radica en que en esta fórmula no necesitamos suponer que k es un entero no negativo: cualquier número real positivo es permitido. Esto nos lleva a la definición de los espacios $H^s(\mathbb{R}^n)$ con $s \geq 0$ real:

$$u \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff u \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ y } \|u\|_s^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty.$$

El espacio dual es $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, al igual que los demás espacios de Sobolev que hemos introducido, este es un espacio de Hilbert.

Con frecuencia escribimos $H^0(\Omega)$ en lugar de $L^2(\Omega)$; evidentemente estos dos espacios son iguales.

Una definición más flexible del espacio $H^s(\mathbb{R}^n)$ con $s < 0$ usa distribuciones de Schwartz,⁴ elementos del dual del espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ cuyos elementos están caracterizados por

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tales que para todo } \alpha, \beta : \wp_{\alpha, \beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x)| < \infty.$$

Las funciones $\wp_{\alpha, \beta} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ son seminormas; ellas definen la topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Evidentemente $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto la transformada de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$ está definida para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dado que

$$\mathcal{F}(x^\alpha D_x^\beta) = -(D_\xi)^\alpha \xi^\beta \mathcal{F}(\varphi)$$

es fácil probar que $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es continuo. El espacio dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, como de costumbre. Si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, definimos $\mathcal{F}u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ como el elemento

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto \langle u, \mathcal{F}\varphi \rangle \in \mathbb{C}.$$

La motivación de esta fórmula proviene de la fórmula

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}u(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(\xi) \mathcal{F}\varphi(\xi) dx,$$

válida si $u, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La linealidad y continuidad de $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ implican que $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ también es lineal y continuo.

Un elemento $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es localmente integrable si existe $\tilde{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ localmente integrable tal que

$$\text{para todo } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) : \langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(x) \varphi(x) dx$$

Si $\tilde{u} \in L^2$, decimos que $u \in L^2$, etc.

Para $s \in \mathbb{R}$ arbitrario, definimos $H^s(\mathbb{R}^n)$ como el subespacio de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definido de la siguiente manera:

$$(6.3) \quad u \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff \hat{u} \text{ es medible y } \|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \leq \infty.$$

Ese es en general el espacio de Sobolev en \mathbb{R}^n de orden s basado en L^2 . Si s es un entero no negativo k , esa definición coincide con la anterior, y con la nueva definición, el espacio $H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ es en verdad el espacio dual de $H^k(\mathbb{R}^n)$.

LEMA 6.4. *Para todo par de índices s, s' con $s > s'$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^{s'}(\mathbb{R}^n)$*

⁴El primer capítulo del libro de Hörmander [30] es una introducción al tema de distribuciones en conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n . Sobre distribuciones, la versión más rápida que conozco está en el libro de Neri [56, p. 128–149]. (Esto es menos de lo que parece porque el libro está escrito a máquina—la densidad de palabras por página es baja.)

Para la demostración, tomamos $\omega \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con $\omega(t) = 1$ si t está cerca de 0. Si $u \in H^{s'}(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$u_\ell = \mathcal{F}^{-1}(\omega(|\xi|/\ell)\widehat{u}).$$

Entonces $\widehat{u}_\ell(1 + |\xi|^2)^{s/2} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto $u_\ell \in H^s(\mathbb{R}^n)$, y

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi) - \widehat{u}_\ell(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^{s'} d\xi \rightarrow 0 \text{ cuando } \ell \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto $u_\ell \rightarrow u$ en $H^{s'}(\mathbb{R}^n)$.

En el caso de una variedad \mathcal{X} , la topología de $C^\infty(\mathcal{X})$ está determinada de nuevo por las sucesiones convergentes. Estas son las sucesiones cuyos elementos tiene soporte contenido en un subconjunto compacto fijo de \mathcal{X} , y convergen ellas y también el resultado de aplicar sobre sus términos cualquier número de campos vectoriales de clase C^∞ . La topología de $C^\infty(\mathcal{X})$ es similar, solo se omite control sobre el soporte, la convergencia de la sucesión y “cualquier número de derivadas” debe ser uniforme sobre cualquier conjunto compacto. El espacio dual de $C_c^\infty(\mathcal{X})$ es denotado por $C^{-\infty}(\mathcal{X})$, y el espacio dual de $C^\infty(\mathcal{X})$ es $C_c^{-\infty}(\mathcal{X})$.

En la Sección 11 definiremos espacios de Sobolev basados en L^2 en el caso de variedades (compactas sin borde).

La siguiente proposición será importante en la discusión de invertibilidad y espectro de operadores elípticos.

PROPOSICIÓN 6.5 (Rellich-Kondarchov). *Sea $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, sea $H_c^s(\mathcal{K}) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^n) : \text{sop } u \subset \mathcal{K}\}$. Si $s > s'$, entonces la inclusión $\iota : H_c^s(\mathcal{K}) \rightarrow H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ es compacta. Esto es, toda sucesión acotada $\{u_\ell\}_{\ell=1}^\infty \subset H^s(\mathcal{K})$ tiene una subsucesión convergente en $H^{s'}(\mathbb{R}^n)$.*

Para la demostración ver por ejemplo [75, p. 227].⁵ Hay también una familia de resultados, las inmersiones de Sobolev, que son útiles en muchos contextos. Para nuestro propósito el siguiente caso particular es suficiente. El espacio $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ consiste de todas las funciones continuas en \mathbb{R}^n tales que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

PROPOSICIÓN 6.6 (Lema de inmersión de Sobolev). *Si $s > n/2$, entonces $H^s(\mathbb{R}^n) \subset C_0^0(\mathbb{R}^n)$ y la inclusión es continua.*

⁵Esta proposición usualmente es referida como el Lema de Rellich. El artículo de Rellich [62] es bastante más restrictivo: El dominio es un abierto acotado en \mathbb{R}^2 con frontera una unión de curvas C^1 a trozos y ángulo positivo en las esquinas; las funciones son de clase C^1 . La referencia Kondrachov [41] en la bibliografía es tomada de [2]. El teorema es una especie de Teorema de Arzelà-Ascoli y su demostración en [75] usa el Teorema de Arzelà-Ascoli.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ con $s > n/2$, entonces $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La fórmula de inversión de Fourier y las propiedades básicas de esta transformación implican la conclusión. Supongamos que $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Por definición, \widehat{u} es una función medible y tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)| (1 + |\xi|^2)^{s/2} (1 + |\xi|^2)^{-s/2} d\xi \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi \right)^{1/2} \end{aligned}$$

usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz. En la segunda línea, la última integral es finita, digamos igual a C_s , si $2s > n$, y la primera es $(2\pi)^{n/2} \|u\|_s$. Suponiendo entonces $s > n/2$ tenemos que u es continua y

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(x)| dx \leq C_s \|u\|_s$$

La afirmación sobre el comportamiento de u en ∞ es el Lema de Riemann-Lebesgue. □

7. Continuidad

La topología de $C^\infty(\Omega)$ está determinada por las sucesiones convergentes. Una sucesión $\{u_\nu\}_{\nu=1}^\infty \subset C^\infty(\Omega)$ converge a u en $C^\infty(\Omega)$ si para cada conjunto compacto $\mathcal{K} \subset \Omega$ y cada α , la sucesión $\{\partial_x^\alpha u_\nu\}$ converge uniformemente a $\partial_x^\alpha u$ en \mathcal{K} .

La topología de $C_c^\infty(\Omega)$ es tal que la continuidad de un operador está determinada por la convergencia de su acción sobre sucesiones convergentes. Una sucesión $\{u_\nu\}_{\nu=1}^\infty \subset C_c^\infty(\Omega)$ converge a u en $C_c^\infty(\Omega)$ si hay un conjunto compacto $\mathcal{K} \subset \Omega$ tal que $\text{sop } u_\nu \subset \mathcal{K}$ para todo ν , y $\partial_x^\alpha u_\nu \rightarrow \partial_x^\alpha u$ uniformemente para todo α .

PROPOSICIÓN 7.1. *El operador $B \in \Psi^\mu(\Omega)$, como operador $C_c^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$, es continuo.*

DEMOSTRACIÓN. Con $B = \text{op}(b)$, $b \in S^\mu(\Omega \times \Omega \times \Omega^n)$ definimos $\beta(u)(x, \xi, \xi')$ por

$$\beta_\alpha(u)(x, \xi, \xi') = \int e^{-ix' \cdot \xi'} D_{x'}^\alpha (b(x, x', \xi) u(x')) dx'$$

Si $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \Subset \Omega$ son conjuntos compactos, $\text{sop } u \subset \mathcal{K}'$ y $x \in \mathcal{K}$, entonces

$$|\beta_\alpha(u)(x, \xi, \xi')| \leq C_\alpha \text{vol}(\mathcal{K}') \sup_{\substack{x' \in \mathcal{K}' \\ \alpha' \leq \alpha}} |D_{x'}^{\alpha'} u(x')| (1 + |\xi|)^\mu$$

con

$$C_\alpha = \sup_{\substack{\mathcal{K} \times \mathcal{K}' \times \mathbb{R}^n \\ \alpha' \leq \alpha}} \left| \frac{D_{x'}^{\alpha'} b(x, x', \xi)}{(1 + |\xi|)^\mu} \right|.$$

Usando integración por partes,

$$\xi'^{\alpha} \beta(u)(x, \xi, \xi') = \beta_{\alpha}(x, \xi, \xi'),$$

por lo tanto

$$|(1 + |\xi'|)^k \beta(u)(x, \xi, \xi')| \leq C_k \sup_{\substack{x' \in \mathcal{K}' \\ |\alpha| \leq 2k}} |D_x'^{\alpha} u(x')| (1 + |\xi|)^{\mu}$$

para algún C_k y todo $k \in \mathbb{N}_0$ y $x \in \mathcal{K}$. En consecuencia

$$|\beta(u)(x, \xi, \xi)| \leq C_k \sup_{\substack{x' \in \mathcal{K}' \\ |\alpha| \leq 2k}} |D_x'^{\alpha} u(x')| (1 + |\xi|)^{\mu-2k}$$

para tales k y x . Si $\{u_{\nu}\}_{\nu=1}^{\infty} \subset C_c^{\infty}(\Omega)$ es una sucesión que converge a u en $C_c^{\infty}(\Omega)$ con $\text{sop } u_{\nu} \subset \mathcal{K}'$ y k es suficientemente grande, de manera que $\mu - 2k < -n$, entonces

$$\begin{aligned} \sup_{\mathcal{K}} |B(u - u_{\nu})| &= \sup_{x \in \mathcal{K}} \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} \beta(u_{\nu} - u)(x, \xi, \xi) d\xi \right| \\ &\leq C_k \sup_{\substack{x' \in \mathcal{K}' \\ |\alpha| \leq 2k}} |D_x'^{\alpha} (u_{\nu}(x') - u(x))| \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{\mu-2k} d\xi, \end{aligned}$$

es decir, $Bu_{\nu} \rightarrow Bu$ uniformemente en \mathcal{K} . Trabajando con $D_x^{\alpha} B = \text{op}(b_{\alpha})$, $b_{\alpha} = e^{-ix \cdot \xi} D_x^{\alpha} (e^{ix \cdot \xi} b(x, x', \xi))$ (un elemento de $S^{\mu+|\alpha|}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$) en lugar de B obtenemos que $D_x^{\alpha} u_{\nu}$ converge uniformemente a $D_x^{\alpha} u_{\nu}$ en \mathcal{K} . \square

La siguiente proposición también concierne continuidad, esta vez en un espacio que eventualmente nos dará más flexibilidad.

PROPOSICIÓN 7.2. *Sea $\mathcal{K} \Subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $b \in S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ un símbolo con soporte en $\mathcal{K} \times \mathbb{R}^n$. Si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\text{op}(b)(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, y el operador $\text{op}(b) : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ es continuo:*

$$\|\text{op}(b)(u)\|_0 \leq C \|u\|_0$$

con

$$C = \sup |(1 + \Delta_x + \Delta_{x'})^{n+1} b|.$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el Teorema de Plancherel,

$$\|\text{op}(b)u\|_0 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|\text{op}(b)(u)^{\wedge}\|_0,$$

buscamos estimar $\|\text{op}(b)(u)^{\wedge}\|_0$. Definiendo

$$\widehat{b}(\eta, \eta', \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x \cdot \eta + x' \cdot \eta')} b(\eta, \eta', \xi) dx dx'$$

obtenemos

$$(\text{op}(b)u)^{\wedge}(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{b}(\eta - \xi, \xi - \eta', \xi) \widehat{u}(\eta') d\eta d\eta' d\xi$$

si $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$; esta fórmula es similar a $(fg)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi - \eta') \widehat{g}(\eta') d\eta'$ si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La integral converge porque

$$(1 + |\eta|^2 + |\eta'|^2)^k \widehat{b}(\eta, \eta', \xi) = ((1 + \Delta_x + \Delta_{x'})^k b)^\wedge(\eta, \eta', \xi)$$

y

$$\begin{aligned} |(1 + \Delta_x + \Delta_{x'})^k b)^\wedge(\eta, \eta', \xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |(1 + \Delta_x + \Delta_{x'})^k b(x, x', \xi)| dx dx' \\ &\leq \text{vol}(\mathcal{K}) C_k(b). \end{aligned}$$

con $C_k(b) = \sup |(1 + \Delta_x + \Delta_{x'})^k b|$, por lo cual

$$|\widehat{b}(\eta - \xi, \xi - \eta', \xi)| \leq (1 + |\eta - \xi|^2 + |\xi - \eta'|^2)^{-k} \text{vol}(\mathcal{K}) C_k(b).$$

La constante $C_k(b)$ es finita porque b es un símbolo. Sea

$$K(\eta, \eta') = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{b}(\eta - \xi, \xi - \eta', \xi) d\xi,$$

de manera que

$$(\text{op}(b)u)^\wedge(\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} K(\eta, \eta') \widehat{u}(\eta') d\eta'.$$

El núcleo K es de clase C^∞ y satisface

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(\eta, \eta')| d\eta < C, \quad \int_{\mathbb{R}^n} |K(\eta, \eta')| d\eta' < C,$$

para alguna constante C . Por ejemplo, la integral

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |K(\eta, \eta')| d\eta &\leq \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |\widehat{b}(\eta - \xi, \xi - \eta', \xi)| d\xi d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |\widehat{b}(\eta, \xi, \xi + \eta')| d\xi d\eta \\ &\leq \text{vol}(\mathcal{K}) C_{n+1}(b) \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (1 + |\eta|^2 + |\xi|^2)^{-n-1} d\xi d\eta \end{aligned}$$

es finita. Por lo tanto,⁶

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} K(\cdot, \eta') \widehat{u}(\eta') d\eta' \right\|_0 \leq C \|\widehat{u}\| \leq (2\pi)^n \|u\|_0,$$

aplicando una vez más el Teorema de Plancherel en la segunda desigualdad. \square

La versión más útil es:

⁶TEOREMA. Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu)$, $(\mathcal{X}, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida σ -finitos y $K : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ -medible. Si existe $C > 0$ tal que $\int_{\mathcal{X}} |K(x, y)| d\mu(x) \leq C$ a.e. $y \in \mathcal{Y}$ y $\int_{\mathcal{Y}} |K(x, y)| d\nu(y) \leq C$ a.e. $x \in \mathcal{X}$, entonces $\text{op}(K) : L^p(\mathcal{Y}, \nu) \rightarrow L^p(\mathcal{X}, \mu)$ es continuo con norma $\leq C$. Ver por ejemplo Folland [16, p. 185].

COROLARIO 7.3. *Sea $B \in \Psi^0(\Omega)$ y sean $\chi, \chi' \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces el operador*

$$L^2(\Omega) \ni u \mapsto \chi B(\chi' u) \in L^2(\Omega)$$

es continuo.

La demostración es inmediata. Si $B = \text{op}(b)$, entonces el operador en el lema es $\text{op}(\tilde{b})$ con $\tilde{b}(x, x', \xi) = \chi(x)\chi'(x')b(x, x', x, \xi)$, el cual tiene soporte contenido en $\mathcal{K} \times \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{K} = \text{sop}(\chi) \times \text{sop}(\chi')$, un subconjunto compacto de $\Omega \times \Omega$.

Es evidente que el operador

$$(7.4) \quad \Lambda^{s'} = \mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{s'/2} \mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

define un operador continuo, de hecho un isomorfismo isométrico

$$\Lambda^{s'} : H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s-s'}(\mathbb{R}^n).$$

Este operador es un elemento de $\Psi^{s'}(\mathbb{R}^n)$.

PROPOSICIÓN 7.5. *Si $B = \text{op}(b)$ con $b \in S^\mu(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y $\text{sop } b \subset \mathcal{K} \times \mathbb{R}^n$, \mathcal{K} un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, entonces B define un operador continuo $H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)$. Si $\mu < 0$, y por lo tanto $H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$, entonces B , visto como operador $H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$, es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. La esencia de la prueba consiste en demostrar que si χ y $\chi' \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ son tales que $\chi = 1$ en un entorno de $\text{sop } \chi'$, entonces para cualquier s , $(1 - \chi)\Lambda^s \chi'$, $\chi'\Lambda^s(1 - \chi)$ y la composición de estos con operadores del mismo tipo que B son operadores integrales continuos $L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ para cualquier s' . Una vez que esto ha sido probado, procedemos de la siguiente manera. Supongamos que $\chi' \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es tal que

$$\chi'(x)b(x, x', \xi) = b(x, x', \xi) = \chi'(x')b(x, x', \xi)$$

(la función $(x, x') \mapsto \chi'(x)\chi'(x')$ es igual a 1 en el soporte de b). Entonces $B = \chi' B \chi'$. Pre- y post-multiplicando por $\chi + (1 - \chi)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \Lambda^{s-\mu} B \Lambda^{-s} &= \Lambda^{s-\mu} \circ (\chi' B \chi') \circ \Lambda^{-s} \\ &= (\chi \Lambda^{s-\mu} \chi') \circ B \circ (\chi' \Lambda^{-s}) + ((1 - \chi) \Lambda^{s-\mu} \chi') \circ B \circ (\chi' \Lambda^{-s}) \\ &= (\chi \Lambda^{s-\mu} \chi') \circ B \circ (\chi' \Lambda^{-s} \chi) + ((1 - \chi) \Lambda^{s-\mu} \chi') \circ B \circ (\chi' \Lambda^{-s} \chi) \\ &\quad + (\chi \Lambda^{s-\mu} \chi') \circ B \circ (\chi' \Lambda^{-s} (1 - \chi)) + ((1 - \chi) \Lambda^{s-\mu} \chi') \circ B \circ (\chi' \Lambda^{-s} (1 - \chi)) \end{aligned}$$

En el lado derecho de la última igualdad, el primer término, $(\Lambda^{s-\mu} \chi') \circ B \circ (\chi' \Lambda^{-s})$, es la composición de tres operadores como B , con orden total 0 y símbolo con soporte contenido en $\text{sop } \chi \times \text{sop } \chi \times \mathbb{R}^n$. Este operador, por lo tanto, es continuo como operador $L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$. En el segundo, $B(\chi' \Lambda^{-s} \chi)$ es un operador similar a B en cuanto a que su símbolo tiene soporte contenido en $\text{sop } \chi' \times \text{sop } \chi \times \mathbb{R}^n$, y por lo tanto seguido de $(1 - \chi) \Lambda^{s-\mu} \chi'$ produce también en

un operador continuo $L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$. Los siguientes pueden ser trabajados de la misma manera. La continuidad de $(1 - \chi)\Lambda^{s-\mu}\chi'$ será probada en el lema que sigue a esta demostración. La de $\chi'\Lambda^s(1 - \chi)$ es completamente similar.

Una vez que la continuidad de $\Lambda^{s-\mu}B\Lambda^{-s} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ha sido probada, observamos que la factorización

$$B = \Lambda^{\mu-s}(\Lambda^{s-\mu}B\Lambda^{-s})\Lambda^s$$

implica que $B : H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)$ es continuo.

Para probar la última afirmación, supongamos que $\mu < 0$. Para cualquier conjunto compacto $\mathcal{K}' \subset \mathbb{R}^n$, la inclusión $\iota : H_c^{s-\mu}(\mathcal{K}') \rightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$ es compacta (ver la Proposición 6.5). Si $\mathcal{K}' = \text{sop } \chi'$, entonces la imagen de $H^s(\mathbb{R}^n)$ por B está contenida en $H^{s-\mu}(\mathcal{K}')$, y $B : H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s-\mu}(\mathcal{K}')$ es continuo. La composición de este operador con el operador compacto ι es un operador compacto.

Esto completa la prueba de la proposición, módulo la continuidad del operador $(1 - \chi)\Lambda^s\chi'$. \square

LEMA 7.6. *Sean $\chi, \chi' \in C_c^\infty$ con $\chi = 1$ en $\text{sop } \chi'$. Para cualquier s , el operador $(1 - \chi)\Lambda^s\chi' : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es un operador integral con núcleo, K_s , de clase C^∞ . Este núcleo satisface*

$$|D_x^\alpha D_{x'}^{\alpha'} K_s(x, x')| \leq C_{s, \alpha, \alpha', k} |x - x'|^{-2k}$$

para todo par de multi-índices α, α' y entero no-negativo k , y por lo tanto define un operador continuo $H^{s'}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s''}(\mathbb{R}^n)$ para todo $s', s'' \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. El operador $(1 - \chi)\Lambda^s\chi'$ está definido por el símbolo

$$\tilde{\chi}(x, x')(1 + |\xi|^2)^{s/2}$$

con $\tilde{\chi}(x, x') = (1 - \chi(x))\chi'(x')$. Con un par de multi-índices α, β arbitrario y $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tenemos

$$\begin{aligned} D_x^\alpha \text{op}(\chi(x, x')(1 + |\xi|^2)^{s/2})(D_{x'}^\beta u) = \\ \frac{(-1)^{|\beta|}}{(2\pi)^n} \int D_x^\alpha D_{x'}^\beta (e^{i(x-x') \cdot \xi} \chi(x, x')(1 + |\xi|^2)^{s/2}) u(x') dx' d\xi \end{aligned}$$

usando integración por partes en x' , tomando en cuenta que χ' tiene soporte compacto. Definiendo

$$b_{s, \alpha, \beta}(x, x', \xi) = (-1)^{|\beta|} e^{-i(x-x') \cdot \xi} D_x^\alpha D_{x'}^\beta (e^{i(x-x') \cdot \xi} \chi(x, x')(1 + |\xi|^2)^{s/2})$$

tenemos que $D_x^\alpha \text{op}(\chi(x, x')(1 + |\xi|^2)^{s/2})(D_{x'}^\beta u) = \text{op}(b_{s, \alpha, \beta})(u)$. Explícitamente,

$$\begin{aligned} b_{s, \alpha, \beta}(x, x', \xi) &= \sum_{\substack{\alpha' + \alpha'' = \alpha \\ \beta' + \beta'' = \beta}} (-1)^{|\beta''|} \binom{\alpha}{\alpha'} \binom{\beta}{\beta'} D_x^{\alpha'} D_{x'}^{\beta''} \tilde{\chi}(x, x') \xi^{\alpha' + \beta'} (1 + |\xi|^2)^{s/2} \\ &= \sum_{\substack{\alpha' \leq \alpha \\ \beta' \leq \beta}} b_{\alpha', \beta'}^{\alpha, \beta}(x, x') \xi^{\alpha' + \beta'} (1 + |\xi|^2)^{s/2}, \end{aligned}$$

un símbolo de orden $s + |\alpha| + |\beta|$. Las funciones $b_{\alpha', \beta'}^{\alpha, \beta}$ son todas acotadas en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Como $\chi(x) = 1$ en un entorno del soporte de χ' , el soporte de $\tilde{\chi}(x, x')$ y de cualquiera de sus derivadas está a distancia positiva de la diagonal en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $|x - x'|^{-2k} b_{\alpha', \beta'}^{\alpha, \beta}(x, x')$ es una función de clase C^∞ para cualquier $k \in \mathbb{N}_0$. Usando

$$|x - x'|^{2k} e^{i(x-x') \cdot \xi} = \Delta_\xi^k e^{i(x-x') \cdot \xi}$$

e integración por partes en la variable ξ , vemos que

$$\text{op}(b_{s, \alpha, \beta}) = \sum_{\substack{\alpha' \leq \alpha \\ \beta' \leq \beta}} \text{op}\left(\frac{b_{\alpha', \beta'}^{\alpha, \beta}(x, x')}{|x - x'|^{2k}} \Delta_\xi^k (\xi^{\alpha' + \beta'} (1 + |\xi|^2)^{s/2})\right)$$

para todo k ; notemos que el lado izquierdo es independiente de k mientras que el lado derecho los símbolos son de orden $\leq s + |\alpha| + |\beta| - 2k$. Con cualquier multi-índice γ , y k suficientemente grande comparado con $|\gamma|$ y s ,

$$K_{s, \gamma, k}(x, x') = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-x') \cdot \xi} \Delta_\xi^k (\xi^\gamma (1 + |\xi|^2)^{s/2}) d\xi$$

es una función continua en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ acotada por $\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_\xi^k (\xi^\gamma (1 + |\xi|^2)^{s/2})| d\xi$. Obtenemos de esto, con k suficientemente grande, que $\text{op}(b_{s, \alpha, \beta})$ es un operador integral con núcleo

$$K_{s, \alpha, \beta}(x, x') = \frac{1}{|x - x'|^{2k}} \sum_{\substack{\alpha' \leq \alpha \\ \beta' \leq \beta}} b_{\alpha', \beta'}^{\alpha, \beta}(x, x') K_{s, \alpha' + \beta', k}(x, x')$$

La función en la suma es continua y acotada para cualquier k (suficientemente grande). En consecuencia, $K_{s, \alpha, \beta}$ satisface la estimación

$$|K_{s, \alpha, \beta}(x, x')| \leq \frac{C}{|x - x'|^{2k}}$$

con alguna C que depende de s , α , y β mas no de (x, x') ; ella es una función que satisface las hipótesis del teorema citado en la nota al pie de la página 62, lo cual implica la continuidad de

$$D_x^\alpha \circ ((1 - \chi)\Lambda^s \chi') \circ D_{x'}^\beta : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

Usando que $(1 + \Delta_x)^m = \sum_{|\alpha| \leq 2m} c_{m,\alpha} D_x^\alpha$ con ciertas constantes $C_{m,\alpha}$ obtenemos que

$$(1 + \Delta)^m \circ ((1 - \chi)\Lambda^s \chi') \circ (1 + \Delta)^{m'} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

es continuo para cualquier par de enteros no-negativos m, m' . Por lo tanto (porque $(1 + \Delta)^m = \Lambda^{2m}$)

$$((1 - \chi)\Lambda^s \chi') \circ (1 + \Delta)^{m'} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{2m}(\mathbb{R}^n)$$

es continuo. Como m es arbitrario y $H^{2m}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ es continuo si $s' < 2m$, $((1 - \chi)\Lambda^s \chi') \circ (1 + \Delta)^{m'}$ es continuo como mapa a $H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ con cualquier s' . Si $s'' > 0$, la continuidad de la inclusión $H^{s''}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^0(\mathbb{R}^n)$ implica la de $(1 - \chi)\Lambda^s \chi'$ como operador $H^{s''}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s'}(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, si $s'' < 0$ y $-2m' < s''$, la continuidad de cada uno de los operadores en

$$H^{s''}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\iota} H^{-2m'}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\Lambda^{-2m'}} H^0(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{((1-\chi)\Lambda^s \chi')(1+\Delta)^{m'}} H^{s'}(\mathbb{R}^n)$$

implica la de su composición. Pero $(1 + \Delta)^{m'} \circ \Lambda^{-2m'} = I$, así

$$(1 - \chi)\Lambda^s \chi' : H^{s''}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s'}(\mathbb{R}^n).$$

es continuo. □

Una aplicación útil aunque sencilla de la Proposition 7.5 es:

COROLARIO 7.7. *Sea $a \in C^\infty(\Omega)$. Si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ con $\text{sop } u \subset \Omega$, entonces $au \in H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Para la demostración, tomamos $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ con $\chi = 1$ en un entorno de $\text{sop } u$. Entonces $au = \text{op}(A)u$ con A el operador pseudodiferencial con símbolo $\chi(x)a(x)\chi(x')$, un símbolo en $S^0(\mathbb{R}^n)$. La Proposición 7.5 implica que $Au \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Observamos también, si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $fu \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Esto se prueba directamente, usando $(fu)^\wedge = \widehat{f} * \widehat{u}$, la desigualdad⁷

$$(7.8) \quad (1 + |\xi|^2)^{s/2} \leq C_s (1 + |\eta - \xi|^2)^{|s/2|} (1 + |\eta|^2)^{s/2}$$

con C_s independiente de ξ, η , y la desigualdad de Young para convoluciones.

El siguiente lemma muestra invariancia de la regularidad local (como debe ser) bajo cambios de coordenadas.

⁷La desigualdad

$$1 + |\xi - \eta|^2 \leq 2(1 + |\xi|^2)(1 + |\eta|^2)$$

se verifica expandiendo y comparando ambos miembros. De ella obtenemos (7.8) elevando esta a la potencia $-s/2$ y reorganizando. Si $s \geq 0$, ξ por $\xi - \eta$ y η por $-\eta$ para obtener

$$1 + |\xi|^2 \leq 2(1 + |\xi - \eta|^2)(1 + |\eta|^2).$$

Obtenemos (7.8) elevando esta última a la potencia $s/2$.

LEMA 7.9. *Supongamos que Ω y Ω' son conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n y $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un difeomorfismo. Si $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte compacto en Ω entonces $u \circ \Phi^{-1} \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y $\|v \circ \Phi^{-1}\|_s \leq C\|v\|_s$ para alguna constante C .*

El enunciado requiere algunas explicaciones. En el lema, $v \circ \Phi^{-1}$ es la distribución

$$\langle v \circ \Phi^{-1}, \varphi |dy| \rangle = \langle v, \chi(\varphi \circ \Phi) |\det J\Phi| |dx| \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

con $\chi = 1$ en un entorno del soporte de v ; como antes, $J\Phi$ es la matriz Jacobiana de Φ . Esta fórmula es la transliteración de la fórmula para el cambio de variables $y = \Phi(x)$ en una integral respecto a y . El uso de $|dx|$, por ejemplo, refleja el hecho que funciones parean con medidas; $|dx|$ es notación para la medida de Lebesgue en las coordenadas x . En el lado derecho, $\chi(\varphi \circ \Phi^{-1})$ está definido inicialmente solo en Ω' , pero la multiplicación por χ permite extender esta función como 0 fuera de Ω' ; el resultado es una función en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, el cual por supuesto es un subespacio de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La definición de $v \circ \Phi^{-1}$ no depende de la escogencia específica de χ , porque $\chi v = v$.

DEMOSTRACIÓN. Con $\chi' \in C_c^\infty(\Omega')$ tal que $\chi' = 1$ en un entorno de $\Phi(\text{sop } v)$, la condición $v \circ \Phi^{-1} \in H^s(\mathbb{R}^n)$ es $\Lambda^s(\chi'(v \circ \Phi^{-1})) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Si $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ y $\chi = 1$ en un entorno de $\text{sop } \chi'$, esta condición es equivalente a $\chi \Lambda^s(\chi'(v \circ \Phi^{-1})) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, porque $(1 - \chi)\Lambda^s \chi' w \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para $w \in H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ y $s' \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios. El operador $B = \chi \Lambda^s \chi'$ es un operador pseudodiferencial de orden s , por lo tanto $B_{\Phi^{-1}} \in \Psi^s(\mathbb{R}^n)$. En vista de la Proposición 7.5, la hipótesis implica $B_{\Phi^{-1}}(v) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ con

$$\|B_{\Phi^{-1}}(v)\|_0 \leq C\|v\|_s.$$

Luego del cambio de variable obvio,

$$\begin{aligned} \|B_{\Phi^{-1}}(v)\|_0^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\chi(\Phi(x)) \Lambda^s(\chi'(v \circ \Phi^{-1}))(\Phi(x))|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\chi(y) \Lambda^s(\chi'(v \circ \Phi^{-1}))(y)|^2 |\det J_y \Phi^{-1}| dy. \end{aligned}$$

En el soporte de χ , la función $|\det J_y \Phi^{-1}|$ está acotado por debajo por una constante positiva. Esto nos permite acotar la integral de la derecha por debajo para obtener

$$\|\chi \Lambda^s(\chi'(v \circ \Phi^{-1}))(y)\|_0 \leq C\|v\|_s$$

con otra constante C . Por otro lado, el Lema 7.6 establece que

$$(1 - \chi) \Lambda^s \chi' : H^{s''}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s'}(\mathbb{R}^n)$$

es continuo para todo s' , s'' y es un operador integral con núcleo, K_s , de clase C^∞ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} ((1 - \chi)\Lambda^s \chi)(v \circ \Phi^{-1})(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} K_s(y, y') \chi(y) (v \circ \Phi^{-1})(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K_s(y, \Phi(x')) \chi(\Phi(x')) v(x') |\det J_{x'} \Phi| dx' \end{aligned}$$

o más formalmente usando la definición de $v \circ \Phi^{-1}$,

$$\langle v \circ \Phi^{-1}, \chi' K_s(y, \cdot) |dy'| \rangle = \langle v, \chi'(\Phi(\cdot)) K_s(y, \Phi(\cdot)) | \det J_{\cdot} \Phi | |dx'| \rangle.$$

La función

$$\tilde{K}_s(y, x') = \chi'(\Phi(x')) K_s(y, \Phi(x')) |\det J_{x'} \Phi|$$

es de clase C^∞ , tiene soporte compacto en la segunda variable, y satisface las mismas estimaciones que K_s en el enunciado del Lemma 7.6. Por lo tanto tiene las mismas propiedades. En particular el operador con núcleo integral \tilde{K}_s define un mapa continuo $H^{s''}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ para cualquier par de números s' , s'' . En conclusión,

$$\|((1 - \chi)\Lambda^s \chi')(v \circ \Phi^{-1})\|_0 \leq \|v\|_s$$

Esto completa la prueba del lema. \square

8. Composición

El dominio de definición de un operador pseudodiferencial en el conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es $C_c^\infty(\Omega)$ y su imagen un subespacio de $C^\infty(\Omega)$. Esto dificulta la definición de la composición de dos operadores pseudodiferenciales. El problema se resuelve suponiendo que uno de los dos está propiamente soportado:

DEFINICIÓN 8.1. *Sea $B = \text{op}(b)$ con $b \in S^\mu(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$. Decimos que B está propiamente soportado si la proyección, $\mathcal{S} = \pi(\text{sop}(b)) \subset \Omega \times \Omega$ de $\text{supp}(b) \subset \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n$ en $\Omega \times \Omega$ es tal que para cada conjunto compacto $\mathcal{K} \Subset \Omega$, ambos conjuntos $(\mathcal{K} \times \Omega) \cap \mathcal{S}$ y $(\Omega \times \mathcal{K}) \cap \mathcal{S}$ tienen clausura compacta en $\Omega \times \Omega$.*

Por ejemplo, la función χ en (4.11), pensada como un símbolo de orden 0 (constante en ξ para cada (x, x')), está propiamente soportada. También los operadores diferenciales están propiamente soportados: si A tiene símbolo $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$, de manera que $A = \text{op}(a)$, entonces también $A = \text{op}(\chi a)$ con χ como en el inicio de este párrafo. Estar propiamente soportado es una propiedad del operador expresada en su representación con un símbolo particular. Otros símbolos que puedan usarse para representar el mismo operador pueden no tener la propiedad requerida, como ilustra el caso de un operador diferencial. El operador $\text{op}(b)$ está propiamente soportado si su soporte (el soporte de su núcleo de Schwartz, ver pág. 51) tiene la propiedad que tiene el conjunto \mathcal{S} en la definición.

En vista de la siguiente proposición, la composición de dos operadores pseudodiferenciales puede ser definida si uno de ellos está propiamente soportado.

PROPOSICIÓN 8.2. Si $B \in \Psi^\mu(\Omega)$, entonces $B(C_c^\infty(\Omega)) \subset C_c^\infty(\Omega)$ y B tiene una extensión a un operador $C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Tomamos $b \in S^\mu(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ tal que $\text{op}(b) = B$ y $\mathcal{S} = \pi(\text{sup}(b))$ tiene la propiedad requerida.

Si $u \in C_c^\infty(\Omega)$ tiene soporte $\mathcal{K}' = \text{sop}(u)$, entonces $\mathcal{S} \cap (\Omega \times \mathcal{K}')$ tiene clausura compacta y por lo tanto la proyección, \mathcal{K} , de la clausura de este conjunto en el primer factor de $\Omega \times \Omega$ también es compacta. Sea $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\chi = 1$ en un entorno de \mathcal{K} . Entonces $b(x, x', \xi)u(x') = \chi(x)b(x, x', \xi)u(x')$. En consecuencia,

$$Bu = \chi \text{op}(b)(u) \in C_c^\infty(\Omega),$$

de hecho $\text{sop}(Bu) \subset \mathcal{K}$, lo cual prueba la primera asección.

Para probar la segunda, tomemos un conjunto compacto $\mathcal{K} \Subset \Omega$, sea \mathcal{K} la proyección de la clausura de $\mathcal{S} \cap (\mathcal{K} \times \Omega)$ en el segundo factor de $\Omega \times \Omega$, y sea $\chi' \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\chi' = 1$ en un entorno de \mathcal{K}' . Si $x \in \mathcal{K}$ y $x' \notin \mathcal{K}'$, entonces $b(x, x', \xi) = 0$, y por lo tanto, si $x \in \mathcal{K}$, entonces $b(x, x', \xi)(1 - \chi'(x')) = 0$, o lo que es lo mismo, $b(x, x', \xi) = b(x, x', \xi)\chi'$. Por lo tanto, para cualquier $u \in C^\infty(\Omega)$

$$b(x, x', \xi)u(x') = b(x, x', \xi)\chi'(x')u(x') \text{ si } x \in \mathcal{K}.$$

Podemos entonces definir

$$B(u)(x) = \text{op}(b\chi')(u)(x) \text{ si } x \in \mathcal{K}.$$

Es fácil comprobar que para cada $x \in \mathcal{K}$, $B(u)(x)$ es independiente de la elección de χ' tal que $\chi' = 1$ en un entorno de \mathcal{K}' . \square

Es fácil adaptar la prueba de la Proposición 7.1 (la continuidad de un operador arbitrario $B \in \Psi^\mu(\Omega)$ como operador $C_c^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$) y la demostración que acabamos de completar para obtener una demostración de:

PROPOSICIÓN 8.3. Si B está propiamente soportado, entonces los operadores

$$C_c^\infty(\Omega) \rightarrow C_c^\infty(\Omega) \text{ y } C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$$

determinados por B también son continuos.

El símbolo de la composición de un operador diferencial con un operador pseudodiferencial está dado por (5.2). Esta fórmula se generaliza a la composición de dos operadores pseudodiferenciales, uno de los cuales debe ser propiamente soportado:

PROPOSICIÓN 8.4. Sean $A = \text{op}(a)$, $a \in S^\nu(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$, y $B = \text{op}(b)$, $b \in S^\mu(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$, con uno de los dos propiamente soportado. Entonces $A \circ B = \text{op}(c) \in S^{\mu+\nu}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ con

$$c(x, x', \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{i^{|\alpha|}} \left. \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y^\alpha} \right|_{y=x} \left. \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \eta^\alpha} \right|_{\eta=\xi} a(x, y, \eta) b(y, x', \xi).$$

La demostración de esta proposición no es difícil, aunque larga si se presenta en detalle. En varios aspectos es similar a la demostración de la Proposición 4.10.

COROLARIO 8.5. *Si $A \in \Psi^\nu(\Omega)$ y $B \in \Psi^\mu(\Omega)$, entonces $A \circ B \in \Psi^{\mu+\nu}(\Omega)$ y $\sigma_{\mu+\nu}(A \circ B) = \sigma_\nu(A) \sigma_\mu(B)$.*

9. Acción sobre distribuciones

Si $B \in \Psi^\mu(\Omega)$, $B = \text{op}(b)$ con $b \in S^\mu(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$, y $u, v \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Bu(x)v(x) dx &= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} e^{i(x-x') \cdot \xi} u(x)b(x, x', \xi)v(x') dx' d\xi dx \\ &= \int_{\Omega} u(x')B^\dagger v(x') dx' \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} B^\dagger v(x') &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} e^{i(x'-x) \cdot \xi} b^\dagger(x', x, \xi)v(x) dx d\xi, \quad b^\dagger(x', x, \xi) \\ &= b(x, x', -\xi). \end{aligned}$$

Esta fórmula permite extender B a distribuciones con soporte compacto vía

Para cada $u \in C_c^{-\infty}(\Omega)$, Bu es el elemento de $C^{-\infty}(\Omega)$ tal que

$$\langle Bu, v \rangle = \langle u, B^\dagger v \rangle, \quad v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Que Bu está bien definido es consecuencia del hecho que $v \mapsto B^\dagger v$ es continuo como operador $C_c^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$, según la Proposición 8.3. Si B está propiamente soportado, entonces también B^\dagger está propiamente soportado. En este caso, la continuidad de B^\dagger como operador $C_c^\infty(\Omega) \rightarrow C_c^\infty(\Omega)$ o $C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ nos lleva a extensiones de B a operadores continuos

$$C^{-\infty}(\Omega) \rightarrow C^{-\infty}(\Omega) \text{ y } C_c^{-\infty}(\Omega) \rightarrow C_c^{-\infty}(\Omega).$$

Continuaremos escribiendo Bu como integral

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} e^{i(x-x') \cdot \xi} b(x, x', \xi)u(x') dx' d\xi$$

si u es una distribución, también como operador integral

$$\int_{\Omega} K(x, x')u(x') dx'$$

incluso cuando las integrales no están definidas como tales.

10. Pseudolocalidad

Un operador lineal $B : C_c^{-\infty}(\Omega) \rightarrow C^{-\infty}(\Omega)$ es local si para cada conjunto abierto $\mathcal{U} \subset \Omega$ y $u \in C_c^{-\infty}$, la condición $u = 0$ en \mathcal{U} implica $Bu = 0$ en \mathcal{U} . Que $u = 0$ en \mathcal{U} significa

$$\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) : \text{sop } \phi \subset \mathcal{U} \implies \phi u = 0$$

Recordando que el soporte de $u \in C_c^{-\infty}(\Omega)$ es el complemento del mayor abierto \mathcal{U} en el cual u se anula, B es local si $\text{sop } Pu \subset \text{sop } u$ para todo $u \in C_c^{-\infty}(\Omega)$.

La condición de pseudolocalidad es similar: primero, u es de clase C^∞ en el conjunto abierto $\mathcal{U} \subset \Omega$ si

$$\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) : \text{sop } \phi \subset \mathcal{U} \implies \phi u \in C^\infty(\Omega).$$

Con esta definición, B es pseudolocal si para cada conjunto abierto $\mathcal{U} \subset \Omega$ y $u \in C_c^{-\infty}(\Omega)$, la condición u es de clase C^∞ en \mathcal{U} implica Bu es de clase C^∞ en \mathcal{U} . Definiendo $\text{sop-sing } u$ como el complemento del mayor abierto donde u es de clase C^∞ , esta condición dice $\text{sop-sing } Pu \subset \text{sop-sing } u$.

Los operadores diferenciales son locales y pseudolocales.

PROPOSICIÓN 10.1. *Los operadores pseudodiferenciales son pseudolocales.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $B = \text{op}(b)$ con $b \in S^\mu(\Omega)$ y $u \in C_c^{-\infty}(\Omega)$. Supongamos que $x_0 \notin \text{sop-sing } u$ y tomemos $\chi' \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\chi' = 1$ cerca de x_0 y χu es de clase C^∞ (y por lo tanto es un elemento de $C_c^\infty(\Omega)$). Sea $\chi \in C_c^\infty$ tal que $\text{sop } \chi$ está contenido en el interior del conjunto $\{x : \chi'(x) = 1\}$. Probaremos que $x_0 \notin \text{sop-sing } Bu$ probando que χBu es de clase C^∞ . Tenemos

$$\chi \text{op}(B)(u) = \chi \text{op}(B)(\chi' u) + \chi B((1 - \chi') u)$$

El primer término de la derecha es de clase C^∞ porque $\chi' u \in C_c^\infty(\Omega)$. El segundo es igual a $\text{op}(\tilde{b})u$ con $\tilde{b} = \tilde{\chi} b$ con

$$\tilde{\chi}(x, x') = \chi(x)((1 - \chi'(x'))).$$

El soporte del núcleo de Schwartz de $\text{op}(b')$ es un subconjunto del soporte de $\tilde{\chi}$. La escogencia de χ en relación a χ' implica que $\text{sop } \tilde{\chi}$ es disjunto de $\text{diag } \Omega$, y por lo tanto el núcleo de Schwartz de $\text{op}(\tilde{b})$ es de clase C^∞ . Por lo tanto

$$\chi \text{op}(b)((1 - \chi') u) = \int_{\Omega} K_{\text{op}(\tilde{b})}(x, x') u(x') dx'$$

es de clase C^∞ . □

11. Globalización

Los operadores pseudodiferenciales están definidos usando el producto interno en \mathbb{R}^n . Esto trae a colación la cuestión de su dependencia respecto a las coordenadas usadas en la definición de algún operador específico.

Que las coordenadas no son esenciales es el contenido de la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 11.1. Sean Ω y Ω' conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n y $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un difeomorfismo. Si $B = \text{op}(b) \in \Psi^\mu(\Omega)$ es un operador pseudodiferencial en Ω , entonces

$$C_c^\infty(\Omega') \ni v \mapsto B_\Phi v = B(v \circ \Phi) \circ \Phi^{-1} \in C^\infty(\Omega')$$

define un elemento de $B_\Phi \in \Psi^\mu(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Usando la función χ introducida en la demostración de la Proposición 4.10 descomponemos

$$\text{op}(b) = \text{op}(\chi b) + \text{op}((1 - \chi)b).$$

El operador $\text{op}((1 - \chi)b)$ es un operador integral con núcleo de clase C^∞ ,

$$(\text{op}((1 - \chi)b)u)(x) = \int_{\Omega} K_{\text{op}((1-\chi)b)}(x, x')u(x') dx'$$

y por lo tanto, denotando por y las coordenadas en Ω' y por Ψ la inversa de Φ ,

$$\begin{aligned} & \text{op}((1 - \chi)b)(v \circ \Phi)(\Psi(y)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Omega} K_{\text{op}((1-\chi)b)}(\Psi(y), x')v(\Phi(x')) dx' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Omega'} K_{\text{op}((1-\chi)b)}(\Psi(y), \Psi(y'))v(y') \left| \det \frac{\partial \Psi}{\partial y}(y') \right| v(y') dy' \end{aligned}$$

usando el cambio de variables $x' = \Psi(y')$ para obtener la segunda igualdad; $\partial \Psi / \partial y$ es la matriz Jacobiana de Ψ . Este es también un operador integral con núcleo de clase C^∞ .

El mismo cambio de variables en el término $\text{op}(\chi b)$ lleva a

$$\begin{aligned} & \text{op}(\chi b)(v \circ \Phi)(\Psi(y)) = \\ & \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Omega'} e^{i(\Psi(y) - \Psi(y')) \cdot \xi} \chi(\Psi(y), \Psi(y')) \\ & \quad \times b(\Psi(y), \Psi(y'), \xi) \left| \det \frac{\partial \Psi}{\partial y}(y') \right| v(y') dy' d\xi. \end{aligned}$$

Queremos ahora reescribir el exponente $(\Psi(y) - \Psi(y')) \cdot \xi$ como $(y - y') \cdot \eta$ usando otro cambio de variables. Cada componente de Ψ puede ser escrita como

$$\Psi_j(y) = \Psi_j(y') + \sum_{k=0}^n \Psi_{jk}(y, y')(y_k - y'_k);$$

las funciones $\Psi_{jk}(y, y')$ están definidas para (y, y') cerca de la diagonal de $\Omega \times \Omega$. Con notación vectorial,

$$\Psi(y) - \Psi(y') = \sum_{k=0}^n \Psi_{jk}(y, y')(y_k - y'_k) = \mathbf{\Psi}(y, y')(y - y')^\dagger$$

con $\Psi(y, y')$ la matriz $[\Psi_{jk}(y, y')]$. Escribimos el producto interno en el exponente de la última integral como

$$\begin{aligned} (\Psi(y) - \Psi(y')) \cdot \xi &= \langle \xi^\dagger, \Psi(y, y')(y - y')^\dagger \rangle \\ &= \langle \Psi(y, y')^\dagger \xi^\dagger, (y - y')^\dagger \rangle = (y - y') \cdot \xi \Psi(y, y') \end{aligned}$$

e introducimos el cambio de variables

$$\eta = \xi \Psi(y, y')$$

en la integral en la variable ξ . Para que esto funcione necesitamos la invertibilidad de la matriz $\Psi(y, y')$. Esta matriz, en $y = y'$, es la matriz Jacobiana de Ψ en y , y por lo tanto invertible. En consecuencia, $\Psi(y, y')$ es invertible también cuando (y, y') está en un entorno suficientemente pequeño de $\text{diag}(\Omega)$. Para asegurar que ese es el caso en la integral, tomamos la función ρ usada en la definición de χ tan pequeña que este es el caso. Con ello, obtenemos que la última integral es igual a

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Omega'} e^{i(y-y') \cdot \eta} \tilde{b}(y, y', \eta) v(y') dy' d\eta$$

con

$$\tilde{b}(y, y', \eta) =$$

$$\chi(\Psi(y), \Psi(y')) b(\Psi(y), \Psi(y'), \eta \Psi(y, y')^{-1}) \left| \det \frac{\partial \Psi}{\partial y}(y') \right| \left| \det \Psi(y, y') \right|^{-1}.$$

□

Con esto podemos extender la definición de operador pseudodiferencial, de un abierto en \mathbb{R}^n , a una variedad de dimensión n :

DEFINICIÓN 11.2. *Sea \mathcal{X} una variedad. Un operador $B : C_c^\infty(\mathcal{X}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X})$ es un operador pseudodiferencial si con cualquier carta local $\Phi : \mathcal{U} \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$, el operador $B_\Phi : C_c^\infty(\mathcal{V}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{V})$ definido por $B_\Phi v = B(v \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$ es un operador pseudodiferencial. Si $E, F \rightarrow \mathcal{X}$ son fibrados vectoriales complejos y $B : C_c^\infty(\mathcal{X}; E) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; F)$, entonces se requiere que E y F sean triviales sobre \mathcal{U} , y que $B(v \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$, escrito usando trivializaciones, sea pseudodiferencial.*

En el contexto y con la notación de la definición, si los operadores B_Φ resultan ser operadores diferenciales en lugar de meramente pseudodiferenciales, decimos que B es un operador diferencial. La siguiente definición de operador diferencial no usa coordenadas:

DEFINICIÓN 11.3. *Sea \mathcal{X} una variedad, $E, F \rightarrow \mathcal{X}$ fibrados vectoriales. El único operador diferencial $A : C^\infty(\mathcal{X}; E) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; F)$ de orden -1 es 0 . Un operador continuo $A : C^\infty(\mathcal{X}; E) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; F)$ es un operador diferencial de orden $m \in \mathbb{N}_0$ si para cada $f \in C^\infty(\mathcal{X})$, el operador*

$$C^\infty(\mathcal{X}; E) \ni u \mapsto A(fu) - fA(u) \in C^\infty(\mathcal{X}; F)$$

es un operador diferencial de orden $m - 1$. Escribimos $\text{Dif}^m(\mathcal{X}; E, F)$ para el espacio de operadores diferenciales $C^\infty(\mathcal{X}; E) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; F)$ de orden m .

La demostración se basa en probar primero que si u es 0 a orden suficientemente alto en p_0 , entonces $A(u)(p_0) = 0$, luego usar la expansión de Taylor de una sección arbitraria u basada en p_0 hasta orden suficientemente alto para encontrar una expresión para Au en términos de un número finito de derivadas de u . No entraremos en más detalle.

Con la notación de la prueba de la Proposición 11.1, si $b \in S^\mu(\Omega, \mathbb{R}^n)$ es un símbolo clásico, entonces también lo es \tilde{b} es, y además, de

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{-m} \tilde{b}(y, y, \tau \eta) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{-m} b(\Phi(y), \Phi(y), \tau^m \eta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}(y) \right)^{-1}),$$

obtenemos

$$\sigma_\mu(\text{op}(\tilde{b}))(y, \eta) = \sigma_\mu(\text{op}(b))(\Phi(y), \eta \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y)).$$

La importancia de este hecho radica en la fórmula

$$\Phi^* \left(\sum_{j=1}^n \xi_j dx_j(x_0) \right) = \sum_k \xi_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial y_k}(y_0) dy_k = \sum_k \eta_k dy_k(y_0), \quad x_0 = \Phi(y_0),$$

lo cual dice que el símbolo principal de un operador pseudodiferencial en la variedad \mathcal{X} debe interpretarse como una función en $T^* \mathcal{X} = T^* \mathcal{X} \setminus 0$.

DEFINICIÓN 11.4. Sea $B : C_c^\infty(\mathcal{X}; E) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; F)$ un operador pseudodiferencial clásico de orden μ en la variedad \mathcal{X} . El símbolo principal de B es la sección

$$\sigma_\mu(B) : T^* \mathcal{X} \setminus 0 \rightarrow \dot{\pi}^* \text{Hom}(E, F)$$

definida de la siguiente manera. Si $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ es una carta local de M y E y F son triviales sobre \mathcal{U} , sean e_1, \dots, e_r y f_1, \dots, f_s trivializaciones de estos fibrados. Entonces, si $u = \sum u_j e_j \in C_c^\infty(\mathcal{U}; E_{\mathcal{U}})$, $Bu = \sum_k (B_{jk} u_j) f_k$ con B_{jk} pseudodiferencial escalar, de orden μ y símbolo principal $b_{jk}(x, \xi)$ en $\xi = \sum_i \xi_i dx_i$. Entonces

$$\sigma_\mu(B)(\xi) \left(\sum_j a_j u_j \right) = \sum_{j,k} \sigma_\mu(B_{jk})(x, \xi) a_j f_k.$$

En el caso de un operador diferencial $A \in \text{Dif}^m(\mathcal{X}; E, F)$, el símbolo principal puede obtenerse como sigue. Si $\xi \in T^* \mathcal{X}$ es un covector en p_0 , tomamos $f \in C^\infty(\mathcal{X})$ a valores reales con $df(p_0) = \xi$. Dado $\phi_0 \in E_{p_0}$, escogemos $\phi \in C^\infty(\mathcal{X}; E)$ tal que $\phi(p_0) = \phi_0$. Entonces $e^{-i\tau f(p_0)} A(e^{i\tau f} \phi)(p_0)$ es un polinomio en τ de orden m cuyo coeficiente principal es $\sigma(A)(\xi)(\phi_0)$:

$$(11.5) \quad \sigma(A)(\xi)(\phi_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau^m} e^{-i\tau f(p_0)} A(e^{i\tau f} \phi)(p_0).$$

Esto puede ser verificado usando coordenadas locales. El símbolo principal de un operador diferencial restringiendo a la fibra $T_{p_0}^* \mathcal{X}$ es un polinomio homogéneo de orden m .

Para cada función $b_\mu : \dot{T}^* \mathcal{X} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C}$, homogénea de grado μ , existe un operador pseudodiferencial B con símbolo principal b_μ . En otras palabras, en la sucesión

$$(11.6) \quad 0 \rightarrow \Psi^{\mu-1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\iota} \Psi^\mu(\mathcal{X}) \xrightarrow{\sigma_\mu} S_h^\mu(\dot{T}^* \mathcal{X}) \rightarrow 0$$

análoga a la de la Proposición 4.20, el mapa σ_μ es sobreyectivo (claramente $\sigma_\mu \circ \iota = 0$). Para probar esto usamos particiones de la unidad.

DEFINICIÓN 11.7. *Sea $\mathfrak{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una cobertura abierta de \mathcal{X} . Una partición de la unidad subordinada a la cobertura \mathfrak{U} es una familia $\{\chi_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ de funciones de clase C^∞ tales que para cada $\beta \in \mathcal{B}$, i) $0 \leq \chi_\beta \leq 1$; ii) existe $\alpha_\beta \in \mathcal{A}$ tal que $\text{sop } \chi_\beta \subset \mathcal{U}_{\alpha_\beta}$; iii) para todo conjunto compacto $\mathcal{K} \Subset \mathcal{X}$, el conjunto $\{\beta \in \mathcal{B} : \text{sop } \chi_\beta \cap \mathcal{K} \neq \emptyset\}$ es finito (esto es, la partición es localmente finita); y finalmente, iv) $\sum_\beta \chi_\beta = 1$.*

La existencia de particiones de la unidad es consecuencia del hecho que \mathcal{X} es paracompacto (parte de la definición de variedad); ver detalles por ejemplo en [79].

Sea $\mathfrak{h} \in S_h^\mu(\dot{T}^* \mathcal{X})$. Tomamos una partición de la unidad $\{\chi_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ subordinada a una cobertura abierta \mathfrak{U} de \mathcal{X} formada por los dominios de cartas locales $\phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathcal{V}_\alpha$. Definimos $\chi'_\beta = \chi_\beta / \sum_{\beta' \in \mathcal{B}} \chi_{\alpha'}^2$. Entonces la familia $\{\chi'_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ es también una partición de la unidad subordinada a la cobertura \mathfrak{U} . Escogemos, para cada $\beta \in \mathcal{B}$, un índice α_β tal que $\text{sop } \chi'_\beta \subset \mathcal{U}_{\alpha_\beta}$. Identificando $\mathcal{U}_{\alpha_\beta}$ con $\mathcal{V}_{\alpha_\beta} \subset \mathbb{R}^n$ y $T^* \mathcal{U}_{\alpha_\beta}$ con $\mathcal{V}_{\alpha_\beta} \times \mathbb{R}^n$ usando la carta local Φ_{α_β} , escogemos un operador $B_\beta \in \Psi^\mu(\mathcal{U}_{\alpha_\beta})$ tal que $\sigma(B_{\alpha_\beta}) = \mathfrak{h}$. Entonces $\chi'_\beta B_\beta \chi'_\beta \in \Psi^\mu(\mathcal{X})$ y

$$\sigma_\mu(\chi'_\beta B_\beta \chi'_\beta) = \chi'_\beta{}^2 \mathfrak{h}.$$

Definimos

$$B = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \chi'_\beta B_\beta \chi'_\beta$$

Este es un operador pseudodiferencial de orden μ tal que

$$\sigma(B) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \chi'_\beta{}^2 \mathfrak{h}.$$

TEOREMA 11.8. *La sucesión (11.6) es exacta.*

Hemos probado sobreyectividad de σ_μ . El resto de la demostración es similar a la de la Proposición 4.20

Una densidad positiva en \mathcal{X} de clase C^∞ es una medida \mathfrak{m} en \mathcal{X} tal que para cada carta local $\Phi = (x_1, \dots, x_n) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, $d\mathfrak{m} = f dx$ en \mathcal{U} con alguna función

f positiva de clase C^∞ y dx la Medida de Lebesgue en esas coordenadas. Si $u, \varphi \in C_c^\infty(\mathcal{X})$, el transpuesto formal de B es el operador B^\dagger tal que

$$\int_{\mathcal{X}} Bu v \, dm = \int_{\mathcal{X}} u B^\dagger \varphi \, dm$$

Este es de nuevo un operado pseudodiferencial del mismo orden que B , en particular $B^\dagger : C_c^\infty(\mathcal{X}) \rightarrow C^\infty(X)$ es continuo. Por lo tanto, si $u \in C_c^{-\infty}(\mathcal{X})$,

$$C_c^\infty(\mathcal{X}) \ni \varphi \mapsto \langle u, B^\dagger \varphi \rangle \in \mathbb{C}$$

es continuo y define un elemento de $C^{-\infty}(\mathcal{X})$. Este elemento es Bu . Obtenemos así una extension de B a distribuciones. Si B está propiamente soportado, entonces $B(C_c^\infty(\mathcal{X})) \subset C^\infty(X)$ y también podemos extender B a un operador $C^\infty(\mathcal{X}) \rightarrow C^\infty(X)$ así como también a distribuciones.

TEOREMA 11.9. *Si $A \in \Psi^\nu(\mathcal{X})$ y $B \in \Psi^\mu(\mathcal{X})$ y uno de estos operadores está propiamente soportado, entonces $A \circ B \in \Psi^{\mu+\nu}(\mathcal{X})$. Si además A y B son operadores pseudodiferenciales clásicos, entonces también $A \circ B$ es clásico. Si $A \in \Psi^\nu(\mathcal{X})$ es elíptico, entonces existen $B \in \Psi^{-\nu}(\mathcal{X})$ y operadores integrales R_i, R_d con núcleo de clase C^∞ tales que*

$$(11.10) \quad A \circ B = I - R_d, \quad B \circ A = I - R_i.$$

DEMOSTRACIÓN. Las dos afirmaciones sobre la naturaleza de la composición son consecuencia inmediata de las definiciones 11.2, 4.18, la Proposición 8.4, y el Corolario 8.5. Para probar la existencia de parametrices para operadores elípticos usamos la exactitud de la sucesión (11.6). Como $\sigma_\nu(A)$ es elíptico, existe $b_{-\nu} = \sigma_\nu(A)^{-1} \in S_h^{-\nu}(\dot{T}^*\mathcal{X})$. Por la sobreyectividad de $\sigma_{-\nu}$ existe $B_\nu \in \Psi^{-\nu}(\mathcal{X})$ tal que $\sigma_{-\nu}(B_\nu) = b_{-\nu}$, y podemos suponer que B_ν está propiamente soportado si A no lo está. El operador $A \circ B_\nu - I$ es de orden 0, pero $\sigma_0(A \circ B_\nu - I) = 0$, así que $A \circ B_\nu - I = -R_{-1}$ por la exactitud de (11.6), y existe $B_{-\nu-1}$ tal que $\sigma_{-\nu-1}(B_{-\nu-1}) = b_{-\mu} \sigma_{-1}(R_{-1})$. Entonces

$$A \circ (B_{-\nu} + B_{\nu-1}) - I = -R_{-1} + A \circ B_{-\nu-1}.$$

es un operador de orden -1 . Su símbolo es

$$\begin{aligned} \sigma_{-1}(-R_{-1} + AB_{-\nu-1}) &= \sigma_{-1}(-R_{-1}) + \sigma_\nu(A) \sigma_{\nu-1}(B_{-\nu-1}) \\ &= \sigma_{-1}(-R_{-1}) + \sigma_\nu(A) b_{-\mu} \sigma_{-1}(R_{-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto $A \circ (B_{-\nu} + B_{\nu-1}) - I = -R_{-1} \in \Psi^{-2}(\mathcal{X})$. Continuando por inducción, existen sucesiones de operadores pseudodiferenciales clásicos, $B_{-\nu}, B_{-\nu-1}, \dots$ y R_{-1}, R_{-2}, \dots de orden igual al subíndice tales que

$$A \circ \left(\sum_{j=0}^N B_{-\nu-j} \right) = I - R_{N+1}$$

Usando el Lema 4.8 convenientemente adaptado a la situación presente, obtenemos un operador B_d tal que $A \circ B_d = I - R_d$ como afirma la proposición. La demostración de la existencia de B_i es similar.

De hecho, $B_d - B_i$ es un operador integral con núcleo de clase C^∞ :

$$(I - R_i) \circ B_d = B_i \circ A \circ B_d = B_i \circ (I - R_d)$$

implica

$$B_d - B_i = R_i \circ B_d - B_i \circ R_d$$

en donde el lado derecho es un operador con núcleo de clase C^∞ . De esto sigue que B_d es también una parametriz a izquierda de A . \square

La existencia de una parametriz implica hipoelipticidad de operadores elípticos:

PROPOSICIÓN 11.11. *Si $A \in \Psi^\mu(\mathcal{X})$ es elíptico y A está propiamente soportado o $u \in C_c^{-\infty}(\mathcal{X})$, entonces $Au \in C^\infty(\mathcal{X})$ implica $u \in C^\infty(\mathcal{X})$.*

Si $BA = I - R_i$ con B propiamente soportado, entonces $u = BAu + R_iu = Bf + R_iu$. Si $f \in C^\infty$ entonces $Bf \in C^\infty$, mientras que $R_iu \in C^\infty$ para cualquier u porque R_i es un operador integral con núcleo de clase C^∞ . Por lo tanto $u \in C^\infty$.

12. Operadores pseudodiferenciales en variedades compactas

Sea \mathcal{X} una variedad compacta sin borde. (En este caso, la distinción entre, por ejemplo, $C_c^\infty(\mathcal{X})$ y $C^\infty(\mathcal{X})$ desaparece). Escogemos una medida de Borel ν en \mathcal{X} tal que para cada carta local $\Phi = (x_1, \dots, x_n) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, $\nu = f dx$ en \mathcal{U} con alguna función f positiva de clase C^∞ . Decimos que ν es una densidad suave. Por ejemplo, si g una métrica Riemanniana en \mathcal{X} , podemos tomar la densidad determinada por g , en coordenadas locales

$$\nu_g = \sqrt{\det[g_{ij}]} dx$$

con $g_{ij} = g(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})$. Definimos el espacio $L^2(\mathcal{X})$ usando la densidad escogida. Diferentes densidades producen el mismo espacio topológico (normas equivalentes), aunque el producto interno sea distinto.

LEMA 12.1. *El soporte singular del núcleo de Schwartz de los operadores pseudodiferenciales en \mathcal{X} está contenido en la diagonal de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$.*

Esto es consecuencia del hecho trivial que para cada par de puntos distintos de \mathcal{X} existe una carta local de \mathcal{X} cuyo dominio contiene esos dos puntos. Si $(p_0, p_1) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \setminus \text{diag } \mathcal{X}$ tomamos una carta local $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ de \mathcal{X} con $p_0, p_1 \in \mathcal{U}$. Dado $B \in \Psi^\mu(\mathcal{X})$ obtenemos $B_\Phi : C_c^\infty(\mathcal{V}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{V})$. Como el soporte singular del núcleo de Schwartz de B_Φ está contenido en la diagonal de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$, la parte del de B en $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ está contenido en la diagonal de \mathcal{U} .

En lo siguiente usaremos una partición de la unidad, $\{\chi_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$, subordinada a una cobertura abierta $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de \mathcal{X} por dominios de cartas locales $\Phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathcal{V}_\alpha$. Podemos suponer que \mathcal{A} es un conjunto finito porque \mathcal{X} es compacto. Por la misma razón, y porque la partición es localmente finita, el conjunto \mathcal{B} también es finito. Combinando juiciosamente varias de las χ_β podemos suponer que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ y que $\text{sop } \chi_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha$. Debido a esto, aunque la cobertura y la partición de la unidad que usemos pueda variar de un argumento al siguiente (pero probando que un cambio así no cambia la validez del argumento), siempre supondremos que los conjuntos de índices \mathcal{A} , \mathcal{B} son iguales y finitos.

DEFINICIÓN 12.2. *Sea $u \in C^{-\infty}(\mathcal{X})$. Decimos que $u \in H^s(\mathcal{X})$ si $(\chi_\alpha u) \circ \Phi_\alpha^{-1} \in H^s(\mathbb{R}^n)$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, y definimos*

$$\|u\|_s = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \|(\chi_\alpha u) \circ \Phi_\alpha^{-1}\|_s$$

en donde la norma en el lado derecho es la de $H^s(\mathbb{R}^n)$.

El espacio topológico $H^s(\mathcal{X})$ es independiente de las cartas locales y partición subordinada usadas en su definición, aunque la norma puede cambiar a una norma equivalente. Para ver esto, tomemos otra cobertura abierta finita $\mathcal{U}' = \{\mathcal{U}'_{\alpha'}\}_{\alpha' \in \mathcal{A}'}$ de \mathcal{X} por dominios de difeomorfismos $\Phi'_{\alpha'} : \mathcal{U}'_{\alpha'} \rightarrow \mathcal{V}'_{\alpha'}$. Sea $\{\chi'_{\alpha'}\}_{\alpha' \in \mathcal{A}'}$ una partición de la unidad subordinada a \mathcal{U}' con $\text{sop } \chi'_{\alpha'} \subset \mathcal{U}'_{\alpha'}$. Si $u \in H^s(\mathcal{X})$, $(\chi_\alpha u) \circ \Phi_\alpha^{-1} \in H^s(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto también $v_{\alpha'\alpha} = (\chi'_{\alpha'} \chi_\alpha u) \circ \Phi_\alpha^{-1} \in H^s(\mathbb{R}^n)$, esta última con soporte compacto en $\Phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}'_{\alpha'})$. La función

$$\Phi_{\alpha'\alpha} = \Phi'_{\alpha'} \circ \Phi_\alpha^{-1} : \Phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}'_{\alpha'}) \rightarrow \Phi'_{\alpha'}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}'_{\alpha'})$$

es un difeomorfismo, por lo tanto, de acuerdo al Lema 7.9, $w_{\alpha'\alpha} = v_{\alpha'\alpha} \circ \Phi_{\alpha'\alpha}^{-1} \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Pero

$$w_{\alpha'\alpha} = (\chi'_{\alpha'} \chi_\alpha u) \circ \Phi_{\alpha'\alpha}^{-1}$$

por lo tanto $(\chi'_{\alpha'} u) \circ \Phi_{\alpha'}^{-1} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} w_{\alpha'\alpha} \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Usando

$$(\chi'_{\alpha'} u) \circ \Phi_{\alpha'}^{-1} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} (\chi'_{\alpha'} \chi_\alpha u) \circ \Phi_{\alpha'}^{-1} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} (\chi'_{\alpha'} \chi_\alpha u) \circ \Phi_\alpha^{-1} \circ \Phi_{\alpha'\alpha}^{-1},$$

la desigualdad triangular, la estimación del Lema 7.9, y el Corolario 7.7 obtenemos

$$\|(\chi'_{\alpha'} u) \circ \Phi_{\alpha'}^{-1}\|_s \leq C_0 \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \|(\chi'_{\alpha'} \chi_\alpha u) \circ \Phi_\alpha^{-1}\|_s \leq C_1 \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \|(\chi_\alpha u) \circ \Phi_\alpha^{-1}\|_s.$$

Por lo tanto

$$\sum_{\alpha' \in \mathcal{A}'} \|(\chi'_{\alpha'} u) \circ \Phi_{\alpha'}^{-1}\|_s \leq C_1 \# \mathcal{A}' \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \|(\chi_\alpha u) \circ \Phi_\alpha^{-1}\|_s.$$

Igualmente

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \|(\chi_\alpha u) \circ \Phi_\alpha^{-1}\|_s \leq C'_1 \# \mathcal{A} \sum_{\alpha' \in \mathcal{A}'} \|(\chi'_{\alpha'} u) \circ \Phi_{\alpha'}^{-1}\|_s.$$

Consecuentemente las normas son equivalentes. Fijamos la versión concreta de la norma como en la Definición 12.2.

En una variedad compacta, el Lema de Rellich, la Proposición 6.5, toma la siguiente forma:

(12.3) Si $s > s'$, $H^s(\mathcal{X}) \subset H^{s'}(\mathcal{X})$ y la inclusión $\iota : H^s(\mathcal{X}) \rightarrow H^{s'}(\mathcal{X})$ es compacta.

En efecto, si $\{u_\ell\}_{\ell=1}^\infty \subset H^s(\mathcal{X})$ es acotada, entonces, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, la sucesión $\{(\chi_\alpha u_\ell) \circ \Phi_\alpha^{-1}\}_{\ell=1}^\infty \subset H^s(\Phi_\alpha(\text{sop } \chi_\alpha))$ también es acotada como sucesión en $H^s(\mathbb{R}^n)$. La Proposición 6.5 implica la existencia de una subsucesión convergente en $H^{s'}(\mathbb{R}^n)$. Ordenando los finitos elementos de \mathcal{A} y pasando de una subsucesión obtenida usando el índice α_1 a una subsucesión asociada al índice α_2 , etc. obtenemos una subsucesión $\{u_{\ell_k}\}_{k=1}^\infty$ de $\{u_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ que converge en $H^{s'}(\mathcal{X})$ porque $\{(\chi_\alpha u_{\ell_k}) \circ \Phi_\alpha^{-1}\}_{k=1}^\infty$ converge en $H^{s'}(\mathbb{R}^n)$.

Que $H^s(\mathcal{X})$ es denso en $H^{s'}(\mathcal{X})$ también es fácil de probar usando particiones de la unidad y el correspondiente resultado en el caso de los espacios de Sobolev en \mathbb{R}^n .

PROPOSICIÓN 12.4. Sea $B \in \Psi^\mu(\mathcal{X})$. El operador $B : H^s(\mathcal{X}) \rightarrow H^{s-\mu}(\mathcal{X})$ es continuo. Si $\mu < 0$, entonces B , como operador $H^s(\mathcal{X}) \rightarrow H^s(\mathcal{X})$, es compacto.

DEMOSTRACIÓN. Habiendo fijado la cobertura abierta $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ por dominios de cartas locales $\Phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathcal{V}_\alpha$ y la partición de la unidad $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}'}$ subordinada a esta cobertura, procedemos de la siguiente manera. Tomamos una métrica Riemanniana en \mathcal{X} , denotamos por d la métrica inducida. Sea

$$\delta = \min_{\alpha \in \mathcal{A}} d(\text{sop } \chi_\alpha, \mathcal{U}_\alpha^c)$$

y sea $\omega \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\omega(t) = 1$ si $|t| < 1/2$, $\omega(t) = 0$ si $|t| > 1$. Definimos $\tilde{\chi}(x, x') = \omega(2d(x, x')/\delta)$. Sea

$$\mathcal{K}_\alpha = \{x' \in \mathcal{X} : \text{existe } x \in \text{sop } \chi_\alpha \text{ tal que } (x, x') \in \text{sop}(\tilde{\chi})\}.$$

Entonces $\mathcal{K}_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha$. En efecto, si $x' \in \mathcal{K}_\alpha$ y $x \in \text{sop } \chi_\alpha$ es tal que $(x, x') \in \text{sop}(\tilde{\chi})$, entonces $d(x, x') < \delta/2$, por lo cual $x' \in \mathcal{U}_\alpha$.

Sea $K_{\text{op}(B)}$ el núcleo de Schwartz de B , $K_0 = \chi K_{\text{op}(B)}$ y $K_1 = (1 - \chi)K_{\text{op}(B)}$. Como las singularidades de $K_{\text{op}(B)}$ están contenidas en la diagonal de \mathcal{X} y $\chi = 1$ en un entorno de la diagonal, K_1 es una función de clase C^∞ y $\text{op}(K_1)$ es un operador continuo $H^s(\mathcal{X}) \rightarrow H^{s'}(\mathcal{X})$ para cualquier s' , en particular, visto como operador $H^s(\mathcal{X}) \rightarrow H^s(\mathcal{X})$, es compacto.

Esto reduce la prueba de la proposición a probar las afirmaciones en el caso en que el soporte del núcleo de Schwartz de B tiene soporte contenido en $\text{sop}(\tilde{\chi})$, lo cual suponemos en el resto de esta demostración. Para cada α escogemos

$\chi'_\alpha \in C_c^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$ con $\chi'_\alpha = 1$ en un entorno de \mathcal{K}_α . Debido a nuestra suposición sobre el soporte del núcleo de B , si $u \in H^s(\mathcal{X})$, entonces $\chi_\alpha B u = \chi_\alpha B(\chi'_\alpha u)$ y

$$\begin{aligned} \|Bu\|_{s-\mu} &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \|(\chi_\alpha B u) \circ \Phi_\alpha^{-1}\|_{s-\mu} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \|(\chi_\alpha B(\chi'_\alpha u)) \circ \Phi_\alpha^{-1}\|_{s-\mu} \end{aligned}$$

El operador $B_{\Phi_\alpha} v = (B(v \circ \Phi_\alpha)) \circ \Phi_\alpha^{-1}$ es un elemento de $\Psi^\mu(\mathcal{V}_\alpha)$ y

$$(\chi_\alpha B(\chi'_\alpha u)) \circ \Phi_\alpha^{-1} = (\chi_\alpha \circ \Phi_\alpha^{-1}) B_{\Phi_\alpha}((\chi'_\alpha u) \circ \Phi_\alpha^{-1})$$

Por lo tanto,

$$\|((\chi_\alpha B(\chi'_\alpha u)) \circ \Phi_\alpha^{-1})\|_{s-\mu} \leq C \|(\chi_\alpha u) \circ \Phi_\alpha^{-1}\|_s$$

para algún C , usando la Proposición 7.5. Sumando en α obtenemos

$$\|Bu\|_{s-\mu} \leq C \|u\|_s.$$

Esto prueba la aserción sobre continuidad. Una vez obtenida esta conclusión, la compacidad en el caso $\mu < 0$ es consecuencia de (12.3). \square

13. Operadores elípticos en variedades compactas

Supongamos que $\mu > 0$ y $A \in \Psi^\mu(\mathcal{X})$ es elíptico. Entonces generalmente $u \in L^2(\mathcal{X})$ no implica $Au \in L^2$. Lo que si es cierto es

TEOREMA 13.1 (Regularidad elíptica). *Si $\mu > 0$ y $A \in \Psi^\mu(\mathcal{X})$ es elíptico ($\sigma_\mu(A)$ es invertible), entonces $Au \in L^2(\mathcal{X})$ implica $u \in H^\mu(\mathcal{X})$.*

Para ver esto, tomamos una parametriz de A , $BA = I - R_d$ con R_i un operador integral con núcleo de clase C^∞ . Si $Au = f \in L^2$, entonces $Bf \in H^s(\mathcal{X})$ por la proposición que acabamos de probar. También $R_i u \in H^\mu(\mathcal{X})$, por lo tanto (aplicando B a ambos miembros de la igualdad $Au = f$),

$$u = Bf + R_i u \in H^\mu(\mathcal{X}).$$

El argumento se adapta fácilmente a la demostración de $Au \in H^s(\mathcal{X})$ implica $u \in H^{s+\mu}(\mathcal{X})$

Esto dice que el dominio natural para un operador pseudodiferencial elíptico de orden $\mu > 0$ (basado en L^2) es $H^\mu(\mathcal{X})$.

TEOREMA 13.2. *Si $A \in \Psi^\mu(\mathcal{X})$ es elíptico, entonces B tiene una parametriz. Si $\mu > 0$ entonces*

$$(13.3) \quad A : H^\mu(\mathcal{X}) \subset L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})$$

es un operador cerrado densamente definido y Fredholm y la parametriz es un operador compacto. Además, A con el dominio indicado tiene un adjunto único el cual es también un operador pseudodiferencial elíptico, del mismo orden que A , y su dominio natural es $H^\mu(\mathcal{X})$.

Un operador cerrado densamente definido $A : D \subset H_1 \rightarrow H_2$ entre espacios de Hilbert (o de Banach) es Fredholm si su espacio nulo es de dimensión finita y su imagen es cerrada de codimensión finita. La relevancia del concepto radica en que estos operadores (Fredholm) son casi invertibles.

DEMOSTRACIÓN. Como A es elíptico, el Teorema 11.9, existen de $B \in \Psi^{-\mu}(\mathcal{X})$ y operadores integrales R_d, R_i con núcleo de clase C^∞ tales que $AB = I - R_i, BA = I - R_d$. Por la Proposición 12.4, si $\mu > 0$, B es compacto.

Que A como en (13.3) está densamente definido es sencillamente la densidad de $H^\mu(\mathcal{X})$ en $H^0(\mathcal{X})$. Para probar que A con el dominio indicado es cerrado, tomamos una sucesión $\{u_\ell\}_{\ell=1}^\infty \subset H^\mu(\mathcal{X})$ tal que ella y $\{Au_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ convergen en $L^2(\mathcal{X})$ digamos a u y f . Entonces $Au_\ell = f_\ell \rightarrow f \in H^{-\mu}(\mathcal{X})$: $Au = f$ como elementos de $H^{-\mu}(\mathcal{X})$. Usando la parametriz B y residuo R_i del párrafo que precede la proposición, tenemos $u = Bf + R_i u$. Como $R_i u \in H^\mu(\mathcal{X})$ debido a las propiedades de R_i y $Bf \in H^\mu(\mathcal{X})$ debido a las propiedades de B , $u \in H^\mu(\mathcal{X})$.

La existencia del adjunto es consecuencia del Teorema de Hahn-Banach (ver por ejemplo Rudin [64, p. 36 ff.]), mientras que la unicidad es consecuencia de la densidad en $L^2(\mathcal{X})$ del dominio de A .

Una consecuencia inmediata del hecho que (13.3) es cerrado es que su espacio nulo es cerrado. En el caso particular de nuestro operador elíptico, este espacio nulo es de dimensión finita y un subespacio de $C^\infty(\mathcal{X})$. Para probar esto, usamos otra vez la parametriz. Con $u \in H^s(\mathcal{X})$, s arbitrario, si $Au = 0$, entonces $u = R_i u$. Como $R_i u \in C^\infty(\mathcal{X})$, $u \in C^\infty(\mathcal{X})$. Para probar la finitud de la dimensión del espacio nulo de A , vemos $\ker A$ como subespacio de $H_0(\mathcal{X})$. Si $u \in \ker A$, entonces, de nuevo, $u = R_i u$. Si $\{u_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ es una sucesión de norma 1 en $\ker A$, entonces $\{R_i u_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ es una sucesión acotada en $H^\mu(\mathcal{X})$ y por lo tanto tiene una subsucesión convergente en $H^0(\mathcal{X})$ debido al Lema de Rellich. Esto implica que la esfera unidad en $\ker A$ respecto a la norma de $L^2(\mathcal{X})$ es compacta, y por lo tanto $\ker A$ es un espacio de dimensión finita (ver Rudin [64]).

Continuando con A como en la proposición, el rango de (13.3) es además un subespacio cerrado de $L^2(\mathcal{X})$ de codimensión finita. Para ver esto, tomamos de nuevo una sucesión $\{u_\ell\}_{\ell=1}^\infty \subset H^\mu(\mathcal{X})$ tal que $\{Au_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ converge en $L^2(\mathcal{X})$, digamos a f . La proyección de u_ℓ en $\ker A$ con el producto interno de $L^2(\mathcal{X})$ es un elemento de $H^\mu(\mathcal{X})$, por lo tanto sustrayéndolo seguimos teniendo un elemento de $H^\mu(\mathcal{X})$. Suponemos entonces que todos los u_ℓ son ortogonales (en $L^2(\mathcal{X})$) a $\ker A$. Suponiendo primero que la sucesión $\{u_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ es acotada como sucesión en $L^2(\mathcal{X})$, observamos que $Bf_\ell \rightarrow Bf$ y que pasando a una subsucesión podemos suponer que $\{R_i u_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ converge en $L^2(\mathcal{X})$. Entonces $\{Bf_\ell + R_i u_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ converge en $L^2(\mathcal{X})$, esto es, $\{u_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ converge en $L^2(\mathcal{X})$. Entonces el límite, u , pertenece a $H^\mu(\mathcal{X})$ y $Au = f$, porque (13.3) es cerrado. Por lo tanto $f \in \text{rg } A$. Para completar el argumento necesitamos probar que $\{u_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ es acotada en $L^2(\mathcal{X})$. Si esta sucesión no es acotada, podemos suponer que $\|u_\ell\|_0 \rightarrow \infty$

pasando a una subsucesión, y si $v_\ell = u_\ell/\|u_\ell\|_0$, entonces $Av_\ell = f_\ell/\|v_\ell\| \rightarrow 0$ cuando $\ell \rightarrow \infty$. Aplicando el argumento anterior a $\{v_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ (la cual es acotada en $L^2(\mathcal{X})$) obtenemos una subsucesión, digamos ella misma, que converge en $L^2(\mathcal{X})$ a cierto elemento $v \in H^\mu(\mathcal{X})$. Como $\|v_\ell\|_0 = 1$, también $\|v\|_0 = 1$, y como $v_\ell \perp \ker A$, $v \perp \ker A$. Pero $Av_\ell \rightarrow 0$, por lo tanto $Av = 0$: $v \in \ker A$. Entonces $v = 0$, lo cual es imposible si $\|v\| = 1$. La conclusión que sacamos es que u_ℓ , una vez modificada de manera que sus términos son ortogonales a $\ker A$ en $L^2(\mathcal{X})$, es acotada. Finalmente, para probar la aserción sobre la codimensión, notamos que $(\operatorname{rg} A)^\perp = \ker A^*$. Por lo tanto A es Fredholm. \square

Si A es elíptico de orden $\mu > 0$, entonces satisface la desigualdad

$$(13.4) \quad \|u\|_{s+\mu} \leq C_s(\|Au\|_s + \|u\|_s), \quad u \in H^{s+\mu}(\mathcal{X}).$$

Esta es otra consecuencia de la existencia de la parametriz B . Usando $u = BAu + R_i u$ tenemos, para cualquier s y $u \in H^{s+\mu}(\mathcal{X})$,

$$\|u\|_{s+\mu} = \|BAu + R_i u\|_{s+\mu} \leq \|BAu\|_{s+\mu} + \|R_i u\|_{s+\mu} \leq C_1 \|Au\|_s + C_2 \|u\|_s.$$

usando la continuidad de $B : H^s(\mathcal{X}) \rightarrow H^{s+\mu}(\mathcal{X})$ y $R_i : H^{s+\mu}(\mathcal{X}) \rightarrow H^s(\mathcal{X})$. La implicación opuesta también es válida: si A es un operador pseudodiferencial y satisface:

$$\|u\|_{s+\mu} \leq C(\|Au\|_s + \|u\|_s), \quad u \in H^{s+\mu}(\mathcal{X}).$$

para algún s y μ , entonces A es un operador elíptico de orden μ .

Si B es un operador pseudodiferencial de orden negativo, entonces, visto como operador

$$B : L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X}),$$

es compacto. Por ser compacto, su espectro consiste de un conjunto discreto en $\mathbb{C} \setminus 0$ junto con 0 como único punto de acumulación. Cada $\lambda \in \operatorname{spec}(B) \setminus 0$ es un autovalor de multiplicidad finita. Si B es autoadjunto, entonces $\operatorname{spec}(B) \subset \mathbb{R}$. De esto deducimos:

TEOREMA 13.5. *Sea $A \in \Psi^\mu(\mathcal{X})$ elíptico y autoadjunto, con $\mu > 0$. Entonces*

$$A : H^\mu(\mathcal{X}) \subset L^2(\mathcal{X}) \rightarrow L^2(\mathcal{X})$$

es un operador cerrado densamente definido con espectro discreto contenido en \mathbb{R} . Cada $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ es un autovalor, el autoespacio correspondiente, $\mathcal{E}_\lambda = \ker(A - \lambda I)$, es de dimensión finita, y

$$(13.6) \quad L^2(\mathcal{X}) = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{spec}(A)} \mathcal{E}_\lambda.$$

Si A es semiacotado, digamos,

$$(Au, u) \geq C\|u\|_0^2$$

para algún C y todo $u \in L^2(\mathcal{X})$, entonces $\text{spec}(A) \subset [C, \infty)$. Cada autoespacio tiene dimensión finita y consiste de funciones (o secciones) de clase C^∞ .

DEMOSTRACIÓN. Por ser autoadjunto, el espectro de A esta contenido en \mathbb{R} . Escogemos algún λ_0 tal que $A - \lambda_0 I$ es invertible (por ejemplo, $\lambda_0 \notin \mathbb{R}$). Sea $B(\lambda_0)$ la inversa. Entonces $B(\lambda_0)$ actuando sobre $C^\infty(\mathcal{X})$ tiene imagen en $C^\infty(\mathcal{X})$. En efecto, si $u \in C^\infty(\mathcal{X})$, y $f = B(\lambda_0)u$, entonces $(A - \lambda_0 I)f \in C^\infty(\mathcal{X})$ porque $(A - \lambda_0 I)f = u$. La elipticidad de A implica $f \in C^\infty(\mathcal{X})$. Más aún, $B(\lambda_0)$ es un operador pseudodiferencial. Notamos ahora que $A - \lambda_0 I$ es un operador pseudodiferencial elíptico (porque I es un operador de orden $0 < \mu$) y tomamos una parametriz pseudodiferencial B de $A - \lambda_0 I$ con R_i, R_d como en el Teorema 11.9. Entonces

$$B = B(\lambda_0)(A - \lambda_0 I)B = B(\lambda_0)(I - R_d) = B(\lambda_0) - B(\lambda_0)R_d$$

Notamos ahora que $B(\lambda_0)R_d$ y su dual son operadores con imagen en $C^\infty(\mathcal{X})$ y por lo tanto son operadores integrales con núcleo de clase C^∞ . En conclusión, $B(\lambda_0)$ difiere de un operador pseudodiferencial en un operador integral con núcleo de clase C^∞ , y por lo tanto es un operador pseudodiferencial además de una inversa exacta de $A - \lambda_0 I$.

El espectro de $B(\lambda)$ es contable, con solo 0 como punto de acumulación. Tenemos, con $\lambda - \lambda_0 \neq 0$ arbitrario,

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= (A - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I) \\ &= (A - \lambda_0 I)(I - (\lambda - \lambda_0)B(\lambda_0)) \\ &= -(\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I) \left(B(\lambda_0) - \frac{1}{\lambda - \lambda_0} I \right) \end{aligned}$$

y vemos que $A - \lambda I$ es invertible si $\lambda = \lambda_0$ o $\lambda \neq \lambda_0$ y $1/(\lambda - \lambda_0) \notin \text{spec}(B(\lambda_0))$. Concluimos de esto que $\text{spec}(A)$ es un subconjunto discreto de \mathbb{R} sin puntos de acumulación finitos:

$$\text{spec}(A) = \{ \lambda : \lambda = \lambda_0 + 1/\rho, \rho \in \text{spec}(B(\lambda_0)) \}$$

Cada elemento del espectro es un autovalor (real porque A es autoadjunto), el autoespacio es de dimensión finita porque es el autoespacio correspondiente a cierto autovalor $\neq 0$ de $B(\lambda_0)$. La fórmula (13.6) es el teorema espectral para operadores autoadjuntos (ver Rudin [64]). Si A es semiacotado con cota inferior C como en el enunciado, y si ϕ es una autofunción con autovalor λ , entonces $\lambda \|\phi\|^2 = (\lambda\phi, \phi)_0 = (A\phi, \phi)_0 \geq C\|\phi\|^2$, por lo tanto $\lambda \geq C$. \square

Problemas de valores de frontera

1. Contexto

Sea \mathcal{X} una variedad compacta de dimensión n y $\mathring{\mathcal{M}} \subset \mathcal{X}$ un conjunto abierto acotado cuya frontera, $\mathcal{Y} = \partial\mathring{\mathcal{M}}$, es una subvariedad de clase C^∞ de \mathcal{X} ; decimos que $\mathcal{M} = \mathring{\mathcal{M}} \cup \mathcal{Y}$ es una variedad compacta con borde. Sea A un operador diferencial elíptico definido en un entorno de \mathcal{M} . El prototipo del problema a estudiar es la resolubilidad de

$$s \begin{cases} Au = f & \text{en } \mathring{\mathcal{M}} \\ \beta u = g & \text{sobre } \mathcal{Y}, \end{cases}$$

en donde β es un operador que actúa sobre la restricción de u y finitas de sus derivadas no tangenciales en la frontera, y produce una función (o distribución, o sección de un fibrado, dependiendo del contexto) en la frontera.

2. Trazas

El primer punto a aclarar es cuales son los espacios en los cuales buscamos las soluciones, y el significado de “restricción a la frontera.” Si u es continua en un entorno de \mathcal{M} , entonces la restricción de u a \mathcal{Y} está definida sin ambigüedad. En espacios de Sobolev, el asunto es más delicado. En esta sección supondremos que \mathcal{X} viene equipado con una densidad suave que usamos para definir $L^2(\mathcal{X})$. En el caso en que el problema involucre fibrados vectoriales, suponemos que estos vienen con métricas Hermitianas prefijadas.

Comenzamos definiendo los espacios de Sobolev. Si \mathcal{M} es una variedad compacta con borde (todo de clase C^∞), podemos presentar \mathcal{M} como subvariedad de una variedad compacta \mathcal{X} pasando al llamado doble de \mathcal{M} . Definimos $H^s(\mathcal{M})$ para $s \geq 0$ como la restricción a \mathcal{M} de los elementos de $H^s(\mathcal{X})$, lo cual tiene sentido porque los elementos de tales espacios son funciones al menos en $L^2(\mathcal{X})$. En otras palabras, si $j : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}$ es el mapa inclusión y definimos

$$\{\text{funciones en } \mathcal{X}\} \ni v \mapsto j^*(v) = v \circ j \in \{\text{funciones en } \mathcal{M}\},$$

entonces $H^s(\mathcal{M}) = j^*H^s(\mathcal{X})$. La norma en $H^s(\mathcal{M})$ es

$$\|u\|_{H^s(\mathcal{M})} = \inf_{v \in H^s(\mathcal{X})} \{\|v\|_{H^s(\mathcal{X})} : j^*(v) = u\};$$

usualmente escribiremos $\|u\|_s$ en lugar de $\|u\|_{H^s(\mathcal{M})}$. Definimos $H^s(\mathcal{M})$ para $s < 0$ como el dual de $H_0^s(\mathcal{M})$. Este último es la clausura de $C_c^\infty(\mathcal{M})$ en $H^s(\mathcal{M})$ (o en $H^s(\mathcal{X})$).

Para definir valores de frontera comenzamos con la versión local. Vemos \mathbb{R}^{n-1} como subespacio de \mathbb{R}^n via la inclusión $\iota : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\iota(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$. Escribimos $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$ y $\overline{\mathbb{R}}_+^n \times [0, \infty)$. Si u es una función continua en \mathbb{R}^n , escribimos ι^*u para denotar $u \circ \iota$. Aunque $\overline{\mathbb{R}}_+^n$ no es compacto, definimos este espacio de la misma manera que antes con \mathcal{M} en relación a \mathcal{X} , igualmente la norma.

LEMA 2.1. *El operador de restricción $\iota^* : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ tiene una extensión continua a un operador*

$$\iota^* : H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

para cada $s > 1/2$. Si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y $u = 0$ en $\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$ entonces $\iota^*(u) = 0$. Por lo tanto, tenemos un mapa inducido

$$\iota^* : H^s(\overline{\mathbb{R}}_+^n) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^{n-1}).$$

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que para cada $s > 1/2$ existe C_s tal que

$$\|\iota^*v\|_{s-1/2} \leq C_s \|v\|_s, \quad v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Esto prueba la primera aserción porque $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^s(\mathbb{R}^n)$ para cualquier s . Supongamos entonces que $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. La fórmula de inversión de Fourier en \mathbb{R}^n produce (con $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, similarmente ξ')

$$\begin{aligned} \iota^*v(x') &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{v})(x', 0) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix' \cdot \xi'} \widehat{v}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}(\xi', \xi_n) d\xi_n \right) d\xi'. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\widehat{\iota^*v}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}(\xi', \xi_n) d\xi_n.$$

y

$$\begin{aligned} (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{\iota^*v}(\xi')|^2 (1 + |\xi'|^2)^{s-1/2} d\xi' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}(\xi', \xi_n) d\xi_n \right|^2 (1 + |\xi'|^2)^{s-1/2} d\xi' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{v}(\xi', \xi_n) (1 + |\xi|^2)^{s/2}}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}} d\xi_n \right|^2 (1 + |\xi'|^2)^{s-1/2} d\xi' \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{v}(\xi', \xi_n)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi_n \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + |\xi'|^2)^{s-1/2}}{(1 + |\xi|^2)^s} d\xi_n \right) \right] d\xi' \end{aligned}$$

usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la última línea. El cambio de variables $\xi_n = (1 + |\xi'|^2)^{1/2} \tilde{\xi}_n$ lleva a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + |\xi'|^2)^{s-1/2}}{(1 + |\xi|^2)^s} d\xi_n &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + |\xi'|^2)^{s-1/2}}{(1 + |\xi'|^2 + |\xi_n|^2)^s} d\xi_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + |\xi'|^2)^{s-1/2}}{(1 + |\xi'|^2)^s (1 + |\tilde{\xi}_n|^2)^s} (1 + |\xi'|^2)^{1/2} d\tilde{\xi}_n \\ &= (2\pi)^2 C_s^2 \end{aligned}$$

con C_s finito si $s > 1/2$. Por lo tanto,

$$\|\iota^* v\|_{s-1/2}^2 \leq C_s^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{v}(\xi', \xi_n)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi_n \right) d\xi' = C_s^2 \|v\|_s^2.$$

Esto completa la demostración de la primera asección de la proposición.

Para la probar la segunda (continuamos con la suposición $s > 1/2$) notamos primero que si $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$, entonces $\iota^*(\chi v) = \iota^*(\chi)\iota^*(v)$. En efecto, si $\{v_\ell\}_{\ell=1}^\infty \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es una sucesión que converge a v en $H^s(\mathbb{R}^n)$, entonces $\chi v_\ell \rightarrow \chi v$ en $H^s(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto $\iota^*(\chi v_\ell) \rightarrow \iota^*(\chi v)$, pero también $\iota^*(\chi v_\ell) = \iota^*(\chi)\iota^*(v_\ell) \rightarrow \iota^*(\chi)\iota^*(v)$.

Si ahora $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y $v = 0$ en $\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$ entonces, con $\tau_y(v)(x) = v(x-y)$ y $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ tenemos: si $\delta > 0$, $\tau_{-\delta e_n}(v) = 0$ en $x_n > -\delta$. Si el soporte de $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ está contenido en $x_n > -\delta$, entonces $\iota^*(\chi \tau_{-\delta e_n}(v)) = 0$ (porque $\chi \tau_{-\delta e_n}(v) = 0$). Por lo tanto $\iota^*(\tau_{-\delta} v) = 0$. Pero $\tau_{-\delta} v \rightarrow v$ en $H^s(\mathbb{R}^n)$ cuando $\delta \rightarrow 0$. Así, $\iota^*(v) = 0$.

Finalmente, con $j : \overline{\mathbb{R}}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, si $u \in H^s(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$ y $j^* v = u = j^* w$ con $v, w \in G^s(\mathbb{R}^n)$, entonces $j^*(v - w) = 0$ en \mathbb{R}_+^n y por lo tanto $\iota^*(v) = \iota^*(w)$. Definimos esta función común como $\iota^* u$. tenemos ademas

$$\|\iota^* u\|_{s-1/2} \leq C_s \|v\|_s \quad \text{para todo } v \in H^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } j^* v = u.$$

Por la definición de la norma en $H^s(\mathbb{R}_+^n)$,

$$\|\iota^* u\|_{s-1/2} \leq C_s \|u\|_s$$

Esto completa la demostración. \square

Probamos a continuación la sobreyectividad de ι^* .

LEMA 2.2. *Sea $\omega \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\omega(0) = 1$. Si $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ definimos*

$$\mathbf{e}(v)(x', x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \widehat{v}(\xi') \omega(x_n (1 + |\xi'|^2)^{1/2}) d\xi',$$

entonces

$$\mathbf{e} : C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \subset H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$$

es continuo: existe $C_s > 0$ tal que $\|\mathbf{e}(v)\|_s \leq C_s \|v\|_{s-1/2}$ para todo $s \in \mathbb{R}$ y $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Además, $\iota^* \mathbf{e}(v) = v$, e igualmente, con $\mathbf{e}^+ = j^* \circ \mathbf{e}$, $\iota^* \mathbf{e}^+(v) = id(v)$.

La motivación de la definición de \mathbf{e} es la siguiente. Para simplificar, suponemos que ω es par, que $\omega(t) = 1$ cerca de 0, y usemos $\omega(x_n|\xi'|)$ en la integral en lugar de $\omega(x_n(1 + |\xi'|^2)^{1/2})$, tenemos (con $x_n \neq 0$)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \widehat{v}(\xi') \omega(x_n|\xi'|) d\xi' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x' - y') \cdot \xi'} v(y') \omega(x_n|\xi'|) dy' d\xi' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i((x' - y')/x_n) \cdot \xi'} v(y') \frac{\omega(|\xi'|)}{|x_n|^n} d\xi' dy' \end{aligned}$$

luego de un cambio en el orden de integración y la sustitución $\tilde{\xi}' = x_n|\xi'|$ La transformada inversa de Fourier de la función $\xi' \mapsto \omega(|\xi'|)$ es un elemento de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto también lo es su transformada inversa, la cual denotamos ϕ . Con ella, la última integral es

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} v(y') \frac{1}{x_n^n} \phi\left(\frac{x' - y'}{x_n}\right) dy'.$$

Esta es la convolución de v con una identidad aproximada basada en la función $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. El límite en $x_n = 0$ es v , y como función de (x', x_n) esta convolución es un elemento de $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

PRUEBA DEL LEMA. La transformada de Fourier de $\mathbf{e}(v)$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{e}(v))(\eta) &= \widehat{v}(\eta') \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_n \eta_n} \omega(x_n(1 + |\eta'|^2)^{1/2}) dx_n \\ &= \frac{\widehat{v}(\eta')}{(1 + |\eta'|^2)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_n \eta_n / (1 + |\eta'|^2)^{1/2}} \omega(x_n) dx_n \\ &= \frac{\widehat{v}(\eta')}{(1 + |\eta'|^2)^{1/2}} \widehat{\omega}\left(\frac{\eta_n}{(1 + |\eta'|^2)^{1/2}}\right) \end{aligned}$$

luego de un cambio de variables. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}(v)\|_s^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\widehat{v}(\eta')|^2}{(1 + |\eta'|^2)} \left| \widehat{\omega}\left(\frac{\eta_n}{(1 + |\eta'|^2)^{1/2}}\right) \right|^2 (1 + |\eta'|^2 + \eta_n^2)^s d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\widehat{v}(\eta')|^2}{(1 + |\eta'|^2)^{1/2}} |\widehat{\omega}(\eta_n)|^2 (1 + |\eta'|^2 + (1 + |\eta'|^2)\eta_n^2)^s d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{v}(\eta')|^2 (1 + |\eta'|^2)^{s-1/2} d\eta' \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\omega}(\eta_n)|^2 (1 + \eta_n^2)^s d\eta_n \end{aligned}$$

usando el cambio de variables $\tilde{\eta}_n = \eta_n / (1 + |\eta'|^2)^{1/2}$ para obtener la segunda línea y reorganizándolo en la tercera. Con

$$C_s^2 = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\omega}(\eta_n)|^2 (1 + \eta_n^2)^s d\eta_n$$

tenemos $\|\mathbf{e}(v)\|_s^2 = C_s^2 \|v\|_{s-1/2}^2$.

Que $\iota^*(\mathbf{e}(v)) = v$ es inmediato si $v \in C_c^\infty$ debido a la fórmula de inversión de Fourier, y cierto en general por continuidad. El mismo argumento sirve para probar que $\iota^* \circ \mathbf{e}^+ = id$ \square

Notemos que si k es un entero no negativo y $v \in H^{s-1/2}$, entonces $x_n^k \mathbf{e}(v) \in H^{s+k}$. La razón de esto es

$$x_n^k \omega(x_n(1 + |\xi'|^2)^{1/2}) = (x_n(1 + |\xi'|^2)^{1/2})^k \omega(x_n(1 + |\xi'|^2)^{1/2}) / (1 + |\xi'|^2)^{k/2}$$

por lo cual denotando $\omega_k(t) = t^k \omega(t)$,

$$x_n^k \mathbf{e}(v)(x', x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \widehat{v}(\xi') \frac{\omega_k(x_n(1 + |\xi'|^2)^{1/2})}{(1 + |\xi'|^2)^{k/2}} d\xi',$$

en otras palabras, tenemos una ganancia neta de k en la regularidad de $x_n^k \mathbf{e}(v)$.

Parta transferir esto a \mathcal{M} prefijamos

$$(2.3) \quad x : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \text{ una función suave estrictamente positiva en } \overset{\circ}{\mathcal{M}} \text{ y negativa en } \mathcal{X} \setminus \mathcal{M} \text{ con } dx \neq 0 \text{ a lo largo de } \mathcal{Y}.$$

y

$$(2.4) \quad \text{un campo vectorial de clase } C^\infty \text{ en } \mathcal{X} \text{ tal que } X \text{ es transversal a } \mathcal{Y}$$

relacionados por $Xx = 1$ cerca de \mathcal{Y} . Notemos que $\mathcal{Y} = \{x = 0\}$ y que podemos usar x como parte de cualquier sistema de coordenadas de $|X$ en un entorno de cualquier punto de \mathcal{Y} . Usando coordenadas locales adaptadas a \mathcal{Y} y particiones de la unidad obtenemos:

COROLARIO 2.5. *Sean X y x como arriba, relacionados por $Xx = 1$ cerca de \mathcal{Y} . Sea k un entero no-negativo. Si $s > k + 1/2$, el operador*

$$\iota^* \circ \left(\frac{1}{i} X\right)^k : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{Y})$$

tiene una extensión continua a un operador

$$\gamma_k : H^s(\mathcal{M}) \rightarrow H^{s-k-1/2}(\mathcal{Y}).$$

Además, existe un operador continuo $\mathbf{e}_k : H^{s-1/2-k}(\mathcal{Y}) \rightarrow H^s(\mathcal{X})$ tal que

$$\gamma_k \circ \mathbf{e}_k = (-i)^k I.$$

Otra notación común para γ_k es D_ν^k con las definiciones

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} = \iota^* X^k u, \quad D_\nu^k u = \frac{1}{i^k} \frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}$$

Usualmente ν es un campo vectorial unitario normal a la frontera que apunta al exterior de \mathcal{M} . Pero como no hemos prescrito métricas Riemannianas usamos X . La relación $Xx = 1$ entre X y x a lo largo de \mathcal{Y} en el corolario, que siempre usaremos, hace que X apunte hacia el interior de \mathcal{M} .

3. Transformada de Mellin

Sea A un operador diferencial elíptico de orden m definido en un entorno de \mathcal{M} ; esta es, recordemos, na variedad compacta con borde. Si el operador es escalar y $\dim \mathcal{X} \geq 3$, m es par, en caso contrario, A envía secciones de un fibrado vectorial a otro, del mismo rango (en cuyo caso el producto del rango por el orden es par en el caso $\dim \mathcal{X} \geq 3$). Hay dos dominios canónicos asociados al operador inicialmente definido como

$$A : C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{M}}) \subset L^2(\mathcal{M}) \rightarrow L^2(\mathcal{M}) :$$

El dominio mínimo, $\mathcal{D}_{\min}(A)$ el cual es la clausura de $C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{M}})$ respecto a la norma definida por

$$(3.1) \quad \|u\|_A^2 = \|Au\|_0^2 + \|u\|_0^2$$

y el dominio máximo,

$$\mathcal{D}_{\max} = \{u \in L^2(\mathcal{M}) : Au \in L^2\},$$

este con la norma definida por (3.1) (con la cual \mathcal{D}_{\min} es la clausura de $C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{M}})$, un subespacio cerrado de \mathcal{D}_{\max}).

Para definir problemas de frontera para A hay que demostrar que los objetos de interés tiene valores de frontera:

PROPOSICIÓN 3.2. *Si $u \in \mathcal{D}_{\max}(A)$, entonces u tiene trazas en \mathcal{Y} hasta orden $m - 1$.*

Esta proposición es lo más que uno puede esperar probar en lo que a existencia de trazas se refiere, porque la norma $\|\cdot\|_A$ en $C_c^\infty(\mathcal{M})$ es equivalente a la norma de Sobolev $\|\cdot\|_m$, con la consecuencia que

$$\mathcal{D}_{\min} = H_0^m(\mathcal{M}).$$

En preparación para demostrar la proposición desarrollamos en esta sección la transformada de Mellin como herramienta útil para enfrentar el problema. Discutiremos el caso de operadores ordinarios en la siguiente sección, y el caso general en la Sección 5.

La transformada de Mellin de una función $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ es la función

$$\mathcal{M}(\varphi)(\sigma) = \int_0^\infty x^{-i\sigma} \varphi(x) \frac{dx}{x}, \quad \Im\sigma > 0.$$

Esta es en realidad la transformada de Fourier usual, vía el cambio de variables $x = e^t$. Con esto es inmediato que la transformada de Mellin hereda todas las propiedades de la transformada de Fourier, en particular tenemos la fórmula de inversión

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Im\sigma=\delta} x^{i(\sigma+i\delta)} \mathcal{M}(\varphi)(\sigma) ds$$

con cualquier $\delta > 0$, además de sus propiedades como mapa entre diversos espacios. De la propiedad $(D_t u)^\wedge(\tau) = \tau \widehat{u}(\tau)$ obtenemos

$$(3.3) \quad \mathcal{M}(x D_x \varphi)(\sigma) = \sigma \mathcal{M}(\varphi)(\sigma).$$

La utilidad fundamental de la transformada de Mellin en el contexto de problemas de frontera radica en que ella produce de manera muy simple los valores de frontera de una función. Para describir esto en detalle introducimos algo de notación, por ahora en el caso particular de $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty)$. Definimos $L_b^2(\mathbb{R}_+)$ como el espacio de funciones L^2 en \mathbb{R}_+ respecto a la medida $\frac{dx}{x}$. De nuevo la transformación $x = e^t$ relaciona directamente $L^2(\mathbb{R})$ y $L_b^2(\mathbb{R}_+)$, y consecuentemente, la transformada de Mellin tiene una extensión a un mapa

$$\mathcal{M} : L_b^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\mathbb{R}),$$

un isomorfismo con inversa

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{is} \psi(s) ds,$$

Definimos

$$x^\nu L_b^2(\mathbb{R}_+) = \{\psi : \psi \text{ es medible, } x^{-\nu} \psi \in L_b^2(\mathbb{R}_+)\}$$

Si $\psi \in L_b^2(\mathbb{R}_+)$ se anula para x grande, entonces $\psi \in x^{-\delta} L_b^2(\mathbb{R}_+)$ para cualquier $\delta > 0$:

$$\int_0^\infty |x^\delta \psi(x)|^2 \frac{dx}{x} < \infty.$$

Por lo tanto es legal calcular $\mathcal{M}(x^\delta \psi)(s)$:

$$\mathcal{M}(x^\delta \psi)(s) = \int_0^\infty x^{-is} x^\delta \psi(x) \frac{dx}{x} = \int_0^\infty x^{-i(s+i\delta)} \psi(x) \frac{dx}{x} = \mathcal{M}(\psi)(s+i\delta).$$

En otras palabras, si $\psi \in L_b^2(\mathbb{R}_+)$ se anula para todo x suficientemente grande, entonces $\mathcal{M}(\psi)(s+i\delta)$ tiene sentido para $\delta > 0$. Es fácil ver que para tales ψ , la función $\sigma \mapsto \mathcal{M}(\psi)(\sigma)$, $\Im \sigma > 0$, es holomorfa (analítica compleja). Además, como $x^\delta \psi \rightarrow \psi$ en $L_b^2(\mathbb{R}_+)$,

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{M}(\psi)(s+i\delta) - \mathcal{M}(\psi)(s)|^2 ds \rightarrow 0 \text{ si } \delta \searrow 0.$$

Retomando el hilo con $\varphi \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$, notemos primero que $x^\delta \varphi \in L_b^2(\mathbb{R}_+)$ si $\delta > 0$, de lo cual obtenemos que $\mathcal{M}(\varphi)(\sigma)$ tiene sentido para $\Im \sigma > 0$ como ya habíamos observado. Además, si $\varphi \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ se anula a orden k en $x = 0$ entonces $\mathcal{M}(\varphi)$ tiene una extensión holomorfa a $\Im \sigma > -k$.

Sea $\omega \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ tal que $\omega(x) = 1$ si x está cerca de 0. Usando la expansión de Taylor de φ tenemos

$$\omega(x)\varphi(x) = \sum_{\ell=0}^N \frac{1}{\ell!} \varphi^{(\ell)}(0) x^\ell \omega(x) + x^{N+1} \omega(x) \tilde{\varphi}^{(N)}(x)$$

y

$$\mathcal{M}(\omega\varphi)(\sigma) = \sum_{\ell=0}^N \frac{1}{\ell!} \varphi^{(\ell)}(0) \int_0^{\infty} x^{\ell-i\sigma} \omega(x) \frac{dx}{x} + \int_0^{\infty} x^{N+1-i\sigma} \omega(x) \tilde{\varphi}^{(N)}(x) \frac{dx}{x}$$

El último término es holomorfo en $\Im\sigma > -N - 1$. Para analizar los primeros solo necesitamos analizar $\mathcal{M}(\omega)(\sigma)$. Esta es una función meromorfa en todo \mathbb{C} con un único polo simple en el origen. En efecto, si $\Im\sigma > 0$,

$$\begin{aligned} \sigma \mathcal{M}(\omega)(\sigma) &= \int_0^{\infty} \sigma x^{-i\sigma-1} \omega(x) dx \\ &= i \int_0^{\infty} \frac{d}{dx} x^{-i\sigma} \omega(x) dx \\ &= ix^{-i\sigma} \omega(x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - i \int_0^{\infty} x^{-i\sigma} \frac{d\omega}{dx}(x) dx \\ &= -i \int_0^{\infty} x^{-i\sigma} \frac{d\omega}{dx}(x) dx \end{aligned}$$

usando que $\omega(x) = 0$ si x es suficientemente grande y que $\Im\sigma > 0$. En la integral de la última línea, el integrando tiene soporte en un subconjunto compacto de \mathbb{R}_+ . Por lo tanto, la función de σ definida por ese término es entera. Como su valor en $\sigma = 0$ es i tenemos

$$\mathcal{M}(\omega)(\sigma) = \frac{i}{\sigma} + h(\sigma)$$

con h entera. Usando $\mathcal{M}(x^\ell\omega)(\sigma) = \mathcal{M}(\omega)(\sigma + i\ell)$ en la fórmula para $\mathcal{M}(\omega\varphi)$ obtenemos

$$(3.4) \quad \mathcal{M}(\omega\varphi)(\sigma) = \sum_{\ell=0}^N \frac{i}{\ell!} \frac{\varphi^{(\ell)}(0)}{\sigma + i\ell} + \mathcal{M}(\omega\tilde{\varphi}^{(N)})(\sigma + i(N+1)).$$

Vemos que los valores de frontera de φ son los residuos (excepto por el factor i) de la transformada de Mellin de φ . Notemos que este resultado es independiente de la función ω escogida: si $\tilde{\omega} \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ también satisface $\tilde{\omega}(t) = 1$ si t está cerca de 0, entonces

$$\mathcal{M}(\omega\varphi) - \mathcal{M}(\tilde{\omega}\varphi)$$

es una función entera.

Podemos reescribir (3.4) en la forma

$$(3.5) \quad \varphi(x) = -i \sum_{\ell=0}^N \text{Res}(\mathcal{M}(\omega\varphi); -i\ell) + \mathcal{O}(|x|^{\ell+1})$$

4. Valores de frontera: operadores diferenciales ordinarios

Supongamos que A es un operador diferencial ordinario en \mathbb{R}_+ de la forma $A = x^{-k}P$ con

$$P(x, xD_x) = \sum_{k=0}^m a_k(x)(xD_x)^k,$$

en donde $a_k \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$. Decimos que P es un b -operador y A un c -operador, u operador cónico (luego veremos por qué). Suponemos que $a_m(x) \neq 0$ para todo x ; esto hace de P un operador b -elíptico. El origen es una singularidad, un punto singular regular de P porque $a_m(0) \neq 0$. Uno puede encontrar soluciones formales de la ecuación $Pu = f$ cerca de 0 usando series formales, tal vez incluyendo términos logarítmicos, técnicas que tienes su origen en el caso de coeficientes analíticos. En lo que sigue, lo que queremos es determinar la estructura de la solución de $Pu = f$ en el origen, luego de $Au = f$.

Si $u \in x^{-\gamma}L_b^2(\mathbb{R}_+)$ es tal que $Pu = f$ con $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$, entonces $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$; esto es porque P es elíptico como operador en \mathbb{R}_+ . Pero u no es necesariamente de clase C^∞ hasta la frontera ($x = 0$). Supongamos además que $f = 0$ a todo orden en $x = 0$.

PROPOSICIÓN 4.1. *En la situación del párrafo anterior, u tiene una expansión en $x = 0$ de la forma*

$$u \sim \sum_{\substack{\varsigma \in \text{spec}_b(P) \\ \Im \varsigma < \gamma}} q_{\varsigma, \nu} x^{i\varsigma + \ell} \log^\nu x$$

donde

$$\text{spec}_b(P) = \{\sigma : P_0(\sigma) = 0\}, \quad P_0(\sigma) = \sum_{k=0}^m a_k(0)\sigma^k.$$

El punto de la proposición es que por analogía, podemos ver los coeficientes de esta serie formal potencialmente como los datos de frontera de u .

La proposición es consecuencia del siguiente lema

LEMA 4.2. *Sea $S_\ell = \{\sigma - i\ell : P_0(\sigma) = 0, \Im \sigma < \gamma\}$. Sea $\omega \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$ tal que $\omega(t) = 1$ para t cerca de 0. La transformada de Mellin de ωu es meromorfa en \mathbb{C} con polos en*

$$S = \bigcup_{\ell=0}^{\infty} S_\ell.$$

Según el lema, la estructura general de $\mathcal{M}(\omega u)$ es

$$\mathcal{M}(\omega u)(\sigma) = \sum_{\substack{\varsigma \in S \\ \Im \varsigma \geq \gamma - N}} \sum_{\nu=0}^{N_\varsigma} \frac{q_{\varsigma, \nu}}{(\sigma - \varsigma)^{\nu+1}} + h_N(\sigma)$$

donde h_N es meromorfa en \mathbb{C} con polos en $\Im\sigma < \gamma - N$. Comenzando con la fórmula de inversión y usando el teorema de Cauchy obtenemos

$$\begin{aligned} (\omega u)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Re\sigma=\gamma} x^{i\sigma} \left(\sum_{\substack{\zeta \in S \\ \Im\zeta \geq \gamma - N}} \sum_{\nu=0}^{N_\zeta} \frac{q_{\zeta,\nu}}{(\sigma - \zeta)^{\nu+1}} + h_N(\sigma) \right) d\sigma \\ &= \sum_{\substack{\zeta \in S \\ \Im\zeta \geq \gamma - N}} \sum_{\nu=0}^{N_\zeta} \operatorname{res} \left(\frac{-ix^{i\sigma} q_{\zeta,\nu}}{(\sigma - \zeta)^{\nu+1}} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Re\sigma=\gamma} x^{i\sigma} h_N(\sigma) d\sigma \\ &= \sum_{\substack{\zeta \in S \\ \Im\zeta \geq \gamma - N}} \sum_{\nu=0}^{N_\zeta} \frac{-iq_{\zeta,\nu}}{\nu!} x^{i\zeta} \log^\nu x + \frac{1}{2\pi} \int_{\Re\sigma=\gamma} x^{i\sigma} h_N(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

Como los polos de h_N están debajo de la línea $\Im\sigma = \gamma - N$, vemos que el término

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Re\sigma=\gamma} x^{i\sigma} h_N(\sigma) d\sigma$$

es igual a la integral a lo largo de $\Im\sigma = \gamma - N$ y de esto concluimos que este término es de orden $\mathcal{O}(x^N)$. Por lo tanto ωu (y consecuentemente u) tiene la estructura descrita en la proposición.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Tomamos ω como antes y notamos que

$$\omega P(u) = P(\omega u) + (\omega P(u) - P(\omega u)) = P(\omega u) + [\omega, P](u).$$

El conmutador $[\omega, P]$ es un operador diferencial de orden $m - 1$ cuyos coeficientes se anulan cerca de 0 porque ω aparece en cada coeficiente con al menos una derivada. Por lo tanto, como $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $P(\omega u) = \tilde{f}$ con $\tilde{f} = \omega f + [P, \omega]f \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$, $\tilde{f} = 0$ a todo orden en $x = 0$ y $\tilde{f}(x) = 0$ para todo x suficientemente grande. Estas propiedades de \tilde{f} implican que $\mathcal{M}(\tilde{f})$ es entera. Usando la expansión de Taylor de los coeficientes de P y que $x^\ell (xD_x)^k k = (xD_x + i\ell)^k x^\ell$ reescribimos P como

$$P(x, xD_x) = \sum_{\ell=0}^N P_\ell(xD_x) x^\ell + x^{N+1} \tilde{P}_{N+1}(x, xD_x).$$

El punto es que cada P_ℓ es como P pero con coeficientes constantes (independientes de x), un polinomio en xD_x ; los coeficientes de \tilde{P}_{N+1} si dependen de x , son funciones de clase C^∞ en $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Aplicando la transformada de Mellin a ambos miembros de

$$\sum_{\ell=0}^N P_\ell x^\ell + x^{N+1} \tilde{P}_{N+1}(\omega u)(x) = \tilde{f}(x)$$

obtenemos

$$(4.3) \quad \sum_{\ell=0}^N P_\ell(\sigma) \mathcal{M}(\omega u)(\sigma + i\ell) + \mathcal{M}(\tilde{P}_{N+1}(\omega u)(x))(\sigma + i(N+1)) = \mathcal{M}(\tilde{f})(\sigma)$$

usando (3.3): los $P_\ell(\sigma)$ son polinomios evaluados en σ . En esta fórmula, el lado derecho es entero. Como $\omega u \in x^{-\gamma} L_b^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{M}(\omega u)$ es holomorfa en $\Im\sigma > \gamma$. Por lo tanto $P_0(\sigma) \mathcal{M}(\omega u)(\sigma)$ también es holomorfa en $\Im\sigma > \gamma$, y

$$\sum_{\ell=1}^N P_\ell(\sigma) \mathcal{M}(\omega u)(\sigma + i\ell) + \mathcal{M}(\tilde{P}_{N+1}(\omega u)(x))(\sigma + i(N+1))$$

es holomorfo en $\Im\sigma > \gamma - 1$, mientras que $\mathcal{M}(\tilde{P}_{N+1}(\omega u)(x))(\sigma + i(N+1))$ es holomorfo en $\Im\sigma > \gamma - i(N+1)$. En suma,

$$F(\sigma) = - \sum_{\ell=1}^N P_\ell(\sigma) \mathcal{M}(\omega u)(\sigma + i\ell) - \mathcal{M}(\tilde{P}_{N+1}(\omega u)(x))(\sigma + i(N+1)) + \mathcal{M}(\tilde{f})(\sigma)$$

es holomorfa en $\Im\sigma > \gamma - 1$. Reescribiendo (4.3) como

$$P_0(\sigma) \mathcal{M}(\omega u)(\sigma) = F(\sigma)$$

vemos que aunque $\mathcal{M}(\omega u)(\sigma)$ es holomorfa en $\Im\sigma > \gamma$, $P_0(\sigma) \mathcal{M}(\omega u)(\sigma)$ es holomorfa en $\Im\sigma > \gamma - 1$ y por lo tanto $\mathcal{M}(\omega u)(\sigma)$ es meromorfa en $\Im\sigma > \gamma - 1$ con posibles polos en los ceros de $p_0(\sigma)$ contenidos en $\gamma - 1 < \Im\sigma < \gamma$. (En un momento veremos que $\mathcal{M}(\omega u)$ no puede tener polos en $\Im\sigma = \gamma$.) Pero si $\mathcal{M}u$ es meromorfa en $\Im\sigma > \gamma - 1$, entonces F es meromorfa en $\Im\sigma > \gamma - 2$ con polos en los ceros de $P_0(\sigma + i)$ contenidos en $\gamma - 2 < \Im\sigma < \gamma - 1$, y

$$\mathcal{M}(\omega u)(\sigma) = P_0(\sigma)^{-1} F(\sigma)$$

es meromorfa en $\Im\sigma > \gamma - 2$ con polos contenidos en los ceros de $P_0(\sigma)$ en $\gamma - 2 < \Im\sigma < \gamma$ y los de $P_0(\sigma + i)$ contenidos en $\gamma - 2 < \Im\sigma < \gamma - 1$. Continuando de esta manera vemos que $\mathcal{M}(\omega u)$ es meromorfa en \mathbb{C} con polos en los ceros de $P_0(\sigma)$ contenidos en $\Im\sigma < 2$, los de $P_0(\sigma + i)$ contenidos en $\Im\sigma < \gamma - 1$, y en general los de $P_0(\sigma + i\ell)$ contenidos en $\Im\sigma < \gamma - \ell$. En cada paso hay un desplazamiento en $-i$ unidades y una división por P_0 . el desplazamiento corre los polos anteriores en $-i$, y la división por P_0 potencialmente añade polos en la región a la cual $\mathcal{M}(\omega u)$ está siendo extendida. \square

Continuando con P como antes, sea $A = x^{-m}P$. El problema ahora es analizar la naturaleza del espacio

$$\mathcal{D}_{\text{máx}} = \{u \in x^{-\gamma} L_b^2(\mathbb{R}_+) : Au \in x^{-\gamma} L_b^2(\mathbb{R}_+)\}.$$

Si $Au = f$ con $f \in x^{-\gamma} L_b^2(\mathbb{R}_+)$, entonces $Pu = x^{-\gamma+m} L_b^2(\mathbb{R}_+)$. En cierto sentido, Pu se anula en $x = 0$ hasta cierto orden, ya no orden ∞ . Por elipticidad obtenemos que si $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\psi u \in H^m(R_+)$. Por lo tanto si ω como antes, entonces $[P, \omega]u \in H^1(\mathbb{R}_+)$; esto usa la regularidad de u , que $[P, \omega]$ es un

operador diferencial de orden $m - 1$ y que sus coeficientes se anulan cerca de 0 y para todo x suficientemente grande. Por lo tanto para analizar u cerca de 0 basta con analizar ωu . Los cálculos sobre la estructura de $\mathcal{M}(\omega u)$ en la prueba del lemma valen en la región $\Im\sigma > \gamma - m$ sin cambio y llevan a que

$$\mathcal{M}(\omega u)(\sigma) = \sum_{\substack{\varsigma \in S \\ \Im\varsigma > \gamma - N}} \sum_{\nu=0}^{N_\varsigma} \frac{q_{\varsigma, \nu}}{(\sigma - \varsigma)^{\nu+1}} + h(\sigma)$$

con h holomorfa en $\Im\sigma > \gamma - m$. La transformada inversa de Mellin lleva a

$$\omega u = \sum_{\substack{\varsigma \in S \\ \Im\varsigma > \gamma - m}} \sum_{\nu=0}^{N_\varsigma} \frac{-iq_{\varsigma, \nu}}{\nu!} x^{i\varsigma} \log^\nu x + \frac{1}{2\pi} \int_{\Re\sigma = \gamma - m + \varepsilon} x^{i\sigma} h(\sigma) d\sigma$$

con cualquier $\varepsilon > 0$ en la integral. Denotemos

$$u_0 = \sum_{\substack{\varsigma \in S \\ \Im\varsigma > \gamma - m}} \sum_{\nu=0}^{N_\varsigma} \frac{-iq_{\varsigma, \nu}}{\nu!} x^{i\varsigma} \log^\nu x.$$

El análisis en la prueba del lema lleva a que $Pu_0 = \mathcal{O}(x^{-\gamma+m-\varepsilon})$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Si $S \cap \{\sigma : \Im\sigma = \gamma - m\} = \emptyset$ entonces uno puede probar que $Pu_0 = \mathcal{O}(x^{-\gamma+m+\delta})$ con $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Si esa intersección no es vacía, uno puede añadir a u_0 un término extra de la forma

$$\sum_{\substack{\varsigma \in S \\ \Im\varsigma = \gamma - m}} \sum_{\nu=0}^{N_\varsigma} \frac{-iq_{\varsigma, \nu}}{\nu!} x^{i\varsigma} \log^\nu x$$

para obtener que P aplicado a la expresión resultante es de orden $\mathcal{O}(x^{-\gamma+m+\delta})$. Redefiniendo u_0 si es necesario para incluir esta corrección, tendremos que $\omega Pu_0 \in x^{-\gamma+m} L_b^2(\mathbb{R}_+)$ y por lo tanto

$$A\omega u_0 \in x^{-\gamma} L_b^2(\mathbb{R}_+)$$

El error $u_1 = \omega u - \omega u_0$ también pertenece a \mathcal{D}_{\max} , pero porque tiene transformada de Mellin holomorfa en $\Im\sigma > \gamma - m$ (resulta de analizar el término con h y la posible corrección), es mejor que u_0 : existe una sucesión $\varphi_{\nu, \nu=1}^\infty$ tal que $\varphi_\nu u \rightarrow u_1$ y $A\varphi_\nu \rightarrow A(u - u_0)$ (ambos límites en $x^{-\gamma} L_b^2(\mathbb{R}_+)$) cuando $\nu \rightarrow \infty$. Para probar esto necesitamos tecnología que no hemos desarrollado aún en estas notas (ver por ejemplo Gil y Mendoza [21]).

Terminamos la sección conectando con operadores diferenciales ordinarios en $\overline{\mathbb{R}}_+$ sin singularidad en 0 (operadores elípticos “clásicos”):

$$A = \sum_{k=0}^m a_k D_x^k$$

con $a_k \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Definimos $P = x^m A$ de manera de tener $A = x^{-m} P$ como antes, y tratamos de entender P como b -operador. La fórmula

$$(4.4) \quad x^k D_x^k = \wp_k(xD_x) \text{ con } \wp_k(\sigma) = \sigma(\sigma + i) \dots (\sigma + i(k - 1))$$

es fácil de probar (los coeficientes de este polinomio están relacionados con los números de stirling). Con ella,

$$P = \sum_{k=0}^m a_k x^{m-k} \wp_k(xD_x),$$

por lo tanto el polinomio P_0 en la Proposición 4.1 es $a_m(0)\wp_m(\sigma)$. Como $a_m(0) \neq 0$, el conjunto $\text{spec}_b(P)$ es $\{0, -i, -2i, \dots, -(m-1)i\}$, el conjunto S_0 es $\{-ik : -k < \gamma\} \cap \text{spec}_b(P)$, y

$$S = \{-ik : k \in \mathbb{Z}_0, k < \gamma, \exists \ell \in \mathbb{N}_0 \text{ s.t. } k + \ell \in S_0\}.$$

Según la proposición, si $Pu = f$ con f de clase C^∞ en $\overline{\mathbb{R}}_+$ y $f = 0$ a orden infinito en $x = 0$, entonces u tiene una expansión en $x^\ell \log^\nu x$. Un análisis más detallado en este caso muestra que todo los polos de $\mathcal{M}(\omega u)$ son simples, así que en realidad no hay factores logarítmicos en la expansión de u . En general, la expansión comienza con la primera potencia no-negativa $> \gamma$. Si γ es suficientemente negativo S_0 , y por lo tanto S , son vacíos, y $\mathcal{M}(\omega u)$ es entera. De esto resulta que u se anula a orden infinito en $x = 0$. También si u tiene datos de frontera nulos ($D_x^\ell u(0) = 0, \ell = 0, \dots, m-1$) (y $f = 0$ a orden infinito en $x = 0$) concluimos que $\mathcal{M}(\omega u)$ es entera y por lo tanto que u se anula a orden infinito en $x = 0$. Con esta técnica, incluso si $f = 0$ solo esto (y la regularidad) podemos concluir. En este respecto la teoría de ecuaciones ordinarias usual es más refinada que la teoría que obtenemos usando solo transformada de Mellin.

5. Valores de frontera: en general

Probaremos ahora la Proposición 3.2. En el caso de \mathcal{M} la definición de transformada de Mellin sigue siendo unidimensional, una integración cerca de la frontera a lo largo de las fibras de una vecindad tubular de la frontera de \mathcal{M} .

Recordemos el contexto. \mathcal{X} es una variedad compacta (sin borde), $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$ es una subvariedad de \mathcal{X} de la misma dimensión, con borde \mathcal{Y} . La densidad en \mathcal{M} será de la forma

$$\mathbf{m}_b = \frac{1}{x} \mathbf{m}$$

con \mathbf{m} una densidad en \mathcal{X} (restringida a \mathcal{M} para definir \mathbf{m}_b). El espacio base es L^2 respecto a la medida \mathbf{m}_b . La notación, como la que ya usamos, es $L_b^2(\mathcal{M})$ (o $L_b^2(\mathcal{M}; E)$ si se trata de secciones de un fibrado $E \rightarrow \mathcal{M}$, pero para simplificar la notación omitiremos E). Consideramos dadas la función $x : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ como

en (2.3) y el campo vectorial (2.4) tales que $Xx = 1$ cerca de \mathcal{Y} . Los espacios $x^{-\gamma}L_b^2(\mathcal{M})$ se definen como antes, con la norma

$$\|u\|_{x^{-\gamma}L_b^2} = \|x^\gamma u\|_{L_b^2}.$$

La relación entre $L^2(\mathcal{M}, \mathbf{m})$ y estos espacios es

$$L^2(\mathcal{M}, \mathbf{m}) = x^{-1/2}L_b^2(\mathcal{M}).$$

En efecto,

$$\int_{\mathcal{M}} |u|^2 d\mathbf{m} = \int_{\mathcal{M}} |x^{1/2}u|^2 d\mathbf{m}_b$$

muestra que $u \in L^2(\mathcal{M}) \iff u \in x^{-1/2}L_b^2(\mathcal{M})$ y que $\|u\|_{L^2} = \|u\|_{x^{-1/2}L_b^2}$.

Definimos la vecindad tubular tomando ventaja del campo vectorial X . Usando la compacidad de \mathcal{Y} obtenemos un número $\varepsilon > 0$ tal que para cada $q \in \mathcal{Y}$, la curva integral $\psi(t, q)$ de X con $\psi(0, q) = q$ existe para $|t| < \varepsilon$ y el mapa $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ definido por ψ es un difeomorfismo. Podemos suponer ε tan pequeño que $Xx = 1$ en la imagen de $[0, \varepsilon) \times \mathcal{Y}$ por ψ , y por lo tanto esta imagen es el conjunto $\mathcal{U} = \{p \in \mathcal{M} : x(p) < \varepsilon\}$. Esta es una vecindad tubular de \mathcal{Y} en \mathcal{M} . Como ψ es un difeomorfismo $[0, \varepsilon) \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$, cada punto p en \mathcal{U} corresponde a un único $(t, q) \in [0, \varepsilon) \times \mathcal{Y}$. Escribimos $\pi(p) = q$ y notamos que $t = x(p)$.

La densidad \mathbf{m}_b transferida a $[0, \varepsilon) \times \mathcal{Y}$ tiene la forma $f \frac{dx}{x} \otimes \pi^* \mathbf{m}_Y$, en donde \mathbf{m}_Y es una densidad determinada por \mathbf{m}_b y f es una función de clase C^∞ en \mathcal{U} con $f = 1$ en \mathcal{Y} .

Tomamos ahora $\omega \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con soporte en $|t| < \varepsilon$ y $\omega(t) = 1$ cerca de 0. La restricción a \mathcal{M} de la composición $\omega \circ x$ (escribimos $\omega(x)$, a veces simplemente ω) tiene soporte en \mathcal{U} .

En el caso escalar, si $\varphi \in C^\infty(\mathcal{M})$, definimos $\mathcal{M}(\varphi)$ por

$$\mathcal{M}(\varphi)(p, \sigma) = \int_{x>0} x^{-i\sigma} \varphi(x, q) \omega(x) f(x, q) \frac{dx}{x}$$

con $\Im\sigma > 1/2$ para asegurar integrabilidad. En otras palabras, esta es la transformada de Mellin a lo largo de las fibras del mapa π . Estamos incluyendo la función ω como parte de la definición de \mathcal{M} .

En el caso de secciones de un fibrado vectorial $E \rightarrow \mathcal{M}$ con métrica Hermítica h , tomamos una conexión auxiliar ∇ que preserva la métrica. Tomamos un marco de referencia, η_1, \dots, η_r , de E en un entorno $\mathcal{V} \subset \mathcal{Y}$ de $q_0 \in \mathcal{Y}$. Extendemos este marco a uno, denotado igual, en $\pi^{-1}(\mathcal{V})$ usando transporte paralelo a lo largo de las curvas integrales de X , o sea, $\nabla_X \eta_j = 0$. Si ϕ es una sección de clase C^∞ de E sobre $\pi^{-1}(\mathcal{V})$, entonces $\phi = \sum \varphi_j \eta_j$ con ciertas funciones φ_j , y definimos

$$\mathcal{M}(\phi)(p, \sigma) = \sum_j \mathcal{M}(\varphi_j)(p, \sigma) \eta_j(p),$$

de nuevo con $\Im\sigma > 1/2$.

Si $u \in x^{-\gamma}L_b^2(\mathcal{M}; E)$, entonces $\mathcal{M}(\omega u) \in L^2((\mathbb{R} + i\gamma) \times \mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}})$, $\mathcal{M}(\omega u)(q, \sigma)$ es holomorfa en $\Im\sigma > \gamma$, y

$$(\omega u)(\psi(x, p)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Im\sigma=\gamma} x^{i\sigma} \mathcal{M}(\omega u)(\sigma, p) d\sigma.$$

Supongamos ahora que A es un operador diferencial elíptico (hasta la frontera) definido en \mathcal{M} con coeficientes de clase C^∞ hasta la frontera. Para aligerar la notación supondremos que A es un operador escalar. Cerca de cualquier punto $p_0 \in \mathcal{Y}$, en coordenadas x, y_1, \dots, y_{n-1} ,

$$A = \sum_{k+|\alpha|\leq m} a_{k,\alpha}(x, y) D_x^k D_y^\alpha$$

con $a_{k,\alpha}$ de clase C^∞ hasta $x = 0$. La elipticidad es la condición

$$\sum_{k+|\alpha|=m} a_{k,\alpha}(x, y) \xi^k \eta^\alpha \text{ es invertible si } (\xi, \eta) \neq 0.$$

En particular, tomando $\eta = 0$ y $x = 0$ tenemos que

$$(5.1) \quad a_{k,\alpha}(0, y) \text{ es invertible.}$$

Escribimos $P = x^m A$. En coordenadas x, y_1, \dots, y_{n-1} cerca de algún punto en $\partial\mathcal{M}$,

$$P = \sum_{k+|\alpha|\leq m} x^{m-k} a_{k,\alpha}(x, y) \wp_k(x D_x) D_y^\alpha$$

con los \wp_k como en (4.4). Usaremos también la expansión de Taylor en $x = 0$ a primer orden del coeficiente a_m de P para obtener

$$(5.2) \quad P = a_{m,0}(0, y) \wp_m(x D_x) + x a_{m,0}^{(1)}(x, y) \wp_m(x D_x) + \sum_{\substack{k+|\alpha|\leq m \\ k < m}} x^{m-k} (a_{k,\alpha}(0, y) + x a_{k,\alpha}^{(1)}(x, y)) \wp_k(x D_x) D_y^\alpha$$

La segunda línea es xQ donde Q es un operador diferencial de orden m definido cerca de $x = 0$.

Tomemos ahora $u \in x^{-1/2}L_b^2(\mathcal{M})$ tal que $Au = f$ con $f \in x^{-1/2}L_b^2(\mathcal{M})$. Esto es, $u \in \mathcal{D}_{\text{máx}}$. Como A es elíptico, $u \in H_{\text{loc}}^m(\overset{\circ}{\mathcal{M}})$, lo cual quiere decir que $\varphi u \in H^m(\mathcal{M})$ si $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{M})$. Escogemos $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$. Entonces $(1 - \omega(x))u \in H^m(\mathcal{M})$, y por lo tanto $A(1 - \omega)u \in x^{-1/2}L_b^2(\mathcal{M})$ y deducimos que $\omega u \in \mathcal{D}_{\text{máx}}$. Habiendo arribado a este punto, podemos tomar la trasformada de Mellin de ωu . También podemos calcular la trasformada de $x^m Au$ (y de Au , pero ese lo dejamos de lado). Como $A\omega u \in x^{-1/2}L_b^2(\mathcal{M})$, $\mathcal{M}(Pu)(y, \sigma) = \mathcal{M}(h)(y, \sigma)$ es holomorfa para $\Im\sigma > 1/2 - m$ y $\mathcal{M}(Qu)(y, \sigma)$ es holomorfa en $\Im\sigma > 1/2$. Usando la descomposición de P en (5.2)

$$\mathcal{M}(Pu)(y, \sigma) = a_{m,0}(0, y) \wp_m(\sigma) \mathcal{M}(u) + \mathcal{M}(xQu)(y, \sigma)$$

Pero

$$\mathcal{M}(xQu)(y, \sigma) = \mathcal{M}(Qu)(y, \sigma + i)$$

es holomorfa en $\Im\sigma > 1/2 - 1$. Lo cual dice que

$$(5.3) \quad a_{m,0}(0, y)\wp_m(\sigma)\mathcal{M}(u) = \mathcal{M}(h)(y, \sigma) - \mathcal{M}(Qu)(y, \sigma + i)$$

es holomorfa en $\Im\sigma > 1/2 - 1$, y que $\wp_m(\sigma)\mathcal{M}(u)$ es meromorfa en $\Im\sigma > 1/2 - 1$ en ese conjunto (y holomorfa en $\Im\sigma > 1/2$). Pero entonces el lado derecho en (5.3) es meromorfo en $\Im\sigma > 1/2 - 2$, y por lo tanto el el lado izquierdo, de lo cual concluimos, gracias a (5.1), que $\wp_m(\sigma)\mathcal{M}(u)$ es meromorfo en $\Im\sigma > 1/2 - 2$. Continuando de esta manera (inducción) encontramos que $\wp_m(\sigma)\mathcal{M}(u)$ es meromorfa en $\Im\sigma > 1/2 - m$. Después de esto no podemos concluir nada porque no hay garantía que $\mathcal{M}(h)(y, \sigma)$ sea holomorfa para valores de σ con $\Im\sigma \leq 1/2 - m$.

Los polos de $\mathcal{M}(u)(y, \sigma)$ son los ceros de $\wp_m(\sigma)$,

$$0, -i, -2i, \dots, -(m-1)i.$$

En este proceso hemos dividido por $a_{m,0}(0, y)\wp_k(\sigma)$ un número de veces lo cual lleva a la presunción que $\mathcal{M}(u)(y, \sigma)$ tiene polos de orden más alto que 1. Sin embargo, esto no es así. Los demás términos en P contienen factores $\wp_{m-k}(xD_x)$ que cancelan los excesivos polos, con el resultado final que $\mathcal{M}(u)(y, \sigma)$ solo tiene polos simples.

PROPOSICIÓN 5.4. *Si $u \in \mathcal{D}_{\text{máx}}$, entonces $\mathcal{M}(u)(y, \sigma)$ es, para cada y , holomorfa en $\{\sigma : \Im\sigma > 1/2\}$ y meromorfa en $\{\sigma : \Im\sigma > 1/2 - m\}$ con polos simples en los ceros de $\wp_m(\sigma)$*

Los residuos de $\mathcal{M}(u)(y, \sigma)$ son proporcionales a los coeficientes de Taylor de u a lo largo de $x = 0$.

Podemos decir algo más sobre la regularidad de $u \in \mathcal{D}_{\text{máx}}$ gracias al Teorema IX.3.3 (ver (IX.3.2)), porque $P = x^m A$ es un operador e -elíptico (ver la Sección IX.3 y el argumento en conexión con X.2.1)

Si $u \in L^2(\mathcal{M}; E)$ y $Au \in L^2(\mathcal{M}; F)$, entonces para cualquier entero $0 \leq k \leq m$ y cualesquiera campos vectoriales $X_1, \dots, X_k \in C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$, $k \leq m$, que se anulan a lo largo de \mathcal{Y} ,

$$X_1, \dots, X_k u \in L^2(\mathcal{M}; E).$$

Esto implica la regularidad de u en el interior de \mathcal{M} , la aserción $u \in H_{\text{loc}}^m(\mathcal{M}; E)$. También implica que $x^k u \in H^k(\mathcal{M}; E)$, porque la aplicación de a lo sumo k campos vectoriales arbitrarios a $x^k u$ produce un elemento de $L^2(\mathcal{M}; E)$. Esto implica que $\mathcal{M}(u)(\sigma)$, como sección de $E_{\mathcal{Y}}$, tiene regularidad de Sobolev de orden k si $\Im\sigma = k + 1/2$, porque

$$(5.6) \quad \mathcal{M}(x^k u)(\sigma) = \mathcal{M}(u)(\sigma + ik)$$

Por interpolación,

$$\mathcal{M}(u)(\sigma) \in H^{\Im\sigma-1/2}(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}) \text{ si } 1/2 \leq \Im\sigma \leq m$$

Las fórmulas que usamos para obtener la extensión meromorfa disminuyen regularidad en 1 cada vez que son usadas. De esto deducimos la validez de (5.6) para $1/2 - m < \Im\sigma < 1/2 + m$ siempre y cuando σ no sea un polo de $\mathcal{M}(u)$. El producto $(\sigma + ik)\mathcal{M}(u)(\sigma)$ tiene la misma regularidad que $\mathcal{M}(u)(\sigma)$ fuera de los polos. Tomando $0 \leq k \leq m - 1$, el límite

$$\lim_{\substack{\sigma \rightarrow -ik \\ \Im\sigma = -k}} (\sigma + ik)\mathcal{M}(u)(\sigma)$$

existe.

Esto prueba:

$$\text{Res}(\mathcal{M}(u); -ik) \in H^{-1/2-k}(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}).$$

No es posible probar sin más información que la regularidad es mejor que esto. Pero sí sabemos que $u \in H^m(\mathcal{M})$, entonces $\text{Res}(\mathcal{M}(u); -ik)$ es un elemento de $H^{m-1/2-k}(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}})$, porque los residuos son las trazas excepto por factores numéricos.

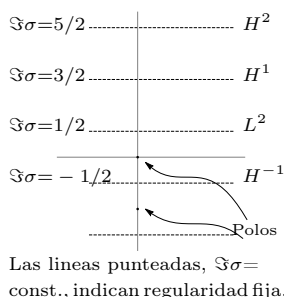
Usando (3.5), reconstruimos las trazas de u hasta orden $m - 1$ como el polinomio

$$-i \sum_{\ell=0}^{m-1} \text{Res}(\mathcal{M}(u)(y); -\ell)x^{\ell}$$

Si u es suficientemente regular hasta el borde, este es el comienzo de su expansión de Taylor en la variable normal. Las condiciones de frontera son condiciones sobre los coeficientes de este polinomio, o, si uno quiere, sobre el polinomio mismo.

6. Problemas de frontera clásicos

Continuamos con una variedad \mathcal{X} arbitraria, densidad suave \mathfrak{m} , fibrados vectoriales $E, F \rightarrow \mathcal{X}$ con métrica Hermitiana y una región $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$ compacta con frontera \mathcal{Y} de clase C^∞ ; esta frontera es una variedad cerrada (compacta sin borde). Fijamos una función definidora de \mathcal{Y} , positiva en $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ y un campo vectorial X con $Xx = 1$ cerca de \mathcal{Y} .



Tomamos un operador diferencial elíptico $A \in \text{Dif}^m(\mathcal{X}; E, F)$.

Si $u \in H^m(\mathcal{M}; E)$, podemos organizar las trazas de u hasta orden $m - 1$ en conjunto como una sección del fibrado $E_{\mathcal{Y}}^{\oplus m} = \bigoplus_{k=0}^{m-1} E_{\mathcal{Y}}$, donde $E_{\mathcal{Y}}$ es notación para la parte de E sobre \mathcal{Y} . Escribimos

$$\gamma u = \begin{bmatrix} \gamma_0 u \\ \vdots \\ \gamma_{m-1} u \end{bmatrix}.$$

Una condición de borde pseudolocal sobre u es una condición sobre γu de la forma

$$(6.1) \quad \mathfrak{B} \gamma u = \sum_{\ell=0}^{m-1} \mathfrak{B}_{\ell} \gamma_{\ell} u = g, \quad \mathfrak{B}_{\ell} \in \Psi^{\nu-\ell}(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}, G),$$

donde $G \rightarrow \mathcal{Y}$ es otro fibrado vectorial sobre \mathcal{Y} , y $g \in H^{m-1/2-\nu}(\mathcal{Y}; G)$. Si $u \in H^m(\mathcal{M}; E)$, entonces, como ya vimos (Corolario 2.5), $\gamma_{\ell} u \in H^{m-\ell-1/2}(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}})$, consecuentemente $\mathfrak{B}_{\ell} \gamma_{\ell} u \in H^{m-1/2-\nu}(\mathcal{Y}; G)$. El número ν no es importante: podemos componer cada \mathfrak{B}_{ℓ} a la izquierda con un operador pseudodiferencial invertible de orden $-\nu$ para cambiar ν a lo que nos convenga. Supondremos entonces que $\nu = m - 1/2$,

$$(6.2) \quad \mathfrak{B}_{\ell} \in \Psi^{m-\ell-1/2}(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}, G)$$

y que $g \in H^0(\mathcal{Y}; G)$.

El problema de frontera clásico para $A \in \text{Dif}^m(\mathcal{M}; E, F)$ con condición de frontera dada por \mathfrak{B} es:

$$(6.3) \quad \text{Dadas } f \in L^2(\mathcal{M}; F) \text{ y } g \in H^{m-\nu-1/2}, \text{ encontrar } u \in H^m(\mathcal{M}; E) \text{ tal que}$$

$$\begin{cases} Au = f & \text{en } \mathcal{M} \\ \mathfrak{B} \gamma u = g & \text{sobre } \mathcal{Y}. \end{cases}$$

Los operadores \mathfrak{B}_{ℓ} pueden ser en particular operadores diferenciales en lugar de pseudodiferenciales: $\mathfrak{B}_{\ell} \in \text{Dif}^{\nu-\ell}(\mathcal{M}; E_{\mathcal{Y}}, G)$, pero supondremos que son pseudodiferenciales para mantener, por pura conveniencia, la convención que $\nu = m - 1/2$. Por ejemplo, en el caso del Laplaciano, $m = 2$, las trazas relevantes de una solución son $\gamma_0 u$ y $\gamma_1 u$. Con $\mathfrak{B}_0 = I$ y $\mathfrak{B}_1 = 0$ la condición de frontera es la condición de Dirichlet, mientras que $\mathfrak{B}_0 = 0$ y $\mathfrak{B}_1 = I$ lleva a la condición de Neumann. Otra condición clásica es $\mathfrak{B}_0 = a$ y $\mathfrak{B}_1 = b$ con $a, b \neq 0$, posiblemente funciones en \mathcal{Y} y no meramente constantes.

El problema principal es probar que hay solución en el sentido óptimo siguiente. El operador

$$H^m(\mathcal{M}; E) \ni u \mapsto \begin{bmatrix} Pu \\ \mathfrak{B}\gamma u \end{bmatrix} \in \begin{matrix} L^2(\mathcal{M}; F) \\ \oplus \\ H^{m-\nu-1/2}(\mathcal{Y}; G) \end{matrix}$$

tiene núcleo de dimensión finita, y rango cerrado de codimensión finita. En otras palabras, es Fredholm.

La estrategia para confrontar el problema es usar una parametriz E de A para convertir el problema en \mathcal{M} en uno puramente en \mathcal{Y} . Extendemos f al complemento de \mathcal{M} como cero, denotado χf , donde χ es la función característica de \mathcal{M} (esa extensión ya es suficientemente buena). Si $BA = I - R_I$, $AB = I - R_D$ en \mathcal{X} con operador integrales R_I , R_D con núcleo de clase C^∞ , restamos $B\chi f$ de la solución que buscamos. Esto convierte el problema original en uno donde el lado derecho de la ecuación diferencial es 0: buscamos $u' \in H^m(\mathcal{M}; E)$ ($u' = u - B\chi f$) tal que

$$(6.3') \quad \begin{cases} Au' = 0 & \text{en } \mathring{\mathcal{M}} \\ \mathfrak{B}u' = g' & \text{sobre } \mathcal{Y} \end{cases}$$

con $g' = g - \mathfrak{B}\gamma B\chi f$. Entonces $u = \mathring{\tau}(u' + E\chi f)$ es la solución del problema original. Aquí $\mathring{\tau}$ denota la operación de restricción a $\mathring{\mathcal{M}}$. El lado derecho en $Au = 0$ no es realmente 0, sino $R_D\chi f$. Esto no importa porque R_D es suavizante. Notemos que como $\chi f \in L^2(\mathcal{M}; F)$, $B\chi f \in H^m$ y por lo tanto $\gamma B\chi f$ está bien definido.

7. El proyector de Calderón

Continuamos con la notación de la sección anterior. Estamos interesados en el problema (6.3'); escribimos u y g en lugar de u' y g' . Las siguientes secciones están basadas en el Capítulo 5 de [13]. Extendemos u , la solución putativa de (6.3') como 0 al complemento de \mathcal{M} y denotamos la extensión como χu (si u esta definida en un entorno de \mathcal{M} , vemos χ como la función característica de \mathcal{M}). Calculamos también Au , un elemento de $C^\infty(\mathcal{M}; F)$ (o de $L^2(\mathcal{M}; F)$); su extensión como 0 es χAu . La diferencia

$$(7.1) \quad A(\chi u) - \chi Au = \tilde{A}\gamma u$$

depende solo de los valores de borde de u y sus derivadas normales hasta orden $m - 1$, y de hecho es un operador de la forma

$$(7.2) \quad \tilde{A} : C^\infty(\mathcal{Y}; E^{\oplus m}) \ni v = \begin{bmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{m-1} \end{bmatrix} \mapsto \sum_{k+\ell \leq m-1} D_x^k \delta \otimes \tilde{A}_{k\ell} v_\ell \in C^{-\infty}(\mathcal{M}; F)$$

donde $\tilde{A}_{k\ell} \in \text{Dif}^{m-k-\ell-1}(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}, F_{\mathcal{Y}})$. En esta fórmula,

$$\delta = X\chi$$

es el resultado de aplicar el campo vectorial X a la función χ en el sentido distribucional.

Si $u \in H^m(\mathcal{M}; E)$, $\tilde{A}_{k\ell}\gamma_{\ell}u \in H^{\ell+1/2}(\mathcal{Y}; F)$. Notemos que

$$C^{\infty}(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}^{\oplus m}) = \bigoplus_{k=0}^{m-1} C^{\infty}(\mathcal{Y}, E_{\mathcal{Y}})$$

Supongamos que $Au = 0$ y apliquemos la parametriz B a ambos lados de (7.1). Obtenemos

$$\chi u - R_{\text{I}}\chi u = B\tilde{A}\gamma u.$$

Restringiendo a \mathcal{M} y reorganizando,

$$(7.3) \quad u = \mathfrak{r}R_{\text{I}}\chi u + \mathfrak{r}B\tilde{A}\gamma u.$$

Esta fórmula da u si conocemos γu — módulo el término $\mathfrak{r}R_{\text{I}}\chi u$ el cual consideramos como un error de clase C^{∞} y por lo tanto ignoramos. En la misma fórmula, aplicando γ , obtenemos

$$(7.4) \quad \gamma u = \gamma \mathfrak{r}R_{\text{I}}\chi u + \gamma \mathfrak{r}B\tilde{A}\gamma u$$

El operador

$$\mathfrak{C} = \gamma \mathfrak{r}B\tilde{A} : C^{\infty}(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}^{\oplus m}) \rightarrow C^{\infty}(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}^{\oplus m})$$

es el proyector de Calderón.

Un comentario antes de continuar. En la definición de \mathfrak{C} , $\tilde{A}v$ es una distribución con soporte en \mathcal{Y} , en particular, si no es cero, no es un elemento de $L^2(\mathcal{X}; F)$ (en general es un elemento de $H^s(\mathcal{M}; F)$ con $s < -n/2 - m + 1$ si $v \in C^{\infty}(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}^{\oplus m})$). Por lo tanto $B\tilde{A}v$ no necesariamente pertenece a $H^m(\mathcal{X}; E)$, por ejemplo, y no está claro que tenga trazas. Sin embargo, tiene:

PROPOSICIÓN 7.5 (Chazarain-Piriou [13, Capítulo 5, Teoremas 2.4 (i) y 2.5]). *Si B es la parametriz de un operador diferencial elíptico y w es una distribución con soporte en \mathcal{Y} , o es la extensión por 0 de una función C^{∞} en \mathcal{M} , entonces Bw tiene trazas de todo orden en \mathcal{Y} desde \dot{M} (y desde el complemento de \mathcal{M}).*

La hipótesis que B es una parametriz de un operador diferencia asegura que la expansión del símbolo total de b en suma asintótica de términos homogéneos consiste de términos que son expresiones racionales en la variable ξ .

En base a la proposición, \mathfrak{C} está bien definido.

LEMA 7.6. *El proyector de Calderón es una proyección pseudodiferencial: esto es, $\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{C}$ es un operador integral con núcleo de clase C^{∞} .*

DEMOSTRACIÓN. Que \mathfrak{C} es una matriz de operadores pseudodiferenciales es consecuencia de la Proposición 7.7, que no probaremos. Lo que sí probaremos es que \mathfrak{C} es esencialmente una proyección, calculando directamente partiendo de $\mathfrak{C}^2 = \gamma \mathfrak{t} \tilde{B} \tilde{A} \gamma \mathfrak{t} \tilde{B} \tilde{A}$. Expandimos $\tilde{A} \gamma \mathfrak{t} \tilde{B}$ de acuerdo a la definición de \tilde{A} :

$$\tilde{A} \gamma \mathfrak{t} \tilde{B} = A \chi \mathfrak{t} \tilde{B} - \chi A \mathfrak{t} \tilde{B}.$$

En esta fórmula, el término $\chi A \mathfrak{t} \tilde{B}$ significa calcular $A \mathfrak{t} \tilde{B}$ en $\mathring{\mathcal{M}}$, luego extender. Como A es un operador diferencial, es local y $A \mathfrak{t} = \mathfrak{t} A$. Entonces $A \mathfrak{t} \tilde{B} = \mathfrak{t} A \tilde{B} = \mathfrak{t} (I - R_D)$, y finalmente $\chi A \mathfrak{t} \tilde{B} = \chi (I - R_D)$. El término $A \chi \mathfrak{t} \tilde{B}$ es simplemente $A \chi B$, así,

$$\tilde{A} \gamma \mathfrak{t} \tilde{B} = A \chi B - \chi (I - R_D).$$

Aplicando esto a \tilde{A} obtenemos

$$\tilde{A} \gamma \mathfrak{t} \tilde{B} \tilde{A} = A \chi B \tilde{A} - \chi (I - R_D) \tilde{A}.$$

En el segundo término, $\chi I \tilde{A}$ significa mirar \tilde{A} en $\mathring{\mathcal{M}}$, y extender por 0. Como \tilde{A} produce deltas y derivadas en la frontera, es 0 en el interior. Por lo tanto $\chi I \tilde{A} = 0$. Y $R_D \tilde{A}$ toma cualquier sección distribucional de $E_y^{\oplus m}$ y produce una sección suave de F que podemos multiplicar por χ sin ningún problema. Aplicando ahora B a la izquierda en ambos lados obtenemos

$$\begin{aligned} B \tilde{A} \gamma \mathfrak{t} \tilde{B} \tilde{A} &= B A \chi B \tilde{A} + B \chi R_D \tilde{A} \\ &= (I - R_I) \chi B \tilde{A} + B \chi R_D \tilde{A} \\ &= \chi B \tilde{A} + (B \chi R_D \tilde{A} - R_I \chi B \tilde{A}) \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando $\gamma \mathfrak{t}$ a la izquierda en el primer y ultimo miembros de esta cadena de desigualdades llegamos a

$$\gamma \mathfrak{t} \tilde{B} \tilde{A} \gamma \mathfrak{t} \tilde{B} \tilde{A} = \gamma \mathfrak{t} \chi B \tilde{A} + \gamma \mathfrak{t} (B \chi R_D \tilde{A} - R_I \chi B \tilde{A})$$

El primer término a la derecha es \mathfrak{C} , el segundo es un operador integral con núcleo de clase C^∞ . \square

Gracias a la estructura de $E_y^{\oplus m}$ podemos ver \mathfrak{C} como una matriz $m \times m$ de operadores $\mathfrak{C}_{k,\ell} : C^\infty(\mathcal{Y}; E_y) \rightarrow C^\infty(\mathcal{Y}; E_y)$, $k, \ell = 0 \dots, m-1$. Usando la descripción de \tilde{A} en (7.2),

$$\mathfrak{C} v = \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k \mathfrak{t} \tilde{B} \sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-\ell-1} D_x^j \delta \otimes \tilde{A}_{j\ell} v_\ell,$$

y de esto resulta

$$\mathfrak{C}_{k,\ell}(v) = \gamma_k \mathfrak{t} \tilde{B} \sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-\ell-1} D_x^j \delta \otimes \tilde{A}_{j\ell} v.$$

Los operadores $\mathfrak{C}_{k,\ell}$ sin operadores pseudodiferenciales. Esto es consecuencia de

PROPOSICIÓN 7.7 (Chazarain-Piriou [13, Capítulo 5, Teorema 2.4 (ii)]).
Si $B \in \Psi^\mu(\mathcal{X}; F, E)$, entonces

$$C^\infty(\mathcal{Y}; F) \ni w \mapsto \gamma_0 B(\delta \otimes w)$$

es un operador pseudodiferencial, un elemento de $\Psi^{\mu+1}(\mathcal{Y}; F_{\mathcal{Y}}, E_{\mathcal{Y}})$.

COROLARIO 7.8. El operador $\mathfrak{C}_{k,\ell}$ es un operador pseudodiferencial de orden $k - \ell$.

8. La condición de Lopatinski-Shapiro

El proyector de Calderón es una matriz de operadores de varios órdenes. Para reducir las próximas cuentas al cálculo standard de operadores pseudodiferenciales, “arreglamos” \mathfrak{C} de manera que sea una matriz de operadores del mismo orden y consistente con su acción sobre columnas de secciones de varios órdenes. Sea Λ^s , para cada $s \in \mathbb{R}$, un operador pseudodiferencial invertible de orden s . Sea $\mathbf{\Lambda}$ la matriz con diagonal $\Lambda^{-m+\ell+1/2}$, $\ell = 0, \dots, m-1$:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Lambda^{-m+1/2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda^{-m+3/2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Lambda^{-1/2} \end{bmatrix}$$

Entonces $\mathbf{\Lambda}$ envía $L^2(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}^{\oplus m})$ en $\bigoplus_{\ell=0}^{m-1} H^{m-\ell-1/2}(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}})$, el dominio que queremos (y necesitamos) para \mathfrak{C} . Definimos $\mathfrak{C}' = \Lambda^{-1}\mathfrak{C}\mathbf{\Lambda}$. Las componentes de \mathfrak{C}' son

$$\mathfrak{C}'_{k,\ell} = \Lambda^{m-k-1/2}\mathfrak{C}_{k,\ell}\Lambda^{-m+\ell+1/2}$$

el cual vemos que es un operador pseudodiferencial de orden 0, gracias al Corolario 7.8.

Cambiamos también el operador \mathfrak{B} :

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}\mathbf{\Lambda}$$

Así, si $w \in C^\infty(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}^{\oplus m})$,

$$(8.1) \quad \mathfrak{B}'w = \sum_{\ell=0}^{m-1} \mathfrak{B}'_{\ell}w_{\ell}, \quad \mathfrak{B}'_{\ell} = \mathfrak{B}_{\ell}\Lambda^{-m+\ell+1/2} \in \Psi^0(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}, G),$$

La fórmula (7.3) produce la solución de (6.3') si γu satisface la condición de frontera. En esa fórmula, aplicando γ obtenemos (7.4), que ahora escribimos como

$$\gamma u = \gamma \mathfrak{r}R_1\chi u + \mathfrak{C}\gamma u.$$

Como $\gamma \mathfrak{r}R_1\chi u$ es suave independientemente del comportamiento de u , ignoramos ese término. La condición de frontera requiere $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\gamma u = g \in L^2(\mathcal{Y}; G)$.

Considerando γu como incógnita v , por ahora solo una distribución, un elemento de $C^{-\infty}(\mathcal{Y}; E_y^{\oplus m})$, la condición es

$$\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'w = g, \quad w = \Lambda^{-1}v.$$

Esta es una ecuación pseudodiferencial. La existencia de una solución v para cada g módulo errores en $C^\infty(\mathcal{M}; E)$ está garantizada por la existencia de una parametriz a la derecha: Si $\Omega \in \Psi^0(\mathcal{Y}; G, E_y^{\oplus m})$ es tal que

$$\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\Omega_D = I - \mathfrak{R}_D$$

con $\mathfrak{R} \in \Psi^{-\infty}(\mathcal{Y}; G)$, tomamos

$$v = \Lambda\Omega_D g, \quad u = \mathring{\mathfrak{t}}B\tilde{A}v.$$

Entonces $\mathfrak{B}\mathfrak{C}v = \mathfrak{B}\Lambda\Lambda^{-1}\mathfrak{C}\Lambda\Omega_D w = g$ y tenemos, en $\mathring{\mathcal{M}}$,

$$A\mathring{\mathfrak{t}}B\tilde{A}v = \mathring{\mathfrak{t}}AB\tilde{A}v = \mathring{\mathfrak{t}}(I - R_D)\tilde{A}v = -\mathring{\mathfrak{t}}R_D\tilde{A}\Lambda\Omega_D g \in C^\infty(\mathcal{M}; E)$$

y

$$\mathfrak{B}\gamma\mathring{\mathfrak{t}}B\tilde{A}v = \mathfrak{B}\mathfrak{C}\Lambda\Omega_D g = g - \mathfrak{R}_D g.$$

Una condición suficiente para la existencia de Ω_D es la sobreyectividad del símbolo de $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$. En este caso, el operador

$$(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}')(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}')^*$$

tiene símbolo biyectivo, esto es, es elíptico, y si \mathfrak{W} es una parametriz de este operador, entonces

$$\Omega_D = (\mathfrak{B}'\mathfrak{C}')^*\mathfrak{W}$$

es una parametriz de $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$.

Describimos ahora la condición de sobreyectividad del símbolo principal de $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ en términos topológicos.

Es inmediato que $\mathfrak{C}'^2 - \mathfrak{C}'$ es un operador en $\Psi^{-\infty}(\mathcal{Y}; E_y^{\oplus m})$. Esto implica, debido a la fórmula del símbolo principal de una composición (ver la Proposición III.8.4 para la versión local), que

$$\mathfrak{C}'(\xi) = \sigma(\mathfrak{C}')(\xi) : E_p^{\oplus m} \rightarrow E_p^{\oplus m}, \quad \xi \in \dot{T}^*\mathcal{Y}, \quad p = \pi(\xi)$$

es una proyección (esta vez exactamente): $\mathfrak{C}'^2 = \mathfrak{C}'(\xi)$. Esta proyección depende de manera C^∞ de $\xi \in \dot{T}^*\mathcal{Y}$, y como consecuencia, las imágenes

$$\Gamma_\xi = \sigma(\mathfrak{C}')(\xi)(E_p), \quad \xi \in \dot{T}^*\mathcal{Y}, \quad p = \pi(\xi)$$

son las fibras de un subfibrado vectorial

$$\Gamma \rightarrow \dot{T}^*\mathcal{Y}$$

de clase C^∞ del fibrado vectorial $\text{End}(\pi^*E_y^{\oplus m}) \rightarrow \dot{T}^*\mathcal{M}$ (ver el final de la sección II.10).

La condición de sobreyectividad de $\sigma(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}')$ es entonces la sobreyectividad de la restricción de $\sigma(\mathfrak{B}')(\xi)$ a $\Gamma_\xi \rightarrow G_p$ ($p = \pi(\xi)$) para cada $\xi \in \dot{T}^*\mathcal{Y}$. El homomorfismo

$$\mathfrak{b} = \sigma(\mathfrak{B}')|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow \pi^*G$$

es sobreyectivo en cada fibra.

Para unicidad—o al menos unicidad modulo un espacio de dimensión finita, suponemos inyectividad de \mathfrak{b} fibra por fibra. Si este es el caso,

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{b}(\xi) \circ \mathfrak{c}'(\xi) \\ (1 - \mathfrak{c}'(\xi)) \end{bmatrix} : E_p^{\oplus m} \rightarrow \begin{matrix} G_p \\ \oplus \\ E_p^{\oplus m} \end{matrix}, \quad p = \pi(\xi)$$

es inyectivo para todo $\xi \in \cdot\mathcal{Y}$. Este es el símbolo principal (¡de orden cero!) del operador pseudodiferencial

$$\mathfrak{P} = \begin{bmatrix} \mathfrak{B}' \circ \mathfrak{C}' \\ (1 - \mathfrak{C}') \end{bmatrix} \in \Psi^0(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}^{\oplus m}, G \oplus E_{\mathcal{Y}}^{\oplus m}).$$

En este case, la inyectividad del símbolo principal de \mathfrak{P} implica que $\mathfrak{P}^* \circ \mathfrak{P}$ es elíptico, y por lo tanto tiene una parametriz a la izquierda. Componiendo esa parametriz con \mathfrak{P}^* terminamos con una parametriz de \mathfrak{P} : Hay $\mathfrak{Q}_I \in \Psi^0(\mathcal{Y}; G \oplus E_{\mathcal{Y}}^{\oplus m}, E_{\mathcal{Y}}^{\oplus m})$ y \mathfrak{R}_I de orden $-\infty$ tal que

$$\mathfrak{Q}_I \circ \mathfrak{P} = I - \mathfrak{R}_I.$$

Supongamos que $u \in H^m(\mathcal{M}; E)$ resuelve (6.3') con $g' = 0$. Afirmamos que entonces

$$(8.2) \quad \mathfrak{P}\Lambda^{-1}\gamma u \in C^\infty(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}^{\oplus m}, G \oplus E_{\mathcal{Y}}^{\oplus m}).$$

En primer lugar,

$$\mathfrak{B}' \circ \mathfrak{C}' \Lambda^{-1} \gamma u = \mathfrak{B} \circ \mathfrak{C} \gamma u = g = 0$$

por hipótesis. En segundo lugar, $(I - \mathfrak{C}')\gamma u \in C^\infty(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}^{\oplus m})$ si $f = 0$, ya que si $f = 0$ podemos escribir (7.4) como

$$\gamma u - \mathfrak{C}'\gamma u = \gamma \mathfrak{r} R_I \chi u,$$

y el lado derecho siempre es un elemento de $C^\infty(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}^{\oplus m})$. De (8.2) obtenemos, por un lado,

$$\mathfrak{Q}_I \mathfrak{P} \Lambda^{-1} \gamma u \in C^\infty(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}^{\oplus m}),$$

por otro

$$\mathfrak{Q}_I \mathfrak{P} \Lambda^{-1} \gamma u - \mathfrak{R}_I u = \gamma u.$$

Como el lado izquierdo es de clase C^∞ , el lado derecho también lo es.

La condición de Lopatinski-Shapiro es la invertibilidad de \mathfrak{b} . Como vimos, la sobreyectividad de \mathfrak{b} implica existencia (modulo C^∞), mientras que la inyectividad implica unicidad módulo C^∞ .

Usando los operadores \mathfrak{Q}_I , \mathfrak{R}_I y la reducción de f arbitrario a $f = 0$ para ir de (6.3) a (6.3') obtenemos:

TEOREMA 8.3. *Si el problema (6.3) satisface la condición de Lopatinski-Shapiro, entonces*

$$(8.4) \quad H^m(\mathcal{M}; E) \ni u \mapsto \begin{bmatrix} Pu \\ \mathfrak{B}\gamma u \end{bmatrix} \in \begin{matrix} L^2(\mathcal{M}; F) \\ \oplus \\ H^{m-\nu-1/2}(\mathcal{Y}; G) \end{matrix}$$

es *Fredholm*.

La condición de Lopatinski-Shapiro es una una condición global.

9. La obstrucción de Atiyah-Bott

El proyector de Calderón para el problema de frontera (6.3) es un objeto determinado por A sin referencia a la condición de frontera. Por lo tanto, el subfibrado vectorial $\Gamma \rightarrow \dot{T}^*\mathcal{Y}$ de $\pi^*E_{\mathcal{Y}}^{\oplus m}$ cuyas fibra en ξ es $\sigma(\mathfrak{C}')(\xi)$ también es un objeto asociado directamente a A , sin referencia a la condición de frontera (la escogencia del operador Λ es inocua). La condición de Lopatinski-Shapiro, que

$$\mathfrak{b} = \sigma(\mathfrak{B}')|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow \pi^*G$$

es un isomorfismo, evidentemente implica que Γ es isomorfo a π^*G .

Por lo tanto, si A (siempre elíptico) es tal que Λ no es isomorfo a π^*G para ningún fibrado $G \rightarrow \mathcal{Y}$, entonces A no admite una condición de frontera que lleve a un problema bien planteado. Esta es la obstrucción de Atiyah-Bott.

Si la condición de Lopatinski-Shapiro no puede ser satisfecha, siempre es posible imponer una condición de frontera de carácter global pero no pseudolocal. Condiciones de este tipo se conocen como condiciones de Atiyah-Patodi-Singer.

Teoría de Hodge

1. El problema

La teoría de Hodge es un esquema general que establece, bajo ciertas condiciones, una relación entre la cohomología de un complejo elíptico y el espacio nulo de ciertos operadores asociados, llamados Laplacianos de Hodge. Hodge desarrolló su teoría en el contexto del complejo de de Rham. Los elementos esenciales no dependen del complejo en particular, solo de la elipticidad. Hoy en día llamamos teoría de Hodge a la teoría general. El marco general es el siguiente.

Un complejo de operadores diferenciales en una variedad \mathcal{X} (compacta o no, con o sin borde) consiste de fibrados vectoriales $E^q \rightarrow \mathcal{X}$, $q = 1, \dots, E^r$, y una sucesión de operadores diferenciales de primer orden (podría ser más general)

$$(1.1) \quad 0 \rightarrow C^\infty(\mathring{\mathcal{X}}; E^0) \xrightarrow{A_0} C^\infty(\mathring{\mathcal{X}}; E^1) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow C^\infty(\mathring{\mathcal{X}}; E^{r-1}) \xrightarrow{A_{r-1}} C^\infty(\mathring{\mathcal{X}}; E^r) \rightarrow 0$$

(usamos $C_c^\infty(\mathring{\mathcal{X}}; E^q)$ porque por ahora no excluimos la posibilidad de que \mathcal{X} tenga frontera no vacía) con la propiedad $A_{q+1} \circ A_q = 0$ para todo q . Esta condición es equivalente a pedir que la imagen, B_A^q , de A_{q-1} esté contenido en el espacio nulo, Z_A^q , de A_{q+1} . El problema fundamental es la determinación de la cohomología del complejo, esto es, los espacios

$$H_A^q = Z_A^q / B_A^q, \quad q = 0, \dots, r.$$

Hay varios puntos de vista acerca de la relevancia de estos espacios. Una, como obstrucción al problema analítico de la resolubilidad del problema

$$(1.2) \quad \text{Dada } f \in C^\infty(\mathcal{X}; E^{q+1}) \text{ con } A_{q+1}f = 0, \text{ hallar } u \in C^\infty(\mathcal{X}; E^q) \text{ tal} \\ \text{que } A_q u = f.$$

Al intentar encontrar una solución de la ecuación, notamos que si esta existe, entonces necesariamente $A_{q+1}f = 0$. Por esto esa condición se añade de entrada al planteamiento del problema. Claramente, la solución no existe si $f \notin B_q$, y por lo tanto, la no trivialidad de H^q es la obstrucción a la existencia de una solución del problema (1.2) para f arbitrario (con $A_{q+1}f = 0$). La no trivialidad

de H^q está ligada a propiedades topológicas de \mathcal{X} y aspectos analíticos a veces muy sutiles. En la relación con la topología de \mathcal{X} yace, desde otro punto de vista, la importancia de los espacios de cohomología.

En lo anterior el contexto fue cohomología en espacios de secciones de clase C^∞ . Pero también uno puede confrontar el problema en el sentido distribucional, cambiando los espacios $C^\infty(\mathcal{X}; E^q)$ por $C^{-\infty}(\mathcal{X}; E^q)$ obteniendo así otro complejo. Discutiremos cohomología en el contexto de espacios L^2 .

En general, la condición $A_{q+1} \circ A_q$ implica $\sigma(A_{q+1})(\xi) \circ \sigma(A_q)(\xi) = 0$ para todo ξ (solo $\xi \neq 0$ es relevante). Por lo tanto, para cada $\xi \in \dot{T}^* \setminus 0$ hay un complejo

$$0 \rightarrow E_x^0 \xrightarrow{\sigma(A_0)(\xi)} E_x^1 \rightarrow \dots \rightarrow E_x^{r-1} \xrightarrow{\sigma(A_{r-1})(\xi)} E_x^r \rightarrow 0, \quad x = \pi(\xi).$$

La elipticidad del complejo original es la propiedad que este complejo de símbolos es exacto para cada $\xi \in T^* \setminus 0$.

El caso más sencillo del Teorema de Hodge ocurre cuando \mathcal{X} es una variedad cerrada (esto es, compacta sin borde) y el complejo es elíptico. Fijando una densidad positiva en \mathcal{X} y productos Hermitianos en cada uno de los fibrados E^q , definimos espacios L^2 de secciones de esos fibrados y el adjunto formal A_q^* de A_q . Los Laplacianos del complejo son los operadores

$$\square_q = A_q^* A_q + A_{q-1} A_{q-1}^*$$

La elipticidad del complejo es equivalente a la elipticidad de cada uno de estos operadores (ver Proposición 4.1), por eso la nomenclatura.

TEOREMA 1.3 (Hodge). *En el contexto del párrafo anterior, H^q es canónicamente isomorfo a $\ker \square_q$.*

Para la demostración, ver la Sección 6 más abajo. Desde el punto de vista puramente en análisis global, el problema principal es la validez del teorema si \mathcal{X} no es cerrada.

2. Ejemplos: estructuras involutivas

Los dos complejos más comunes son el complejo de de Rham y el complejo de Dolbeault, ambos introducidos en el Capítulo II. Hay un esquema general, ver Treves [76], que incluye ambos y muchos otros de interés, como sigue. Suponemos dado un subfibrado involutivo $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\mathcal{X}$. El complejo es similar a los complejos de de Rham y Dolbeault en cuanto a que los fibrados vectoriales asociados son las potencias exteriores del fibrado dual de $\bar{\mathcal{V}}$ (usamos el dual del conjugado de \mathcal{V} por consistencia con la tradición en el caso de una variedad compleja \mathcal{X} , donde $\Lambda^{0,1}\mathcal{X}$ es el dual (más bien, isomorfo al dual) del conjugado de $T^{1,0}\mathcal{X}$), y a que los operadores están definidos de manera similar: definimos

$$\mathbb{D} : C^\infty(\mathcal{X}; \Lambda^q \bar{\mathcal{V}}^*) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; \Lambda^{q+1} \bar{\mathcal{V}}^*)$$

como sigue. Si $\phi \in C^\infty(\mathcal{X}; \wedge^q \bar{\mathcal{V}}^*)$ y X_0, \dots, X_q son campos vectoriales con valores en \mathcal{V} , esto es, elementos de $C^\infty(\mathcal{X}; \mathcal{V})$, entonces

$$(2.1) \quad \mathbb{D}\phi(X_0, \dots, X_{q+1}) = \frac{1}{q+1} \left(\sum_{0 \leq j \leq q} X_j \phi(X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_q) \right. \\ \left. + \sum_{0 \leq j < k \leq q} \phi([X_j, X_k], X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, \hat{X}_k, \dots, X_q) \right).$$

Recordemos que el $\hat{}$ indica que el ítem se omite. En esta fórmula, la involutividad de $\bar{\mathcal{V}}$ se usa en la segunda suma. En el caso de una función f , la definición lleva a

$$(\mathbb{D}f)(X) = Xf, \quad X \in C^\infty(\mathcal{X}; \bar{\mathcal{V}}),$$

lo cual dice que $\mathbb{D}f$ es el elemento de $\bar{\mathcal{V}}^*$ obtenido de df por restricción a $\bar{\mathcal{V}}$. Esto es, si $\iota : \bar{\mathcal{V}} \hookrightarrow \mathcal{CT}\mathcal{X}$ es la inclusión y $\iota : T^*\mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathcal{V}}^*$ el mapa dual, entonces

$$\mathbb{D}f = \iota^* df.$$

Probar que $\mathbb{D} \circ \mathbb{D} = 0$ exige algo de paciencia. Suponiendo este hecho, obtenemos el complejo

$$0 \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; \mathbb{C}) \xrightarrow{\mathbb{D}} C^\infty(\mathcal{X}; \wedge^1 \bar{\mathcal{V}}^*) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; \wedge^{r-1} \bar{\mathcal{V}}^*) \xrightarrow{\mathbb{D}} C^\infty(\mathcal{X}; \wedge^r \bar{\mathcal{V}}^*) \rightarrow 0$$

Este esquema incluye el complejo de de Rham, el complejo de Dolbeault (con $p = 0$ pero es fácil adaptarlo a p arbitrario), y los complejos CR. Estos últimos son generalizaciones y abstracciones de un tipo de complejo que aparece naturalmente en hipersuperficies reales en \mathbb{C}^n o en general variedades complejas como parte del estudio de propiedades de mapas holomorfos entre abiertos con frontera suficientemente regular (esta es la hipersuperficie) de estas variedades. Llevados a un segundo nivel de abstracción, esos complejos han sido objeto de mucho estudio, particularmente en conexión con el problema de resolubilidad local, el problema:

Dado $p \in \mathcal{X}$ y f una sección de $\wedge^q \bar{\mathcal{V}}^*$ de clase C^∞ definida en un entorno \mathcal{U} de p tal que $\mathbb{D}f = 0$, encontrar una sección u de $\wedge^{q-1} \bar{\mathcal{V}}^*$ definida en un entorno $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tal que $\mathbb{D}u = f$ en \mathcal{U}' .

Este problema (la regularidad no es importante) tiene solución en cualquier grado p para el complejo de de Rham (en ese contexto es el Lema de Poincaré) y para cualquier (p, q) en el caso del complejo de Dolbeault (el Lema de Poincaré-Dolbeault). Pero hay ejemplos de complejos en los que el Lema de Poincaré falla, o falla en ciertos grados y no en otros. El caso de complejos elípticos en general no está resuelto, mas sí en el caso de complejos elípticos en la categoría que estamos discutiendo.

Una particularidad del complejo asociado a un subfibrado \mathcal{V} es:

$$(2.2) \quad \text{Si } \phi \in C^\infty(\mathcal{X}; \Lambda^q \bar{\mathcal{V}}^*) \text{ y } \psi \in C^\infty(\mathcal{X}; \Lambda^{q'} \bar{\mathcal{V}}^*), \text{ entonces}$$

$$\mathbb{D}(\phi \wedge \psi) = (\mathbb{D}\phi) \wedge \psi + (-1)^q \phi \wedge \mathbb{D}\psi.$$

En particular si $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función de clase C^∞ y $\phi \in C^\infty(\mathcal{X}; \Lambda^q \bar{\mathcal{V}}^*)$, entonces

$$\mathbb{D}(f\phi) = f\mathbb{D}\phi + \mathbb{D}(f) \wedge \phi.$$

En particular, \mathbb{D} es un operador diferencial de orden 1, según la Definición III.11.4.

PROPOSICIÓN 2.3. *El complejo \mathbb{D} es elíptico si y solo si $\mathcal{V} + \bar{\mathcal{V}} = \mathbb{C}T\mathcal{X}$.*

La suma $\mathcal{V} + \bar{\mathcal{V}}$ no es necesariamente directa.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\xi \in \dot{T}^*\mathcal{X}$. La relación $\text{rg } \sigma(\mathbb{D})(\xi) \subset \ker \sigma(\mathbb{D})(\xi)$ es válida porque $\mathbb{D} \circ \mathbb{D} = 0$ implica lo mismo a nivel de símbolos. Para relacionar elipticidad con la caracterización de la proposición, calculamos el símbolo principal de \mathbb{D}_q explícitamente (temporalmente usamos subíndices para mantener la pista del grado) usando (III.11.5). Tomamos $\xi \in \dot{T}_{p_0}^*\mathcal{X}$ y $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ con $df(p_0) = \xi$. Con $\phi \in C^\infty(\mathcal{X}; \Lambda^q \bar{\mathcal{V}}^*)$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_q(e^{i\tau f}\phi) &= e^{i\tau f}\mathbb{D}_q(\phi) + \mathbb{D}_0(e^{i\tau f}) \wedge \phi \\ &= e^{i\tau f}\mathbb{D}_q(\phi) + \iota^*d(e^{i\tau f}) \wedge \phi = e^{i\tau f}\mathbb{D}_q(\phi) + i\tau e^{i\tau f}(\iota^*df) \wedge \phi, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-i\tau f}\mathbb{D}_q(e^{i\tau f}\phi) = i\iota^*df \wedge \phi.$$

Por lo tanto,

$$\sigma(\mathbb{D}_q)(\xi)(\phi) = i\iota^*\xi \wedge \phi, \quad \xi \in T_p^*\mathcal{X}, \quad \phi \in \Lambda^q \bar{\mathcal{V}}_p^*.$$

Como \mathbb{D}_q es un operador diferencial de primer orden,

$$T_p^*\mathcal{X} \ni \xi \mapsto \sigma(\mathbb{D})(\xi) \in \text{Hom}(\Lambda^q \bar{\mathcal{V}}^*, \Lambda^{q+1} \bar{\mathcal{V}}^*)$$

es un mapa lineal. Trabajando en la fibra sobre p vemos que la elipticidad del complejo es equivalente a la propiedad:

$$\text{si } \phi \in \Lambda^q \bar{\mathcal{V}}_p^* \text{ y } \iota^*\xi \wedge \phi = 0, \text{ entonces existe } \psi \in \Lambda^{q-1} \bar{\mathcal{V}}_p^* \text{ tal que } \phi = \iota^*\xi \wedge \psi.$$

Esta propiedad a su vez es equivalente a la propiedad $\iota^*\xi \neq 0$. Notando que ι^* es un mapa lineal y que $\xi \neq 0$, la conclusión es que la elipticidad del complejo es equivalente a la inyectividad del homomorfismo

$$\iota^* : T^*\mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathcal{V}}^*.$$

Por otro lado, un elemento $\xi \in T_p^*\mathcal{X}$ pertenece al espacio nulo de ι^* si y solo si

$$\langle \xi, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in \bar{\mathcal{V}}_p,$$

esto es, si y solo si ξ es un elemento del aniquilador, $\overline{\mathcal{V}}_p^\perp$, de $\overline{\mathcal{V}}_p$. Como ξ es un covector real, $\langle \overline{\xi}, \overline{v} \rangle = \langle \xi, \overline{v} \rangle$. Obtenemos

$$\xi \in \overline{\mathcal{V}}_p^\perp \iff [\langle \xi, \overline{v} \rangle = 0 \text{ para todo } v \in \overline{\mathcal{V}}_p] \iff \xi \in \mathcal{V}_p^\perp.$$

Por lo tanto $\xi \in \ker \iota^*$ si y solo si $\xi \in \mathcal{V}_p^\perp \cap \overline{\mathcal{V}}_p^\perp$. Pero este último espacio es $(\mathcal{V}_p + \overline{\mathcal{V}}_p)^\perp$. Por lo tanto $\ker \iota^* = (\mathcal{V}_p + \overline{\mathcal{V}}_p)^\perp$. De esto obtenemos $\ker \iota^* = 0 \iff \mathcal{V} + \overline{\mathcal{V}} = \mathbb{C}T\mathcal{X}$. \square

Si $\mathcal{V} + \overline{\mathcal{V}} = \mathbb{C}T\mathcal{X}$, decimos que \mathcal{V} es una estructura elíptica. La naturaleza local de una estructura elíptica es simple:

TEOREMA 2.4. *Existen $m, \kappa \in \mathbb{N}_0$ tales que cada $p_0 \in \mathcal{X}$ tiene un entorno \mathcal{U} en el cual hay definidas funciones $z_j : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, m$, t_1, \dots, t_κ de clase C^∞ tales que con $x_j = \Re z_j$, $y_j = \Im z_j$, las funciones $z_1, \dots, z_m, y_1, \dots, y_m, t_1, \dots, t_\kappa$ forman una carta local en \mathcal{U} . Los campos vectoriales*

$$\partial_{z_j}, j = 1, \dots, m, \partial_{t_\nu}, \nu = 1, \dots, \kappa$$

conforman un marco de referencia de \mathcal{V} .

Primero, para una tal estructura, la dimensión de $\mathbb{C}\mathcal{R}_p = \mathcal{V}_p \cap \overline{\mathcal{V}}_p$ es independiente de p (\mathcal{X} es conexo). Para ver esto, tomamos producto interno en $T_p\mathcal{X}$ el cual extendemos a un producto Hermitiano en $\mathbb{C}T_p\mathcal{X}$. Sea \mathcal{W}_p el subespacio de \mathcal{V}_p ortogonal a $\mathbb{C}\mathcal{R}_p$. Entonces $\mathbb{C}T_p\mathcal{X} = \mathcal{W}_p \oplus \mathbb{C}\mathcal{R}_p \oplus \overline{\mathcal{W}}_p$. De aquí vemos que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\mathcal{R}_p = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_p - \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}T_p\mathcal{X}$, por lo tanto $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\mathcal{R}_p$ es constante, digamos igual a κ . Automáticamente $\mathbb{C}\mathcal{R} = \mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}}$ es un subfibrado de $\mathbb{C}T\mathcal{X}$. Como \mathcal{V} es involutivo, también $\overline{\mathcal{V}}$ lo es, por lo tanto $\mathbb{C}\mathcal{R}$ es involutivo. Como $\mathbb{C}\mathcal{R}$ es cerrado por conjugación (evidentemente $v \in \mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}} \implies \overline{v} \in \mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}}$), $\mathbb{C}\mathcal{R}$ es la complexificación de un subfibrado real $\mathcal{R} \subset T\mathcal{X}$, el cual es necesariamente involutivo con fibras de dimensión (real) κ .

TEOREMA 2.5 (Frobenius). *Por cada punto $p_0 \in \mathcal{X}$ pasa una subvariedad conexa maximal \mathcal{L}_p de dimensión κ tal que $T_p\mathcal{L}_{p_0} = \mathcal{R}_p$ para cada $p \in \mathcal{L}_{p_0}$.*

Para la demostración, ver [79]. La idea básica es considerar la relación de equivalencia $p \sim p'$ si y solo si existe una curva continua de p a p' , C^∞ a trozos, cuyos segmentos son curvas integrales de campos vectoriales con valores en \mathcal{R} . Cada clase de equivalencia es una de estas variedades. La maximalidad se refiere a la propiedad: si \mathcal{L}' es una subvariedad de \mathcal{X} con $p_0 \in \mathcal{L}'$ que satisface $T_p\mathcal{L}' = \mathcal{R}_p$ para cada $p \in \mathcal{L}'$, entonces $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}_{p_0}$.

Fijemos $p_0 \in \mathcal{X}$, tomemos una subvariedad \mathcal{S} de \mathcal{X} de dimensión $\dim \mathcal{X} - \kappa$ (escribiremos $n = \dim \mathcal{X}$) con $p_0 \in \mathcal{S}$ y $T_{p_0}\mathcal{S} \cap \mathcal{R}_{p_0} = \{0\}$. Hay funciones $t_1, \dots, t_{n-\kappa}$ definidas en un entorno $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ suficientemente pequeño de p_0 en \mathcal{X} con diferenciales independientes tales que

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{U} = \{p \in \mathcal{U} : t_\nu(p) = 0 \text{ para todo } \nu\}.$$

Usando continuidad podemos escoger \mathcal{U} de manera que para todo $p \in \mathcal{S} \cap \mathcal{U}$ vale $T_p \mathcal{S} \cap \mathcal{R}_p = \{0\}$ y $v \in \mathcal{R}_p$. Entonces, si $p \in \mathcal{S} \cap \mathcal{U}$ y $v \in \mathcal{R}_p$, la condición $\langle dt_\nu, v \rangle = 0$ para todo ν implica $v = 0$. En efecto, $\langle dt_\nu, v \rangle = 0$ para todo ν implica $v \in T_p \mathcal{S}$. En consecuencia, de nuevo suponiendo \mathcal{U} suficientemente pequeño, podemos encontrar campos vectoriales T_μ , $\mu = 1, \dots, \kappa$, con valores en \mathcal{R} tales que $\langle dt_\nu, T_\mu \rangle = \delta_{jk}$. Sea

$$\mathcal{W}_p = \left\{ v - \sum_{\mu} \langle dt_\mu, v \rangle T_\mu(p) : v \in \mathcal{V}_p \right\}, \quad p \in \mathcal{S} \cap \mathcal{U}.$$

Este es un subespacio de \mathcal{V}_p isomorfo al espacio denotado de la misma manera en el párrafo que precede al teorema. Su dimensión es $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_p - \kappa$. Si $v \in \mathcal{W}_p$ entonces $vt_\nu = \langle dt_\nu, v \rangle = 0$ para todo ν , por lo tanto \mathcal{W}_p también es un subespacio de $\mathbb{C}T_p \mathcal{S}$. Como $\mathcal{V}_p \cap \overline{\mathcal{V}}_p = \mathbb{C}\mathcal{R}_p$, $\mathcal{W}_p \cap \overline{\mathcal{W}}_p \subset \mathbb{C}\mathcal{R}_p$. Pero $\mathcal{W}_p \cap \mathcal{R}_p = \{0\}$: necesariamente $\mathcal{W}_p \cap \overline{\mathcal{W}}_p = \{0\}$. Por lo tanto $\mathcal{W}_p + \overline{\mathcal{W}}_p$ es una suma directa, un subespacio de $\mathbb{C}T_p \mathcal{S}$ dimensión compleja $2(\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_p - \kappa) = n - \kappa = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}T_p(\mathcal{S} \cap \mathcal{U})$. Por lo tanto

$$\mathcal{W} \oplus \overline{\mathcal{W}} = \mathbb{C}T(\mathcal{S} \cap \mathcal{U}).$$

Esto dice que \mathcal{W} es una estructura casi-compleja en $\mathcal{S} \cap \mathcal{U}$. Veamos ahora que es formalmente integrable. Si X, Y son campos vectoriales suficientemente regulares en $\mathcal{S} \cap \mathcal{U}$ con valores en \mathcal{W} , entonces $[X, Y]$ también es un campo vectorial en $\mathcal{S} \cap \mathcal{U}$ con valores en \mathcal{W} . Para ver esto, extendemos estos campos al entorno \mathcal{U} manteniendo sus valores en \mathcal{V} . Así extendidos, $[X, Y]$ es un campo vectorial en \mathcal{U} con valores en \mathcal{V} , porque \mathcal{V} es involutivo. Pero como $Xt_\nu = 0 = Yt_\nu = 0$ en $\mathcal{S} \cap \mathcal{U}$ para todo j , también $[X, Y]t_\nu = 0$ en $\mathcal{S} \cap \mathcal{U}$ para todo j . Esto implica que $[X, Y]$ es un campo vectorial tangente a $\mathcal{S} \cap \mathcal{U}$, también que $[X, Y] - \sum_{\mu} \langle dt_\mu, [X, Y] \rangle T_\mu = [X, Y]$, por lo tanto $[X, Y]$ tiene valores en \mathcal{W} . Por lo tanto \mathcal{W} es involutivo. Por el Teorema de Newlander-Nirenberg, Teorema II.7.4, $\mathcal{S} \cap \mathcal{U}$ es una variedad compleja, y hay funciones a valores complejos z_j , $j = 1, \dots, n - \kappa$, definidas en un entorno de p_0 en \mathcal{S} tales que los campos vectoriales ∂_{z_j} forman un marco de referencia local de \mathcal{W} . Extendemos estas funciones a un entorno de p_0 en \mathcal{X} de manera que ellas son constantes en las variedades integrales de \mathcal{R} que intersectan a \mathcal{S} cerca de p_0 . Continuamos denotando las extensiones por z_j . Las partes reales e imaginarias de estas funciones junto con las t_ν conforman una carta local de \mathcal{X} , y los campos vectoriales

$$\partial_{z_j}, \quad j = 1, \dots, n - \kappa, \quad \partial_{t_\nu}, \quad \nu = 1, \dots, \kappa$$

conforman un marco de referencia de \mathcal{V} en un entorno de p_0 en \mathcal{X} .

3. Cohomología en L^2

Retornando al complejo abstracto (1.1), fijamos una densidad en \mathcal{X} y métricas Hermitianas en cada E^q . Con ellas, tenemos espacios de Hilbert $L^2(\mathcal{M}; E^q)$.

Hay ahora varias opciones para el complejo a estudiar (esto es, dominios $\mathcal{D}^q \subset L^2(\mathcal{X}; E^q)$ para los A_q). Podemos tomar

$$\mathcal{D}_{\text{máx}}^q = \{u \in L^2(\mathcal{X}; E^q) : A_q u \in L^2(\mathcal{X}; E^{q+1})\}.$$

De $A_{q+1}u \in L^2(\mathcal{X}; E^{q+1})$ y $A_{q+2}(A_{q+1}u) = 0 \in L^2(\mathcal{X}; E^{q+3})$ concluimos que $A_{q+1}u \in \mathcal{D}_{\text{máx}}(A_{q+2})$, tenemos un complejo

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{\text{máx}}^0 \xrightarrow{A_0} \mathcal{D}_{\text{máx}}^1 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{D}_{\text{máx}}^{r-1} \xrightarrow{A_{r-1}} \mathcal{D}_{\text{máx}}^r \rightarrow 0$$

llamado el complejo maximal o absoluto. Cada espacio $\mathcal{D}_{\text{máx}}^q$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(3.1) \quad (u, v)_{A_q} = (u, v)_q + (A_q u, A_q v)_{q+1}, \quad u, v \in \mathcal{D}_{\text{máx}}^q$$

donde por ejemplo (u, v) es el producto interno en $L^2(\mathcal{X}; E^q)$. Escribiremos $\|u\|_{A_q}$ para denotar la norma de u respecto a este producto interno. Complejos de este tipo (dominios densos y cada operador con el dominio dado es cerrado) son llamados complejos de Hilbert [10]. Como $C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{X}}; E^q) \subset \mathcal{D}_{\text{máx}}^q$, podemos también definir

$$\mathcal{D}_{\text{mín}}^q = \overline{C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{X}}; E^q)},$$

la clausura en $\mathcal{D}_{\text{máx}}^q$. Con estos espacios obtenemos el complejo minimal o relativo,

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{\text{mín}}^0 \xrightarrow{A_0} \mathcal{D}_{\text{mín}}^1 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{D}_{\text{mín}}^{r-1} \xrightarrow{A_{r-1}} \mathcal{D}_{\text{mín}}^r \rightarrow 0.$$

Para ver que en efecto un complejo, tomemos $u \in \mathcal{D}_{\text{mín}}^q$ y una sucesión $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ en $C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{X}}; E^q)$ que converge a u en la norma de $\mathcal{D}_{\text{máx}}^q$. Para ver que $v = A_q u \in \mathcal{D}_{\text{mín}}^{q+1}$, notamos que $v_k = A_q u_k \in C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{M}}; E^{q+1})$, que $v_k \rightarrow v$ debido a parte de la condición $u_k \rightarrow u$ en $\mathcal{D}_{\text{máx}}^q$, y que $A_{q+1}v_k \rightarrow A_{q+1}v$, simplemente porque $A_{q+1}v_k = 0 = A_{q+1}v$.

El complejo minimal es igual al maximal si \mathcal{X} es compacta sin borde; en todos los demás casos estos dos complejos pueden ser distintos el uno del otro. Sin suponer que ellos son iguales, pero admitiendo la posibilidad, supongamos que tenemos subespacios cerrados $\mathcal{D}^q \subset \mathcal{D}_{\text{máx}}^q$ con $\mathcal{D}^q \subset \mathcal{D}_{\text{máx}}^q$ y con $A_q(\mathcal{D}^q) \subset \mathcal{D}^{q+1}$ de manera de tener un complejo de Hilbert

$$(3.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{D}^0 \xrightarrow{A_0} \mathcal{D}^1 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{D}^{r-1} \xrightarrow{A_{r-1}} \mathcal{D}^r \rightarrow 0.$$

Usando \mathcal{D} para referirnos a este complejo, sean $Z_{\mathcal{D}}^q$ el espacio nulo de A_q y $B_{\mathcal{D}}^q$ la imagen de A_{q+1} . El cociente,

$$H_{\mathcal{D}}^q = Z_{\mathcal{D}}^q / B_{\mathcal{D}}^q,$$

es el grupo de cohomología del complejo (3.2) en grado q . Es fácil ver que $Z_{\mathcal{D}}^q$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{D}_{\text{máx}}^q$. La norma de $Z_{\mathcal{D}}^q$ determina una seminorma en $H_{\mathcal{D}}^q$: si $\mathbf{u} \in H_{\mathcal{D}}^q$ es la clase de equivalencia de u ,

$$\|\mathbf{u}\| = \inf\{\|u + A_{q-1}v\| : v \in \mathcal{D}^{q-1}\}.$$

Esta seminorma es una norma si y solo si $B_{\mathcal{D}}^q$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{D}_{\text{máx}}^q$. Esto no es siempre verdad, de nuevo un efecto sutil de la interacción entre la topología y el análisis del problema. En el caso en que $B_{\mathcal{D}}^q$ es un subespacio cerrado, $H_{\mathcal{D}}^q$ es de nuevo un espacio de Hilbert, isomorfo al subespacio de $Z_{\mathcal{D}}^q$ ortogonal a $B_{\mathcal{D}}^q$.

4. Laplacianos y elipticidad

Continuando con el complejo (1.1) en el contexto de la sección anterior, cada operador $A_q : C_c^\infty(\mathring{\mathcal{X}}; E^q) \rightarrow C_c^\infty(\mathring{\mathcal{X}}; E^{q+1})$ tiene un adjunto formal,

$$A_q^* : C_c^\infty(\mathring{\mathcal{X}}; E^{q+1}) \rightarrow C_c^\infty(\mathring{\mathcal{X}}; E^q)$$

definido por la condición

$$(A_q u, v)_{q+1} = (u, A_q^* v)_q, \quad u \in C_c^\infty(\mathring{\mathcal{X}}; E^q), \quad v \in C_c^\infty(\mathring{\mathcal{X}}; E^{q+1}).$$

El Laplaciano del complejo (1.1) en grado q es el operador diferencial

$$\square_q = A_q^* A_q + A_{q-1} A_{q-1}^*$$

Este es un operador de segundo orden.

PROPOSICIÓN 4.1. *La elipticidad de \square_q es equivalente a la exactitud de*

$$(4.2) \quad E_{\pi(\xi)}^{q-1} \xrightarrow{\sigma(A_{q-1})(\xi)} E_{\pi(\xi)}^q \xrightarrow{\sigma(A_q)(\xi)} E_{\pi(\xi)}^{q+1}$$

en el término central para todo $\xi \in \dot{T}\mathcal{X}$.

DEMOSTRACIÓN. Escribimos $\mathfrak{a}_q = \sigma(A_q)(\xi)$ y $p = \pi(\xi)$. Usando la métrica Hermitiana en las fibras E_p^{q-1} , E_p^q , E_p^{q+1} , definimos

$$\mathfrak{d}_q = \mathfrak{a}_q^* \mathfrak{a}_q + \mathfrak{a}_{q-1} \mathfrak{a}_{q-1}^*.$$

Este es $\sigma(\square_q)(\xi)$. el objetivo es relacionar el espacio nulo, \mathfrak{h}^q , de \mathfrak{d}_q con la exactitud de (4.2) en el término central. La imagen de \mathfrak{a}_{q-1} es ortogonal a la imagen de \mathfrak{a}_q^* :

$$(\mathfrak{a}_{q-1} \eta, \mathfrak{a}_q^* \theta) = (\mathfrak{a}_q \mathfrak{a}_{q-1} \eta, \theta), \quad \eta \in E_p^{q-1}, \quad \theta \in E_p^{q+1}.$$

También es ortogonal a \mathfrak{h}^q . Para ver esto, notamos primero que

$$(4.3) \quad \phi \in \mathfrak{h}^q \iff \mathfrak{a}_q \phi = 0 = \mathfrak{a}_{q-1}^* \phi.$$

En efecto, si en la fórmula

$$\begin{aligned} ((\mathfrak{a}_q^* \mathfrak{a}_q + \mathfrak{a}_{q-1} \mathfrak{a}_{q-1}^*) \phi, \phi) &= (\mathfrak{a}_q^* \mathfrak{a}_q \phi, \phi) + (\mathfrak{a}_{q-1} \mathfrak{a}_{q-1}^* \phi, \phi) \\ &= (\mathfrak{a}_q \phi, \mathfrak{a}_q \phi) + (\mathfrak{a}_{q-1}^* \phi, \mathfrak{a}_{q-1}^* \phi) = \|\mathfrak{a}_q \phi\|^2 + \|\mathfrak{a}_{q-1}^* \phi\|^2 \end{aligned}$$

tenemos $\phi \in \mathfrak{h}^q$, entonces el miembro más a la izquierda es 0, por lo tanto también el término más a la derecha. Ahora, con tal ϕ y con $\eta \in E_p^{q-1}$,

$$(\phi, \mathfrak{a}_{q-1} \eta) = (\mathfrak{a}_{q-1}^* \phi, \eta) = 0.$$

Igualmente \mathfrak{h}^q es ortogonal a la imagen de \mathfrak{a}_q^* y tenemos la suma ortogonal

$$(4.4) \quad \mathfrak{h}^q \oplus \operatorname{rg} \mathfrak{a}_{q-1} \oplus \operatorname{rg} \mathfrak{a}_q^*.$$

Esta suma es igual a E_p^q . Para ver esto, construimos una especie de inversa de \mathfrak{d}_q . Como $\mathfrak{d}_q : E_p^q \rightarrow E_p^q$ es autoadjunto, \mathfrak{h}_p^q es igual al espacio ortogonal a su rango. Por lo tanto, el operador

$$\mathfrak{d}_q|_{\mathfrak{h}_p^{q\perp}} : \mathfrak{h}_p^{q\perp} \rightarrow \mathfrak{h}_p^{q\perp}$$

es invertible. Sea \mathfrak{g}'_q la inversa y sea π_q^0 la proyección ortogonal en \mathfrak{h}^q . Sea $\mathfrak{g}_q = \mathfrak{g}'_q \circ (I - \pi_q^0) : E_p^q \rightarrow E_p^q$; la imagen de este operador es $\mathfrak{h}_p^{q\perp}$ pero usamos la inclusión para terminar en E^q . Con él tenemos

$$\mathfrak{g}_q \mathfrak{d}_q = \mathfrak{d}_q \mathfrak{g}_q = I - \pi_q^0.$$

Escribiendo la segunda igualdad como

$$I = \pi_q^0 + \mathfrak{a}_{q-1}(\mathfrak{a}_{q-1}^* \mathfrak{g}_q) + \mathfrak{a}_q^*(\mathfrak{a}_q \mathfrak{g}_q)$$

vemos que cualquier $\phi \in E_p^q$ se descompone como la suma de uno en \mathfrak{h}^q , uno en $\operatorname{rg} \mathfrak{a}_{q-1}$, y uno en $\operatorname{rg} \mathfrak{a}_q^*$.

Si $\phi \in \operatorname{rg} \mathfrak{a}_q^*$ y $\mathfrak{a}_q \phi = 0$, entonces $(\mathfrak{a}_{q-1} \mathfrak{a}_{q-1}^* + \mathfrak{a}_q^* \mathfrak{a}_q) \phi = 0$, esto es $\phi \in \mathfrak{h}^q \cap \operatorname{rg} \mathfrak{a}_q^*$, de lo cual deducimos que $\phi = 0$.

Supongamos ahora que $\phi \in E_p^q$ es tal que $\mathfrak{a}_q \phi = 0$. Si $\mathfrak{h}^q = \{0\}$, entonces $\phi = \mathfrak{a}_q \eta + \mathfrak{a}_a^* \theta$ para algún $\eta \in E_p^{q-1}$ y $\theta \in E_p^{q+1}$. De $\mathfrak{a}_q \phi = 0$ deducimos que $\mathfrak{a}_q \mathfrak{a}_a^* \theta = 0$, por lo tanto $\mathfrak{a}_a^* \theta = 0$ y $\phi = \mathfrak{a}_{q-1} \eta$. Esto es, (4.2) es exacta en el término central. Recíprocamente, si esto vale y $\phi \in \mathfrak{h}^q$, entonces en particular $\mathfrak{a}_q \phi = 0$ y por exactitud existe $\eta \in E_p^{q-1}$ tal que $\mathfrak{a}_{q-1} \eta = \psi$. Pero entonces $\phi \in \mathfrak{h}^q \cap \operatorname{rg} \mathfrak{a}_{q-1}$, por lo tanto $\phi = 0$. Concluimos que $\mathfrak{h}^q = \{0\}$. \square

La siguiente proposición recopila y abstrae algunas de las observaciones de esta sección. Solo la dos última afirmaciones requieren algo más de argumentos.

PROPOSICIÓN 4.5. *Sea*

$$(4.6) \quad S^0 \xrightarrow{\mathfrak{a}_0} S^1 \xrightarrow{\mathfrak{a}_1} S^2 \rightarrow \dots \rightarrow S^{r-1} \xrightarrow{\mathfrak{a}_{r-1}} S^r$$

un complejo de espacios vectoriales de dimensión finita, sea H^q su espacio de cohomología en grado q . Fijamos productos internos (Hermitianos si los espacios son complejos) en cada S^q con los cuales definimos los mapas adjuntos \mathfrak{a}_q^ y los operadores \mathfrak{d}_q . Sea $\mathfrak{h}^q = \ker \mathfrak{d}_q$. Los espacios \mathfrak{h}^q son canónicamente isomorfos a los espacios H^q . En la descomposición*

$$S^q = \mathfrak{h}^q \oplus \operatorname{rg} \mathfrak{a}_{q-1} \oplus \operatorname{rg} \mathfrak{a}_q^*,$$

el espacio $\operatorname{rg} \mathfrak{a}_q^$ es isomorfo al espacio $\operatorname{rg} \mathfrak{a}_{q+1}$ via*

$$\mathfrak{a}_q|_{\operatorname{rg} \mathfrak{a}_q^*} : \operatorname{rg} \mathfrak{a}_q^* \rightarrow \operatorname{rg} \mathfrak{a}_{q+1}.$$

Por lo tanto,

$$(4.7) \quad \sum_{q=0}^r (-1)^q \dim \mathfrak{h}^q = \sum_{q=0}^r (-1)^q \dim S^q.$$

DEMOSTRACIÓN. Usamos la notación en la prueba de la Proposición 4.1. Probamos primero que H^q y \mathfrak{h}^q son isomorfos, específicamente, que π_q^0 determina un isomorfismo $H^q \rightarrow \mathfrak{h}^q$. Si $u \in \ker \mathfrak{a}_q$ representa a $\mathbf{u} \in H^q$ y $v \in S^{q-1}$ es arbitrario, entonces $\pi_q^0(u + \mathfrak{a}_{q-1}v) = \pi_q^0 u$, por lo tanto $\pi_q^0 u$ no depende del representante $u \in \mathbf{u}$. Esto define $\pi_q^0 : H^q \rightarrow \mathfrak{h}^q$. Este mapa es sobreyectivo, porque si $u \in \mathfrak{h}^q$, entonces en particular $\mathfrak{a}_q u = 0$, y u define un elemento en $\mathbf{u} \in H^q$.

Para probar inyectividad de π_q^0 probamos primero que

$$(4.8) \quad \mathfrak{a}_q \mathfrak{g}_{q-1} = \mathfrak{g}_q \mathfrak{a}_q.$$

La primera identidad en la siguiente cadena de implicaciones es inmediato:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_q \mathfrak{d}_{q-1} = \mathfrak{d}_q \mathfrak{a}_{q-1} &\implies \mathfrak{g}_q \mathfrak{a}_q \mathfrak{d}_{q-1} \mathfrak{g}_{q-1} = \mathfrak{g}_q \mathfrak{d}_q \mathfrak{a}_{q-1} \mathfrak{g}_{q-1} \\ &\implies \mathfrak{g}_q \mathfrak{a}_q (I - \pi_{q-1}) = (I - \pi_q) \mathfrak{a}_{q-1} \mathfrak{g}_{q-1} \\ &\implies \mathfrak{g}_q \mathfrak{a}_{q-1} = \mathfrak{a}_{q-1} \mathfrak{g}_{q-1} \end{aligned}$$

Para llegar a la tercera implicación usamos (4.3) en el miembro izquierdo de la igualdad y (4.4) en el miembro de la derecha. Usando $\mathfrak{a}_q u = 0$ y (4.8)

$$I = \pi_q^0 + g_q \mathfrak{g}_q \mathfrak{a}_{q-1} \mathfrak{a}_{q-1}^* + \mathfrak{g}_q \mathfrak{a}_{q+1}^* \mathfrak{a}_q,$$

obtenemos

$$u = \pi_q^0 u + \mathfrak{a}_{q-1} \mathfrak{g}_q \mathfrak{a}_{q-1}^* u$$

Por lo tanto, si $u \in \mathbf{u} \in H^q$ y $\pi_q^0 u = 0$, entonces u es exacta y $\mathbf{u} = 0$.

Veamos ahora que $\operatorname{rg} \mathfrak{a}_q^*$ es isomorfo a $\operatorname{rg} \mathfrak{a}_q$. Si $u = \mathfrak{a}_q^* w$ con $w \in \operatorname{rg} \mathfrak{a}_q$ y $\mathfrak{a}_q u = 0$, entonces también $\mathfrak{a}_{q-1}^* u = 0$ y por lo tanto $u \in \mathfrak{h}^q$. Como la suma (4.4) es directa, $u = 0$. Esto es,

$$\mathfrak{a}_q |_{\operatorname{rg} \mathfrak{a}_q^*} : \operatorname{rg} \mathfrak{a}_q^* \rightarrow \operatorname{rg} \mathfrak{a}_q$$

es inyectivo. Si $v \in \operatorname{rg} \mathfrak{a}_q$, entonces $v = h + u + w$ para algún $h \in \mathfrak{h}^q$, $u \in \operatorname{rg} \mathfrak{a}_q^*$ y $w \in \operatorname{rg} \mathfrak{a}_{q=1}$. Entonces $v = \mathfrak{a}_q u$. Definiendo $S_q = \{0\}$ para $q < 0$ o $q > r$ y $\mathfrak{a}_q = 0$ para $q < 1$ o $q \geq r$ (esto no afecta en nada las cuentas), tenemos:

$$\dim S^q = \dim \mathfrak{h}^q + \dim \operatorname{rg} \mathfrak{a}_{q-1} + \dim \operatorname{rg} \mathfrak{a}_q.$$

Con esto,

$$\begin{aligned}
 \sum_{q=0}^r (-1)^q \dim S^q &= \sum_{q=0}^r (-1)^q \dim \mathfrak{h}^q + \sum_{q=0}^r (-1)^q \dim \operatorname{rg} \mathfrak{a}_{q-1} \\
 &\quad - \sum_{q=0}^r (-1)^{q+1} \dim \operatorname{rg} \mathfrak{a}_q \\
 &= \sum_{q=0}^r (-1)^q \dim \mathfrak{h}^q + \dim \operatorname{rg} \mathfrak{a}_{-1} + (-1)^r \mathfrak{a}_r \\
 &= \sum_{q=0}^r (-1)^q \dim \mathfrak{h}^q.
 \end{aligned}$$

□

Luego veremos que (4.7) relaciona la característica de Euler del complejo de de Rham de una variedad cerrada con la característica de Euler clásica calculada usando una triangulación de la variedad.

5. El complejo adjunto

Como $0 = (A_q \circ A_{q-1})^* = A_{q-1}^* \circ A_q^*$, tenemos un complejo adjunto formal

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad 0 \leftarrow C^\infty(\dot{\mathcal{X}}; E^0) \xleftarrow{A_0^*} C^\infty(\dot{\mathcal{X}}; E^1) \leftarrow \dots \\
 \dots \leftarrow C^\infty(\dot{\mathcal{X}}; E^{r-1}) \xleftarrow{A_{r-1}^*} C^\infty(\dot{\mathcal{X}}; E^r) \leftarrow 0
 \end{aligned}$$

Como la elipticidad del complejo original es equivalente a la de cada uno de los Laplacianos \square_q , y la elipticidad de estos es equivalente a la del complejo adjunto (porque los Laplacianos del complejo original y los del complejo adjunto formal son los mismos), (5.1) es elíptico. Denotamos $\mathfrak{D}_{\text{máx}}^{q+1}$ y $\mathfrak{D}_{\text{mín}}^{q+1}$ al dominio máximo y mínimo de A_q^* . Con el producto interno en $\mathfrak{D}_{\text{máx}}^{q+1}$ definido usando A_q^* , este es un espacio de Hilbert y $\mathfrak{D}_{\text{mín}}^{q+1}$ un subespacio cerrado.

En el caso del complejo de Hilbert (3.2), el complejo adjunto es el adjunto de Hilbert: cada operador A_q^* adquiere como dominio el del operador adjunto de

$$(5.2) \quad A_q : \mathcal{D}_q \subset L^2(\mathcal{X}; E^q) \rightarrow L^2(\mathcal{X}; E^{q+1}).$$

Este dominio es

$$\mathfrak{D}^{q+1} = \{v \in L^2(\mathcal{X}; E^{q+1}) : \mathcal{D}^q \ni u \mapsto (A_q u, v) \in \mathbb{C} \text{ es } L^2\text{-continuo}\}$$

Si $v \in \mathfrak{D}^{q+1}$, la continuidad del mapa

$$\mathcal{D}^q \ni u \mapsto (A_q u, v)_{q+1} \in \mathbb{C}$$

y la densidad de \mathcal{D}^q en $L^2(\mathcal{X}; E^q)$ implican, por el teorema de representación de Riesz (ver Rudin [64]), que existe un único elemento $f \in L^2(\mathcal{X}; E^q)$ tal que

$$(A_q u, v)_{q+1} = (u, f)_q \text{ para todo } u \in \mathcal{D}^q.$$

Este elemento f es por definición A_q^*v (con $*$ en lugar de \star). Esta igualdad también vale si $u \in C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{X}}; E^q)$, e interpretada en el sentido distribucional, dice que $A_q^*v = A_q^*v$. Por esto, realmente solo nos preocupamos del dominio, el operador adjunto es el operador diferencial actuando en sentido distribucional.

En particular, el adjunto de A_q con dominio \mathcal{D}_{\min}^q es A_q^* con dominio $\mathfrak{D}_{\max}^{q+1}$. Para ver esto, notamos que $\mathfrak{D}_{\max}^{q+1}$ consiste, por definición, de los elementos $v \in L^2(\mathcal{X}; E^{q+1})$ tales que $A_q^*v = f \in L^2(\mathcal{X}; E^q)$, donde A_q^*v es interpretado en el sentido distribucional. Que $A_q^*v = f$ en este sentido significa exactamente que

$$(5.3) \quad (f, u)_q = (v, A_q u)_{q+1} \text{ para todo } u \in C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{X}}; E^q).$$

Esto implica la continuidad de

$$(5.4) \quad C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{X}}; E^q) \ni u \mapsto (v, A_q u)_{q+1} \in \mathbb{C}$$

en L^2 , porque el lado derecho es igual a (f, u) , por lo tanto $|(v, A_q u)| \leq \|f\| \|u\|$. Como $C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{X}}; E^q)$ es denso en \mathcal{D}_{\min}^q , el dominio del adjunto de A_q con dominio mínimo contiene a $\mathfrak{D}_{\max}^{q+1}$. Por otro lado, si v pertenece al dominio del adjunto de A_q con dominio mínimo, entonces (5.4) es continuo en $L^2(\mathcal{X}; E^{q+1})$. Debido al teorema de representación de Riesz, esto implica (usando que $C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{X}}; E^q)$ es denso en $L^2(\mathcal{X}; E^q)$) que existe $f \in L^2(\mathcal{X}; E^q)$ tal que (5.3) vale, y por lo tanto $A_q^*v = f$ en sentido distribucional. Esto es, $A_q v \in L^2(\mathcal{X}; E^q)$, y por definición, $v \in \mathfrak{D}_{\max}^{q+1}$.

Por la simetría de la situación y usando que el adjunto del adjunto de un operador cerrado densamente definido es el operador original, tenemos:

LEMA 5.5. *El adjunto de A_q con dominio \mathcal{D}_{\min}^q es A_q^* con dominio $\mathfrak{D}_{\max}^{q+1}$. El adjunto de A_q con dominio \mathcal{D}_{\max}^q es A_q^* con dominio $\mathfrak{D}_{\min}^{q+1}$.*

Es conveniente introducir algo de notación. Ya hemos dado a \mathcal{D}_{\max}^q el producto interno (3.1). Definimos

$$\mathcal{E}^q = \{u \in \mathcal{D}_{\max}^q : (u, v)_{A_q} = 0 \text{ para todo } v \in \mathcal{D}_{\min}^q\},$$

análogamente $\mathfrak{E}^{q+1} \subset \mathfrak{D}_{\max}^{q+1}$. El interés en estos espacios reside en lo siguiente. Si $\mathcal{D}^q \subset \mathcal{D}_{\max}^q$ es un subespacio cerrado que contiene a \mathcal{D}_{\min}^q , entonces hay un único subespacio cerrado $D^q \subset \mathcal{E}^q$ tal que $\mathcal{D}^q = D^q + \mathcal{D}_{\min}^q$; simplemente, D^q es el subespacio de \mathcal{D}^q ortogonal a \mathcal{D}_{\min}^q .

Debido a la definición del producto interno, si $u \in \mathcal{E}^q$, entonces

$$(A_q u, A_q w)_{q+1} = -(u, w)_q \text{ para todo } w \in C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{X}}; E^q).$$

En particular, $|(A_q u, A_q w)_{q+1}| \leq \|u\|_q \|w\|_q$, esto es,

$$C_c^\infty(\mathcal{X}; E^q) \ni w \mapsto (A_q u, A_q w)_{q+1} \in \mathbb{C}$$

es continuo. Esto implica que $A_q u \in \mathfrak{D}_{\max}^{q+1}$ y que $A_q^* A_q u = -u$. Esto es una mitad de la demostración de:

LEMA 5.6. *Tenemos*

$$\mathcal{E}^q = \mathcal{D}_{\text{máx}}^q \cap \ker(A_q^* A_q + I)$$

con el espacio nulo calculado en el sentido distribucional.

Para la demostrar la mitad que falta, tomemos $u \in \mathcal{D}_{\text{máx}}^q \cap \ker(A_q^* A_q + I)$. En particular, $u \in L^2(\mathcal{X}; E^q)$ y $A_q u \in L^2(\mathcal{X}; E^{q+1})$. Como $A_q^*(A_q u) \in L^2(\mathcal{X}; E^q)$, $A_q u \in \mathcal{D}_{\text{máx}}^{q+1}$. Tendemos ahora

$$\begin{aligned} (A_q u, A_q w) &= (A_q^* A_q u, w) && \text{por dualidad, para todo } w \in C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{X}}; E^q) \\ &= (-u, w) && \text{porque } u \in \ker(A_q^* A_q + I), \end{aligned}$$

y por lo tanto $u \in \mathcal{E}^q$.

COROLARIO 5.7. *EL operador A_q mapea \mathcal{E}^q a \mathfrak{E}^{q+1} y como tal es sobreyectivo con inversa $-A_q^*$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $u \in \mathcal{E}^q$, entonces $A_q u \in \mathcal{D}_{\text{máx}}^q$ y $A_q^* A_q u = -u$. Aplicando A_q a ambos miembros, obtenemos $A_q A_q^*(A_q u) = -A_q u$. Por lo tanto $A_q u \in \mathfrak{E}^{q+1}$. La fórmula $A_q^* A_q u = -u$ implica que $-A_q$ es una inversa a izquierda de $A_q|_{\mathcal{E}^q} : \mathcal{E}^q \rightarrow \mathfrak{E}^{q+1}$, y la fórmula $A_q A_q^* v = -v$, válida si $v \in \mathfrak{E}^{q+1}$, que A_q^* es una inversa a la derecha. Por lo tanto $A_q^* : \mathfrak{E}^{q+1} \rightarrow \mathcal{E}^q$ es la inversa. \square

PROPOSICIÓN 5.8. *Si $D_q \subset \mathcal{E}_q$ es un subespacio cerrado, el adjunto de A_q con dominio $\mathcal{D}^q = D^q + \mathcal{D}_{\text{mín}}^q$ es A_q^* con dominio $\mathcal{D}^{q+1} = \mathcal{D}^{q+1} + \mathcal{D}_{\text{mín}}^q$ con $\mathcal{D}^{q+1} = A_q(D^{q\perp})$. Aquí $D^{q\perp}$ es el subespacio de \mathcal{E}^q ortogonal a D^q respecto al producto interno (3.1).*

DEMOSTRACIÓN. Si $u_0 \in \mathcal{D}_{\text{mín}}^q$ y $u \in D^q$ de manera que $u_0 + u \in \mathcal{D}^q$, y $v_0 + v \in \mathcal{D}_{\text{máx}}^{q+1}$ con $v_0 \in \mathcal{D}_{\text{mín}}^{q+1}$ y $v \in \mathfrak{E}^{q+1}$, entonces

$$(A_q(u_0 + u), v_0 + v)_{q+1} - (u_0 + u, A_q^*(v_0 + v))_q = (A_q u, v)_{q+1} - (u, A_q^* v)_q$$

usando el Lema 5.5 varias veces en diversas combinaciones. Si $v_0 + v$ pertenece al dominio del adjunto de A_q con dominio \mathcal{D}^q , entonces

$$(A_q u, v)_{q+1} - (u, A_q^* v)_q = 0 \text{ para todo } u \in D^q.$$

Con $w = -A_q^* v$ (el Corolario 5.7 asegura que $w \in \mathcal{E}^q$) esta condición es

$$-(A_q u, A_q w)_{q+1} - (u, w)_q = 0 \text{ para todo } u \in D^q.$$

usando $-A_q^* A_q w = w$. Vemos que $w \in D^{q\perp}$ y por lo tanto $v \in A_q D^{q\perp}$. El argumento en reverso implica la otra inclusión. \square

La siguiente proposición es la regularidad de los elementos de \mathcal{E}^q .

PROPOSICIÓN 5.9. *Si el complejo (1.1) es elíptico, entonces \mathcal{E}^q es un subespacio de $C^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{X}}; E^q)$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $u \in \mathcal{E}^q$, entonces $A_{q-1}^* u = 0$ porque $u = -A_q^* A_q$. Por lo tanto $(A_{q-1} A_{q-1}^* + A_q^* A_q + I)u = 0$. Como \square_q es elíptico, $u \in C^\infty(\mathcal{X})$ \square

6. Teoría de Hodge en variedades cerradas

Continuamos suponiendo que (1.1) es un complejo elíptico y que hemos fijado una densidad positiva suave y métricas Hermitianas en cada uno de los fibrados vectoriales E^q . En toda esta sección, \mathcal{X} es una variedad cerrada. Tomamos como dominio de cada A_q su dominio maximal.

PROPOSICIÓN 6.1. *Si (1.1) es elíptico y \mathcal{X} es cerrada entonces $\mathcal{D}_{\min}^q = \mathcal{D}_{\max}^q$, y por lo tanto $C^\infty(\mathcal{X}; E^q)$ es denso en \mathcal{D}_{\max}^q .*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 5.9 sabemos que $\mathcal{E}^q \subset C^\infty(\mathcal{X}; E^q)$. Como \mathcal{X} es cerrada, $C^\infty(\mathcal{X}; E^q) = C_c^\infty(\mathcal{X}; E^q)$. Por definición, los elementos de \mathcal{D}_{\min}^q son aproximables en la norma $\|\cdot\|_{A_q}$ por elementos de $C^\infty(\mathcal{X}; E^q)$. Por lo tanto, $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_{\min}^q$, y concluimos que $\mathcal{D}_{\max}^q = \mathcal{D}_{\min}^q + \mathcal{E}^q \subset \mathcal{D}_{\min}^q$. \square

Debido a esto, muchos argumentos generales se reducen a argumentos con secciones de clase C^∞ . En lo que sigue \mathcal{D}_{\max}^q será el dominio de A_q . Por ejemplo, $\text{rg } A_q$ es $A_q(\mathcal{D}_{\max}^q)$. También $\mathfrak{D}_{\min}^q = \mathfrak{D}_{\max}^q$ y $C^\infty(\mathcal{X}; E^q)$ es denso en esos espacios en la norma $\|\cdot\|_{A_q^*}$.

Mucho de lo que sigue es similar a algunos de los argumentos en la demostración de la Proposición 4.1.

LEMA 6.2. *El espacio nulo de \square_q en distribuciones, \mathcal{H}^q , es un subespacio de $C^\infty(\mathcal{X}; E^q)$ de dimensión finita. Una sección distribucional u de E^q pertenece a \mathcal{H}^q si y solo si*

$$(6.3) \quad A_q u = 0 \text{ y } A_{q-1}^* u = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Como \square_q es elíptico, su espacio nulo consiste de secciones de clase C^∞ . Este espacio es un subespacio de $L^2(\mathcal{X}; E)$. Si u satisface (6.3), entonces $\square_q u = 0$. Si u es suficientemente regular, entonces

$$(\square_q u, u)_q = (A_q u, A_q u)_{q+1} + (A_{q-1}^* u, A_{q-1}^* u)_{q-1}$$

En particular, si $u \in \mathcal{H}^q$, el miembro de la izquierda es 0, por lo tanto también el de la derecha. Como este último es $\|A_q u\|_q^2 + \|A_{q-1}^* u\|_{q-1}^2$, (6.3) vale. \square

Una sección u de E^q es armónica si satisface (6.3) (Hodge [28, p. 112]¹).

TEOREMA 6.4. *El operador*

$$(6.5) \quad \square_q : H^2(\mathcal{X}; E^q) \subset L^2(\mathcal{X}; E^q) \rightarrow L^2(\mathcal{X}; E^q)$$

es Fredholm autoadjunto (aquí $H^2(\mathcal{X}; E^q)$ es el espacio de Sobolev de segundo orden de secciones de E^q).

¹La notación es curiosa, ver la p. 81 de esa referencia.

DEMOSTRACIÓN. Como \square_q es elíptico de orden 2 y \mathcal{X} es compacto, el operador (6.5) es Fredholm (con parametriz de orden -2). Por lo tanto su espacio nulo, \mathcal{H}^q es un subespacio de $C^\infty(E; \mathcal{X})$ de dimensión finita y su imagen, \mathcal{R}^q , es un subespacio cerrado de $L^2(\mathcal{X}; E^q)$ de codimensión finita. El operador (6.5) es simétrico, esto es,

$$(\square_q u, v) - (u, \square_q v) = 0 \text{ si } u, v \in H^2(\mathcal{X}; E^q).$$

Su adjunto tiene por dominio un subespacio de $L^2(\mathcal{X}; E^q)$, por regularidad elíptica contenido en $H^2(\mathcal{X}; E^q)$. Por lo tanto, el dominio del adjunto es $H^2(\mathcal{X}; E^q)$ también, y en consecuencia el operador es autoadjunto. \square

Supongamos que $u \in \mathfrak{D}_{\text{máx}}^q$ y $v \in \mathfrak{D}_{\text{máx}}^{q-1}$. Entonces

$$(u, A_{q-1}v)_q = (A_{q-1}^*u, v)_{q-1}.$$

Por lo tanto, \mathcal{H}^q es ortogonal a $\text{rg } A_{q-1}$. Igualmente, \mathcal{H}^q es ortogonal a $\text{rg } A_q^*$. Finalmente, si $w \in \mathfrak{D}_{\text{máx}}^{q+1}$ entonces $u = A_q^*w \in \mathfrak{D}_{\text{máx}}^q$ por lo cual la fórmula vale, y como $A_{q-1}^* \circ A_q^* = 0$, $\text{rg } A_{q-1}$ es ortogonal a $\text{rg } A_q^*$.

TEOREMA 6.6 (Descomposición de Hodge). *Supongamos que (1.1) es elíptico y \mathcal{X} es cerrada. Entonces*

$$(6.7) \quad L^2(\mathcal{X}; E^q) = \mathcal{H}^q \oplus \text{rg } A_{q-1} \oplus \text{rg } A_q^*.$$

con factores mutuamente ortogonales.

DEMOSTRACIÓN. Ya vimos que los términos a la derecha en (6.7) son mutuamente ortogonales. A demostrar, que la suma es todo el espacio ambiente. Como (6.5) es Fredholm, \mathcal{H}^q es un subespacio de $C^\infty(E; \mathcal{X})$ de dimensión finita. Su imagen, \mathcal{R}^q , es un subespacio cerrado de $L^2(\mathcal{X}; E^q)$ de codimensión finita. Como además (6.5) es autoadjunto, el rango es el espacio ortogonal a \mathcal{H}^q en $L^2(\mathcal{X}; E^q)$. Sea

$$\Pi_q^0 : L^2(\mathcal{X}; E_q) \rightarrow L^2(\mathcal{X}; E^q)$$

la proyección ortogonal en \mathcal{H}^q , sea $\mathcal{H}^{q\perp}$ su espacio nulo, el subespacio de $L^2(\mathcal{X}; E^q)$ ortogonal a \mathcal{H}^q (esto es, \mathcal{R}^q). Si $u \in H^2(\mathcal{X}; E^q)$ entonces $u - \Pi_q^0 u \in H^2(\mathcal{X}; E^q)$. Por lo tanto la restricción

$$\square_q|_{\mathcal{H}^{q\perp} \cap H^2(\mathcal{X}; E^q)} : \mathcal{H}^{q\perp} \cap H^2(\mathcal{X}; E^q) \rightarrow \mathcal{R}^q$$

es biyectiva además de continua. Por el Teorema de la Transformación Abierta (ver Rudin [64]), la inversa es continua (\mathcal{R}^q es un espacio completo porque es cerrado en $L^2(\mathcal{X}; E^q)$). Sea G'_q la inversa de este operador y definamos

$$G_q = G'_q \circ (I - \Pi_q^0) : L^2(\mathcal{X}; E^q) \rightarrow L^2(\mathcal{X}; E^q).$$

La imagen de G_q es un subespacio de $H^2(\mathcal{X}; E^q)$ pero usamos la inclusión en $L^2(\mathcal{X}; E^q)$; G_q es continuo, de hecho compacto porque es la composición de un

operador continuo y la inclusión $H^2(\mathcal{X}; E^q) \hookrightarrow L^2(\mathcal{X}; E^q)$ es compacta. Por su definición,

$$(6.8) \quad G_q \circ \square_q = I - \Pi_q^0, \quad \square_q \circ G_q = I - \Pi_q^0,$$

la primera igualdad en $H^2(\mathcal{X}; E^q)$, la segunda en $L^2(\mathcal{X}; E^q)$. La proyección Π_q^0 es un operador integral de núcleo de clase C^∞ (vemos esto usando una base ortogonal para escribir la proyección explícitamente). La segunda fórmula es equivalente a

$$u = \Pi_q^0 u + A_{q-1}(A_{q-1}^* \circ G_q(u)) + A_q^*(A_q \circ G_q(u)).$$

Por lo tanto, la suma a la derecha en (6.7) es todo $L^2(\mathcal{X}; E^q)$. \square

El operador G_q es el operador de Green de \square_q .

PROPOSICIÓN 6.9. *El operador de Green de \square_q es un operador pseudodiferencial de orden -2 , autoadjunto y compacto como operador*

$$(6.10) \quad G_q : L^2(\mathcal{X}; E^q) \rightarrow L^2(\mathcal{X}; E^q).$$

DEMOSTRACIÓN. En general, G_q envía $H^s(\mathcal{X}; E^q)$ en $H^{s+2}(\mathcal{X}; E^q)$: si $u \in H^s(\mathcal{X}; E^q)$ entonces

$$\square_q \circ G_q u = u - \Pi_q^0 u.$$

Como el lado derecho está en $H^s(\mathcal{X}; E^q)$ y \square_q es elíptico de orden 2, $G_q u \in H^{s+2}(\mathcal{X}; E^q)$. En particular, G_q mapea $C^\infty(\mathcal{X}; E^q)$ en $C^\infty(\mathcal{X}; E^q)$. Por elipticidad, \square_q tiene una parametriz $\tilde{G}_q \in \Psi^{-2}(\mathcal{X}; E^q)$, y existen operadores integrales $R_{i,q}, R_{d,q}$ con núcleo de clase C^∞ tales que

$$\tilde{G}_q \circ \square_q = I - R_{i,q}, \quad \square_q \circ \tilde{G}_q = I - R_{d,q},$$

Tenemos

$$G_q \circ (I - R_d) = G_q \circ (\square_q \circ \tilde{G}_q) = (G_q \circ \square_q) \circ \tilde{G}_q = (I - \Pi_q^0) \circ \tilde{G}_q$$

de donde

$$G_q - \tilde{G}_q = G_q \circ R_d - \Pi_q^0 \circ \tilde{G}_q$$

Como G_q mapea $C^\infty(\mathcal{X}; E^q)$ en $C^\infty(\mathcal{X}; E^q)$, lo mismo hacen cada uno de los términos de la derecha en la fórmula anterior. De esto deducimos que $G_q - \tilde{G}_q$ es un operador integral con núcleo de clase C^∞ con lo que resulta que G_q , al igual que \tilde{G}_q , es un operador pseudodiferencial en $\Psi^{-2}(\mathcal{X}; E^q)$, por lo tanto (6.10) es compacto, también autoadjunto (porque \square_q lo es). \square

Como Π_q^0 es un operador integral con núcleo de clase C^∞ y los operadores A_q, A_q^* son diferenciales, cualquier fórmula válida en el contexto C^∞ que involucre composiciones entre estos y los operadores de Green es válida también

en distribuciones. La imagen de Π_q^0 actuando sobre distribuciones es $\mathcal{H}_A^q(\mathcal{X})$: si ϕ_k es una base de $Ha_A^q(\mathcal{X})$,

$$\Pi_q^0(u) = \sum_k (u, \phi_k)_q \phi_k,$$

una combinación lineal de elementos de $\mathcal{H}_A^q(\mathcal{X})$, ya sea $u \in L^2(\mathcal{X}; E^q)$ o una distribución.

LEMA 6.11. *Tenemos*

$$A_q G_q = G_{q+1} A_q, \quad A_q^* G_{q+1} = G_q A_q^*,$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos

$$A_q \square_q = \square_{q+1} A_q$$

en el contexto C^∞ . Aplicando G_{q+1} a la izquierda y G_q a la derecha en ambos miembros, obtenemos

$$G_{q+1} \circ A_q \circ (I - \Pi_q^0) = (I - \Pi_{q+1}^0) \circ A_q \circ G_q.$$

Por el Lema 6.2, $A_q \circ \Pi_q^0 = 0$, y por la descomposición de Hodge, $\Pi_{q+1}^0 \circ A_q = 0$. Esto reduce la fórmula anterior a

$$G_{q+1} \circ A_q = A_q \circ G_q.$$

Un argumento similar lleva a la otra fórmula. La validez de estas fórmulas en C^∞ junto con el hecho que los operadores son diferenciales o pseudodiferenciales implica su validez también en distribuciones. Por ejemplo, la identidad $\Pi_q^0 \circ A_{q-1} = 0$ es válida en distribuciones. \square

TEOREMA 6.12 (Hodge). *Supongamos que (1.1) es elíptico y \mathcal{X} es cerrada. El grupo de cohomología $H_A^q(\mathcal{X})$ calculado en C^∞ , L^2 , o distribuciones es canónicamente isomorfo a $\mathcal{H}^q = \ker \square_q$.*

DEMOSTRACIÓN. Lo que probaremos es que cada clase de cohomología en grado q contiene un único elemento armónico. Si \mathbf{u} es una tal clase, y u es una sección distribucional de E^q que representa a \mathbf{u} y si v una sección distribucional de E^{q-1} , $\Pi_q^0(u + A_{q-1}v) = \Pi_q^0(u) \in \mathcal{H}_A^q(\mathcal{X})$. Eso establece un mapa $\Pi_q^0 : H_A^q(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{H}_A^q(\mathcal{X})$. El mapa Π_q^0 es sobreyectivo, porque cada elemento de $\mathcal{H}_A^q(\mathcal{X})$ es cerrado, y por lo tanto representa un elemento de $H_A^q(\mathcal{X})$. Si para $u \in \mathbf{u}$ tenemos $\Pi_q^0(u) = 0$, la primera fórmula en (6.8) lleva a

$$u = \Pi_q^0 u + G_q \circ A_{q-1} \circ A_{q-1}^* u + G_q \circ A_q^* \circ A_q u = G_q \circ A_{q-1} \circ A_{q-1}^* u.$$

Usando el lema anterior obtenemos

$$G_q \circ A_{q-1} \circ A_{q-1}^* u = A_{q-1} \circ G_{q-1} \circ A_{q-1}^* u.$$

por lo tanto u es exacta. Por lo tanto Π_q^0 es inyectivo, y es por lo tanto un isomorfismo. \square

Fórmula de Atiyah-Bott-Lefschetz

1. Puntos fijos y el número de Lefschetz

Sea \mathcal{X} una variedad cerrada orientable de clase C^∞ y $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. El número de Lefschetz de f es un número que representa una obstrucción a que f sea homotópico a un mapa sin puntos fijos. En la versión original de Lefschetz [44], ese número está definido usando homología, como sigue. El mapa f induce endomorfismos $\mathbf{f}_{*,q} : H_q(\mathcal{X}; \mathbb{R}) \rightarrow H_q(\mathcal{X}; \mathbb{R})$. Como \mathcal{X} es compacta, los grupos $H_q(\mathcal{X}; \mathbb{R})$ tienen dimensión finita como espacios vectoriales sobre \mathbb{R} , por lo tanto $\mathbf{f}_{*,q}$ tiene una traza $\text{tr } \mathbf{f}_{*,q}$ bien definida. El número de Lefschetz de f es

$$(1.1) \quad L_f = \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{tr } \mathbf{f}_{*,q}.$$

Para entender algo mejor lo que está pasando, usaremos una triangulación de \mathcal{X} . Pasando a un refinamiento de la triangulación y deformando f ligeramente, uno puede suponer que f manda símlices en símlices. Si f no tiene puntos fijos, podemos suponer que la triangulación es tan fina que f un símlice en un símlice distinto. Viendo a f como mapa entre símlices en lugar de cohomología, vemos que su traza es cero: usando los símlices de dimensión q como base, la matriz de f es una matriz (de enteros) con ceros en la diagonal. Por lo tanto, si $L_f \neq 0$, f debe tener puntos fijos.

El teorema de Atiyah-Bott calcula el lado derecho de (1.1) analíticamente. En la versión original de Lefschetz, la cohomología puede ser tomada como la cohomología de de Rham, en la versión de Atiyah y Bott, es un complejo diferencial elíptico de primer orden arbitrario. En la versión para el complejo de de Rham uno puede tomar un mapa $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ arbitrario y usar los mapas $f^* : C^\infty(\mathcal{X}; \Lambda^q) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; \Lambda^q)$ en cada grado q . La versión de Atiyah-Bott, estos mapas tiene que ser especificados con más detalle.

2. Triangulaciones, homología simplicial, homología singular

Un símlice lineal de dimensión q es un conjunto ordenado σ de $q + 1$ elementos de algún \mathbb{R}^m , $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_q]$, tal que $\{v_j - v_0 : j = 1, \dots, q\}$ es

un conjunto independiente. La cápsula convexa de σ ,

$$|\sigma| = \left\{ v_0 + \sum_{j=1}^q t_j (v_j - v_0) : t_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^q t_j \leq 1 \right\},$$

equivalentemente

$$|\sigma| = \left\{ \sum_{j=0}^q t_j (v_j - v_0) : t_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \sum_{j=0}^q t_j = 1 \right\}.$$

es un subconjunto cerrado de un subespacio afín de \mathbb{R}^m de dimensión q . Los vectores $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_q - v_0$, en ese orden, especifican una orientación de ese subespacio (permutaciones cíclicas no cambian la orientación).

Los puntos v_j son los vértices de σ . Cualquiera de los símlices obtenidos usando un subconjunto de los vértices de σ es una faz (o cara) de σ . El subconjunto se ordena de acuerdo al orden original del símlice. Si $\sigma = [v_0, \dots, v_q]$, su j ésima faz es $[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_q]$.

Un complejo simplicial es un conjunto K de símlices lineales tal que *i*) si $\sigma \in K$, todas las faces de σ también están en K , y *ii*) si $\sigma, \tau \in K$ y $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, entonces $\sigma \cap \tau$ es una faz de ambos (posiblemente $\sigma = \tau$). Si $\max_{\sigma \in K} \dim \sigma = n$ es finito, decimos que K es un complejo de dimensión finita n . Esto no significa que K es finito. En lo sucesivo nos limitamos a complejos simpliciales de dimensión n cuyos símlices están contenidos en algún \mathbb{R}^m fijo y tales que cada uno de ellos intersecta solo un número finito de otros símlices de K . Escribimos

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|$$

Por las restricciones que hemos impuesto sobre K , este es un subconjunto de algún \mathbb{R}^m y como tal hereda una topología.

Si K es un complejo simplicial, $K_{\leq q}$ es el conjunto de símlices de K de dimensión menor o igual a q (el q -esqueleto) y $K_q = K_{\leq q} \setminus K_{\leq q-1}$, y $S_q(K, \mathbb{Z})$ es el grupo libre generado por K_q , los símlices de dimensión q ; sus elementos son cadenas simpliciales de dimensión q . Un elemento de $S_q(K; \mathbb{Z})$ se representa como

$$\sum_{\sigma \in K_q} n_\sigma \sigma$$

con enteros n_σ , solo finitos de ellos son distintos de 0. El operador frontera

$$\partial : S_q(K, \mathbb{Z}) \rightarrow S_{q-1}(K, \mathbb{Z})$$

se define en los generadores y se extiende por linealidad: Si $\sigma = [v_0, \dots, v_q]$,

$$\partial[v_0, \dots, v_q] = \sum_{j=0}^q (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_q].$$

Con algo de paciencia se prueba que $\partial \circ \partial = 0$, y por lo tanto definen un complejo de cadena

$$S_0(K, \mathbb{Z}) \xleftarrow{\partial} S_1(K, \mathbb{Z}) \leftarrow \cdots \leftarrow S_q(K, \mathbb{Z}) \leftarrow \cdots$$

El núcleo de $\partial : S_q(K, \mathbb{Z}) \rightarrow S_{q-1}(K, \mathbb{Z})$ es $Z_q(K, \mathbb{Z})$, sus elementos son ciclos, la imagen de $\partial : S_{q+1}(K, \mathbb{Z}) \rightarrow S_q(K, \mathbb{Z})$ es $B_q(K, \mathbb{Z})$, sus elementos son fronteras, la homología del complejo simplicial en dimensión q con coeficientes en \mathbb{Z} es

$$H_q(K, \mathbb{Z}) = Z_q(K, \mathbb{Z})/B_q(K, \mathbb{Z}).$$

Si en lugar de \mathbb{Z} usamos \mathbb{R} (o un anillo R), tenemos homología con coeficientes en \mathbb{R} (o R).

Una triangulación de una variedad topológica de dimensión n es un complejo simplicial K junto con un homeomorfismo $\Phi : |K| \rightarrow \mathcal{X}$. La homología simplicial de \mathcal{X} es la de K .

Pasamos ahora a homología singular de \mathcal{X} . El símplice standard de dimensión q es $\Delta_q = [e_0, e_1, e_2, \dots, e_q]$ con $e_0 = 0$ y los e_j , $j = 1, \dots, q$ son (parte de) los sucesivos elementos de la base canónica de \mathbb{R}^m ($m \geq q$) en el orden usual. La $j^{\text{ésima}}$ faz de Δ_q es, como antes,

$$\Delta_q^j = [0, e_1, e_2, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_q].$$

Un símplice singular de \mathcal{X} es un mapa continuo $\varsigma : |\Delta_q| \rightarrow \mathcal{X}$. Si $\sigma = [v_0, \dots, v_q]$ es un símplice lineal y $\sigma : |\varsigma| \rightarrow \mathcal{X}$ es continua, entonces la composición de σ con el mapa

$$|\Delta_q| \ni \sum_{j=1}^q t_j e_j \mapsto \sum_{j=1}^q t_j v_j$$

define un símplice singular de \mathcal{X} . Por ejemplo, si $\sigma : |\Delta_q| \rightarrow \mathcal{X}$, $\sigma|_{|\Delta_q^j|}$, la restricción de σ a $|\Delta_q^{j_0}|$, determina un símplice singular vía composición con

$$|\Delta_{q-1}| \ni \sum_{j=1}^q t_j e_j \mapsto \sum_{j=1}^{j_0-1} t_j e_j + \sum_{j=j_0}^{q-1} t_j e_{j+1} \in \Delta_q^{j_0}$$

El grupo libre generado por los símplices singulares de dimensión q es $S_q(\mathcal{X}; \mathbb{Z})$. Sus elementos, representados como sumas finitas

$$\sum_{\sigma: |\Delta_q| \rightarrow \mathcal{X}} c_\sigma \sigma$$

con coeficientes en \mathbb{Z} (solo finitos de ellos pueden no ser nulos) son cadenas singulares de dimensión q . El operador frontera $\partial : S_q(\mathcal{X}; \mathbb{Z}) \rightarrow S_{q-1}(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$ se define, como antes, sobre generadores, y se extiende por linealidad:

$$\text{si } \sigma : |\Delta_q| \rightarrow \mathcal{X}, \quad \partial(\sigma) = \sum_{j=0}^q (-1)^j \sigma|_{|\Delta_q^j|}$$

De nuevo $\partial \circ \partial = 0$. El complejo de cadena

$$S_0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \xleftarrow{\partial} S_1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \leftarrow \cdots \leftarrow S_q(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \leftarrow \cdots$$

La homología de este complejo es la homología singular de \mathcal{X} con coeficientes en \mathbb{Z} . Si en lugar de \mathbb{Z} usamos \mathbb{R} , entonces es la homología con coeficientes en \mathbb{R} .

TEOREMA 2.1. *Si K es una triangulación de \mathcal{X} , los grupos de homología simplicial de \mathcal{X} son canónicamente isomorfos a los de la homología singular.*

Para la demostración ver Hatcher [24, p. 128]. Fijada el complejo simplicial K y el homomorfismo $\phi: |K| \rightarrow \mathcal{X}$, si σ es un q -símplice de K , entonces $\phi|_{|\sigma|}: |\sigma| \rightarrow \mathcal{X}$ es un símplice singular (vía composición con el mapa $|\Delta_q| \rightarrow |\sigma|$). Esto define un mapa $S_q(K, \mathbb{Z}) \rightarrow S_q(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$ para cada q los cuales forman diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & S_{q-1}(K, \mathbb{Z}) & \longleftarrow & S_q(K, \mathbb{Z}) & \longleftarrow & S_{q+1}(K, \mathbb{Z}) & \longleftarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longleftarrow & S_{q-1}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) & \longleftarrow & S_q(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) & \longleftarrow & S_{q+1}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

con los operadores frontera. De esto uno obtiene un mapa

$$H_q(K, \mathbb{Z}) \rightarrow H_q(\mathcal{X}, \mathbb{Z}).$$

El trabajo serio es probar que este mapa es un isomorfismo.

Los grupos $S^q(\mathcal{X}; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(S_q(\mathcal{X}; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ también forman un complejo. Cada mapa $\partial: S^{q+1}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \rightarrow S^q(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$ induce un mapa dual $\partial': S^q(\mathcal{X}; \mathbb{Z}) \rightarrow S^{q+1}(\mathcal{X}; \mathbb{Z})$: si $\phi: S_q(\mathcal{X}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ es un homomorfismo, $\phi \circ \partial: S^{q+1}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ es un homomorfismo. Estos se ensamblan en el complejo de cocadenas singulares

$$S^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial'} S^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \rightarrow \cdots \rightarrow S^q(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \rightarrow \cdots$$

(es inmediato que $\partial' \circ \partial' = 0$). Los respectivos grupos, núcleo/imagen, los grupos de cohomología singular de \mathcal{X} .

Pasando ahora a coeficientes reales, los grupos $S_q(\mathcal{X}; \mathbb{R})$ son espacios vectoriales reales y ∂' es el dual de ∂ . El teorema que interesa ahora es:

TEOREMA 2.2 (de Rham [63]). *Si \mathcal{X} es una variedad de clase C^∞ , los grupos de cohomología singular $H^q(\mathcal{X}; \mathbb{R})$ son isomorfos a los grupos de cohomología del complejo de de Rham.*

El libro de Hodge [28] tiene una demostración de este teorema probablemente más legible que la de de Rham para un analista. La estrategia es probar que dada una base de $H_q(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ representada por cadenas cerradas $\sigma_1, \dots, \sigma_{b_q}$ formadas cada una por símplices con caras de clase C^2 , existen q -formas diferenciales ω cerradas de clase C^2 tales que

$$\int_{\sigma_i} \omega_j = \delta_{ij}.$$

[28, p. 88]

Supongamos ahora que \mathcal{X} es compacta. En este caso, los espacios de homología y de cohomología de \mathcal{X} son finitamente generados. Los mapas $\mathbf{f}_{q,*} : H_q(K, \mathbb{R}) \rightarrow H_q(K, \mathbb{R})$ determinan por dualidad mapas $\mathbf{f}_q^* : H_q(K, \mathbb{R}) \rightarrow H_q(K, \mathbb{R})$. Con ellos, todavía

$$L_f = \sum_q (-1)^q \operatorname{tr} \mathbf{f}_q^*.$$

Vía el teorema de de Rham, estos mapas son los mismos que uno obtiene usando f^* con formas diferenciales. Esto lleva a considerar el número de Lefschetz en el contexto de cohomología de de Rham. Aquí empieza el trabajo de un analista.

Incidentalmente, la Proposición 4.5 con $S^q = S^q(K, \mathbb{R})$, el Teorema 2.2 (con \mathcal{X} compacto), el Teorema 2.1 y $\dim S^q(K, \mathbb{R}) = \dim S_q(K, \mathbb{R})$ implican que

$$\sum_{q=0}^{\dim \mathcal{X}} (-1)^q \dim H_{\text{dR}}^q(\mathcal{X}) = \sum_{q=0}^{\dim \mathcal{X}} (-1)^q \dim S_q(K, \mathbb{R}).$$

El lado izquierdo se refiere a la cohomología de de Rham. Los números $b_q = \dim H_{\text{dR}}^q(\mathcal{X})$ son los números de Betti. derecho es la fórmula que nos enseñan para la característica de Euler.

Como las cosas dependen de la existencia de triangulaciones, remarcamos que variedades de clase C^1 son triangulables (Cairns [11], Whitehead [81]). Variedades topológicas de dimensión 2 son triangulables (Radó [61]), también de dimensión 3 (Moise [55]). En dimensiones 2 y 3 (resp. Radó y Moise) las triangulaciones son esencialmente únicas.

3. Complejos de espacios vectoriales de dimensión finita

El siguiente resultado permite calcular el número de Lefschetz explícitamente si uno conoce la triangulación (en el caso de dimensión finita).

PROPOSICIÓN 3.1. *Dado el complejo (V.4.6) con los S^q espacios vectoriales de dimensión finita, con productos internos (Hermitianos si son complejos), supongamos también dados mapas $\mathbf{f}_q : S^q \rightarrow S^q$ en todos los grados q tales que*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & S^{q-1} & \xrightarrow{\mathbf{a}_{q-1}} & S^q & \xrightarrow{\mathbf{a}_q} & S^{q+1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \mathbf{f}^{q-1} & & \downarrow \mathbf{f}^q & & \downarrow \mathbf{f}^{q+1} \\ \dots & \longrightarrow & S^{q-1} & \xrightarrow{\mathbf{a}_{q-1}} & S^q & \xrightarrow{\mathbf{a}_q} & S^{q+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

conmuta. Cada \mathbf{f}_q induce un mapa en cohomología, $\mathbf{f}_q : H^q \rightarrow H^q$. Como los espacios H^q son finito-dimensionales, estos operadores, al igual que los \mathbf{f}_q , tienen traza bien definida. Esas trazas están relacionadas por la fórmula

$$\sum_{q=0}^r (-1)^q \operatorname{tr} \mathbf{f}_q = \sum_{q=0}^r (-1)^q \operatorname{tr} \mathbf{f}_q.$$

DEMOSTRACIÓN. Usaremos la notación de la Sección V.4. Probaremos primero que los mapas

$$\mathbf{f}_q : H^q \rightarrow H^q, \quad \pi_q^0 \mathbf{f}^q|_{\mathfrak{h}^q} : \mathfrak{h}^q \rightarrow \mathfrak{h}^q$$

tienen la misma traza. En la descomposición (V.4.4) del espacio S^q , denotamos por

$$\pi_q^\uparrow, \pi_q^\downarrow : S^q \rightarrow S^q,$$

respectivamente, a las proyecciones ortogonales en $\text{rg } \mathfrak{a}_{q-1}$ y $\text{rg } \mathfrak{a}_q^*$. Estas proyecciones pueden ser escritas usando los operadores \mathfrak{g}_q :

$$\pi_q^\uparrow = \mathfrak{a}_{q-1} \mathfrak{a}_{q-1}^* \mathfrak{g}_q, \quad \pi_q^\downarrow = \mathfrak{a}_q^* \mathfrak{a}_q \mathfrak{g}_q.$$

Debido a las definiciones,

$$(3.2) \quad I = \pi_q^0 + \pi_q^\uparrow + \pi_q^\downarrow.$$

Esta fórmula es similar a (V.4.17). Si $u \in \ker \mathfrak{a}_q$ representa un elemento $\mathbf{u} \in H^q$, entonces

$$\mathbf{f}^q u = (\pi_q^0 + \pi_q^\uparrow + \pi_q^\downarrow) \mathbf{f}^q u = \pi_q^0 \mathbf{f}^q u + \pi_q^\uparrow \mathbf{f}^q u,$$

la última igualdad porque

$$\pi_q^\downarrow \mathbf{f}^q u = \mathfrak{a}_q^* \mathfrak{g}_{q+1} \mathfrak{a}_q \mathbf{f}^q u = \mathfrak{a}_q^* \mathfrak{g}_{q+1} \mathbf{f}^{q+1} \mathfrak{a}_q u.$$

Como $\pi_q^\uparrow \mathbf{f}^q u$ es exacta, la clase $\mathbf{f}^q \mathbf{u}$ de $\mathbf{f}^q u$ en H^q es representada por el elemento $\pi_q^0 \mathbf{f}^q u \in \mathfrak{h}^q$. Vemos que \mathbf{f}^q , como operador $\mathfrak{h}^q \rightarrow \mathfrak{h}^q$, es $\pi_q^0 \mathbf{f}^q|_{\mathfrak{h}^q}$. Esto demuestra que con el isomorfismo canónico $\pi_q^0 : H^q \rightarrow \mathfrak{h}^q$,

$$\pi_q^0 \mathbf{f}^q \mathbf{u} = \pi_q^0 \mathbf{f}^q \pi_q^0 \mathbf{u}.$$

Como π_q^0 es un isomorfismo que entrelaza \mathbf{f}^q y $\pi_q^0 \mathbf{f}^q|_{\mathfrak{h}^q}$,

$$\text{tr } \mathbf{f}^q = \text{tr } \pi_q^0 \mathbf{f}^q|_{\mathfrak{h}^q}.$$

Usando (3.2) de nuevo,

$$\mathbf{f}^q = (\pi_q^0 + \pi_q^\uparrow + \pi_q^\downarrow) \mathbf{f}^q (\pi_q^0 + \pi_q^\uparrow + \pi_q^\downarrow)$$

Expandiendo obtenemos una descomposición de \mathbf{f}^q en bloques, en donde vemos que solo los bloques diagonales contribuyen a la traza:

$$\text{tr } \mathbf{f}^q = \text{tr}(\pi_q^0 \mathbf{f}^q \pi_q^0 + \pi_q^\uparrow \mathbf{f}^q \pi_q^\uparrow + \pi_q^\downarrow \mathbf{f}^q \pi_q^\downarrow) = \text{tr } \pi_q^0 \mathbf{f}^q \pi_q^0 + \text{tr } \pi_q^\uparrow \mathbf{f}^q \pi_q^\uparrow + \text{tr } \pi_q^\downarrow \mathbf{f}^q \pi_q^\downarrow$$

Definimos

$$\mathbf{f}_\square^q = \pi_q^0 \mathbf{f}^q \pi_q^0 + \pi_q^\uparrow \mathbf{f}^q \pi_q^\uparrow + \pi_q^\downarrow \mathbf{f}^q \pi_q^\downarrow$$

tenemos

$$\mathfrak{a}_q \mathbf{f}_\square^q = \mathfrak{a}_q \pi_q^\downarrow \mathbf{f}^q \pi_q^\downarrow = \pi_{q+1}^\uparrow \mathfrak{a}_q \mathbf{f}^q \pi_q^\downarrow = \pi_{q+1}^\uparrow \mathbf{f}^{q+1} \mathfrak{a}_q \pi_q^\downarrow = \pi_{q+1}^\uparrow \mathbf{f}^{q+1} \pi_{q+1}^\uparrow \mathfrak{a}_q = \mathbf{f}_\square^{q+1} \mathfrak{a}_q.$$

Por lo tanto, los mapas \mathbf{f}_\square^q también definen mapas

$$\mathbf{f}_\square^q : H^q \rightarrow H^q$$

Si de nuevo $u \in \ker \mathbf{a}_q$, entonces, igual como con \mathbf{f}^q ,

$$\mathbf{f}_\square^q u = \pi_q^0 \mathbf{f}_\square^q + \pi_q^\uparrow \mathbf{f}_\square^q u,$$

y de aquí vemos que \mathbf{f}_\square^q , como mapa $\mathfrak{h}^q \rightarrow \mathfrak{h}^q$, es igual al mapa definido por \mathbf{f}^q . Por lo tanto,

$$\mathrm{tr} \mathbf{f}^q = \mathrm{tr} \mathbf{f}_\square^q.$$

Establecemos ahora una relación entre $\pi_q^\uparrow \mathbf{f}^q \pi_q^\uparrow$ y $\pi_{q-1}^\downarrow \mathbf{f}^{q-1} \pi_{q-1}^\downarrow$. Usando (3.2) y

$$\mathbf{f}^q \mathbf{a}_{q-1} = \mathbf{a}_{q-1} \mathbf{f}^{q-1}, \quad \mathfrak{g}_q \mathbf{a}_{q-1} = \mathbf{a}_{q-1} \mathfrak{g}_{q-1}, \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_{q-1}^* = \pi_{q-1}^\downarrow \mathbf{a}_{q-1}^*$$

en ese orden, tenemos

$$\begin{aligned} \pi_q^\uparrow \mathbf{f}^q \pi_q^\uparrow &= \mathbf{a}_{q-1} \mathbf{a}_{q-1}^* \mathfrak{g}_q \mathbf{f}^q \mathbf{a}_{q-1} \mathbf{a}_{q-1}^* \mathfrak{g}_q \\ &= \mathbf{a}_{q-1} \mathbf{a}_{q-1}^* \mathfrak{g}_q \mathbf{a}_{q-1} \mathbf{f}^{q-1} \mathbf{a}_{q-1}^* \mathfrak{g}_q \\ &= \mathbf{a}_{q-1} \mathbf{a}_{q-1}^* \mathbf{a}_{q-1} \mathfrak{g}_{q-1} \mathbf{f}^{q-1} \mathbf{a}_{q-1}^* \mathfrak{g}_q \\ &= \mathbf{a}_{q-1} \pi_{q-1}^\downarrow \mathbf{f}^{q-1} \pi_{q-1}^\downarrow \mathbf{a}_{q-1}^* \mathfrak{g}_q. \end{aligned}$$

El operador

$$\mathbf{a}_{q-1}^* \mathfrak{g}_q |_{\mathrm{rg} \mathbf{a}_{q-1}} : \mathrm{rg} \mathbf{a}_{q-1}^\uparrow \rightarrow \mathrm{rg} \mathbf{a}_{q-1}^*$$

es invertible, con inversa \mathbf{a}_{q-1} . En efecto, $\mathbf{a}_{q-1} \mathbf{a}_{q-1}^* \mathfrak{g}_q = \pi_q^\uparrow$, el cual como operador $\mathrm{rg} \mathbf{a}_{q-1}^\uparrow \rightarrow \mathrm{rg} \mathbf{a}_{q-1}^\uparrow$ es la identidad. De esto concluimos que

$$\mathrm{tr} \pi_q^\uparrow \mathbf{f}^q \pi_q^\uparrow = \mathrm{tr} \pi_{q-1}^\downarrow \mathbf{f}^{q-1} \pi_{q-1}^\downarrow.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^r (-1)^q \mathrm{tr} \mathbf{f}^q &= \sum_{q=0}^r (-1)^q \mathrm{tr} \mathbf{f}_\square^q \\ &= \sum_{q=0}^r (-1)^q \mathrm{tr} \pi_q^0 \mathbf{f}_\square^q \pi_q^0 + \sum_{q=0}^r (-1)^q \mathrm{tr} \pi_q^\uparrow \mathbf{f}_\square^q \pi_q^\uparrow + \sum_{q=0}^r (-1)^q \mathrm{tr} \pi_q^\downarrow \mathbf{f}_\square^q \pi_q^\downarrow \\ &= \sum_{q=0}^r (-1)^q \mathrm{tr} \pi_q^0 \mathbf{f}_\square^q \pi_q^0 + \sum_{q=0}^r (-1)^q \mathrm{tr} \pi_{q-1}^\downarrow \mathbf{f}^{q-1} \pi_{q-1}^\downarrow + \sum_{q=0}^r (-1)^q \mathrm{tr} \pi_q^\downarrow \mathbf{f}_\square^q \pi_q^\downarrow \\ &= \sum_{q=0}^r (-1)^q \mathrm{tr} \pi_q^0 \mathbf{f}_\square^q \pi_q^0 \\ &= \sum_{q=0}^r (-1)^q \mathrm{tr} \mathbf{f}^q. \end{aligned}$$

□

4. El teorema de Lefschetz de Atiyah-Bott

Continuamos con una variedad cerrada. suponemos dado el complejo elíptico

$$(4.1) \quad 0 \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; E^0) \xrightarrow{A_0} C^\infty(\mathcal{X}; E^1) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; E^{r-1}) \xrightarrow{A_{r-1}} C^\infty(\mathcal{X}; E^r) \rightarrow 0.$$

Fijamos una densidad m en \mathcal{X} de clase C^∞ y métricas Hermitianas en cada fibrado E^q .

Los mapas $\Phi^q : C^\infty(\mathcal{X}; E^r) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; E^r)$ se definen usando los siguientes ingredientes. Un difeomorfismo $f : X \rightarrow \mathcal{X}$, y morfismos $\phi^q : E^q \rightarrow E^q$ que cubren f^{-1} (ver la Sección II.10) con una propiedad adicional especificada en un momento (todos los mapas son de clase C^∞). Denotando la restricción de ϕ^q a E_p por ϕ_p^q , este es un mapa lineal $E_p \rightarrow E_{f^{-1}(p)}$. Con f y ϕ^q definimos

$$\Phi^q : C^\infty(\mathcal{X}; E^r) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; E^r)$$

como sigue:

$$\text{si } \eta \in C^\infty(\mathcal{X}; E^q), \text{ sea } \Phi^q(\eta)(p) = \phi_{f(p)}^q(\eta(f(p))).$$

Desenredando la definición, vemos que $\Phi^q(\eta)(p) \in E_p$, por lo tanto esto define una sección E^q . Como los ingredientes son todos de clase C^∞ , el resultado también lo es. Requerimos ahora que

$$(4.2) \quad A_q \Phi^q = \Phi^{q+1} A_q.$$

Es decir, los A_q forman un mapa de cocadena

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C^\infty(\mathcal{X}; E^{q-1}) & \xrightarrow{A_{q-1}} & C^\infty(\mathcal{X}; E^q) & \xrightarrow{A_q} & C^\infty(\mathcal{X}; E^{q+1}) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \Phi^{q-1} & & \downarrow \Phi^q & & \downarrow \Phi^{q+1} \\ \dots & \longrightarrow & C^\infty(\mathcal{X}; E^{q-1}) & \xrightarrow{A_{q-1}} & C^\infty(\mathcal{X}; E^q) & \xrightarrow{A_q} & C^\infty(\mathcal{X}; E^{q+1}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

el cual como ya hemos visto en varios contextos, define mapas en cohomología,

$$\Phi^q : H_A^q \rightarrow H_A^q.$$

La colección de morfismos ϕ^q cubriendo f^{-1} con la propiedad (4.2) es un morfismo geométrico.

Como \mathcal{X} es compacta y el complejo es elíptico, los grupos (i.e., espacios vectoriales) de cohomología son de dimensión finita, por lo tanto los Φ^q tienen trazas bien definidas, y podemos definir el número de Lefschetz:

$$L_\Phi = \sum_{q=0}^r (-1)^q \text{tr } H_A^q.$$

Si p_0 es un punto fijo de f (denotamos $\text{Fix}(f)$ al conjunto de puntos fijos de f), entonces $\phi_{p_0}^q$ es un mapa $E_{p_0} \rightarrow E_{p_0}$ para cualquier q . Estos son de nuevo

mapas entre espacios de dimensión finita (las fibras $E_{p_0}^q$ de los varios E^q) y por lo tanto tenemos trazas bien definidas $\text{tr } \phi_{p_0}^q$.

En el teorema original de Atiyah-Bott hay una condición adicional sobre el mapa f : que el Jacobiano de f en cada punto fijo no tiene el número 1 como autovalor. esto es:

$$\text{si } f(p_0) = p_0, \text{ entonces } \det(I - df(p_0)) \neq 0$$

Decimos que f los puntos fijos de f son no-degenerados. El conjunto de puntos fijos no-degenerados de f es un conjunto discreto, por lo tanto finito porque \mathcal{X} es compacta.

TEOREMA 4.3 (Atiyah-Bott). *Si los puntos fijos de f son no-degenerados, entonces*

$$L_\Phi = \sum_{p \in \text{Fix}(f)} \sum_{q=0}^r (-1)^q \frac{\text{tr } \phi_p^q}{|\det(I - df(p_0))|}.$$

La demostración es la conjunción de dos pasos: primero, relacionar L_Φ con la traza de los mapas Φ^q (explicamos esta traza en el siguiente párrafo), luego calcular esas trazas.

Si $E \rightarrow \mathcal{X}$ es un fibrado vectorial con métrica Hermitiana y Q es un operador lineal $L^2(\mathcal{X}; E) \rightarrow L^2(\mathcal{X}; E)$ con núcleo de Schwartz K_Q continuo, podemos restringir K_Q a la diagonal en $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Usando $\iota : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, $\iota(p) = (p, p)$, esta restricción es $\iota^* K_Q$. El resultado es una sección continua del fibrado de endomorfismos de E : para cada $p \in \mathcal{X}$, $\iota^* K_Q(p)$ es un mapa lineal $E_p \rightarrow E_p$. Este mapa tiene traza, $\text{tr}(\iota^* K_Q(p))$, una función continua de p . La traza¹ de Q

¹Para relacionar esta fórmula con la traza de un operador en un espacio de dimensión finita, supongamos que K es suficientemente regular. Lo siguiente puede ser justificado rigurosamente (convergencia de sumas, cambios en el orden de integración) pero dejaremos eso de lado. Sea $\psi_0, \psi_1 \dots$ es una base ortonormal de $L^2(\mathcal{X}; E)$. Comenzando con

$$Q(u)(p) = \int_{\mathcal{X}} K(p, p')u(p') \, d\mathbf{m}(p'),$$

pasando a la serie de Fourier de $Q(u)$,

$$Q(u)(p) = \sum_j (Q(u), \psi_j) \psi_j(p) = \sum_j \int_{\mathcal{X}} (K(\cdot, p'), \psi_j) u(p') \, d\mathbf{m}(p')$$

(la segunda igualdad resulta de cambiar el orden de integración) y sustituyendo

$$u = \sum_k (u, \psi_k) \psi_k$$

obtenemos

$$Q(u) = \sum_{j,k} K_{jk}(u, \psi_k) \psi_j$$

con

$$K_{kj} = \int_{\mathcal{X}} (K(\cdot, p'), \psi_j) \psi_k(p') \, d\mathbf{m}(p').$$

Notando que

$$\sum_j (K(\cdot, p'), \psi_j) \psi_j(p') = K(p', p')$$

se define como

$$\text{Tr } Q = \int_{\mathcal{X}} \text{tr}(\iota^* K_Q) \, d\mathbf{m}.$$

Si $\text{tr}(\iota^* K_Q)$ es una distribución, interpretamos la fórmula en sentido distribucional:

$$\text{Tr } Q = \langle \text{tr}(\iota^* K_Q), 1 \rangle.$$

Como veremos en un momento, el núcleo de Schwartz de Φ^q es una distribución en $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ con soporte en el gráfico de f ,

$$\Gamma(f) = \{(p, f(p)) : p \in \mathcal{X}\}.$$

Debido a esto, la restricción de su núcleo de Schwartz a la diagonal, $\iota^* K_{\Phi^q}$, es un asunto delicado. Es aquí donde la hipótesis sobre f entra en juego.

Para ver esto consideremos momentáneamente como modelo el caso de f actuando sobre funciones, $u \mapsto u \circ f = f^*u$. Lo siguiente está basado en Guillemin-Strengberg [22, Cap 6, §2]. Suponiendo $u, v \in C^\infty(\mathcal{X})$, tenemos

$$\langle f^*u, v \rangle = \int_K f^*u(p) v(p) \, d\mathbf{m}(p) = \int u(f(p))v(p) \, d\mathbf{m}(p) = \langle K, v \boxtimes u \rangle$$

donde $(v \boxtimes u)(p, p') = v(p)u(p')$ y K es la distribución que aplicada a $w \in C^\infty(\mathcal{X})$ produce

$$\langle K, w \rangle = \int_{\mathcal{X}} w(p, f(p)) \, d\mathbf{m}(p).$$

Evidentemente, si w es cero cerca de $\Gamma(f)$, entonces $\langle K, w \rangle = 0$. Por lo tanto, el soporte de K es $\Gamma(f)$. El mismo argumento, con algo más de cuidado en la definición de K , vale en el caso de Φ^q . Continuando con el modelo, vemos que los únicos sitios donde hay problemas con la restricción a $\text{diag}(\mathcal{X})$ son los puntos de $\Gamma(f) \cap \text{diag}(\mathcal{X})$: los puntos fijos de f . Si $p_0 \in \text{Fix}(f)$ y $\chi \in C^\infty(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ tiene soporte contenido en un entorno suficientemente pequeño de p_0 y es igual a 1 cerca de p_0 , entonces la restricción de χK a $\text{diag}(\mathcal{X})$ ofrece dificultades solo en (p_0, p_0) . Escogiendo coordenadas cerca de p_0 , denotando $x^0 = x(p)$, podemos escribir

$$\chi(x, f(x))w(x, f(x)) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(f(x)-x') \cdot \xi} \chi(x, x')w(x, x') \, dx' \, d\xi$$

y con esto,

$$\langle \chi K, w \rangle = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(f(x)-x') \cdot \xi} \, d\xi \right] \chi(x, x')w(x, x') \, dx' \, \mathbf{m}_0(x) \, dx$$

resulta

$$\sum_j K_{jj} = \int_{\mathcal{X}} (K(\cdot, p'), \psi_j) \psi_j(p') \, d\mathbf{m}(p') = \int_{\mathcal{X}} K(p', p') \, d\mathbf{m}(p')$$

Esto es, en coordenadas locales, y abusando de la notación pretendiendo que la integral realmente es una integral,

$$(4.4) \quad \chi(x, x')K(x, x') = \frac{\chi(x, x')}{(2\pi)^n} \int e^{i(f(x)-x') \cdot \xi} d\xi.$$

La integral es en realidad una distribución obtenida como sigue. Escogemos una función $\omega \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\omega(\xi) = 1$ si ξ está cerca de 0 y trabajamos con

$$(4.5) \quad \chi(x, x')K_\varepsilon(x, x') = \frac{\chi(x, x')}{(2\pi)^n} \int e^{i(f(x)-x') \cdot \xi} \omega(\varepsilon\xi) d\xi, \quad \varepsilon > 0.$$

La integral ahora es legal y uno puede probar que el límite en distribuciones cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ es la “integral” original. La expansión de Taylor de primer orden de la componente f_j de f alrededor de x^0 es

$$f_j(x) = x_j^0 + \sum_{k=1}^n F_{kj}(x, x^0)(x_k - x_k^0)$$

usando que $f(x^0) = x^0$, con

$$F_{kj}(x^0, x^0) = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x^0).$$

En (4.5) reemplazamos $x' = x$. Esto es restringir a la diagonal; no hay problema con esto porque $\chi(x, x')K_\varepsilon(x, x')$ es de clase C^∞ . En el exponente $(f(x) - x) \cdot \xi$ reemplazamos f :

$$\begin{aligned} (f(x) - x) \cdot \xi &= \sum_{j=1}^n (x_j^0 - x_j) \xi_j + \sum_{j,k=1}^n F_{kj}(x, x^0)(x_k - x_k^0) \xi_j \\ &= \sum_{j=1}^n (x_j^0 - x_j) \sum_{k=1}^n (\delta_{jk} - F_{jk}(x, x^0)) \xi_k \end{aligned}$$

Escribimos esto como $(x^0 - x) \cdot (I - F(x, x^0))\xi$ con la matriz $F(x, x^0) = [F_{jk}(x, x^0)]$, ξ visto como columna. Reemplazando esto en el exponente en (4.4) obtenemos

$$(4.6) \quad \chi(x, x)K_\varepsilon(x, x) = \frac{\chi(x, x)}{(2\pi)^n} \int e^{i(x^0 - x) \cdot (I + F(x, x^0))\xi} \omega(\varepsilon\xi) d\xi.$$

Hasta ahora no hemos usado ninguna propiedad de f excepto que es de clase C^∞ . Suponemos ahora que p_0 es un punto crítico no-degenerado. La matriz $F(x^0, x^0)$ es la matriz Jacobiana de f en x_0 , y la condición de no-degeneración de f en p_0 es que $(I - df(x^0))$ es no-degenerada. Por lo tanto, el cambio de variables

$$\eta = (I - F(x, x^0))\xi$$

es legal si x está cerca de x^0 , lo que aseguramos escogiendo el soporte de χ con algo de cuidado. El cambio de variables lleva a

$$(4.7) \quad \chi(x, x)K_\varepsilon(x, x) = \frac{\chi(x, x)}{(2\pi)^n} \int e^{i(x^0-x)\cdot\eta} \frac{\omega(\varepsilon\xi(x, x^0, \eta))}{|\det(I - F(x, x^0))|} d\eta$$

con $\xi(x, x^0, \eta) = (I - F(x, x^0))^{-1}\eta$. Vemos aquí como aparece el factor en el denominador. Al tomar el límite con $\varepsilon \rightarrow 0$, esto converge a

$$\frac{\chi(x, x)}{|\det(I - F(x, x^0))|} \delta_{x^0} = \frac{\chi(x^0, x^0)}{|\det(I - F(x^0, x^0))|} \delta_{x^0} = \frac{1}{|\det(I - df(x^0))|} \delta_{x^0}(x)$$

donde δ_{x^0} es la delta de Dirac en x^0 . Hemos usado $g(x)\delta_{x^0}(x) = g(x^0)\delta_{x^0}(x)$ si g es continua. Por lo tanto

$$\iota^* K = \sum_{p \in \text{Fix}(f)} \frac{1}{|\det(I - df(p))|} \delta_{x^0}$$

si cada punto fijo de f es no-degenerado.

En el caso de los Φ^q y el número de Lefschetz, debemos llevar el problema a uno donde las cuentas anteriores son relevantes. Hacemos esto usando la resolvente de \square_q . Esta es la familia

$$\lambda \mapsto (\square_q - \lambda I)^{-1}, \quad \lambda \in \text{res}(\square_q)$$

donde $\text{res}(\square_q) = \mathbb{C} \setminus \text{spec}(\square_q)$ es el conjunto resolvente de \square_q . Los Laplacianos \square_q son operadores diferenciales elípticos de orden 2, autoadjuntos como operadores (V.6.5), con parametriz G_q compacta como operador (6.10). Por lo tanto su espectro es un subconjunto discreto de \mathbb{R} sin puntos de acumulación. La propiedad

$$(\square_q u, u)_q \geq 0$$

con el producto interno en $L^2(\mathcal{X}; E^q)$ implica que el espectro es un conjunto de números no-negativos. Sea

$$\mathcal{E}_\lambda^q = \ker(\square_q - \lambda I).$$

Debido a la elipticidad de $\square_q - \lambda I$ y la compacidad de \mathcal{X} , este es un subespacio de $C^\infty(\mathcal{X}; E^q)$ de dimensión finita. Si λ no es un autovalor de \square_q , $\mathcal{E}_\lambda^q = 0$. Definimos

$$\Pi_q^{\mathcal{E}_\lambda^q} : L^2(\mathcal{X}; E^q) \rightarrow L^2(\mathcal{X}; E^q)$$

como la proyección ortogonal en \mathcal{E}_λ^q . Usamos esto para escribir la resolvente como

$$(4.8) \quad (\square_q - \lambda I)^{-1} = \sum_{\zeta \in \text{spec}(\square_q)} \frac{1}{\zeta - \lambda} \Pi_q^{\mathcal{E}_\zeta^q}.$$

El lado derecho de esta fórmula converge puntualmente (aunque no en norma): si $u \in L^2(\mathcal{X}; E^q)$, entonces²

$$\|u\|_q^2 = \sum_{\zeta \in \text{spec}(\square_q)} \|\Pi_q^{\varepsilon_\zeta^q} u\|_q^2$$

(esto es fácil de ver usando la identidad de Parseval). Esto de inmediato implica

$$\sum_{\substack{\lambda \in \text{spec}(\square_q) \\ \zeta' \leq \zeta < \zeta''}} \frac{1}{|\zeta - \lambda|^2} \|\Pi_q^{\varepsilon_\zeta^q} u\|_q^2 \rightarrow 0 \text{ cuando } \zeta', \zeta'' \rightarrow \infty \text{ con } \zeta' < \zeta''$$

de lo cual deducimos que la sucesión de sumas parciales es de Cauchy. El operador $(\square_q - \lambda I)^{-1}$ es continuo como operador $L^2(\mathcal{X}; E^q) \rightarrow L^2(\mathcal{X}; E^q)$, un operador pseudodiferencial de orden -2 que depende analíticamente de $\lambda \in \text{res}(\square_q)$. Su núcleo de Schwartz no es una función (es una distribución con soporte singular en la diagonal de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$). Para obtener una función, diferenciamos con respecto a λ un número de veces y así obtener un denominador útil en lo que a convergencia se refiere. Obtenemos

$$(4.9) \quad (\square_q - \lambda I)^{-\ell} = \sum_{\zeta \in \text{spec}(\square_q)} \frac{1}{(\zeta - \lambda)^\ell} \Pi_q^{\varepsilon_\zeta^q}.$$

Observamos que por ser la inversa de un operador elíptico, esta es una familia de operadores pseudodiferenciales. Con $n = \dim \mathcal{X}$, sabemos por el Lema III.4.13 que su núcleo es una función continua si el orden de $(\square_q - \lambda I)^{-\ell}$ es menor que $-n$, esto es, si $\ell > n/2$.

El rol de (4.9) es que (con ℓ suficientemente grande), su núcleo de Schwartz, K_q^λ , es continua y $(-\lambda)^\ell K_q^\lambda$ converge al núcleo de Schwartz de la identidad cuando $\lambda \rightarrow -\infty$. El efecto neto será que

$$(-\lambda)^\ell \text{Tr}(\Phi^q \circ (\square_q - \lambda I)^{-\ell}) \rightarrow \text{Tr} \Phi^q \text{ cuando } \lambda \rightarrow -\infty.$$

Este es el ingrediente básico de la segunda fase de lo que probaremos; el cómputo final es similar al del modelo que describimos arriba. La primera fase involucra probar

$$(4.10) \quad L_\Phi = (-\lambda)^\ell \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{Tr}(\Phi^q \circ (\square_q - \lambda I)^{-\ell})$$

lo cual conlleva como paso intermedio probar

$$(4.11) \quad \text{Tr}(\Phi^q \circ (\square_q - \lambda I)^{-\ell}) = \sum_{\zeta \in \text{spec}(\square_q)} \frac{1}{(\zeta - \lambda)^\ell} \text{Tr}(\Phi^q \circ \Pi_q^{\varepsilon_\zeta^q})$$

(un intercambio de límites) y es en esto que enfocamos la atención ahora.

²El subíndice q es una referencia a E^q , no a la norma en un espacio de Sobolev.

Comenzamos con probar que $\text{Tr}(\Phi^q \circ (\square_q - \lambda I)^{-\ell})$ está bien definida. Suponemos que hemos fijado ℓ suficientemente grande de manera que K_q^λ , el núcleo de Schwartz de (4.9), es continuo. Hay dos puntos de vista equivalentes sobre este núcleo. Uno, que es una sección (continua) del fibrado $\text{Hom}(\pi_D^* E, \pi_I^* E) \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ (ver la parte final de la Sección II.10) obtenido usando usando las proyecciones

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{X} \times \mathcal{X} & \\ \pi_I \swarrow & & \searrow \pi_D \\ \mathcal{X} & & \mathcal{X} \end{array}$$

La fibra de $\text{Hom}(\pi_D^* E, \pi_I^* E) \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ sobre (p, p') es un mapa lineal $E_p \rightarrow E_{p'}$. Desde este punto de vista, $K_q^\lambda(p, p') : E_{p'} \rightarrow E_p$ es lineal y si u es una sección de E , digamos continua, entonces $K_q^\lambda(p, p')(u(p'))$ es un elemento de E_p . La integral

$$\int_{\mathcal{X}} K_q^\lambda(p, p') u(p') \, dm(p')$$

es una integral de una función $\mathcal{X} \rightarrow E_p$. El resultado con p variando es una sección de E . El otro punto de vista es simplemente ver $\text{Hom}(\pi_D^* E, \pi_I^* E)$ como el fibrado $\pi_I^* E \otimes \pi_R^* E^*$. A veces es más fácil ver K_q^λ usando una versión, a veces la otra.

Calculamos $\Phi^q \circ (\square - \lambda I)^{-\ell}(u)(p)$ con u continua.

$$\begin{aligned} [\Phi^q \circ (\square - \lambda I)^{-\ell}(u)](p) &= \phi_{f(p)}^q [(\square - \lambda I)^{-\ell}(u)(f(p))] \\ &= \phi_{f(p)}^q \left(\int_{\mathcal{X}} K_q^\lambda(f(p), p') u(p') \, dm(p') \right) \\ &= \int_{\mathcal{X}} (\phi_{f(p)}^q \circ K_q^\lambda(f(p), p'))(u(p')) \, dm(p'). \end{aligned}$$

En la segunda línea, el argumento de $\phi_{f(p)}^q$ es un elemento de $E_{f(p)}$. En la tercera tenemos la composición

$$E_{p'} \xrightarrow{K_q^\lambda(f(p), p')} E_{f(p)} \xrightarrow{\phi_{f(p)}^q} E_p.$$

La función

$$\mathcal{X} \times \mathcal{X} \ni (p, p') \mapsto \phi_{f(p)}^q \circ K_q^\lambda(f(p), p') \in \text{Hom}(E_{p'}, E_p)$$

define una sección continua de $\text{Hom}(\pi_D^* E^q, \pi_I^* E^q)$. Sobre la diagonal,

$$\mathcal{X} \ni p \mapsto \phi_{f(p)}^q \circ K_q^\lambda(f(p), p) \in \text{Hom}(E_p, E_p)$$

esta es una sección continua con traza fibra a fibra. En particular,

$$\text{Tr}(\Phi^q \circ (\square_q - \lambda I)^{-\ell})$$

está bien definida.

Para probar (4.11) necesitamos información algo más precisa sobre la suma en (4.9). Para esto usaremos la estimación de Weyl de la función que cuenta los autovalores de \square_q :

$$\lambda^{-n/2} \sum_{\zeta < \lambda} \dim \mathcal{E}_\lambda^q = C_q$$

para cierta constante $C_q > 0$. Enumerando los autovalores en orden creciente, $0 \leq \lambda_0^q \leq \lambda_1^q \leq \dots$ incluyendo multiplicidad (está claro que q es una referencia a E^q , no una potencia), tenemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\tilde{\lambda}$ tal que $\lambda > \tilde{\lambda}$ implica

$$C_q - \varepsilon < \lambda^{-n/2} \#\{k : \lambda_k^q < \lambda\} < C_q + \varepsilon$$

Si j es suficientemente grande, $\lambda_j^q > \tilde{\lambda}$ y tenemos

$$C_q - \varepsilon < (\lambda_j^q)^{-n/2} \#\{k : \lambda_k^q < \lambda_j^q\} < C_q + \varepsilon$$

Evidentemente $\#\{k : \lambda_k^q < \lambda_j^q\} = j$, por lo tanto³

$$(4.12) \quad C_q - \varepsilon < (\lambda_j^q)^{-n/2} j < C_q + \varepsilon.$$

Sea ψ_j^q una base ortonormal de $L^2(\mathcal{X}; E^q)$ tal que $\square_q \psi_j^q = \lambda_j^q \psi_j^q$. La desigualdad (III.13.4) en el caso presente con $s = 0$ es

$$\|u\|_{H^{2\ell_0}} \leq C_0 (\|\square_q^{\ell_0} u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2})$$

con alguna constante $C_0 > 0$ cuyo valor exacto no importa, pero por supuesto es independiente de u (aunque si de ℓ_0). Sustituyendo ψ_j^q en lugar de u tenemos

$$\|\psi_j^q\|_{H^{2\ell_0}} \leq C_0 (\|(\lambda_j^q)^{\ell_0} \psi_j^q\|_{L^2} + \|\psi_j^q\|_{L^2}) = C_0 (1 + \lambda_j^q)^{\ell_0}.$$

Si $2\ell_0 > n/2$, esto implica que

$$\|\psi_j^q\|_{L^\infty} \leq C_0 (1 + \lambda_j^q)^{\ell_0}$$

gracias a la Proposición III.6.6. Fijamos ℓ_0 de manera que esta conclusión sea correcta.

La acotación significa lo siguiente. Si η_α , $\alpha = 1, \dots, \alpha_{d_q}$ es un marco de referencia local suave de E^q en un conjunto abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ y la métrica de E^q

³De esto obtenemos

$$\frac{1}{\lambda_j^q} < \frac{(C_q + \varepsilon)^{2/n}}{j^{2/n}}$$

Vemos que

$$\sum \frac{1}{(\lambda_j^q)^\ell}$$

converge si $2\ell > n$. Esto está en acuerdo con las potencias $(\square_q - \lambda I)^{-\ell}$ que resultan en un operador con traza. En conclusión, si $\ell > n/2$ tenemos que

$$\sum \frac{1}{|\zeta - \lambda|^\ell} \operatorname{tr} \Pi_q^\lambda$$

converge (esta es una serie de términos positivos).

en $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ es $h^q(\eta_\alpha, \eta_\beta) = h_{\alpha\beta}$ con funciones suaves $h_{\alpha\beta}^q$. Si $\psi_j^q = \sum_{\beta=1}^{d_q} \psi_{j\beta} \eta_\beta$ en \mathcal{U} , entonces

$$\left| \sum_{\alpha, \beta=1}^{d_q} h_{\alpha\beta}^q(p) \psi_{j\alpha}(p) \bar{\psi}_{j\beta}(p) \right| \leq C(1 + \lambda_j^q)^{\ell_0}.$$

En particular como hay $c > 0$ tal que $c \sum_{\alpha=1}^{d_q} |\xi|^2 \leq \sum_{\alpha, \beta=1}^{d_q} h_{\alpha\beta}^q \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta$,

$$(4.13) \quad \sum_{\alpha=1}^{d_q} |\psi_{j\alpha}|^2 \leq (C_0/c)(1 + \lambda_j^q)^{\ell_0} \text{ en } \mathcal{U}$$

La estimación depende del marco de referencia local escogido, pero lo que importa es que la constante C_0/c no depende de j .

Denotamos por $\Pi_q^{\psi_j^q}$ a la proyección ortogonal en el espacio generado por un elemento ψ_j^q . Este es un operador integral con núcleo de Schwartz $K_q^{\psi_j^q} \in C^\infty$.

LEMA 4.14. *La traza puntual en p del núcleo de Schwartz de $\Phi^q \circ \Pi_q^{\psi_j^q}$ satisface*

$$|\text{tr} \phi_{f(p)}^q \circ K_q^{\psi_j^q}(f(p), p)| \leq C(1 + \lambda_j^q)^{\ell_0}$$

con C independiente de j .

DEMOSTRACIÓN. Omitimos la referencia a q y j . Sea η_α , $\alpha = 1, \dots, d$, un marco de referencia de E sobre un conjunto abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$. Con la métrica en E , denotada por h , tenemos

$$h_p(\eta_\alpha(p), \eta_\beta(p)) = h_{\alpha\beta}(p)$$

con funciones $h_{\alpha\beta} \in C^\infty(\mathcal{U})$. Si u tiene soporte en \mathcal{U} y $u = \sum_{\alpha=1}^d u_\alpha \eta_\alpha$,

$$\Pi(u) = (u, \psi) \psi(p) = \int_{\mathcal{X}} \sum_{\alpha, \beta=1}^d h_{\alpha\beta}(p') u_\alpha(p') \bar{\psi}_\beta(p') d\mathbf{m}(p') \psi(p)$$

con $\psi = \sum_{\beta} \psi_\beta \eta_\beta$. Esto es, el núcleo de Schwartz en $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$ es

$$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \ni (p, p') \mapsto K(p, p') \in \text{Hom}(E_{p'}, E_p),$$

$$K(p, p') \left(\sum_{\alpha=1}^d \xi_\alpha \eta_\alpha(p') \right) = \sum_{\alpha, \beta=1}^d \xi_\alpha h_{\alpha\beta}(p') \bar{\psi}_\beta(p') \psi(p).$$

Sea $p_0 \in \mathcal{U}$, supongamos \mathcal{V} es un entorno de $p'_0 = f(p_0)$ contenido en $f(\mathcal{U})$ en el cual tenemos el marco de referencia η'_1, \dots, η'_d , $\alpha = 1, \dots, d$, de E . Usando la continuidad de f podemos suponer (reduciendo \mathcal{U}) que $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$. Usando los marcos de referencia en \mathcal{V} y \mathcal{U} , el mapa que nos interesa,

$$K(f(p), p') : E_{p'} \rightarrow E_{f(p)},$$

es

$$\sum_{\alpha=1}^d \xi_{\alpha} \eta_{\alpha}(p') = \sum_{\alpha, \beta=1}^d \xi_{\alpha} h_{\alpha\beta}(p') \bar{\psi}_{\beta}(p') \psi_{\gamma}(f(p)) \eta'_{\gamma}(f(p))$$

Escribimos ahora una fórmula para el núcleo de Schwartz de $\Phi \circ \Pi$. Si $p \in \mathcal{U}$, entonces $\phi_{f(p)}$ es una función lineal $E_{f(p)} \rightarrow E_p$. Usando los marcos de referencia en \mathcal{V} y \mathcal{U} , la acción de $\phi_{f(p)}$ es

$$E_{f(p)} \ni \sum_{\gamma} \xi_{\gamma} \eta'_{\gamma}(f(p)) \mapsto \sum_{\gamma, \delta} \xi_{\gamma} \phi_{f(p), \gamma\delta} \eta_{\delta}(p) \in E_p, \quad p \in \mathcal{U}.$$

Las funciones $\phi_{\alpha\gamma}$ son de clase C^{∞} en \mathcal{V} .

La composición $\phi_{f(p)} \circ K(f(p), p')$ evaluada en $\eta_{\alpha}(p')$ es

$$\begin{aligned} \phi_{f(p)} \circ K(f(p), p')(\eta_{\alpha}(p')) &= \phi_{f(p)} \left(\sum_{\beta, \gamma} h_{\alpha\beta}(p') \bar{\psi}_{\beta}(p') \psi_{\gamma}(f(p)) \eta'_{\gamma}(f(p)) \right) \\ &= \sum_{\delta} \left(\sum_{\beta, \gamma} h_{\alpha\beta}(p') \bar{\psi}_{\beta}(p') \psi_{\gamma}(f(p)) \right) \phi_{f(p), \gamma\delta} \eta_{\delta}(p) \end{aligned}$$

Restringiendo a la diagonal obtenemos el mapa $E_p \rightarrow E_p$ cuya traza en p es nuestro objetivo.

$$\text{tr}(\phi_{f(p)} \circ K(f(p), p)) = \sum_{\alpha} \left(\sum_{\beta, \gamma} h_{\alpha\beta}(p) \bar{\psi}_{\beta}(p) \psi_{\gamma}(f(p)) \right) \phi_{f(p), \gamma\alpha}$$

Regresando a ψ_j^q , usando (4.13) vemos que este número está acotado en valor absoluto por

$$C(1 + \lambda_j^q)^{\ell_0}$$

donde la constante C recoge C_0/c y estimaciones para las funciones de clase C^{∞} involucradas en la definición de la métrica y el morfismo h . Estas constantes dependen de los marcos de referencia usados, pero como \mathcal{X} es compacta, hay una cota universal en \mathcal{X} . \square

Las sumas parciales de la serie

$$\sum_{\zeta \in \text{spec}(\square_q)} \frac{1}{(\zeta - \lambda)^{\ell}} \text{Tr}(\Phi^q \circ \Pi_q^{\varepsilon \zeta})$$

forman una subsucesión de las sumas parciales de

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_j - \lambda)^{\ell}} \text{Tr}(\Phi^q \circ \Pi_q^{\psi_j^q})$$

De acuerdo a (4.12),

$$\lambda_j^q < \frac{j^{2/n}}{(C_q - \varepsilon)^{2/n}}, \quad \frac{1}{\lambda_j^q} < \frac{(C_q + \varepsilon)^{2/n}}{j^{2/n}}$$

para todo j suficientemente grande. De la primera desigualdad y el lema obtenemos

$$|\operatorname{tr}(\phi_{f(p)}^q \circ K_q^{\psi_j^q}(f(p), p))| \leq C(1 + \lambda_j^q)^{\ell_0} \leq C_1 j^{2\ell_0/n}$$

con alguna C_1 , mientras que la segunda implica

$$\frac{1}{|\lambda_j^q - \lambda|^\ell} \leq \frac{C_\lambda}{j^{2\ell/n}}$$

con $\lambda \in \operatorname{res}(\square_q)$ fijo. Si $2(\ell_0 - \ell)/n < -1$, la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \operatorname{tr}(\phi_{f(p)}^q \circ K_q^{\psi_j^q}(f(p), p))$$

converge absolutamente a $\operatorname{tr}(\Phi^q \circ (\square_q - \lambda I)^{-\ell})$ e integrando tenemos

$$\operatorname{Tr}(\Phi^q \circ (\square_q - \lambda I)^{-\ell}) = \sum_{\zeta \in \operatorname{spec}(\square_q)} \frac{1}{(\zeta - \lambda)^\ell} \operatorname{Tr}(\Phi^q \circ \Pi_q^{\varepsilon_\zeta^q}).$$

Notemos que una vez que hemos fijado ℓ_0 podemos escoger ℓ tan grande como sea necesario.

Obtenemos de inmediato que

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^r (-1)^q \operatorname{Tr}(\Phi^q \circ (\square_q - \lambda I)^{-\ell}) &= \sum_{\zeta \in \operatorname{spec}(\square_q)} \sum_{q=0}^r \frac{(-1)^q}{(\zeta - \lambda)^\ell} \operatorname{Tr}(\Phi^q \circ \Pi_q^{\varepsilon_\zeta^q}) \\ &= \frac{1}{(-\lambda)^\ell} \sum_{q=0}^r (-1)^q \operatorname{Tr}(\Phi^q \circ \Pi_q^0) \\ &\quad + \sum_{\substack{\zeta \in \operatorname{spec}(\square_q) \\ \zeta > 0}} \sum_{q=0}^r \frac{(-1)^q}{(\zeta - \lambda)^\ell} \operatorname{Tr}(\Phi^q \circ \Pi_q^{\varepsilon_\zeta^q}). \end{aligned}$$

separando en la segunda igualdad los términos correspondientes al autovalor 0 de los correspondientes a autovalores estrictamente positivos. Ese primer término es $(-\lambda)^{-\ell} L_\Phi$, por lo tanto

$$\begin{aligned} L_\Phi &= \\ (-\lambda)^\ell \sum_{q=0}^r (-1)^q \operatorname{Tr}(\Phi^q \circ (\square_q - \lambda I)^{-\ell}) &- (-\lambda)^\ell \sum_{\substack{\zeta \in \operatorname{spec}(\square_q) \\ \zeta > 0}} \sum_{q=0}^r \frac{(-1)^q}{(\zeta - \lambda)^\ell} \operatorname{Tr}(\Phi^q \circ \Pi_q^{\varepsilon_\zeta^q}) \end{aligned}$$

Probaremos ahora que

$$\sum_{q=0}^r (-1)^q \operatorname{Tr}(\Phi^q \circ \Pi_q^{\varepsilon_\zeta^q}) = 0.$$

LEMA 4.15. *Los operadores A_q definen mapas*

$$\mathbf{a}_q = \Pi_{q+1}^{\mathcal{E}_\zeta^q} \circ A_q|_{\mathcal{E}_\zeta^q} : \mathcal{E}_\zeta^q \rightarrow \mathcal{E}_\zeta^{q+1}$$

(la proyección $\Pi_{q+1}^{\mathcal{E}_\zeta^q}$ es superflua) que conforman complejos

$$(4.16) \quad 0 \rightarrow \mathcal{E}_\zeta^q \xrightarrow{\mathbf{a}_0|_{\mathcal{E}_\zeta^0}} \mathcal{E}_\zeta^1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}_\zeta^{r-1} \xrightarrow{\mathbf{a}_{r-1}|_{\mathcal{E}_\zeta^{r-1}}} \mathcal{E}_\zeta^r \rightarrow 0.$$

para cada ζ . Si $\zeta \neq 0$, el espacio \mathcal{E}_ζ^q tiene una descomposición

$$\mathcal{E}_\zeta^q = \mathcal{E}_\zeta^{q;\uparrow} \oplus \mathcal{E}_\zeta^{q;\downarrow}$$

con

$$\mathcal{E}_\zeta^{q;\uparrow} = A_{q-1}\mathcal{E}_\zeta^{q-1}, \quad \mathcal{E}_\zeta^{q;\downarrow} = A_q^*\mathcal{E}_\zeta^{q+1}$$

y para tales ζ , los mapas

$$A_{q-1}|_{\mathcal{E}_\zeta^{q-1;\downarrow}} : \mathcal{E}_\zeta^{q-1;\downarrow} \rightarrow \mathcal{E}_\zeta^{q;\uparrow}, \quad A_q^*|_{\mathcal{E}_\zeta^{q+1;\uparrow}} : \mathcal{E}_\zeta^{q+1;\uparrow} \rightarrow \mathcal{E}_\zeta^{q;\downarrow}$$

son isomorfismos. Por lo tanto, la cohomología de (4.16) es trivial (nula) si $\zeta \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Las proyecciones en $\text{rg } A_{q-1}$ y $\text{rg } A_q^*$ según la descomposición (V.6.7) son, respectivamente,

$$\Pi_q^\uparrow = A_{q-1} \circ A_{q-1}^* \circ G_q, \quad \Pi_q^\downarrow = A_q^* \circ A_q \circ G_q.$$

Que estos mapas tienen imagen en los espacios correctos es claro. La primera fórmula en (V.6.8) puede ser escrita como

$$(4.17) \quad I = \Pi_q^0 + \Pi_q^\uparrow + \Pi_q^\downarrow.$$

Probamos que Π_q^\uparrow es una proyección. Notamos primero que

$$\Pi_q^\uparrow = A_{q-1}G_{q-1}A_{q-1}^*$$

debido al Lema V.6.11. Por lo tanto, $\Pi_q^\uparrow \circ \Pi_q^\downarrow = 0$. También $\Pi_q^\uparrow \circ \Pi_q^0 = 0$ debido al Lema V.6.2. Por lo tanto,

$$\Pi_q^\uparrow \circ \Pi_q^\uparrow = \Pi_q^\uparrow \circ (I - \Pi_q - \Pi_q^\downarrow) = \Pi_q^\uparrow.$$

Si $u \in \mathcal{E}_\zeta^q$, entonces (usando el Lema V.6.11 varias veces)

$$\square_q \Pi_q^\uparrow u = \Pi_q^\uparrow \square_q u = \zeta \Pi_q^\uparrow u,$$

esto es, $\Pi_q^\uparrow \mathcal{E}_\zeta^q \subset \mathcal{E}_\zeta^q$, igualmente $\Pi_q^\downarrow \mathcal{E}_\zeta^q \subset \mathcal{E}_\zeta^q$. Como $\mathcal{E}_\zeta^q \perp \mathcal{H}_q$ si $\zeta \neq 0$, (4.17) implica

$$u = \Pi_q^\uparrow u + \Pi_q^\downarrow u$$

si $u \in \mathcal{E}_\zeta^q$. Esto prueba la afirmación acerca de la descomposición.

El espacio nulo de A_{q-1} es $\mathcal{H}^{q-1} \oplus \text{rg } A_{q-1}$. Por lo tanto, $A_{q-1}|_{\text{rg } A_{q-1}^*}$ es inyectivo, y también lo es su restricción al subespacio $\mathcal{E}_\zeta^{q-1;\downarrow}$ de $\text{rg } A_{q-1}^*$. Por la

definición también es sobreyectivo, de lo cual se deduce en particular que los grupos de cohomología son todo triviales. \square

La traza de $\Phi^q \circ \Pi_q^{\mathcal{E}_\zeta^q}$ es igual a la de

$$\mathfrak{f}_\zeta^q = \Pi_q^{\mathcal{E}_\zeta^q} \circ \Phi^q \circ \Pi_q^{\mathcal{E}_\zeta^q}.$$

Estos operadores, como operadores $\mathcal{E}_\zeta^q \rightarrow \mathcal{E}_\zeta^q$, satisfacen

$$\mathfrak{a}_q \mathfrak{f}_\zeta^q = \mathfrak{f}_\zeta^{q+1} \mathfrak{a}_q$$

y por lo tanto definen un mapa de cocadenas \mathfrak{f}_ζ^q . Arribamos con esta a la situación de la Sección 3 y concluimos que

$$\sum_{q=0}^r (-1)^q \operatorname{tr} \mathfrak{f}_\zeta^q = \sum_{q=0}^r (-1)^q \operatorname{tr} \mathfrak{f}_\zeta^q$$

El lado izquierdo es el número de Lefschetz del complejo (4.16). Si $\zeta \neq 0$, los grupos de cohomología son todos cero, de esto resulta que el lado izquierdo es nulo, por lo tanto también el derecho.

Hemos probado (4.10). En esa fórmula, el lado izquierdo es independiente de λ , por lo tanto también el derecho. Esto es, el límite cuando $\lambda \rightarrow -\infty$ existe. El punto ahora es extraer ese valor límite.

El límite puntual (el límite fuerte) de $(-\lambda)^{-\ell} (\square_q - \lambda I)^{-\ell}$ cuando $\lambda \rightarrow -\infty$ es la identidad. Vemos esto usando la fórmula (4.9) para la resolvente, usando (con $\lambda < 0$ y $\zeta \geq 0$)

$$\left| \frac{-\lambda}{\zeta - \lambda} - 1 \right| = \frac{\zeta}{\lambda - \zeta} \leq 1$$

y

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{\zeta}{\lambda - \zeta} = 1.$$

Si $u \in L^2(\mathcal{X}; E^q)$, la primera desigualdad implica la acotación (uniforme en λ)

$$\left| \frac{(-\lambda)^{2\ell}}{(\zeta - \lambda)^{2\ell}} \right| \|\Pi_q^{\mathcal{E}_\zeta^q} u\|^2 \leq \|\Pi_q^{\mathcal{E}_\lambda^q} u\|^2, \quad \zeta \in \operatorname{spec}(\square_q),$$

y la segunda, la convergencia puntual (para cada ζ)

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \left\| \frac{(-\lambda)^\ell}{(\zeta - \lambda)^\ell} \Pi_q^{\mathcal{E}_\lambda^q} u \right\|^2 = 0.$$

Estas son las hipótesis del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue que necesitamos para concluir que

$$\left\| \sum_{\zeta \in \operatorname{spec}(\square_q)} \frac{(-\lambda)^\ell}{(\zeta - \lambda)^\ell} \Pi_q^{\mathcal{E}_\zeta^q} u - u \right\|^2 \rightarrow 0.$$

Concluimos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \|(-\lambda)^{-\ell} (\square_q - \lambda I)^{-\ell} u - u\|^2 = 0.$$

Trivialmente, también

$$(4.18) \quad \text{s-lím}_{\lambda \rightarrow -\infty} \Phi^q \circ ((-\lambda)^{-\ell} (\square_q - \lambda I)^{-\ell}) = \Phi^q.$$

Esto implica que a nivel del núcleo de Schwartz de esta composición tenemos convergencia débil (esto es, en la topología de distribuciones): con K_{Φ^q} el núcleo de Schwartz de Φ^q , recordando que K_q^λ es el núcleo de Schwartz de $(\square - \lambda I)^{-\ell}$ y que el núcleo de $\Phi^q \circ (\square_q - \lambda I)^{-\ell}$ es $(p, p') \mapsto \phi_{f(p)}^q \circ K_q^\lambda(f(p), p')$,

$$\begin{aligned} (-\lambda)^\ell \langle \phi_{f(\cdot)}^q \circ K_q^\lambda(f(\cdot), \cdot), v \boxtimes u \rangle &= \langle v, \Phi^q \circ ((-\lambda)^\ell (\square - \lambda I)^{-\ell} u) \rangle \\ &\rightarrow \langle v, \Phi^q u \rangle \quad \text{cuando } \lambda \rightarrow -\infty \\ &= \langle K_{\Phi^q}, v \boxtimes u \rangle. \end{aligned}$$

En este cómputo, $u \in C^\infty(\mathcal{X}; E)$, $v \in C^\infty(\mathcal{X}; E^{q*})$ con E^{q*} el fibrado dual a E^q , y

$$\langle v, u \rangle = \int_{\mathcal{X}} \langle v(p), u(p) \rangle dm(p).$$

El integrando $\langle v(p), u(p) \rangle$ es el apareamiento de dualidad fibra a fibra

$$E_p^{q*} \times E_p \rightarrow \mathbb{C},$$

una función de $p \in \mathbb{C}$. El soporte de K_{Φ^q} , como antes, es un subconjunto de $\Gamma(f) = \{(p, f(p)) : p \in \mathcal{X}\}$ (solo un subconjunto porque puede ocurrir que ϕ^q es 0 en un abierto). Como

$$\Gamma(f) \cap \text{diag}(\mathcal{X}) = \{(p, p) : p \in \text{Fix}(f)\},$$

solo los puntos fijos de f entran en consideración. Suponiendo ahora la no-degeneración de todos ellos, obtenemos la existencia del límite (4.18), que

$$\iota^* (\phi_{f(\cdot)}^q \circ K_q^\lambda(f(\cdot), \cdot)) \rightarrow \iota^* K_{\Phi^q}$$

como distribución. Este es un argumento delicado que no probaremos.⁴ Tomando la traza en el lado izquierdo, llegamos a la fórmula

$$\int_{\mathcal{X}} \text{tr}(\iota^* (\phi_{f(p)}^q \circ K_q^\lambda(f(p), p))) dm(p) \rightarrow \text{Tr}(\iota^* K_{\Phi^q})$$

Calcularemos el límite. Para ello, necesitaremos una descripción con algo más de detalle de K_q^λ .

En los siguientes párrafos omitiremos la referencia a q . Escribimos $-\tau^2$ con $\tau \in \mathbb{R}$, en lugar de λ . Vemos τ como variable dual a una nueva variable t y consideramos el operador $P = \square + D_t^2$ en $\mathcal{U} \times \mathbb{R}$. El símbolo principal de P es

⁴El problema no es la existencia del límite, sino la igualdad de este y el miembro de la derecha.

$\sigma(\square) + \tau^2$. Esta es una función homogénea de orden 2 con valores en matrices invertibles (porque $\sigma(\square)$ es positivo definido) $d \times d$ si $(\xi, \tau) \neq 0$ por lo tanto P es elíptico y tiene una parametriz. Como los coeficientes de P no dependen de t , hay una parametriz invariante por traslación en t . Lo mismo vale para P^ℓ . Sea \check{B} una parametriz de P^ℓ invariante por traslación en t . De

$$\check{B} \circ P^\ell = I - \check{R}_I, \quad P^\ell \circ \check{B} = I - \check{R}_D$$

y

$$e^{-it\tau}(\square + D_t^2)^\ell(e^{it\tau}u(x)) = (\square_t^2)^\ell u, \quad u \in C^\infty(\mathcal{X}; E).$$

obtenemos

$$B_\tau \circ (\square + \tau^2)^\ell = I - R_{I,\tau}, \quad P^\ell \circ B_\tau = I - R_{D,\tau}$$

con

$$B_\tau u = e^{-it\tau} B(e^{it\tau}u(x)), \quad u \in C^\infty(\mathcal{X}; E).$$

y similarmente $R_{D,\tau}$ y $R_{I,\tau}$. Los símbolos usados para construir B satisfacen cotas uniformes en t , y por lo tanto, los símbolos de los operadores residuales R_D , R_I son rápidamente decrecientes en τ (y en (ξ, τ)), uniformemente en ξ . La consecuencia de esto es que los operadores $R_{D,\tau}$, $R_{I,\tau}$ decrecen rápidamente en norma cuando $\tau \rightarrow \pm\infty$. Tomando τ grande, la serie de Neumann de $(I - R_{D,\tau})^{-1}$ converge. Así obtenemos una inversa genuina de P^ℓ :

$$P^\ell \circ [B_\tau \circ (I - R_{D,\tau})^{-1}] = I$$

El operador $B_\tau \circ (I - R_{D,\tau})^{-1}$ es pseudodiferencial del mismo tipo que B_τ . Podemos entonces suponer que B_τ es una inversa.

Pasando ahora a cálculos locales, supongamos que p_0 es un punto fijo no-degenerado de f , fijemos un entorno \mathcal{U} suficientemente pequeño de p_0 en el cual hay coordenadas x_1, \dots, x_n para \mathcal{X} y un marco de referencia $\eta_1 \dots, \eta_d$ para E . Entonces

$$(\square + \tau^2) \left(\sum_\alpha u_\alpha \eta_\alpha \right) (x) = \sum_{\alpha,\beta} (P_{\alpha\beta}(x, D_x)(u_\alpha)(x) + \tau^2 \delta_{\alpha\beta} u_\alpha(x)) \eta_\beta(x).$$

Escribiendo σ para denotar el símbolo de \square , esta fórmula muestra que el símbolo principal de P es $\sigma(x, \xi) + \tau^2$, y el símbolo principal de B_τ en coordenadas es $(\sigma(x, \xi) + \tau^2)^{-\ell}$. Si $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{U})$, tenemos

$$B_\tau \left(\sum_\alpha \chi u_\alpha \eta_\alpha \right) = \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n} e^{i(x-x') \cdot \xi} b_{\alpha\beta}(x, x', \xi, \tau) u_\alpha(x') \chi(x') dx' d\xi$$

en \mathcal{U} . Como $\tau^{2\ell} B_\tau \rightarrow I$, $b_{\alpha\beta} \rightarrow \delta_{\alpha\beta}$ (la delta de Kronecker, las componentes de la matriz identidad).

Como ℓ es suficientemente grande, la integral en ξ es una integral genuina y podemos escribir el núcleo de B_τ , el cual de hecho es $K_q^{-\tau^2}$ (con q de nuevo

en la notación y (x, x') en lugar de (p, p') porque son cuentas locales):

$$K_q^{-\tau^2}(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\alpha, \beta} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-x') \cdot \xi} b_{\alpha\beta}(x, x', \xi, \tau) \chi(x') d\xi \right] \eta_\beta(x) \otimes \eta_\alpha^*(x').$$

Aquí hemos usado que $\text{Hom}(E_{x'}, E_x) = E_x \otimes E_{x'}$; los $\eta_\alpha^*(x')$ son los elementos de la base dual a $\eta_\alpha(x')$. Usando el marco de referencia en \mathcal{U} , la acción de $\phi_{f(x)}^q$ con x en un entorno \mathcal{V} del punto fijo x^0 es, como antes,

$$E_{f(x)} \ni \sum_{\beta} \xi_\beta \eta_\beta(f(x)) \mapsto \sum_{\beta, \gamma} \xi_\beta \phi_{f(x), \beta\gamma}^q \eta_\gamma(x) \in E_x$$

con $\phi_{\cdot, \alpha\gamma} \in C^\infty(\mathcal{V})$. La traza del núcleo de $\Phi_q \circ (\square_q - \lambda I)^{-\ell}$ a lo largo de la diagonal, cerca de x_0 , es

$$\begin{aligned} \text{tr}(\phi_{f(x)}^q \circ K_q^{-\tau^2}(f(x), x)) \\ = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\alpha, \beta} \phi_{f(x), \beta\alpha}^q \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(f(x)-x) \cdot \xi} b_{\alpha\beta}(f(x), x, \xi, \tau) d\xi \end{aligned}$$

Como en el modelo, hasta este momento no hemos usado que x^0 es no-degenerado, solo la continuidad para poder evaluar el núcleo en $(f(x), x)$. Suponiendo que el punto fijo es no-degenerado, los cálculos que hicimos luego con el modelo llevan, también aquí, a

$$\begin{aligned} \text{tr}(\phi_{f(x)}^q \circ K_q^{-\tau^2}(f(x), x)) \\ = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\alpha, \beta} \phi_{f(x), \beta\alpha}^q \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x^0-x) \cdot \eta} \frac{b_{\alpha\beta}(f(x), x, \xi(x, x^0), \tau)}{|\det(I - F(x, x^0))|} d\xi \end{aligned}$$

(En esta fórmula, $\eta \in \mathbb{R}^n$ es una variable, no el marco de referencia.) Como $\tau^{2\ell} [b_{\alpha\beta}] \rightarrow \delta_{\alpha\beta}$ cuando $\tau \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \tau^{2\ell} \text{tr}(\phi_{f(x)}^q \circ K_q^{-\tau^2}(f(x), x)) \\ \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\alpha, \beta} \phi_{f(x), \beta\alpha}^q \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x^0-x) \cdot \eta} \frac{\delta_{\alpha\beta}}{|\det(I - F(x, x^0))|} d\xi \\ = \frac{\sum_{\alpha} \phi_{f(x), \alpha\alpha}^q}{|\det(I - F(x, x^0))|} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x^0-x) \cdot \eta} d\xi \\ = \frac{\sum_{\alpha} \phi_{f(x), \alpha\alpha}^q}{|\det(I - F(x, x^0))|} \delta_{x^0}(x) \\ = \frac{\sum_{\alpha} \phi_{f(x^0), \alpha\alpha}^q}{|\det(I - F(x^0, x^0))|} \delta_{x^0}(x) \\ = \text{tr} \phi_{x^0}^q \delta_{x^0}(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{tr} L^*(\phi_{f(\cdot)}^q \circ K_q^\lambda(f(\cdot), \cdot')) \rightarrow \sum_{p \in \mathrm{Fix}(f)} \frac{\mathrm{tr} \phi^q(p)}{|\det(I - df(p))|}$$

cuando $\lambda = -\tau^2 \rightarrow -\infty$. Con esto damos por terminada la demostración de la fórmula de Atiyah-Bott para el número de Lefschetz.

El Teorema del Índice

1. El índice analítico

Sea \mathcal{X} una variedad cerrada, $E, F \rightarrow \mathcal{X}$ fibrados vectoriales,

$$A : C^\infty(\mathcal{X}; E) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; F)$$

un operador pseudodiferencial elíptico de orden $\mu > 0$. Fijando una densidad positiva en \mathfrak{m} y métricas Hermitianas en los fibrados, podemos formar los espacios $L^2(\mathcal{X}; E)$, $L^2(\mathcal{X}; F)$ y definir

$$\mathcal{D} = \{u \in L^2(\mathcal{X}; E) : Au \in L^2(\mathcal{X}; F)\}$$

Debido a la compacidad de \mathcal{X} y la elipticidad de A , este espacio es el espacio de Sobolev $H^\mu(\mathcal{X}; E)$, el espacio de secciones de E de regularidad H^s . Por ser A elíptico y \mathcal{X} compacta, $\ker A$ (incluso calculado en distribuciones) es un subespacio de $C^\infty(\mathcal{X}; E)$ de dimensión finita. por la misma razón, la imagen $\operatorname{rg} A = A(\mathcal{D}) \subset L^2(\mathcal{X}; F)$ es un subespacio cerrado, y por ser esta imagen ortogonal al espacio nulo del transpuesto formal, A^* , de A , la imagen tiene codimension finita en $L^2(\mathcal{X}; F)$; la codimension es la dimensión de $\operatorname{coker} A = L^2(\mathcal{X}; F)/\operatorname{rg} A$. Por lo tanto A es un operador Fredholm, y tiene un índice,

$$\operatorname{Ind}(A) = \dim \ker A - \dim \operatorname{coker} A$$

La fórmula de Atiyah y Singer establece la igualdad de este número y la integral de una forma diferencial en una variedad construida a partir de \mathcal{X} , los fibrados E y F , y el símbolo principal de A . En la siguientes secciones definiremos estos ingredientes, los cuales ensamblamos al final del capítulo. Esta exposición está basada en Gilkey [19].

El teorema de Atiyah-Singer expresa una relación fundamental entre geometría diferencial, topología diferencial, ecuaciones diferenciales, álgebras de operadores y tiene relación con teoría de números y muchas otras áreas de matemáticas (Mazzeo [48]).

El índice es relativamente robusto en cuanto a que, dentro de la clase de símbolos principales invertibles, depende solo de la clase de equivalencia módulo homotopía del símbolo principal. El orden del operador no es importante, mientras sea positivo, porque hay isomorfismos entre cualquier par de espacios de Sobolev. osemos suponer que A es de primer orden.

Como ya vimos, el símbolo principal de A es, para cada $\xi \in \dot{T}^*\mathcal{X}$, un homomorfismo $E_p \rightarrow F_p$, un elemento de $\text{Hom}(E_p, F_p)$, donde $p = \pi(\xi)$. Este espacio es la fibra sobre p del fibrado $\text{Hom}(E, F) \rightarrow \mathcal{X}$. Vía π , este fibrado se lleva a $\dot{T}^*\mathcal{X}$ como en la Sección II.10. En este lenguaje, el símbolo principal de un operador pseudodiferencial es una sección homogénea de $\text{Hom}(\pi^*E, \pi^*F) \rightarrow \dot{T}^*\mathcal{X}$ de algún grado. (Los fibrados $\pi^*\text{Hom}(E, F)$ y $\text{Hom}(\pi^*E, \pi^*F)$ son isomorfos). Como también ya vimos, cada sección homogénea de $\text{Hom}(\pi^*E, \pi^*F)$ corresponde a algún operador pseudodiferencial y la diferencia entre dos con el mismo símbolo principal es un operador de orden más bajo. Los símbolos de operadores elípticos son secciones del subfibrado de isomorfismos, $\text{Iso}(\pi^*E, \pi^*F)$. Este último no es un fibrado vectorial, sino un fibrado con fibra isomorfa a $\text{Gl}(r, \mathbb{C})$; aquí r es el rango de E , también de F porque para que exista un operador elíptico como A es necesario que las dimensiones de las fibras de E y F sean iguales. Dos operadores elípticos A_1 y A_2 con el mismo símbolo principal (de orden positivo) tienen el mismo índice. Esto es porque $A_1 = A_2 + B$ con B de orden más bajo, y la elipticidad implica que A_2 es una perturbación compacta de A_1 . Dos secciones a_0, a_1 de $\text{Iso}(\pi^*E, \pi^*F)$ son homotópicas si hay un mapa $[0, 1] \rightarrow C(\dot{T}^*\mathcal{X}; \text{Iso}(\pi^*E, \pi^*F))$ tal que $a(t)$ es una sección de $\text{Iso}(\pi^*E, \pi^*F)$ con $a(0) = a_0, a(1) = a_1$ y

$$[0, 1] \times \dot{T}^*\mathcal{X} \ni (t, \xi) \mapsto a(t, \xi) \in \text{Iso}(\pi^*E, \pi^*F)$$

es continuo. Homotopía es una relación de equivalencia. Si a_0 y a_1 son símbolos elípticos homotópicos, entonces hay una familia A_t de operadores pseudodiferenciales elípticos que como operadores $H^\mu(\mathcal{X}; E) \rightarrow L^2(\mathcal{X}; F)$ es continua en t en norma. Por un teorema fundamental de Fredholm, el índice es constante a lo largo de curvas continuas, y por lo tanto $\text{Ind } A_0 = \text{Ind } A_1$.

En conclusión, el índice de un operador elíptico solo depende de la clase de homotopía, dentro de símbolos elípticos, de su símbolo principal.

Las dos componentes básicas de la fórmula de Atiyah y Singer es codificar topológicamente secciones homogéneas de $\text{Iso}(\pi^*E, \pi^*F) \rightarrow \dot{T}^*\mathcal{X}$ y luego asociar un número al objeto topológico asociado.

2. Fibrados vectoriales sobre esferas

Construiremos primero fibrados sobre la esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y su ecuador $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Pensamos \mathbb{R}^{n+1} como $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ con la variable denotada (ξ, t) . Sean $\mathbf{n} = (0, \dots, 0, 1)$, y $\mathbf{s} = (0, \dots, 0, -1)$ respectivamente, el polo norte y polo sur de S^n . Los conjuntos $\mathcal{U}_{\mathbf{n}} = S^n \setminus \{\mathbf{n}\}$, $\mathcal{U}_{\mathbf{s}} = S^n \setminus \{\mathbf{s}\}$ son vecindades de estos dos puntos, difeomorfas a discos (bolas) en \mathbb{R}^n . Si $(\xi_1, \dots, \xi_n, t) \in \mathcal{U}_{\mathbf{n}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{s}}$ entonces $t \neq \pm 1$, por lo tanto $(\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0$. Con $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ definimos la proyección en el ecuador por

$$\mathbf{e} : \mathcal{U}_{\mathbf{n}} \cap \mathcal{U}_{\mathbf{s}} \rightarrow S^{n-1}, \quad \mathbf{e}(\xi, t) = \frac{\xi}{|\xi|}.$$

Sean E, F espacios vectoriales de dimensión finita r , sea $a : S^{n-1} \rightarrow \text{Iso}(E, F)$ un mapa de clase C^∞ (o solo continuo si únicamente queremos enfocar la atención en la topología). Definimos un fibrado $\rho : G_{(a)} \rightarrow S^n$ de la siguiente manera. Definimos $E_n = \mathcal{U}_n \times E$, $F_s = \mathcal{U}_s \times F$. En la union disjunta

$$E_n \sqcup F_s$$

definimos la relación de equivalencia \sim como la mínima con la propiedad

si $(p, v) \in E_n$ y $(p', w) \in F_s$, entonces

$$(p, v) \sim (p', w) \iff p' = p \text{ y } w = a(\epsilon(p))(v).$$

Sea

$$G_{(a)} = (E_n \sqcup F_s) / \sim$$

Si $\eta \in G_{(a)}$, entonces la primera componente de cualquier elemento de η es única. En efecto, η es un conjunto (una clase de equivalencia) con exactamente un elemento, o exactamente dos elementos. Si η tiene un solo elemento, entonces $\eta = (\mathbf{n}, v)$ o $\eta = (\mathbf{s}, w)$ para algún $v \in E$ o $w \in F$, y si tiene dos elementos, ellos son $(p, v) \in E_n$ y $(p, w) \in F_s$ con $p \in \mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_s$, $v \in E$ y (p, w) con $w = a(\epsilon(p)v) \in F$. Podemos entonces definir el mapa obvio $\rho : G_{(a)} \rightarrow S^n$ sin ambigüedad. Definimos ahora $\Phi_n : \rho^{-1}(\mathcal{U}_n) \rightarrow \mathcal{U}_n \times \mathbb{C}^r$ de la siguiente manera. Fijamos un isomorfismo $\mathbf{b}_n : E \rightarrow \mathbb{C}^r$. Si $\eta \in \rho^{-1}(\mathcal{U}_n)$, existe un único elemento $(p, v) \in \eta$ tal que $(p, v) \in E_n$. Sea $\Phi_n(\eta) = (p, \mathbf{b}_n v)$. Este mapa es biyectivo y si $\eta \in \rho^{-1}(\mathcal{U}_n)$ entonces $p = \rho(\Phi_n(\eta))$. Igualmente definimos $\Phi_s : \rho^{-1}(\mathcal{U}_s) \rightarrow \mathcal{U}_s \times \mathbb{C}^r$ con la ayuda de un isomorfismo $\mathbf{b}_s : F \rightarrow \mathbb{C}^r$. Si $p \in \mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_s$ y $z \in \mathbb{C}^r$ tenemos

$$\Phi_s^{-1}(p, z) = \{(p, \mathbf{b}_n^{-1}z), (p, a(\epsilon(p))(\mathbf{b}_n^{-1}z))\}$$

y por lo tanto

$$\Phi_s \circ \Phi_n^{-1}(p, z) = (p, \mathbf{b}_s a(\epsilon(p))(\mathbf{b}_n^{-1}z))$$

Este es un mapa

$$\Phi_s \circ \Phi_n^{-1} : (\mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_s) \times \mathbb{C}^r \rightarrow (\mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_s) \times \mathbb{C}^r$$

de clase C^∞ . Por lo tanto, las funciones Φ_n, Φ_s sirven para definir una estructura de variedad C^∞ en E . Como además $z \mapsto a(\epsilon(p))z$ es lineal en z , la composición $\Phi_s \circ \Phi_n^{-1}$ tiene la forma requerida para definir una estructura de fibrado vectorial en E .

Cambiar los isomorfismos $\mathbf{b}_n : E \rightarrow \mathbb{C}^r$, $\mathbf{b}_s : F \rightarrow \mathbb{C}^r$ solo cambia las trivializaciones. Redefinir $G_{(a)}$ usando diferentes isomorfismos, cambia la definición a un fibrado isomorfo. Si $\tilde{a} : S^{n-1} \rightarrow \text{Iso}(E, F)$ es otro mapa de clase C^∞ , homotópico a a , entonces el fibrado $G_{(\tilde{a})}$ definido por \tilde{a} es isomorfo al definido por a (la definición de fibrados vectoriales isomorfos está en la Sección II.10). Esto no es difícil de probar pero lo dejaremos como un hecho. Con algo de paciencia, los primeros capítulos del libro de Husemoller [31] forman una buena base de información sobre fibrados vectoriales en general.

Recíprocamente, dado un fibrado vectorial $\rho : G \rightarrow S^n$, hay espacios vectoriales E y F de dimensión r igual al rango de G y un mapa $a : E \rightarrow F$ tal que el fibrado G es isomorfo al fibrado $G_{(a)}$. Para ver esto, observamos primero que debido a que \mathcal{U}_n es difeomorfo a una bola, y que la bola es contractible a su centro, G es trivial sobre \mathcal{U}_n : hay una trivialización $\Psi_n : \rho^{-1}(\mathcal{U}_n) \rightarrow \mathcal{U}_n \times \mathbb{C}^r$. Por la misma razón hay una trivialización $\Psi_s : \rho^{-1}(\mathcal{U}_s) \rightarrow \mathcal{U}_s \times \mathbb{C}^r$. La segunda componente del mapa

$$(2.1) \quad \Psi_s \circ \Psi_n^{-1} : (\mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_s) \times \mathbb{C}^r \rightarrow (\mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_s) \times \mathbb{C}^r$$

es un mapa $(p, z) \mapsto \psi(p)z$ con $\psi : \mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_s \rightarrow \text{Gl}(r, \mathbb{C})$. Dado $p \in S^{n-1}$ y $v \in E = G_n$ tomamos la segunda componente, $z \in \mathbb{C}^r$, de $\Psi_n(v) = (n, z) \in \{n\} \times \mathbb{C}^r$, y definimos $a(p)v = \Psi_s^{-1}(s, \psi(p)z)$. Entonces $a : S^{n-1} \rightarrow \text{Iso}(E, F)$ es de clase C^∞ y $G_{(a)}$ es isomorfo a G .

El dominio del mapa (2.1) es contractible a S^{n-1} . Esto hace que ese mapa sea esencialmente obtenible de su restricción al ecuador vía extender $\Psi_s \circ \Psi_n^{-1}|_{S^{n-1}}$ como constante a lo largo de meridianos.

3. Equivalencia de símbolos elípticos y fibrados vectoriales

Fijamos una métrica Riemanniana g en \mathcal{X} , vista como métrica en $T^*\mathcal{X}$. Con ella definimos $S^*\mathcal{X} = \{\xi : |\xi| = 1\}$. Este es el fibrado de coesferas de \mathcal{X} . En el fibrado $T^*\mathcal{X} \oplus \mathbb{R}$ definimos una métrica que coincide con g en $T^*\mathcal{X}$, es la métrica usual en \mathbb{R} (el producto interno es el producto usual de números reales) y las fibras de $T^*\mathcal{X}$ son ortogonales al factor \mathbb{R} . Si $\xi \oplus t \in T^*\mathcal{X} \oplus \mathbb{R}$, definimos

$$S = \{\xi \oplus t \in T^*\mathcal{X} \oplus \mathbb{R} : |\xi|^2 + t^2 = 1\}.$$

Este es otro fibrado de esferas sobre \mathcal{X} , su fibra sobre p es la esfera unitaria en $T_p^*\mathcal{X} \otimes \mathbb{R}$ según la métrica. Definimos secciones, $\mathbf{n}, \mathbf{s} : \mathcal{X} \rightarrow S$,

$$\mathbf{n}(p) = 0 \oplus 1 \in T_p^* \otimes \mathbb{R}, \quad \mathbf{s}(p) = 0 \oplus (-1) \in T_p^* \otimes \mathbb{R}$$

y los conjuntos abiertos

$$\mathcal{U}_n = \{\xi + t \in T_p^* \otimes \mathbb{R} : t \neq -1\}, \quad \mathcal{U}_s = \{\xi + t \in T_p^* \otimes \mathbb{R} : t \neq 1\}.$$

La intersección de \mathcal{U}_n con la fibra $T_p^*\mathcal{X} \oplus \mathbb{R}$ es la esfera en esa fibra menos $\mathbf{s}(p)$, análogo al conjunto definido similarmente en la sección anterior. Las esferas S_p^* son los ecuadores de las esferas S_p . Como espacio topológico, S es la suspensión doble fibra a fibra del fibrado $S^*\mathcal{X}$: él es homeomorfo al espacio $(S^*\mathcal{X} \times [-1, 1])/\sim$ donde \sim colapsa para cada $p \in \mathcal{X}$, $S_p^*\mathcal{X} \times \{-1\}$ a un punto $(\mathbf{s}(p))$ y $S_p^*\mathcal{X} \times \{1\}$ a otro punto $(\mathbf{n}(p))$.

Podemos usar la proyección $\pi_S : S \rightarrow \mathcal{X}$ para traer un fibrado vectorial arbitrario $E \rightarrow \mathcal{X}$ a S , obteniendo así $\pi_S^*E \rightarrow S$.

Dados fibrados vectoriales $E, F \rightarrow \mathcal{X}$ y un símbolo homogéneo

$$a \in C^\infty(\dot{T}^*\mathcal{X}; \text{Hom}(E, F)),$$

la restricción de a a la esfera $S_p^* \subset T_p^* \mathcal{X}$ determina un mapa

$$a_p : S_p^* \mathcal{X} \rightarrow \text{Hom}(E_p, F_p)$$

de clase C^∞ . Y un mapa así determina por extensión homogénea del grado apropiado un mapa

$$C^\infty(\dot{T}^* \mathcal{X}; \text{Hom}(E, F)).$$

Si uno de esos mapas tiene imagen en el fibrado de isomorfismos, entonces también el otro.

Dado $a \in C^\infty(\dot{T}^* \mathcal{X}; \text{Hom}(\pi^* E, \pi^* F))$ usamos su restricción a $S^* \mathcal{X}$ para definir un fibrado vectorial $G_{(a)} \rightarrow S$ pegando la parte de $\pi_S^* E$ sobre \mathcal{U}_n a la parte de $\pi_S^* F$ sobre \mathcal{U}_s usando la restricción de a al ecuador, $S^* \mathcal{X}$, de S —exactamente como definimos un fibrado sobre esferas. Si $\tilde{a} \in C^* \infty(S^* \mathcal{X}; \text{Iso}(\pi^* E, \pi^* F))$ es homotópico a a a lo largo de $S^* \mathcal{X}$, entonces el fibrado $G_{(\tilde{a})}$ construido usando \tilde{a} es isomorfo a $G_{(a)}$.

El proceso inverso también es similar al de la sección anterior. Dado un fibrado $G \rightarrow S$, definimos $E = \mathfrak{n}^* G$, $F = \mathfrak{s}^* G$. Estos son fibrados sobre \mathcal{X} . El hecho que \mathcal{U}_n es contractible a la imagen $\mathfrak{n}(\mathcal{X}) \subset S$ de \mathfrak{n} , una copia difeomorfa de \mathcal{X} , y \mathcal{U}_s es contractible a $\mathfrak{s}(\mathcal{X}) \subset S$ (también una copia de \mathcal{X}) permite construir un mapa

$$\pi_S^* E|_{\mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_s} : \mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_s \rightarrow \pi_S^*(E, F)$$

Como $\mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_s$, la esfera menos sus polos, es contractible al ecuador, el dato de este mapa es equivalente al dato de su restricción al ecuador.

En conclusión tenemos:

PROPOSICIÓN 3.1. *Las clases de equivalencia módulo homotopía de mapas $a : S^* \mathcal{X} \rightarrow \text{Iso}(\pi^* E, \pi^* F)$ están en correspondencia uno a uno con las clases de equivalencia módulo isomorfismo de fibrados vectoriales sobre S .*

COROLARIO 3.2. *El índice de un operador elíptico en una variedad cerrada es un invariante topológico del símbolo principal.*

Los invariantes son clases características del fibrado en cuestión.

4. Conexiones

Sea $E \rightarrow \mathcal{X}$ un fibrado complejo. Una conexión en E es un operador diferencial lineal

$$\nabla : C^\infty(\mathcal{X}; E) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; E \otimes T^* \mathcal{X})$$

tal que para toda sección η de E y función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ (ambas al menos de clase C^1) vale

$$\nabla(f\eta) = f\nabla\eta + \eta \otimes df.$$

Un operador con esta propiedad es de primer orden, porque

$$\eta \mapsto \nabla(f\eta) - f\nabla\eta$$

es de orden 0 para cualquier $f \in C^\infty(\mathcal{X})$.

Para ver que tales operadores existen escogemos un cubrimiento abierto, $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a \in A}$, de \mathcal{X} tal que E es trivial sobre cada \mathcal{U}_a . Escogemos una partición de la unidad, $\{\chi_b\}_{b \in B}$, subordinada a esta cobertura, y una función $\iota : B \rightarrow A$ tal que $\text{sop } \chi_b \subset \mathcal{U}_{\iota(b)}$. En cada \mathcal{U}_a escogemos un marco de referencia $\eta_1^{(a)}, \dots, \eta_r^{(a)}$ y definimos

$$\nabla^{(a)} \sum_j f_j \eta_j^{(a)} = \sum_j \eta_j^{(a)} \otimes df_j$$

en $C^\infty(\mathcal{U}_a; E_{\mathcal{U}_a})$, y con ellas,

$$\nabla \eta = \sum_b \chi_b \nabla^{(\iota(b))} \eta|_{U_{\iota(b)}}.$$

Usando un marco de referencia η_1, \dots, η_r de E sobre un conjunto abierto \mathcal{U} , tenemos

$$\nabla \eta_j = \eta_k \otimes \omega_j^k$$

en \mathcal{U} con ciertas 1-formas ω_j^k . Estas formas son las formas de conexión de ∇ respecto al marco de referencia η_j . Si $\eta'_k, k=1, \dots, r$, es otro marco de referencia en \mathcal{U} entonces tenemos las relaciones

$$\eta'_k = \sum_j a_k^j \eta_j, \quad \eta_j = \sum_k b_j^k \eta'_k$$

con matrices invertibles $A = [a_k^j], B = [b_j^k]$ de funciones de clase C^∞ . Entonces

$$\begin{aligned} \nabla \eta'_k &= \nabla \left(\sum_j a_k^j \eta_j \right) \\ &= \sum_\ell \eta_\ell \otimes \left(\sum_j a_k^j \omega_j^\ell + da_k^\ell \right) \\ &= \sum_{\ell, m} b_\ell^m \eta'_m \otimes \left(\sum_j a_k^j \omega_j^\ell + da_k^\ell \right) \\ &= \sum_m \eta'_m \otimes \left(\sum_{j, \ell} b_\ell^m a_k^j \omega_j^\ell + \sum_\ell b_\ell^m da_k^\ell \right) \end{aligned}$$

Vemos que las formas de conexión de ∇ respecto al marco de referencia η'_k están relacionadas con las de η_j a través de

$$\omega_k^{m'} = \sum_\ell b_\ell^m a_k^j \omega_j^\ell + \sum_\ell b_\ell^m da_k^\ell$$

Denotando por ω la matriz $[\omega_j^k]$ y $\omega' = [\omega_k^{m'}]$ esto es

$$(4.1) \quad \omega' = A^{-1} \omega A + A^{-1} dA$$

con el producto usual de matrices.

Dado $p_0 \in \mathcal{X}$ siempre podemos encontrar un marco de referencia respecto al cual las 1-formas de conexión satisfacen $\omega(p_0) = 0$. Para ver esto, escogemos un marco arbitrario η_1, \dots, η_r cerca de p_0 . La correspondiente matriz de formas de conexión es ω . Escogemos una matriz A de funciones definidas cerca de p_0 tal que $A(p_0) = I$ y $dA(p_0) = -\omega(p_0)$ y definimos $\eta'_k = \sum_j a^j_k \eta_j$. Las η'_k forman un marco de referencia porque A es invertible cerca de p_0 . La matriz de 1-formas de conexión respecto a este marco calculada en p_0 es $\omega'(p_0) = 0$ según la fórmula (4.1).

La diferencia de dos conexiones en E es un operador de orden cero, inducido por un homomorfismo $\gamma : E \rightarrow E \otimes T^* \mathcal{X}$. En efecto, dadas conexiones ∇^0, ∇^1 , tenemos

$$\eta \mapsto (\nabla^1(f\eta) - \nabla^0(f\eta)) - f(\nabla^1\eta - \nabla^0\eta) = 0$$

para todo $f \in C^\infty(\mathcal{X})$.

Extendemos ∇ a un operador

$$\nabla : C^\infty(\mathcal{X}; E \otimes \wedge^q \mathcal{X}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; E \otimes \wedge^{q+1} \mathcal{X})$$

definiendo

$$\nabla(\eta \otimes \alpha) = (\nabla\eta) \wedge \alpha + \eta \otimes d\alpha$$

si $\eta \in C^\infty(\mathcal{X}; E)$ y α es una q -forma. Esto basta, en principio, para definir ∇ , porque cualquier sección de $E \otimes \wedge^q$ es localmente una combinación lineal de términos $\eta \otimes \alpha$. Como $\eta \otimes \alpha = f\eta \otimes \frac{1}{f}\alpha$ si f no se anula nunca, hay que comprobar que usar cualquiera de las dos representaciones produce el mismo resultado. Según la definición,

$$\begin{aligned} \nabla(f\eta \otimes \frac{1}{f}\alpha) &= \nabla(f\eta) \wedge \frac{1}{f}\alpha + f\eta \otimes d(\frac{1}{f}\alpha) \\ &= f(\nabla\eta) \wedge \frac{1}{f}\alpha + \eta \otimes df \wedge \frac{1}{f}\alpha + f\eta \otimes (\frac{1}{f}d\alpha - \frac{1}{f^2}df \wedge \alpha) \\ &= (\nabla\eta) \wedge \alpha + \eta \otimes d\alpha. \end{aligned}$$

Con esta definición, si $f \in C^\infty(\mathcal{X})$, $\eta \in C^\infty(\mathcal{X}; E)$ y $\alpha \in C^\infty(\mathcal{X}; \text{Wedge}^q \mathcal{X})$, entonces

$$\nabla(f\eta \otimes \alpha) = f(\nabla\eta) \otimes \alpha + f\eta \otimes d\alpha + \eta \otimes df \wedge \alpha$$

La composición de dos operadores sucesivos es de orden 0, y no de orden 2. Calculamos:

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla(f\eta \otimes \alpha)) &= \nabla(f\nabla\eta \otimes \alpha + f\eta \otimes d\alpha + \eta \otimes df \wedge \alpha) \\ &= f(\nabla\nabla\eta) \otimes \alpha + f\nabla\eta \otimes d\alpha - \nabla\eta \otimes df \wedge \alpha \\ &\quad + f\nabla\eta \otimes d\alpha + \eta \otimes df \wedge d\alpha \\ &\quad + \nabla\eta \otimes df \wedge \alpha - \eta \otimes df \wedge d\alpha. \end{aligned}$$

Los signos negativos vienen, en la antepenúltima línea, de que en la expresión local $\nabla\eta = \sum_j \psi_j \otimes \beta_j$ con 1-formas β_j , el operador d aparece después de las

β_j , y en la última línea, porque $d(df \wedge \alpha) = -df \wedge d\alpha$. Cancelando el miembro derecho de la última igualdad se reduce a la fórmula para $f\nabla\nabla(\eta \otimes \alpha)$. Por ser de orden cero, los operadores $\nabla\nabla$ están dados por homomorfismos

$$\Omega_q : E \otimes \wedge^q \mathcal{X} \rightarrow E \otimes \wedge^{q+2} \mathcal{X}$$

En particular, $\Omega_0 : E \rightarrow E \otimes \wedge^2 \mathcal{X}$, denotada Ω . Esta es la curvatura de E según la conexión ∇ . Usando que $\text{Hom}(E, E \otimes \wedge^2 \mathcal{X}) \approx E \otimes E^* \otimes \wedge^2 \mathcal{X}$ podemos expresar Ω localmente como sigue. Si η_1, \dots, η_r es un marco de referencia local y η^1, \dots, η^r el marco dual (para E^*),

$$\Omega = \sum_{j,k} \eta_k \otimes \eta^j \otimes \Omega_j^k$$

con ciertas 2-formas Ω_k^j estas son las formas de curvatura de ∇ respecto al marco de referencia η_j . La matriz de curvatura $\Omega = [\Omega_j^k]$ está relacionada con la matriz de formas de conexión $\omega = [\omega_j^k]$ a través de la fórmula

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega.$$

Cambiando el marco de referencia y usando (4.1) tenemos, para la matriz de curvatura respecto a nuevo marco,

$$\begin{aligned} \Omega' &= d\omega' + \omega' \wedge \omega' \\ &= d(A^{-1}\omega A + A^{-1}dA) + (A^{-1}\omega A + A^{-1}dA) \wedge (A^{-1}\omega A + A^{-1}dA) \\ &= -A^{-1}dAA^{-1} \wedge \omega A + A^{-1}d\omega A - A^{-1}\omega \wedge dA - A^{-1}dAA^{-1} \wedge A \\ &\quad + A^{-1}\omega \wedge \omega A + A^{-1}\omega \wedge dA + A^{-1}dA \wedge A^{-1}\omega A + A^{-1}dA \wedge A^{-1}dA. \end{aligned}$$

Usando por ejemplo $A^{-1}dA \wedge A^{-1}dA = A^{-1}dAA^{-1} \wedge dA$ y cancelando términos obtenemos

$$\Omega' = A^{-1}\Omega A.$$

LEMA 4.2. *Si las formas de conexión respecto a un cierto marco de referencia cerca de $p_0 \in \mathcal{X}$ satisfacen $\omega(p_0) = 0$, entonces la matriz de formas de conexión respecto a ese marco satisface $d\Omega(p_0) = 0$.*

Esto es consecuencia de la fórmula

$$d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega.$$

De $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ obtenemos

$$d\Omega = d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega = (\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Omega - \omega \wedge \omega) = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega.$$

5. Polinomios invariantes y el anillo de formas pares

Un polinomio $p(X)$, $X = [x_j^k]_{j,k=1}^r$ en $r \times r$ variables con coeficientes numéricos (enteros, \dots , complejos) es invariante si

$$p(A^{-1}XA) = p(X)$$

para toda matriz A invertible de tamaño $r \times r$. Ejemplos de polinomios invariantes son tr y \det . Para el primero vale en general $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, de esto es inmediato que $\text{tr}(A^{-1}XA) = \text{tr}(X)$. En el caso del determinante, vale $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, de esto de nuevo es inmediato que $\det(A^{-1}XA) = \det(X)$.

Algo más generalmente, para matrices $r \times r$ vale

$$\det(X + tI) = \sum_{j=0}^r t^j \sigma_{r-j}(X)$$

con p_j es invariante: $\det(A^{-1}XA + tI) = \det(A^{-1}XA + A^{-1}tIA) = \det(X + tI)$. El polinomio σ_r es \det mientras que σ_1 es tr . En general $\sigma_j(X)$ es el polinomio simétrico elemental de orden j en los autovalores de X . Estos polinomios tienen coeficientes enteros.

Otros ejemplos de interés son los coeficientes de la serie de Taylor de $\text{tr} e^{tX}$. Esto es,

$$q_j(X) = \frac{1}{j!} \text{tr} X^j$$

Finalmente, si X es una matriz genérica $r \times r$ con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, entonces

$$\text{Td}(X) = \prod_{k=1}^r \frac{\lambda_k}{1 - e^{-\lambda_k}}$$

es invariante, porque $\text{Td}(X)$ y $\text{Td}(A^{-1}XA)$ tienen los mismos autovalores.

En general, si $p(X)$ es un polinomio homogéneo invariante, entonces p es una expresión polinomial en las funciones simétricas elementales en los autovalores de X . Recíprocamente, una función simétrica en r variables (complejas) define un polinomio invariante.

Si V es un espacio vectorial (digamos real) de dimensión n , podemos definir una estructura de anillo con identidad en

$$\Lambda^*V = \mathbb{R} \oplus V \oplus \Lambda^2V \oplus \dots \oplus \Lambda^nV = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j : a_j \in \Lambda^jV \right\}$$

definiendo

$$\left(\sum_{j=0}^n a_j \right) \wedge \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) = \sum_{\ell=0}^n \sum_{j+k=\ell} a_j \wedge b_k.$$

El subconjunto de elementos de orden par,

$$\Lambda^{\text{par}} V = \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2j} : a_{2j} \in \wedge^{2j} V \right\},$$

es un subanillo conmutativo con identidad. Finalmente,

$$G(V) = \{1 + a_2 + \cdots + a_{2\lfloor n/2 \rfloor} : a_{2j} \in \wedge^{2j} V \text{ para } j > 0\}$$

es un grupo conmutativo.

Si $p(X)$, $X = [x_j^k]$ es un polinomio invariante y $w_j^k \in \wedge^2$, podemos reemplazar las variables por las formas w_j^k . Como $\Lambda^{\text{par}} V$ es conmutativo, no es necesario mantener el orden de los productos.

6. Clases características en cohomología de de Rham

Pasando ahora a la situación de formas sobre una variedad, sea $E \rightarrow \mathcal{X}$ un fibrado complejo con conexión ∇ con curvatura Ω expresada localmente respecto a un marco de referencia η_j como una matriz $[\Omega_j^k]$. Si $p(X)$ es un polinomio, podemos calcular $p(\Omega)$ sin problema. Pero si $\Omega' = A^{-1}\Omega A$, entonces la igualdad $p(\Omega') = p(\Omega)$ está garantizada solo si p es invariante. En ese caso, los sumandos homogéneos de p , los cuales podemos extraer usando

$$p(tX) = \sum_{m \geq 0} t^m p_m(X)$$

producen formas $p_m(\Omega) \in C^\infty(\mathcal{X}; \wedge^{2m} \mathcal{X})$ bien definidas, puesto que los p_m mismos también son invariantes: como $p_m(\Omega') = p_m(\Omega)$, no importa que marco de referencia local para E escogemos, el resultado es el mismo. Escribimos $p(\Omega)$ para denotar la forma global definida por p y ∇ .

Si $p(X)$ es un polinomio invariante homogéneo de orden m y Ω es la forma de conexión de alguna conexión en E que hemos prefijado, entonces $p(\Omega)$ es una $2m$ -forma cerrada. Para ver esto, escribimos p explícitamente:

$$p(X) = \sum p_{k_1 \dots k_m}^{j_1 \dots j_m} x_{j_1}^{k_1} \cdots x_{j_m}^{k_m}$$

con coeficientes constantes. Para ver que $dp(\Omega) = 0$ escogemos $p_0 \in \mathcal{X}$ arbitrario y un marco de referencia respecto al cual la matriz de formas de curvatura satisface $d\Omega(p_0) = 0$. Sustituyendo Ω tenemos

$$p(\Omega) = \sum p_{k_1 \dots k_m}^{j_1 \dots j_m} \Omega_{j_1}^{k_1} \wedge \cdots \wedge \Omega_{j_m}^{k_m}.$$

De esto es claro que $dp(\Omega)(p_0) = 0$. Como $p(\Omega)$ no depende del marco de referencia y p_0 es arbitrario, $dp(\Omega) = 0$. Por lo tanto, la conexión y el polinomio define una clase de cohomología en $H_{\text{dR}}^{2m}(\mathcal{X})$. También podemos probar que la clase de cohomología no depende de la conexión (ver Gilkey [19]).

DEFINICIÓN 6.1. Sea \mathcal{X} una variedad de clase C^∞ , $E \rightarrow \mathcal{X}$ un fibrado vectorial complejo de rango r y Ω la matriz de curvatura respecto a algún marco de referencia local de E . La clase (total) de Chern es el elemento

$$c(E) \in \bigoplus H_{\text{dR}}^{2k}(\mathcal{X})$$

definido localmente por

$$\det\left(I + \frac{i}{2\pi}\Omega\right).$$

El carácter de Chern es el elemento

$$\text{ch}(E) \in \bigoplus H_{\text{dR}}^{2k}(\mathcal{X})$$

definido localmente por

$$\text{tr } e^{\frac{i}{2\pi}\Omega}.$$

Sea $\nabla^{\mathcal{X}}$ una conexión en la complejificación, $\mathbb{C}T\mathcal{X}$, de $T\mathcal{X}$, $\Omega^{\mathcal{X}}$ su matriz de curvatura respecto a algún marco de referencia local de $T\mathcal{X}$. La clase de Todd de \mathcal{X} es el elemento

$$\text{Td}(\mathcal{X}) \in \bigoplus H_{\text{dR}}^{2k}(\mathcal{X})$$

definido localmente por

$$\text{Td}(\Omega^{\mathcal{X}}) \in \bigoplus H_{\text{dR}}^{4k}(\mathcal{X}).$$

Estas clases aparentan ser clases en cohomología de de Rham con coeficientes complejos, pero cada clase contiene representantes reales (ver Gilkey [19, p. 94]).

La clase total de Chern es

$$c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \dots + c_r(E), \quad c_j(E) \in H_{\text{dR}}^{2j}(\mathcal{X})$$

con $c_j(E) \in H_{\text{dR}}^{2j}(\mathcal{X})$. Siempre $c_j(E) = 0$ si $j > r$ porque el polinomio $\det(tI + X)$ es de grado r en el caso de matrices $r \times r$. Además $c_j(E) = 0$ si $2j > \dim \mathcal{X}$ porque $H_{\text{dR}}^{2j}(\mathcal{X}) = 0$ en ese caso. El carácter de Chern está basado en $\text{tr exp}(X)$. Expandiendo en serie de Taylor,

$$\text{tr}(e^X) = \text{tr}\left(I + X + \frac{1}{2}X^2 + \dots\right) = r + \sigma_1(X) + \frac{1}{2}(\sigma_1(X)^2 - 2\sigma_2(X)) + \dots$$

La clase de Chern puede ser definida en cohomología con coeficientes en \mathbb{Z} , la carácter de Chern en cohomología racional (la división por números factoriales es la expansión de Taylor del exponencial es inevitable), lo mismo que con la clase de Todd. Las clases de Chern enteras de E “casi” determinan el fibrado. No lo determinan necesariamente, porque, por ejemplo, un fibrado puede tener curvatura nula, por lo tanto su clase total de Chern es trivial sin que el fibrado mismo sea trivial. Hay otras razones para fallar, pero para esto hay que mirar con más cuidado la interacción de la topología del fibrado y la del espacio de base \mathcal{X} .

Supongamos por un momento que \mathcal{X} es de dimensión par $n = 2m$. Si $E \rightarrow \mathcal{X}$ es un fibrado complejo de rango $r > m$, entonces E tiene una descomposición $E \approx E^{(0)} \oplus \mathbb{C}^{r-m}$, y cualquier descomposición de este tipo (con $E^{(0)}$ con rango m) produce factores isomorfos. Esto no es difícil de probar, pero requiere algo de sofisticación (ver Husemoller [31, p. 112, Teorema 1.2]; algo similar ocurre si $\dim \mathcal{X}$ es impar). La consecuencia de esto es que uno puede definir una estructura de grupo en el conjunto $V_m(\mathcal{X})$ de clases de equivalencia por isomorfismo de fibrados vectoriales complejos de rango m sobre una variedad (que supondremos cerrada como en el resto de este capítulo y orientable). Si $E, F \rightarrow \mathcal{X}$ son fibrados de rango m , entonces $E \oplus F = G \oplus \mathbb{C}^m$ para algún G , único módulo isomorfismo. La clase del fibrado trivial $\mathcal{X} \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathcal{X}$ hace de unidad. Paralelo a esto, el conjunto

$$C_m(\mathcal{X}) = 1 \oplus H_{\text{dR}}^2(\mathcal{X}) \oplus \cdots \oplus H_{\text{dR}}^{2m}(\mathcal{X})$$

también tiene estructura de grupo. Finalmente

$$c : V_m(\mathcal{X}) \rightarrow C_m(\mathcal{X})$$

es un homomorfismo. Para ver esto, notamos que $c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F)$. Esto es inmediato si para calcular $c(E \oplus F)$ usamos como conexión en $E \oplus F$ la obtenida de combinar una para E y una para F , y las propiedades del determinante.

Todas estas clases de un fibrado $E \rightarrow \mathcal{X}$ pueden ser expresadas en términos de las clases de Chern, porque estas están realmente basadas en las funciones simétricas elementales. Las clases de Chern de la complexificación de un fibrado real se anulan en grados que son múltiplos impares de 2 (ver Gilkey [19, p. 98]); ellas coinciden con las clases de Pontryagin (que no hemos definido) del fibrado real.

7. La fórmula de Atiyah-Singer

En $T^*\mathcal{X}$ tomamos como orientación la inducida por la forma de Liouville λ , una $2n$ -forma (ver (II.9.2)), y en $T^*\mathcal{X} \oplus \mathbb{R}$ la inducida por $\lambda \wedge dt$. Esto induce una orientación en el fibrado de esferas $\rho : S \subset T^*\mathcal{X} \oplus \mathbb{R}$.

Dado el fibrado vectorial complejo $G \rightarrow S$, tomamos el carácter de Chern y la clase de Todd y formamos $\rho^*(\text{Td}(\mathcal{X})) \wedge \text{ch}(G)$. Esta es una suma de formas de varios grados. Aislamos la parte de grado $2n = \dim S$. Esta forma tiene una integral bien definida puesto que S es orientable y hemos escogido una orientación.

TEOREMA 7.1 (Atiyah-Singer). *Sea \mathcal{X} una variedad cerrada de clase C^∞ y dimensión n , $E, F \rightarrow \mathcal{X}$ fibrados vectoriales complejos, sea $A \in \Psi(\mathcal{X}; E, F)$ un operador pseudodiferencial elíptico de orden $\mu > 0$, y sea $\text{Ind}(A)$ su índice de Fredholm. Sea G el fibrado de esferas construido sobre la suspensión del fibrado*

de coesferas S^* \mathcal{X} y sea $G \rightarrow \mathcal{S}$ el fibrado vectorial construido usando el símbolo principal de A . Entonces

$$\text{Ind}(A) = (-1)^n \int_{\mathcal{S}} \text{Td}(\mathcal{X}) \wedge \text{ch}(G).$$

La función ζ de un operador elíptico

1.

Continuamos con una variedad cerrada \mathcal{X} y un fibrado vectorial $E \rightarrow \mathcal{X}$. Suponemos dados una densidad positiva en \mathcal{X} y una métrica Hermitiana para el fibrado E . Con estos datos, construimos $L^2(\mathcal{X}; E)$. Si A es un operador diferencial, su adjunto formal es el operador A^* tale que

$$(Au, v) = (u, A^*v) \quad \text{para todo } u, v \in L^2(\mathcal{X}; E).$$

Si A es elíptico, A con dominio

$$\mathcal{D} = \{u \in L^2(\mathcal{X}; E) : Au \in L^2(\mathcal{X}; E)\}$$

tiene como adjunto de Hilbert al operador A^* con dominio

$$\mathfrak{D} = \{u \in L^2(\mathcal{X}; E) : A^*u \in L^2(\mathcal{X}; E)\}.$$

Debido a la compacidad de \mathcal{X} y la elipticidad de A , ambos dominios son iguales a $H^m(\mathcal{X}; E)$, el espacio de Sobolev de orden m (el orden de A) cuyos elementos son secciones de E . De esto resulta: si A es elíptico y simétrico, es decir, $A = A^*$, entonces es autoadjunto.

Supondremos que A es elíptico y positivo¹:

$$(Au, u) \geq c\|u\|^2, \quad u \in C^\infty(\mathcal{X}; E)$$

con $c > 0$. Entonces el espectro de A , el cual es un conjunto discreto sin puntos de acumulación finitos por ser A elíptico, es un subconjunto de \mathbb{R} porque A es autoadjunto, de hecho contenido en $[c, \infty)$ por la positividad A . Cada elemento de $\text{spec}(A)$ es un autovalor de multiplicidad finita (debido a la elipticidad de A y la compacidad de \mathcal{X}). Si $\psi \in \mathcal{D}$ es un autovector, entonces $\psi \in C^\infty(\mathcal{X}; E)$ por regularidad elíptica. Esto vale incluso si u es una distribución y un autovector.

¹ (Au, u) real para todo $u \in C^\infty(\mathcal{X}; E)$ implica simetría. Para cualquier $u, v \in C^\infty(\mathcal{X}; E)$ tenemos

$$(Au, v) + (Av, u) = (A(u+v), u+v) - (Au, u) - (Av, v) \in \mathbb{R}$$

por lo tanto $\Im(Au, v) = -\Im(Av, u) = \Im(u, Av)$ usando $(Av, u) = \overline{(u, Av)}$. En la misma fórmula, reemplazando v por $-iv$ tenemos que por ser $i(Au, v) - i(Av, u)$ real, $\Re(Au, v) = \Re(Av, u) = \Re(u, Av)$. De esto resulta $(Au, v) = (v, Au)$. En particular, A positivo implica A simétrico.

Escribimos

$$\mathcal{E}_\lambda = \ker(A - \lambda I), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

La positividad de A implica, según el Teorema III.13.5, que el espectro de A está contenido en $[c, \infty) \subset (0, \infty)$, Por lo tanto, si $\lambda \in \text{spec}(A)$, la potencia λ^{-s} está definida sin ambigüedad para cualquier $s \in \mathbb{C}$. La función ζ de A es la función

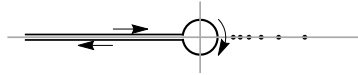
$$(1.1) \quad \zeta_A(s) = \sum_{\lambda \in \text{spec}(A)} \lambda^{-s} \dim \mathcal{E}_\lambda.$$

Como veremos, ella está definida inicialmente en la región $\Re s > n/m$ del plano complejo, pero tiene una extension meromorfa a todo \mathbb{C} con polos únicamente a lo largo de $(-\infty, n/m]$, todos simples.

Obtendremos información sobre ζ_A usando la fórmula

$$(1.2) \quad \zeta_A(s) = \text{Tr} \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^{-s} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

válida, como veremos, si $sm < -n$, donde Γ es el camino obtenido recorriendo el semieje real negativo desde $-\infty$ hasta $-\varepsilon$, seguido del camino circular a lo largo de $|\lambda| = \varepsilon$ en el sentido



horario hasta volver al semieje negativo, y de allí de nuevo a $-\infty$ a lo largo del eje real. El número ε es positivo, menor que c , y λ^s está definido usando la determinación del logaritmo en el complemento del semieje real negativo; en la primera parte del camino, $\lambda^{-s} = |\lambda|^{-s} e^{-is\pi}$, en la tercera, $\lambda^{-s} = |\lambda|^{-s} e^{is\pi}$. La motivación de la fórmula proviene de

$$\eta^{-s} = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^{-s} (\lambda - \eta)^{-1} d\lambda$$

si $\eta \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\Re s > 0$, y $|\eta| > \varepsilon$. Usada conjuntamente con

$$(A - \lambda I)^{-1} = \sum_{\zeta \in \text{spec}(A)} \frac{1}{\zeta - \lambda} \Pi^\zeta,$$

donde $\Pi_\zeta : L^2(\mathcal{X}; E) \rightarrow L^2(\mathcal{X}; E)$ es la proyección ortogonal en \mathcal{E}_ζ y procediendo formalmente, obtenemos

$$\text{Tr}(A - \lambda I)^{-1} = \sum_{\zeta \in \text{spec}(A)} \frac{1}{\zeta - \lambda} \text{Tr} \Pi^\zeta,$$

lo cual produce la relación entre ζ_A y la traza del operador

$$(1.3) \quad A^{-s} = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^{-s} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda$$

Como ya sabemos, calcular la traza de un operador pseudodiferencial requiere que su orden sea menor que $-n = -\dim \mathcal{X}$ (para que el núcleo de Schwartz sea continuo, y tenga restricción a la diagonal). La definición del operador A^{-s}

solo requiere $\Re s > 0$, y veremos que este es un operador de orden $-ms$. Así, la existencia de la traza esta garantizada para $\Re s > n/m$. En la siguiente sección discutimos en detalle la definición de A^{-s} . El factor i en el numerador en (1.3) toma en cuenta que escribimos $(A - \lambda I)^{-1}$ en lugar de $(\lambda I - A)^{-1}$.

La mayor parte de este capítulo está basada en Seeley [70].

2. Potencias complejas de A

La positividad de A implica que A es simétrico.

LEMA 2.1. *Si A es simétrico, entonces*

$$\|(A - \lambda I)u\|_0 \geq |\Im \lambda| \|u\|_0, \quad u \in C^\infty(\mathcal{X}; E).$$

Si además A es no-negativo, entonces

$$\|(A - \lambda I)u\|_0 \geq |\lambda| \|u\|_0 \quad \text{si } \Re \lambda < 0.$$

Sea $c_0 > 0$ arbitrario, definamos

$$\Sigma_{\theta, c_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re e^{-\theta} \lambda \geq 0, |\Im e^{-\theta} \lambda| \leq c_0 \Re e^{-\theta} \lambda\}.$$

En el caso $\theta = 0$ que nos interesa por ahora, Σ_{0, c_0} es un sector abierto centrado en el semieje real positivo. En general, Σ_{θ, c_0} es un sector abierto centrado en el rayo

$$\text{Ray}_\theta = \{r e^{i\theta} : r > 0\}.$$

Combinando las dos estimaciones del lema obtenemos que para cada $c_0 > 0$ existe c_1 tal que

$$(2.2) \quad \|(A - \lambda I)u\|_0 \geq c_1 |\lambda| \|u\|_0 \quad \text{si } \lambda \notin \Sigma_{0, c_0}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si A es simétrico, entonces (Au, u) es real para cualquier $u \in C^\infty(\mathcal{X}; E)$:

$$0 = (Au, u) - (u, Au) = (Au, u) - \overline{(Au, u)} = 2\Im(Au, u).$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad $|z| \geq |\Im z|$ para números complejos z , tenemos

$$\|(A - \lambda I)u\|_0 \|u\|_0 \geq |(A - \lambda I)u, u| = |(Au, u) - \lambda(u, u)| \geq |\Im \lambda| \|u\|_0^2$$

y simplificando obtenemos la primera desigualdad del enunciado.

Supongamos ahora que (Au, u) es no-negativo. Entonces

$$\|(A - \lambda I)u\|_0^2 = \|Au\|_0^2 + |\lambda|^2 \|u\|_0^2 - 2\Re \lambda (Au, u).$$

Si $\Re \lambda < 0$, entonces $-2\Re \lambda (Au, u) \geq 0$, y por lo tanto el lado derecho está acotado por debajo por $|\lambda|^2 \|u\|_0^2$. Tomando raíz cuadrada obtenemos la segunda desigualdad del enunciado. \square

La desigualdad (2.2) implica

$$\|(A - \lambda I)^{-1}u\|_0 \leq \frac{c}{|\lambda|} \|u\|_0, \quad u \in L^2(\mathcal{X}; E), \quad \lambda \notin \Sigma_{\theta, c_0}$$

para cualquier c_0 con $c = 1/c_1$. La manera más sencilla de definir la integral en (1.3) es apelando a la teoría de integrales de línea de funciones complejas. Si $u, v \in L^2(\mathcal{X}; E)$, entonces

$$\lambda \mapsto \lambda^{-s}((A - \lambda I)^{-1}u, v)$$

es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus (\text{spec}(A) \cup \overline{\mathbb{R}}_-)$, acotada por

$$|\lambda^{-s}((A - \lambda I)^{-1}u, v)| \leq c|\lambda|^{-\Re s - 1} \|u\|_0 \|v\|_0.$$

en $\mathbb{C} \setminus \Sigma_{\theta, c_0}$. Como consecuencia tenemos: si $\Re s > 0$, la integral de línea

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s}((A - \lambda I)^{-1}u, v) d\lambda$$

converge absolutamente, y está acotada por

$$C_s \|u\|_0 \|v\|_0$$

con

$$C_s = c \int_{\Gamma} |\lambda|^{-\Re s - 1} |d\lambda|.$$

En particular,

$$L^2(\mathcal{X}; E) \ni v \mapsto \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s}((A - \lambda I)^{-1}u, v) d\lambda \in \mathbb{C}$$

es continuo además de lineal, y vía el teorema de representación de Riesz define un elemento de $L^2(\mathcal{X}; E)$, denotado $A^{-s}u$. Este elemento depende linealmente de u y satisface

$$\|A^{-s}u\|_0 \leq C_s \|u\|_0.$$

Tenemos por lo tanto un operador continuo $A^{-s} : L^2(\mathcal{X}; E) \rightarrow L^2(\mathcal{X}; E)$ con norma $\leq C_s$. Una versión equivalente resulta de usar que

$$\lambda \mapsto \lambda^{-s}(A - \lambda I)^{-1}u \in L^2(\mathcal{X}; E)$$

es continuo, extendiendo la definición de integrales de Riemann impropias a funciones continuas con valores en un espacio de Hilbert (o de Banach).

En cualquier caso, solo podemos definir la integral de esta manera cuando $\Re s > 0$. El resultado es una familia de operadores que dependen de s de manera holomorfa.

PROPOSICIÓN 2.3. *Si s, s' son números complejos con parte real mayor que 0, entonces*

$$A^{-s} \circ A^{-s'} = A^{-s-s'}.$$

Si $\Re s > 1$, entonces $A \circ A^{-s} = A^{-s+1}$. Si s es un entero positivo, entonces A^{-s} es la s -ésima potencia de la inversa de A .

La proposición justifica la notación.

DEMOSTRACIÓN. Debido a la holomorficidad, el camino preciso que usamos para definir A^s no es importante, solo el comportamiento general importa. Continuamos con el camino Γ original, y escogemos otro camino Γ' descrito como sigue. Tomamos $\varepsilon' > \varepsilon$ tal que $\varepsilon' < \text{mín spec}(A)$ y $\delta < \varepsilon'$. El camino Γ' consiste del segmento paralelo al eje real con parte imaginaria $\delta > 0$ comenzando en $-\infty + i\delta$ hasta encontrar el círculo de radio $\varepsilon' > \varepsilon$, seguido del arco a lo largo de ese círculo recorrido en el sentido horario hasta encontrar el segundo punto de intersección con la línea $\Im\lambda = -\delta$, luego el segmento de allí a $-\infty - i\delta$ hasta $-\infty - i\delta$. Usando la segunda definición posible de A^s , tenemos

$$(A^{-s} \circ A^{-s'})(u) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} \mu^{-s'} (A - \lambda I)^{-1} \circ (A - \mu I) u \, d\lambda \, d\mu.$$

En el lado derecho hemos usado la continuidad de A y la convergencia de las sumas de Riemann de

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma'} \mu^{-s} (A - \mu I)^{-1}(u) \, d\mu$$

en la topología de $L^2(\mathcal{X}; E)$ para obtener

$$(A - \lambda I)^{-1} \left(\int_{\Gamma'} \mu^{-s'} (A - \mu I)(u) \, d\mu \right) = \int_{\Gamma'} \mu^{-s'} (A - \lambda I)^{-1} \circ (A - \mu I)(u) \, d\mu$$

Una vez hecho esto, el orden de la integración no es material. Ahora usamos

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^{-1} - (A - \mu I)^{-1} &= (A - \lambda I)^{-1} \circ (A - \mu I - (A - \lambda I)) \circ (A - \mu I)^{-1} \\ &= (\lambda - \mu)(A - \lambda I)^{-1} \circ (A - \mu I)^{-1} \end{aligned}$$

para obtener

$$\begin{aligned} (2.4) \quad (A^{-s} \circ A^{-s'})(u) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} \frac{\lambda^{-s} \mu^{-s'}}{\lambda - \mu} (A - \lambda I)^{-1}(u) \, d\mu \, d\lambda \\ &\quad - \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma} \frac{\lambda^{-s} \mu^{-s'}}{\lambda - \mu} (A - \mu I)^{-1}(u) \, d\lambda \, d\mu. \end{aligned}$$

Reescribimos el primer término de la derecha como

$$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \int_{\Gamma} \left[\int_{\Gamma'} \frac{\mu^{-s'}}{\lambda - \mu} \, d\mu \right] \lambda^{-s} (A - \lambda I)^{-1}(u) \, d\lambda$$

y observamos que en la integral entre corchetes podemos cambiar el contorno de integración Γ' , definido usando ε' , a uno definido de la misma manera con parámetro $r \geq \varepsilon'$ porque $\lambda \in \Gamma$. Usando la estimación

$$\left| \frac{\mu^{-s'}}{\lambda - \mu} \right| \leq C |\mu|^{-\Re s' - 1}$$

para λ fijo y $|\mu|$ grande y usando que $\Re s' > 0$, concluimos que esa integral es nula. Escribimos el segundo término de la derecha en (2.4), incluyendo el signo, como

$$-\left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \int_{\Gamma'} \left[\int_{\Gamma} \frac{\lambda^{-s}}{\lambda - \mu} d\lambda \right] \mu^{-s'} (A - \mu I)^{-1}(u) d\mu$$

La integral entre corchetes es igual a

$$\oint_{|\lambda - \mu| = \rho} \frac{\lambda^{-s}}{\lambda - \mu} d\lambda + \int_{\Gamma''} \frac{\lambda^{-s}}{\lambda - \mu} d\lambda$$

donde Γ'' está definida como Γ pero con parámetro $\varepsilon'' > 2|\mu|$, de manera que la parte circular mantiene a μ en su interior, y $0 < \rho < |\mu|$. La segunda integral, la integral sobre Γ'' es nula en base al mismo argumento que más arriba, esta vez usando $\Re s > 1$. Para la primera integral, en la cual la orientación es antihoraria, tenemos

$$\oint_{|\lambda - \mu| = \rho} \frac{\lambda^{-s}}{\lambda - \mu} d\lambda = 2\pi i \mu^{-s'}$$

Concluimos que $(A^{-s} \circ A^{-s'})(u) = (A^{-s-s'})(u)$.

Para probar la segunda asección usamos

$$\begin{aligned} \lambda^{-s} A(A - \lambda I)^{-1} &= \lambda^{-s} (A - \lambda I)(A - \lambda I)^{-1} + \lambda^{-s+1} (A - \lambda I)^{-1} \\ &= \lambda^{-s} + \lambda^{-s+1} (A - \lambda I)^{-1} \end{aligned}$$

y argumentamos que

$$\int_{\Gamma} \lambda^{-s} d\lambda = 0$$

usando $\Re s > 1$.

Si s es un entero positivo, los límites

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \lambda_0 \\ \Im \lambda > 0}} \lambda^{-s}, \quad \lim_{\substack{\lambda \rightarrow \lambda_0 \\ \Im \lambda < 0}} \lambda^{-s}$$

con $\lambda_0 < 0$ son iguales. La cancelación que esto implica reduce la integral que define a A^{-s} a

$$A^{-s} = \frac{i}{2\pi} \oint_{|\lambda| = \varepsilon} \lambda^{-s} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda.$$

Si $s = 1$, esto evalúa $(A - \lambda)^{-1}$ en $\lambda = 0$. Si $s > 1$ (entero), usamos la segunda parte de la proposición. \square

La segunda asección del lema nos permite extender la definición de A^{-s} a todo el plano complejo:

COROLARIO 2.5. *La familia $s \mapsto A^{-s}$ tiene una extensión holomorfa a \mathbb{C} .*

DEMOSTRACIÓN. Sea s arbitrario en la región $\Omega_k = \Re s > -k + 1$. Como $\Re(s+k) > 1$, A^{-s-k} está definido y es holomorfo en s en la región Ω_k . Entonces también la nueva función $A_{(k)}^{-s} = A^k A^{-s-k}$ es holomorfa en Ω_k . Pero si $\Re s - k > 1$, entonces $A^k A^{-s-k} = A^{-s}$. Esto es, $A_{(k)}^{-s}$ es una extensión holomorfa de A^{-s} . Extendemos A^{-s} a la región Ω_k definiendo $A^{-s} = A_{(k)}^s$. \square

3. Rayos de crecimiento mínimo

Las únicas propiedades de A que usamos en la sección anterior fueron la invertibilidad de $(A - \lambda I)^{-1}$ si λ es un número real no-positivo y la estimación

$$(3.1) \quad \|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{c}{|\lambda|}, \quad \lambda \in R_\pi$$

con $R_\pi = \mathbb{R}_-$. Esta última desigualdad implica la validez de una desigualdad similar con otra constante c en un sector alrededor del semieje real negativo. Usando

$$A - \lambda I = (A - \lambda_0 I)(I + (\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1})$$

y la invertibilidad² de

$$I + (\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1}$$

si $\|(\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$. La cota (3.1) implica

$$\|(\lambda - \lambda_0)(A - \lambda_0 I)^{-1}\| \leq c \left| \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \right|$$

Con $\Re \lambda < 0$ y escogiendo $\lambda_0 = \Re \lambda$ vemos que $A - \lambda I$ es invertible si $|\Im \lambda / \Re \lambda| < 1/c$.

En general, Ray_θ es un un rayo de crecimiento mínimo para un operador A si $A - \lambda I$ es invertible cuando $\lambda \in \text{Ray}_\theta$ es suficientemente grande, con la estimación (3.1) con Ray_θ en lugar de R_π . Si Ray_θ es un rayo de crecimiento mínimo para A , y A es elíptico e invertible ($0 \notin \text{spec}(A)$), todo los argumentos de la sección anterior son aplicables directamente (alternativamente también trabajando con el operador $e^{-i\theta} A$, definiendo $A^{-s} = e^{is\theta} (e^{i\theta} A)^{-s}$) usando una curva Γ que cerca del origen, omite el espectro de A (discreto por ser A elíptico y \mathcal{X} compacta).

Si $A \in \text{Dif}^m(\mathcal{X}; E)$ es no-negativo, entonces A es simétrico y su símbolo principal es no-negativo. Para ver esto, usaremos (III.11.5). Sean $\xi \in \dot{T}^* \mathcal{X}$ y $\pi(\xi) = p_0$. Tomamos $f \in C^\infty(\mathcal{X})$ a valores reales con $df(p_0) = \xi$. Dado

²Vía serie de Neumann,

$$(I - T)^{-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} T^\ell,$$

con convergencia en norma si $\|T\| < 1$.

$\phi_0 \in E_{p_0}$, escogemos $u \in C^\infty(\mathcal{X}; E)$ con soporte contenido en la región \mathcal{U} donde $df \neq 0$ y tal que $u(p_0) = \phi_0$. La positividad de A implica

$$(Ae^{i\tau f}u, e^{i\tau f}u) \geq 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^m}(Ae^{i\tau f}u, e^{i\tau f}u) &= \left(\frac{1}{\tau^m}e^{-i\tau f}Ae^{i\tau f}u, u\right) \\ &\rightarrow (\mathfrak{O}(A)(df)(u), u) \text{ cuando } \tau \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

deducimos

$$(\mathfrak{O}(A)(df)(u), u) \geq 0.$$

Escogemos una carta local x_1, \dots, x_n en un entorno de p_0 , digamos en \mathcal{U} mismo, con $x_j(p_0) = 0$, y $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con $\chi(0) = 1$. En lugar de u usamos $k^{n/2}e^{-k^2|x|^2}u$ con $k \in \mathbb{N}$. Escribiendo $(\cdot, \cdot)_x$ para la métrica en la fibra E_x y $d\mathbf{m} = \mathbf{m}_0(x)dx$ para la densidad, tenemos

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{O}(A)(df)(k^{n/2}e^{-k^2|x|^2}u), k^{n/2}e^{-k^2|x|^2}u) \\ &= \int_{\mathcal{X}} (\mathfrak{O}(A)(df(x))(k^{n/2}e^{-k^2|x|^2}u(x)), k^{n/2}e^{-k^2|x|^2}u(x))_x \mathbf{m}_0(x) dx \\ &= \int_{\mathcal{X}} k^n e^{-2k^2|x|^2} (\mathfrak{O}(A)(df(x))(u(x)), u(x))_x \mathbf{m}_0(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-2|x|^2} \mathfrak{O}(A)(df(x/k))(u(x/k)), u(x/k))_{x/k} \mathbf{m}_0(x/k) dx \end{aligned}$$

usando un cambio de variables para llegar a la última línea. El límite de esa última expresión cuando $k \rightarrow \infty$ es

$$(\mathfrak{O}(A)(df(p_0))(u(p_0)), u(p_0))_{p_0} \mathbf{m}(p_0) \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|^2} dx$$

Por lo tanto

$$(\mathfrak{O}(A)(\xi)(\phi_0), \phi_0)_{p_0} \geq 0.$$

Si Ray_θ es un rayo de crecimiento mínimo, la desigualdad (3.1) con $\lambda \in \text{Ray}_\theta$ implica

$$|\lambda||u|_0 \leq c\|(A - \lambda I)u\|_0, \quad \lambda \in \text{Ray}_\theta.$$

De esta desigualdad podemos sacar más información. Tomamos $\lambda \in \text{Ray}_\theta$ y reemplazamos λ por $\tau^m \lambda$ y u por $e^{i\tau f}u$ en la desigualdad, con f y u como antes. Entonces

$$|\lambda||u|_0 \leq c \left\| \frac{1}{\tau^m} e^{-i\tau f} (A - \tau^m \lambda I) e^{i\tau f} u \right\|_0$$

y tomando el límite con $\tau \rightarrow \infty$ resulta

$$|\lambda||u|_0 \leq c\|(\mathfrak{O}(A)(df) - \lambda I)u\|_0$$

Usando el argumento que lleva a la desigualdad puntual deducimos la invertibilidad de $\sigma(A)(\xi) - \lambda I$ para cada $\xi \neq 0$ si $\lambda \in \text{Ray}_\theta$; recordemos que por la definición, $0 \notin \text{Ray}_\theta$.

Notamos de paso que la invertibilidad de $\sigma(A)(\xi) - \lambda I$ para todo $\xi \in \dot{T}^*\mathcal{X}$ y $\lambda \in \text{Ray}_\theta$ no es suficiente para concluir que A es elíptico. Por ejemplo, en \mathbb{R}^3 , $\xi_1^2 + \xi_2^2 - \lambda$ es invertible para todo $\lambda < 0$, pero $\xi_1^2 + \xi_2^2$ no es el símbolo de un operador elíptico.

PROPOSICIÓN 3.2. *Si $A \in \text{Dif}^m(\mathcal{X}; E)$ es elíptico y Ray_θ es un rayo de crecimiento mínimo para $\sigma(A)$, entonces Ray_θ es un rayo de crecimiento mínimo para*

$$A : H^m(\mathcal{X}; E) \subset L^2(\mathcal{X}; E) \rightarrow L^2(\mathcal{X}; E).$$

En la Sección VI.4 vimos como, con el Laplaciano de Hodge \square_q , podemos encontrar una inversa pseudodiferencial de $\square_q - \lambda I$ invirtiendo $\square_q + D_t^2$. Aquí este truco “barato” no funciona porque para nuestro operador, $A + D_t^m$ puede no ser elíptico porque si m es impar no controlamos el signo de τ^m (si A es un operador escalar y $\dim \mathcal{X} > 2$ entonces la elipticidad implica que m es par). Sin embargo, podemos construir una parametriz para A “a mano” usando coordenadas locales y considerando λ en $a_m - \lambda I$, como parte del símbolo principal de $A - \lambda I$ pretendiendo que λ es homogénea de orden m .

Organizamos las ideas en el lenguaje de la sucesión (III.11.6) y el Teorema III.11.8. Para la definir versión local de los operadores que necesitamos tomamos un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y un sector $\Sigma = \Sigma_{\theta,c}$ arbitrario. Definimos $S_{1,0}^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n \times \Sigma)$ como el espacio de funciones $b \in C^\infty(\mathcal{X} \times \mathbb{R}^n \times \bar{\Sigma})$ (posiblemente con valores en matrices) tales que para todo $\mathcal{K} \Subset \Omega$, todo $\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$, existe C tal que

$$|D_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\lambda^\gamma \partial_\lambda^{\gamma'} b(x, \xi, \lambda)| \leq C(1 + |\xi| + |\lambda|^{\frac{1}{m}})^{\mu - |\beta| - |\gamma| - |\gamma'|}, \quad x \in \mathcal{K}, (\xi, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \Sigma.$$

Estos son símbolos similares a los símbolos de tipo $(1, 0)$ en el sentido del Capítulo III excepto que no están definidos en todo $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$, sino (cada uno) en un entorno de $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \bar{\Sigma}$ en este espacio (viendo \mathbb{C} como \mathbb{R}^2), además con homogeneidad distinta en ξ y λ :

$$\tau \cdot (\xi, \mu) = (\tau\xi, \tau^m \mu).$$

Dejamos implícito que el espacio depende de m . Definimos operadores pseudodiferenciales usando estos símbolos, simplemente usando $\lambda \in \Sigma$ como parámetro. Definimos $S_h^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n \times \Sigma)$ como el espacio de funciones de clase C^∞ en $\Omega \times [(\mathbb{R}^n \times \bar{\Sigma}) \setminus \{0, 0\}]$ homogéneas de orden μ :

$$b : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$$

es homogénea de orden μ si

$$b(x, \tau\xi, \tau^m \lambda) = \tau^\mu b(x, \xi, \lambda), \tau > 0.$$

Finalmente, $S^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n \times \Sigma)$ es el subespacio de $S_{1,0}^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n \times \Sigma)$ cuyos elementos tienen expansión asintótica

$$b \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_{\mu-k}, \quad b_{\mu-k} \in S_h^{\mu-k}(\Omega \times \mathbb{R}^n \times \Sigma)$$

en el sentido que si $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \Sigma)$ satisface $\chi(\xi, \lambda) = 1$ cuando (ξ, λ) está cerca de $(0, 0)$, entonces

$$b - (1 - \chi) \sum_{k=0}^N b_{\mu-k} \in S^{\mu-N-1}(\Omega \times \mathbb{R}^n \times \Sigma).$$

El factor $(1 - \chi)$ elimina el problema de la singularidad en $(0, 0)$ de las funciones homogéneas.

Sea $\Psi^\mu(\Omega, \Sigma)$ el espacio de operadores pseudodiferenciales definidos usando símbolos en $S^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n \times \Sigma)$. Admitimos como operadores residuales, operadores integrales dependientes de λ con núcleo de clase C^∞ en todas las variables (incluyendo $\lambda \in \Sigma$) que como funciones en $\Omega \times \Omega$ con λ como parámetro son rápidamente decrecientes en $\lambda \in \Sigma$ cuando $|\lambda| \rightarrow \infty$.

El símbolo principal de $B = \text{op}(b) \in \Psi^\mu(\Omega, \Sigma)$, b con expansión como arriba, es b_μ como función en $(T^*\Omega \times \Sigma) \setminus \{(x, 0, 0) : x \in \Omega\}$.

Retornando a la variedad \mathcal{X} , definimos $\Psi^\mu(\mathcal{X}, \Sigma; E)$ como el espacio de operadores que localmente están dados por operadores como los que acabamos de definir, con símbolos a valores en mapas $E \rightarrow E$. Definimos

$$T^*\mathcal{X} \dot{\times} \overline{\text{Ray}}_\theta = \{(\xi, \lambda) \in T^*\mathcal{X} \times \overline{\Sigma} : (\xi, \lambda) \neq (0, 0)\}$$

Sea $\dot{\pi}_\Sigma : T^*\mathcal{X} \dot{\times} \overline{\text{Ray}}_\theta$ la proyección canónica. Definimos

$$S_h^\mu(T^*\mathcal{X} \dot{\times} \overline{\text{Ray}}_\theta; \text{End}(\dot{\pi}_\Sigma^* E))$$

como el espacio de secciones de clase C^∞ , homogéneas de orden μ , del fibrado $\text{End}(\dot{\pi}_\Sigma^* E) \rightarrow T^*\mathcal{X} \dot{\times} \overline{\text{Ray}}_\theta$.

TEOREMA 3.3. *La sucesión*

(3.4)

$$0 \rightarrow \Psi^{\mu-1}(\mathcal{X}, \Sigma; E) \xrightarrow{t} \Psi^\mu(\mathcal{X}, \Sigma; E) \xrightarrow{\sigma_\mu} S_h^\mu(T^*\mathcal{X} \dot{\times} \overline{\text{Ray}}_\theta; \text{End}(\dot{\pi}_\Sigma^* E)) \rightarrow 0$$

es exacta. Si $A \in \Psi^\mu(\mathcal{X}, \Sigma; E)$ es tal que $\sigma_\mu(A)$ es invertible como elemento de $S_h^\mu(T^*\mathcal{X} \dot{\times} \overline{\text{Ray}}_\theta; \text{End}(\dot{\pi}_\Sigma^* E))$, esto es, existe

$$b \in S_h^{-\mu}(T^*\mathcal{X} \dot{\times} \overline{\text{Ray}}_\theta; \text{End}(\dot{\pi}_\Sigma^* E))$$

tal que $ab = I$, entonces hay $B \in \Psi^{-\mu}(\mathcal{X}, \Sigma; E)$ tal que $A \circ B = I - R$, donde R es un operador integral cuyo núcleo es de clase C^∞ en $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \Sigma$, de la forma $K(x, x', \lambda)$, con $K(x, x', \lambda) \rightarrow 0$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Sigma$.

La demostración es análoga a las de los Teoremas III.11.8 y III.11.9.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 3.2. Aplicamos el teorema al operador diferencial A para el cual $\sigma(A) - \lambda I$ es invertible si $\lambda \in \text{Ray}_\theta$ (y por lo tanto también si $\lambda \in \Sigma_{\theta,c}$ para algún $c > 0$). Escogemos $B(\lambda) \in \Psi^{-\mu}(\mathcal{X}, \Sigma; E)$ tal que

$$(A - \lambda I)B_\lambda = I - R_\lambda$$

con término residual R_λ como el descrito en el teorema. La norma de R_λ como operador

$$L^2(\mathcal{X}; E) \rightarrow L^2(\mathcal{X}; E)$$

decrece rápidamente a 0 si $\lambda \in \Sigma$ y $|\lambda| \rightarrow \infty$. Por lo tanto, una vez que $|\lambda|$ es suficientemente grande, la serie de Neumann

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} R_\lambda^\ell$$

converge en norma a un operador integral con núcleo de clase C^∞ , y $B_\lambda \circ (I - R_\lambda)^{-1}$ invierte $A - \lambda I$. Por lo tanto Ray_θ es un rayo de crecimiento mínimo para A . \square

El aspecto importante de la Proposición 3.2 no es la existencia de una inversa pseudodiferencial de $A - \lambda I$: la inversa es un operador pseudodiferencial porque A es elíptico. Más bien, el valor de esa proposición y el Teorema 3.3 reside en las estimaciones en λ en la representación de $(A - \lambda)^{-1}$ como operador pseudodiferencial.

4. Cálculos locales

Continuamos con el operador diferencial $A : C^\infty(\mathcal{X}; E) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; E)$, elíptico y estrictamente positivo. Podríamos suponer solo elipticidad y existencia de un rayo de crecimiento mínimo para el símbolo principal, pero dejamos eso para el lector interesado. Los operadores $(A - \lambda I)^{-\lambda}$ con $\lambda \notin \text{spec}(A)$ son operadores pseudodiferenciales. Queremos probar que los operadores A^{-s} también son operadores pseudodiferenciales. Para esto recurrimos a fórmulas locales.

En un abierto \mathcal{U} con coordenadas locales x_1, \dots, x_n ,

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

con homomorfismos $a_\alpha : E_{\mathcal{U}} \rightarrow E_{\mathcal{U}}$. El símbolo total de A es

$$\sum_{j=0}^m a_{m-j}(x, \xi), \quad a_{m-j}(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m-j} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

Escribimos

$$\tilde{a}_m = a_m - \lambda I, \quad \tilde{a}_{m-j} = a_{m-j}, \quad j = 1, \dots, m.$$

La parametriz de $A - \lambda I$ (siempre con $\lambda \in \Sigma = \Sigma_{\pi,c}$, $c > 0$ arbitrariamente fijado) será un operador pseudodiferencial $B = \text{op}(b)$ con símbolo total con expansión asintótica

$$b(x, \xi, \lambda) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_{-m-j}(x, \xi, \lambda), \quad b_{-m-j}(x, \tau\xi, \tau^m\lambda) = \tau^{-m-j} b_{-m-j}(x, \xi, \lambda).$$

Encontraremos los términos b_{-m-j} usando la Proposición III.8.4 (A está propiamente soportado porque es un operador diferencial) con la condición $(A - \lambda I) \circ B = I$. En general, $(A - \lambda) \circ B = C$ tiene $C = \text{op}(c)$ con

$$c(x, \xi, \lambda) \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{-\ell}(x, \xi, \lambda)$$

con c_{ℓ} homogéneo (incluyendo λ) de orden $-\ell$. Pero como queremos $C = I$, tomamos $c_0 = I$ y $c_{\ell} = 0$ si $\ell > 0$. En la fórmula para el símbolo de la composición en la Proposición III.8.4 reemplazamos \tilde{a} y b por sus expansiones asintóticas en términos homogéneos y separamos por grado de homogeneidad:

$$c_{\ell} = \sum_{j+k+|\alpha|=\ell} \frac{1}{\alpha!} D_{\xi}^{\alpha} \tilde{a}_{m-j}(x, \xi, \lambda) D_x^{\alpha} b_{-m-k}(x, \xi, \lambda)$$

Cuando $\ell = 0$, esta fórmula y la composición $C = I$ nos lleva a $I = \tilde{a}_m b_{-m}$, por lo tanto,

$$b_{-m}(x, \xi, \lambda) = (a_m(x, \xi) - \lambda I)^{-1}, \quad (\xi, \lambda) \neq 0, \quad \lambda \notin \text{spec}(a_m(x, \xi)).$$

La condición $c_{-\ell} = 0$ si $\ell > 0$ es, por supuesto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{-m-j}(x, \xi, \lambda), \quad b_{-m-j}(x, \tau\xi, \tau^m\lambda) = \tau^{-m-j} b_{-m-j}(x, \xi, \lambda) = 0$$

En esta fórmula, $b_{m-\ell}$ aparece en un solo término ($j = |\alpha| = 0$, $k = \ell$) sin diferenciar, multiplicado por \tilde{a}_m . Por lo tanto, podemos despejar $b_{-m-\ell}$. Todos los demás términos tienen \tilde{a}_m diferenciado en ξ al menos una vez, por lo tanto λ no aparece en ellos, o factores \tilde{a}_{m-j} posiblemente diferenciados, pero en todo caso en estos tampoco aparece λ . El resultado es

$$b_{-m-\ell}(x, \xi, \lambda) = -b_m^{-1}(x, \xi, \lambda) \sum_{\substack{j+k+|\alpha|=\ell \\ k < \ell}} \frac{1}{\alpha!} D_{\xi}^{\alpha} \tilde{a}_{m-j}(x, \xi, \lambda) D_x^{\alpha} b_{-m-k}(x, \xi, \lambda),$$

para $\ell > 0$. La suma asintótica de los b_{m-k} es una función $b(x, \xi, \lambda)$ tal que

$$(A - \lambda I) \text{op}(b) = I - R_{\lambda}$$

con un error $R_{\lambda} = \text{op}(r_{\lambda})$ con $r_{\lambda} \in \bigcap_{\mu} S^{\mu}(\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \times \Sigma; E)$, un operador cuya representación como operador pseudodiferencial tiene símbolo rápidamente decreciente en (ξ, λ) , en particular en λ .

La fórmula que define $b_{-m-\ell}$ lleva a una expresión con singularidades en

$$\{(x, \xi, \lambda) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} : (\xi, \lambda) \neq 0, \lambda \notin \text{spec}(a(x, \xi))\}.$$

podemos (y nos conviene) deformar esos símbolos ligeramente para evitar esas singularidades cuando λ es pequeño.

De la positividad de $a_m(x, \xi)$ sabemos que $\text{spec}(a_m(x, \xi)) \subset \mathbb{R}_+$. Manteniendo x en un subconjunto compacto arbitrario de \mathcal{U} y $|\xi| = 1$, tenemos una cota inferior $\varepsilon_0 > 0$ para los elementos de $\text{spec}(a_m(x, \xi))$, digamos

$$\lambda \in \text{spec}(a_m(x, \xi)) \implies \lambda \geq \varepsilon_0.$$

Reduciendo \mathcal{U} podemos suponer que esta cota vale para cualquier $x \in \mathcal{U}$. Por homogeneidad,

$$\lambda \in \text{spec}(a_m(x, \xi)) \implies \lambda > |\xi|.$$

De hecho, $\text{spec}(a_m(x, \xi)) = |\xi| \text{spec}(a_m(x, \hat{\xi}))$ con $\hat{\xi} = \xi/|\xi|$.

Tomamos una función no-negativa $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\rho(t) \leq 1$, $\rho(t) = 1$ cerca de 0 con $\text{sop}(\rho) = [-1, 1]$ y estrictamente positiva en $(-1, 1)$. Entonces

$$a'_m(x, \xi) = a_m(x, \xi) + \varepsilon_0 \rho(|\xi|) I$$

es de clase C^∞ e igual a a_m si $|\xi| \leq 1$. Y si $\lambda \in \text{spec}(a'_m(x, \xi))$, entonces

$$\lambda \geq \begin{cases} \varepsilon_0 |\xi| & \text{si } |\xi| \geq 1 \\ \varepsilon_0 \min\{\rho(|\xi|), 1\} & \text{si } |\xi| < 1. \end{cases}$$

En cualquier caso $\lambda > \varepsilon_1$ para cierto $\varepsilon_1 > 0$. Usando

$$b_{-m}(x, \xi, \lambda) = (a'_m(x, \xi) - \lambda I)^{-1}$$

en lugar de simplemente $(a_m(x, \xi) - \lambda I)^{-1}$ en la definición de las $b_{-m-\ell}$, vemos que estas resultan ser de clase C^∞ en

$$\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \times \Sigma', \quad \Sigma' = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin [\varepsilon_0, \infty)\}$$

a valores en E , holomorfas en $\lambda \in \Sigma'$ y homogéneas en (ξ, λ) de orden $-m-\ell$ en el sentido de $\tau \cdot (\xi, \tau) = (\tau, \tau^m \eta)$.

Usamos estos símbolos redefinidos para escribir la parametriz de $(A - \lambda I)$ en el conjunto abierto \mathcal{U} .

El núcleo de Schwartz de $(A - \lambda I)^{-1}$ en $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ está dado por

$$K_\lambda(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-x') \cdot \xi} b(x, x', \xi, \lambda) d\xi$$

donde $b \in S^{-m}(\mathcal{U} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \times \Sigma')$ es holomorfa λ si $\lambda \in \Sigma'$. Las estimaciones de b son como las de la sección anterior excepto que limitamos λ a subsectores con clausura en Σ' .

Usando los argumentos en la prueba de la Proposición III.4.10 (los polinomios de Taylor de $b(x, x', \lambda)$ en x' centrados en x e integración por partes) obtenemos que

$$K_\lambda(x, x') - \sum_{\ell=0}^N \text{op}(b_{-m-\ell}) = K_{-m-N-1, \lambda}$$

donde $K_{-m-N-1, \lambda} = \text{op}(\tilde{b}_{-m-N-1})$ con $\tilde{b}_{-m-N-1} \in S^{-m-N-1}(\mathcal{U} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \times \Sigma')$. Si $m + N > n$ entonces la estimación

$$(4.1) \quad |\tilde{b}_{-m-N-1}(x, x', \xi, \lambda)| \leq C(1 + |\xi| + |\lambda|^{\frac{1}{m}})^{-m-N-1}$$

para $(x, x') \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ y λ en cualquier sector con clausura en Σ' , junto con

$$(1 + |\xi| + |\lambda|^{\frac{1}{m}})^{-m-N-1} \leq (1 + |\xi|)^{-n-k-\varepsilon} (1 + |\lambda|^{\frac{1}{m}})^{-m-N-1+n+k+\varepsilon}$$

si $n + k + \varepsilon < m + N + 1$ implican que $K_{-m-N-1, \lambda}$ es de clase C^k , holomorfa en $\lambda \in \Sigma'$, con

$$|K_{-m-N-1, \lambda}(x, x')| \leq (1 + |\lambda|^{\frac{1}{m}})^{-m-N-1+n+k+\varepsilon}$$

con $(x, x') \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ y λ en cualquier sector con clausura en Σ' .

Si u tiene soporte en \mathcal{U} , $x \in \mathcal{U}$, y $\Re s > 0$,

$$\begin{aligned} & (A^{-s}u)(x) \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} K_\lambda(x, x') u(x') \, d\mathbf{m}(x') \\ &= \frac{i}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{\ell=0}^N \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-x') \cdot \xi} \lambda^{-s} b_{-m-\ell}(x, \xi, \lambda) u(x') \mathbf{m}_0(x') \, dx' \, d\xi \, d\lambda \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} K_{-m-N-1, \lambda}(x, x') u(x') \mathbf{m}_0(x') \, dx' \, d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\ell=0}^N \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-x') \cdot \xi} \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} b_{-m-\ell}(x, \xi, \lambda) \, d\lambda \, u(x') \mathbf{m}_0(x') \, dx' \, d\xi \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} K_{-m-N-1, \lambda}(x, x') u(x') \mathbf{m}_0(x') \, dx' \, d\lambda. \end{aligned}$$

En la última igualdad intercambiamos el orden de integración en λ y (x', ξ) . Esto está justificado si vemos la integración en (x', ξ) como integral iterada y observamos que $\hat{u}(\xi)$ es rápidamente decreciente. Es aquí donde el hecho que los $b_{-m-\ell}$ son de clase C^∞ cerca de $\xi = \lambda = 0$ juega un papel: la curva Γ pasa a la izquierda de las singularidades de $\lambda \mapsto b_{-m-\ell}(x, \xi, \lambda)$ para todo (x, ξ) .

Las funciones

$$(4.2) \quad s \mapsto a_{-m-\ell}^{-s}(x, \xi) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} b_{-m-\ell}(x, \xi, \lambda) \, d\lambda$$

son símbolos de orden $-m\Re s - \ell$ en (x, ξ) , holomorfos en λ si $\Re s > 0$. La holomorfia es clara. Que son símbolos resulta de que son homogéneos en ξ de orden (complejo) $-ms - \ell$ si $|\xi|$ es suficientemente grande. En efecto, si $|\xi| \geq 1$,

$$b_{-m-\ell}(x, \xi, \lambda) = |\xi|^{-m-\ell} b_{m-\ell}(x, \hat{\xi}, \lambda/|\xi|^m)$$

con $\hat{\xi} = \xi/|\xi|$. Si $\lambda \in \Gamma$, $\lambda/|\xi|^m \in \Gamma/|\xi|^m$. El cambio de variables $\lambda' = \lambda/|\xi|^m$ lleva a

$$\int_{\Gamma} \lambda^{-s} |\xi|^{-m-\ell} b_{-m-\ell}(x, \hat{\xi}, \lambda/|\xi|^m) d\lambda = \int_{\Gamma/|\xi|^m} (|\xi|\lambda)^{-s} |\xi|^{-\ell} b_{-m-\ell}(x, \hat{\xi}, \lambda) d\lambda$$

pero usando la holomorfia de $b_{-m-\ell}$ reescribimos la última integral como integral a lo largo de Γ . Obtenemos

$$(4.3) \quad a_{-m-\ell}^{-s}(x, \xi) = |\xi|^{-ms-\ell} a_{-m-\ell}^{-s}(x, \hat{\xi}) \quad \text{si } |\xi| \geq 1.$$

Si $\Re s \gg 1$ y mantenemos ξ fijo, podemos cambiar el contorno de integración Γ a un contorno que rodea los ceros de $\det(\tilde{a}_m(x, \xi) - \lambda I)$. Habiendo hecho esto, observamos que la condición $\Re s \gg 1$ ya no es esencial, y concluimos que $a_{-m-\ell}^{-s}$ es entera.

También

$$\tilde{a}_{-m-N-1}^{-s}(x, x', \xi) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} b_{-m-N-1}(x, x', \xi, \lambda) d\lambda$$

es un símbolo de orden a lo sumo $-m\Re s - N$. Para ver esto, cambiamos la variable λ por $|\xi|^m \lambda$ y usamos que $b_{-m-N-1}(x, x', \xi, \lambda)$ es holomorfa en $\lambda \notin [\varepsilon_1, \infty)$ para obtener (con $|\xi| \geq 1$)

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{-m-N-1}^{-s}(x, x', \xi) &= \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma/|\xi|^m} \lambda^{-s} |\xi|^{-ms+m} b_{-m-N-1}(x, x', \xi, |\xi|^m \lambda) d\lambda \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} |\xi|^{-ms+m} b_{-m-N-1}(x, x', \xi, |\xi|^m \lambda) d\lambda \end{aligned}$$

En la última integral, el integrando está acotado por

$$C|\lambda|^{-\Re s} \frac{|\xi|^{-m\Re s+m}}{(1 + |\xi|(1 + |\lambda|^{\frac{1}{m}}))^{m+N+1}} \leq C|\lambda|^{-\Re s-1} |\xi|^{-m\Re s-N}$$

si mantenemos (x, x') en un subconjunto compacto de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Las derivadas en x, x' se acotan de la misma manera, y las derivadas en ξ mejoran el decaimiento en esta variable de manera consistente con la aserción

$$(4.4) \quad \tilde{a}_{-m-N-1}^{-s} \in S^{-m\Re s-N}(\mathcal{U} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n).$$

Hemos probado además que

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \tilde{a}_{-m-N-1}^{-s}(x, x', \xi) &= |\xi|^{-ms} q_{-m-N-1}^{-s}(x, x', \xi) \\ q_{-m-N-1}^{-s} &\in S^{-N}(\mathcal{U} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

5. La función zeta

Sea $K_{A^{-s}}$ el núcleo de Schwartz de A^{-s} . Como $A^{-s} \in \Psi^{sm}(\mathcal{X}; E)$, si $ms > n$, entonces $A^{-s} K_{A^{-s}}$ es una función continua, y su restricción, $\iota^* \mathcal{K}_{A^{-s}}$, a $\text{diag}(\mathcal{X})$ está bien definida: Para tales s , A^{-s} es un operador con traza. Podemos entonces usar (1.2) para calcular ζ_A .

Usando la expansión de la sección anterior tenemos

$$K_{A^{-s}}(x, x) = \sum_{\ell=0}^N \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} a_{-m-\ell}^{-s}(x, \xi) d\xi + \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} K_{-m-N-1, \lambda}(x, x') d\lambda.$$

en coordenadas en la región \mathcal{U} .

Fijamos $\chi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\chi_0(t) = 0$ si $|t| > 1$, definimos $\chi_1(t) = 1 - \chi(1/t)$ para tener $\chi_0(t) + \chi_1(1/t) = 1$. Con esto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} a_{-m-\ell}^{-s}(x, \xi) d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_0(|\xi|) a_{-m-\ell}^{-s}(x, \xi) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_1\left(\frac{1}{|\xi|}\right) a_{-m-\ell}^{-s}(x, \xi) d\xi \end{aligned}$$

Como $a_{-m-\ell}^{-s}$ es entera en s , la primera integral a la derecha es una función entera en s . En la segunda integral introducimos coordenadas esféricas en la forma

$$\xi = \frac{1}{r} \hat{\xi}, \quad r > 0, \quad \hat{\xi} \in S^{n-1}.$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_1\left(\frac{1}{|\xi|}\right) a_{-m-\ell}^{-s}(x, \xi) d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^\infty r^{-n} \chi_1(r) \int_{S^{n-1}} a_{-m-\ell}^{-s}\left(x, \frac{1}{r} \hat{\xi}\right) d\hat{\xi} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{S^{n-1}} a_{-m-\ell}^{-s}(x, \hat{\xi}) d\hat{\xi} \int_0^\infty r^{ms-n+\ell} \chi_1(r) \frac{dr}{r}; \end{aligned}$$

$d\hat{\xi}$ se refiere por supuesto a la medida en S^{n-1} . La función

$$\rho_{-m-\ell}(x, s) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{S^{n-1}} a_{-m-\ell}^{-s}(x, \hat{\xi}) d\hat{\xi}$$

(realmente un mapa $E_x \rightarrow E_x$ para cada x) es de clase C^∞ , entera en s . La integral en r es una transformada de Mellin. Insertando la notación de la Sección IV.3,

$$\int_0^\infty r^{ms-n+\ell} \chi_1(r) \frac{dr}{r} = \mathcal{M}(\chi_1)(i(ms - n + \ell)).$$

Como la expansión de Taylor de χ_1 en 0 se reduce al único término 1,

$$\mathcal{M}(\chi_1)(i(ms - n + \ell)) \equiv \frac{1}{ms - n + \ell} \quad \text{módulo una función entera.}$$

Concluimos que

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} a_{-m-\ell}^{-s}(x, \xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n m} \int_{S^{n-1}} a_{-m-\ell}^{-s}(x, \hat{\xi}) d\hat{\xi} \\ s - (n - \ell)/m$$

módulo una función de s entera.

Estimamos la restricción a $\text{diag}(\mathcal{X})$ del término que involucra a $K_{-m-N-1, \lambda}$ de manera similar. Tenemos

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} K_{-m-N-1, \lambda}(x, x) d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{a}_{-m-N-1}^{-s}(x, x, \xi) d\xi \\ = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_0(|\xi|) \tilde{a}_{-m-N-1}^{-s}(x, x, \xi) d\xi \\ + \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \chi_1(r) \tilde{a}_{-m-N-1}^{-s}(x, x, \hat{\xi}/r) r^{-n} d\hat{\xi} \frac{dr}{r}$$

En el lado derecho de la última igualdad, la primera integral es entera en s . La segunda integral es

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int r^{-n+ms} \int_{S^{n-1}} q_{-m-N-1}^{-s}(x, x, \hat{\xi}/r) d\hat{\xi} \frac{dr}{r}$$

El decaimiento en r de $q_{-m-N-1}^{-s}(x, x, \hat{\xi}/r)$ cuando $r \rightarrow 0$ (ver según (4.5)) implica que la última integral define una función de clase C^∞ en (x, s) si $m\Re s > n - N$, y es además holomorfa en s en esa región.

Hemos probado

TEOREMA 5.1. *Si $\Re s > n/m$, la restricción a $\text{diag}(\mathcal{X})$ del núcleo de Schwartz de A^{-s} es una sección continua (realmente C^∞) de $E \rightarrow \mathcal{X}$ que depende holomórficamente de s en esa región, y admite una extensión holomorfa a todo \mathbb{C} con polos simples contenidos en $\{(n-\ell)/m : \ell \in \mathbb{N}_0\}$. El residuo en $(n-\ell)/m$ es una sección de E , localmente dado por la fórmula*

$$\rho_{(n-\ell)/m}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n m} \int_{S^{n-1}} a_{-m-\ell}^{-s}(x, \hat{\xi}) d\hat{\xi} \Big|_{s=(n-\ell)/m}.$$

Como consecuencia de esto y (1.2) tenemos

COROLARIO 5.2. *La función $\zeta_A(s)$, inicialmente definida para $\Re s > n/m$, admite una extensión meromorfa a todo \mathbb{C} con polos simples contenidos en $\{(n-\ell)/m : \ell \in \mathbb{N}_0\}$:*

$$(5.3) \quad \sum_{\lambda \in \text{spec}(A)} \frac{1}{\lambda^s} \dim \mathcal{E}_\lambda = \sum_{\ell=0}^\infty \int_{\mathcal{X}} \frac{\text{tr } \rho_{(n-\ell)/m}(x) d\mathbf{m}(x)}{s - (n - \ell)/m}.$$

6. Estimación de Weyl

La estimación de Weyl para el operador A es la siguiente. Sea $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ la enumeración de $\text{spec}(A)$ con $\lambda_j < \lambda_{j+1}$ (los autovalores sin repetición) Sea

$$\mathcal{N}_A(\lambda) = \sum_{\{j:\lambda_j < \lambda\}} \frac{1}{\lambda_j^s} \dim \mathcal{E}_{\lambda_j}.$$

Entonces

$$(6.1) \quad \mathcal{N}_A(\lambda) \sim C_W \lambda^{n/m} + o(\lambda^{n/m}) \quad \text{cuando } \lambda \rightarrow \infty$$

con

$$C_W = \frac{m}{n} \int_{\mathcal{X}} \text{tr } \rho_{n/m}(x) \, d\mathfrak{m}(x)$$

Esta estimación es consecuencia del siguiente teorema Tauberiano (transcrito de Wiener [84, p. 44]):

TEOREMA 6.2 (Ikehara [32, p. 8]). *Sea $\nu(x)$ una función monótonamente creciente y sea*

$$f(\mu) = \int_{1+}^{\infty} x^{-\mu} d\nu(x)$$

convergente si $\Re\mu > 1$. Si existe a tal que

$$g(\mu) = f(\mu) - \frac{a}{\mu - 1}, \quad \Re\mu > 1$$

tiene extensión continua a $\Re\mu \geq 1$, entonces

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\nu(x)}{x}.$$

THEOREM XVII. *Let $\alpha(x)$ be a monotone increasing function, and let*

$$(10.06) \quad \int_{1+0}^{\infty} x^{-u} d\alpha(x) = f(u)$$

converge for $\Re(u) > 1$. Let

$$(10.07) \quad f(u) - \frac{A}{u-1} = g(u)$$

converge uniformly to a finite limit as

$$(10.08) \quad \Re(u) \rightarrow 1$$

over any finite interval of the line $\Re(u) = 1$. Then

$$(10.09) \quad A = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha(N)}{N}.$$

El teorema de Ikehara en la versión de Wiener [84, p. 44].

Para obtener la estimación de Weyl a partir del teorema de Ikehara y el Corolario 5.2, solo tenemos que presentar un diccionario. El primer término en

la suma a la derecha en (5.3) es

$$\frac{\int_{\mathcal{X}} \operatorname{tr} \rho_{n/m}(x) \, d\mathbf{m}(x)}{s - n/m} = \frac{\frac{m}{n} \int_{\mathcal{X}} \operatorname{tr} \rho_{n/m}(x) \, d\mathbf{m}(x)}{(m/n)s - 1}$$

lo que indica que debemos tomar $\mu = (m/n)s$. Con esta escogencia de μ , la suma a la izquierda en (5.3) es

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{spec}(A)} \frac{1}{(\lambda^{n/m})^\mu} \dim \mathcal{E}_\lambda.$$

Esto sugiere substituir $x = \lambda^{n/m}$: con la enumeración del espectro como arriba y $x_j = \lambda_j^{n/m}$, la suma es

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{x_j^\mu} \dim \mathcal{E}_{\lambda_j}.$$

Si definimos

$$\nu(x) = \sum_{\{j: x_j < x\}} \dim \mathcal{E}_{\lambda_j},$$

entonces

$$\int_{0^+}^{\infty} x^{-\mu} \, d\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{x_j^\mu} \dim \mathcal{E}_{\lambda_j}$$

y la fórmula (5.3) es

$$\int_{0^+}^{\infty} x^{-\mu} \, d\nu(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\frac{m}{n} \int_{\mathcal{X}} \operatorname{tr} \rho_{(n-\ell)/m}(x) \, d\mathbf{m}(x)}{\mu - (n-\ell)/n}.$$

El teorema de Ikehara implica

$$\frac{1}{x} \sum_{\{j: x_j < x\}} \dim \mathcal{E}_{\lambda_j} \rightarrow \frac{m}{n} \int_{\mathcal{X}} \operatorname{tr} \rho_{n/m}(x) \, d\mathbf{m}(x) \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

Reemplazando $x_j = \lambda_j^{n/m}$, $x = \lambda^{n/m}$,

$$\frac{1}{\lambda^{n/m}} \sum_{\{j: \lambda_j < \lambda\}} \dim \mathcal{E}_{\lambda_j} \rightarrow \frac{m}{n} \int_{\mathcal{X}} \operatorname{tr} \rho_{n/m}(x) \, d\mathbf{m}(x) \text{ cuando } \lambda \rightarrow \infty$$

Esta es la fórmula (6.1).

7. Residuos de ζ_A en los enteros $< n/m$

Probaremos que los residuos de ζ_A en los enteros menores que n/m se anulan. Para calcularlos, analizaremos $\rho_{(n-\ell)/m}(x)$, definido en el Teorema 5.1, con $\ell = n + km$, $k \in \mathbb{Z}$; tal ℓ corresponde con el polo en $-k$ según (5.3). Como debemos tener $-k < n/m$, necesariamente $\ell > 0$.

Sin especificar aún ℓ excepto $\ell > 0$, tenemos

$$a_{-m-\ell}^{-s}(x, \hat{\xi}) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} b_{-m-\ell}(x, \hat{\xi}, \lambda) d\lambda$$

en coordenadas locales en $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$. Mantendremos x en un subconjunto compacto de \mathcal{U} . Para tales x , la cota

$$|\lambda^{-s} b_{-m-\ell}(x, \hat{\xi}, \lambda)| \leq C |\lambda|^{-\Re s} (1 + |\hat{\xi}| + |\lambda|^{\frac{1}{m}})^{-m-\ell} \leq C' |\lambda|^{-\Re s} (1 + |\lambda|)^{-1-\ell/m}$$

garantiza la convergencia de la integral de línea si $\Re s > -\ell/m$; la parte circular de la curva γ mantiene a λ a distancia positiva del origen.

Por otro lado, si $\Re s < 0$, entonces

$$\int_{|\lambda|=\delta} \lambda^{-s} d\lambda \rightarrow 0 \text{ si } \delta \rightarrow 0.$$

Esto permite reducir el radio de la parte circular del camino Γ al origen cuando $\Re s < 0$.

Denotemos por Γ_{\pm} el camino que consiste en primero recorrer el semieje real negativo en dirección positiva (como parte de la frontera del semiespacio $\Im \lambda > 0$), denotado Γ_+ , luego el mismo semieje en dirección negativa (como parte de la frontera de $\Im \lambda < 0$), denotado Γ_- . $b_{-m-\ell}(x, \hat{\xi}, \lambda)$ es continua en un entorno de $\{\lambda \leq 0\}$. Las observaciones de los dos párrafos anteriores llevan a

$$a_{-m-\ell}^{-s}(x, \hat{\xi}) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_{\pm}} \lambda^{-s} b_{-m-\ell}(x, \hat{\xi}, \lambda) d\lambda \text{ si } -\ell/m < \Re s < 0.$$

Parametrizamos ambos Γ_+ y Γ_- mediante $t \mapsto te^{-i\pi}$, $t \geq 0$, tomando en cuenta las orientaciones específicas al momento de reescribir la integral con estas parametrizaciones. Tenemos

$$\lambda^{-s} = \begin{cases} t^{-s} e^{-i\pi s} & \text{si } \lambda = te^{-i\pi} \in \Gamma_+ \\ t^{-s} e^{i\pi s} & \text{si } \lambda = te^{-i\pi} \in \Gamma_- \end{cases}$$

en vista de la definición de λ^s . Así,

$$\begin{aligned} a_{-m-\ell}^{-s}(x, \hat{\xi}) &= -\frac{i}{2\pi} \int_0^\infty t^{-s} e^{-i\pi s} b_{-m-\ell}(x, \hat{\xi}, te^{-i\pi}) i e^{-i\pi} dt \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty t^{-s} e^{i\pi s} b_{-m-\ell}(x, \hat{\xi}, te^{-i\pi}) i e^{i\pi} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty t^{-s} b_{m-\ell}(x, \hat{\xi}, te^{-i\pi}) (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}) dt \\ &= \frac{i \sin(\pi s)}{\pi} \int_0^\infty t^{-s} b_{-m-\ell}(x, \hat{\xi}, te^{-i\pi}) dt \end{aligned}$$

La igualdad entre el primer y último miembro de la cadena de igualdades vale en la región $-\ell/m < \Re s < 0$. El primer miembro es entero, y el segundo es, *a priori*, holomorfo en s para $\Re s > -\ell/m$. Por continuación única,

$$(7.1) \quad a_{-m-\ell}^{-s}(x, \hat{\xi}) = \frac{i \sin(\pi s)}{\pi} \int_0^\infty t^{-s} b(x, \hat{\xi}, te^{-i\pi}) dt \text{ en } \Re s > -\ell/m.$$

Tomamos ahora $k \in \mathbb{Z}$ y $\ell = n + km$. Con este ℓ , $(n - \ell)/m = -k$. Si $s = -k$, entonces

$$\Re s = -k = \frac{n - \ell}{m} > -\frac{\ell}{m}.$$

Por lo tanto, podemos evaluar $a_{-m-\ell}^{-s}(x, \hat{\xi})$ en $s = -k$ usando (7.1), pero como $\sin(-\pi k) = 0$,

$$a_{-m-\ell}^{-k}(x, \hat{\xi}) = 0.$$

Esto vale para todos los enteros $-k < n/m$. En particular, tomando trazas e integrando en \mathcal{X} ,

TEOREMA 7.2. *La función $\zeta_A(s)$ es regular en los enteros $s \in \mathbb{R}$, $s < n/m$.*

8. El determinante ζ -regularizado de A

En el caso de un operador lineal $\mathfrak{a} : V \rightarrow V$ invertible en un espacio complejo de dimensión finita, el determinante puede obtenerse a partir de la función $\zeta_{\mathfrak{a}}$ como

$$\det a = e^{-\zeta'_{\mathfrak{a}}(0)}$$

En general, para un operador que admite una función ζ que es regular en $s = 0$, la derivada $\zeta'(0)$ tiene sentido, y el número $e^{-\zeta'(0)}$ es el determinante z -regularizado del operador.

TEOREMA 8.1. *Sea \mathcal{X} una variedad cerrada, \mathfrak{m} una densidad suave en \mathcal{X} y $E \rightarrow \mathcal{X}$ un fibrado vectorial Hermitiano. Si $A \in \text{Dif}^m(\mathcal{X}; E)$ es un operador elíptico estrictamente positivo, entonces ζ_A es regular en 0 y por lo tanto admite un determinante ζ -regularizado,*

$$\det_{\zeta}(A) = e^{-\zeta'_A(0)}.$$

Análisis en variedades no compactas

1. El problema

La dificultad fundamental que surge al tratar de hacer análisis global con operadores elípticos en variedades no compactas es la ausencia de un Lema de Rellich-Kondrachov. La estrategia usual (probablemente la más natural) para superar el problema es especificar estructura adicional “en infinito.” Esto conlleva refinar la configuración de la variedad en infinito y la adaptación de los operadores, incluyendo la noción de elipticidad, a la estructura refinada.

Los tres casos más simples son variedades con extremos cilíndricos, su generalización a variedades con cantos, y variedades de dispersión. En los tres casos, la variedad no compacta es en realidad el interior, $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$, de una variedad \mathcal{M} compacta con borde, con el fibrado tangente reemplazado por un fibrado “de estructura” que en el interior es isomorfo al fibrado tangente, pero en el borde (en infinito según el punto de vista de $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$) de alguna manera captura la situación particular que el fibrado trae consigo. Los operadores diferenciales, estando ellos definidos en el interior localmente usando campos vectoriales, reflejan la estructura en infinito al ser definidos localmente cerca del borde usando secciones del fibrado de estructura. Junto con los operadores, vienen espacios de Sobolev adaptados a la situación específica. Ellos son, en el interior, los espacios de Sobolev usuales en cuanto a que cuantifican regularidad de la misma manera; es en infinito, de nuevo, donde surge la especificidad.

Los tres casos provienen de compactificar una variedad abierta de una manera específica guiada por la naturaleza del problema. Hay más tipos interesantes de variedades no compactas con estructura en ∞ que no discutiremos aquí.

2. Variedades con extremos cilíndricos

El ejemplo que mejor refleja la idea de variedad con extremos cilíndricos es $\overset{\circ}{\mathcal{M}} = \mathbb{R} \times \mathcal{Y}$, donde \mathcal{Y} es una variedad cerrada, por ejemplo un círculo, un toro, o una esfera. Esta variedad tiene evidentemente la propiedad que tiene una subvariedad compacta con borde (por ejemplo $\mathcal{K} = [-1, 1] \times \mathcal{Y}$) tal que $\overset{\circ}{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{K}$ es una unión de (dos) variedades difeomorfas a $(-\infty, 0) \times \mathcal{Y}$. Los campos vectoriales naturales en $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ son las combinaciones lineales con coeficientes de

clase C^∞ que tienen límite cuando $t \rightarrow \infty$, de campos vectoriales de \mathcal{Y} (i.e. tangentes a $\{t\} \times \mathcal{Y}$ para todo $t \in \mathbb{R}$) con coeficientes constantes en t y el campo vectorial $\partial/\partial t$.

La compactificación cilíndrica de $(-\infty, 0) \times \mathcal{Y}$ es $[0, 1) \times \mathcal{Y}$ junto con el mapa de compactificación

$$\gamma : (-\infty, 0) \times \mathcal{Y} \rightarrow [0, 1) \times \mathcal{Y}, \quad \gamma(t, p) = (e^t, p).$$

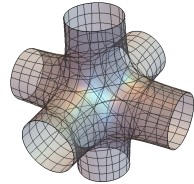
Esta compactificación añade los puntos $\{-\infty\} \times \mathcal{Y}$ a $(-\infty, 0) \times \mathcal{Y}$ de una manera específica mediante el mapa γ . Escribiendo x para la variable en $[0, 1)$, los campos vectoriales que hemos llamado naturales resultan ser de la forma

$$a(x, p)x \frac{\partial}{\partial x} + b(x, p)Y$$

con Y un campo vectorial en \mathcal{Y} y con las funciones $a, b : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ son C^∞ en $(0, 1) \times \mathcal{Y}$ con límite cuando $x \rightarrow 0$. Mejoramos esta última condición a pedir los coeficientes a y b sean de clase C^∞ hasta $x = 0$. Estos son los campos vectoriales de interés. Notemos que

$$\gamma_* \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t}.$$

La compactificación cilíndrica de $\mathring{\mathcal{M}}$ procede de la misma manera, compactificando los dos extremos por separado. El resultado es una variedad \mathcal{M} con borde igual a la unión de dos copias disjuntas de \mathcal{Y} . Los campos vectoriales naturales descritos cerca de una u otra componente de la frontera de \mathcal{M} provienen de lo que en la literatura es llamada una b -estructura.



Las b -estructuras son el primer ejemplo de la sistematización del análisis en variedades no compactas en donde el problema original se transfiere a la compactificación apropiada. Una vez que la variedad es compacta, muchas de las ideas provenientes de variedades cerradas pueden ser aplicadas. El principal originador de la idea es Melrose; los capítulos 4 y 5 de su libro [51] contienen una buena introducción al tema, legible incluso para quien no esté interesado en el tema principal del libro, el Teorema de Atiyah-Patodi-Singer. El precursor de todo esto, la b -filosofía, es el artículo [53], escrito una década antes.

Los campos vectoriales naturales están descritos como sigue, en el caso general.

Sea \mathcal{M} una variedad compacta con borde \mathcal{Y} (todo de clase C^∞). El espacio de campos vectoriales de interés es el subespacio de $C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$ cuyos elementos son, en la frontera de \mathcal{M} , tangentes a ella. Denotamos este subespacio por $C^\infty_{\text{tan}}(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$.

Conviene fijar de una vez una función $x \in C^\infty(\mathcal{M})$, a valores reales, igual a 0 en \mathcal{Y} y positiva en $\mathring{\mathcal{M}}$, con $dx \neq 0$ a lo largo de \mathcal{Y} . Esta es una “función

definidora” de \mathcal{Y} en \mathcal{M} . LA escogencia específica de esta función no es importante. Nada de lo que sigue depende más que de las propiedades de x que hemos descrito.

Si $p_0 \in \mathcal{Y}$ y tomamos coordenadas x, y_1, \dots, y_{n-1} en un entorno \mathcal{U} de p_0 en \mathcal{M} , un campo vectorial general en \mathcal{U} con coeficientes C^∞ hasta la frontera tiene la forma

$$V = \tilde{a} \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

La condición de tangencia es $Vx = 0$ en el conjunto $\{x = 0\}$. Como $Vx = \tilde{a}$, esto es equivalente a $\tilde{a} = 0$ si $x = 0$. Por lo tanto $\tilde{a} = xa$ para alguna función a también de clase C^∞ hasta el borde. Por lo tanto,

$$V = ax \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

es una combinación lineal de campos que en la frontera son tangentes a ella.

El espacio $C_{\text{tan}}^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$ es un módulo sobre el anillo de funciones $C^\infty(\mathcal{M})$. Como tal, es localmente libre y finitamente generado:

Para cada $p \in \mathcal{M}$ hay un entorno \mathcal{U} y finitos elementos $X_1, \dots, X_r \in C_{\text{tan}}^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$ tal que cada $Y \in C_{\text{tan}}^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$ se puede escribir en ese entorno como una combinación lineal $Y = \sum_j \varphi_j X_j$ con $\varphi_j \in C^\infty(\mathcal{M})$ (esto es “localmente finitamente generado”); las funciones φ_j están unívocamente determinados en \mathcal{U} (esto es “localmente libre”).

En tales condiciones (en este caso, $r = n$), hay una variante fácil de probar de un teorema de Swan [74] que implica que hay un fibrado vectorial ${}^bT\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ y un homomorfismo de fibrados,

$$(2.1) \quad {}^b\text{ev} : {}^bT\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M},$$

que es un isomorfismo sobre $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$, tal que el mapa inducido

$${}^b\text{ev}_* : C^\infty(\mathcal{M}; {}^bT\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$$

es un isomorfismo de $C^\infty(\mathcal{M})$ -módulos al submódulo $C_{\text{tan}}^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$. El fibrado de estructura de \mathcal{M} como “ b -variedad” es ${}^bT\mathcal{M}$.

Obtenemos marcos de referencia locales de ${}^bT\mathcal{M}$ convenientes usando coordenadas locales en \mathcal{M} . Si $\mathcal{U} \subset \overset{\circ}{\mathcal{M}}$ es un conjunto abierto, el dominio de una carta local x_1, \dots, x_n , podemos pensar que los campos vectoriales usuales, $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$, son un marco de referencia de ${}^bT\mathcal{M}$ sobre \mathcal{U} , gracias a que ${}^b\text{ev}$ es un isomorfo sobre $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$. Y si \mathcal{U} es un entorno en \mathcal{M} de un punto $p \in \mathcal{Y}$ donde tenemos coordenadas x, y_1, \dots, y_{n-1} para \mathcal{M} , entonces tomamos

$$x\partial_x, \partial_{y_1}, \dots, \partial_{y_{n-1}}$$

como marco de referencia. Aquí es importante entender que $x\partial_x$, como sección de ${}^bT\mathcal{M}$, no se anula en $x = 0$. Sin embargo, ${}^b\text{ev}(x\partial_x)$, como campo vectorial

genuino en \mathcal{M} si se anula (porque como campo vectorial es $x\partial_x$). Rara vez hay confusión en el significado de $x\partial_x$.

Otra propiedad importante de $C_{\tan}^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$ es que es una subálgebra de Lie de $C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$, es decir, cerrado bajo el corchete de Lie. Esta es una propiedad fundamental en la definición del complejo de de Rham para variedades con extremos cilíndricos.

Una b -métrica¹ Riemanniana es una métrica en el fibrado ${}^bT\mathcal{M}$.

La notación para el fibrado dual a ${}^bT\mathcal{M}$ es ${}^bT^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. El mapa dual a (2.1) es

$${}^b\text{ev}^* : T^*\mathcal{M} \rightarrow {}^bT^*\mathcal{M}.$$

Este mapa es de nuevo un homomorfismo de clase C^∞ , un isomorfismo sobre el interior. Pero sobre el borde, al igual que ${}^b\text{ev}$, no es inyectivo. Podemos pensar que ${}^bT^*\mathcal{M}$ es $T^*\mathcal{M}$ sobre \mathcal{M} y tomar dx_1, \dots, dx_n como marco de referencia local dual al indicado arriba para ${}^bT\mathcal{M}$. Cerca del borde, con coordenadas adaptadas, la notación para el marco dual es

$$\frac{dx}{x}, dy_1, \dots, dy_n.$$

Con esto vemos que

$${}^b\text{ev}^* dx = x \frac{dx}{x}$$

Como $\frac{dx}{x}$ es una sección suave, ${}^b\text{ev}^* dx$ es 0 en el borde.

Un b -operador diferencial (lineal) es un operador diferencial genuino en \mathcal{M} , posiblemente actuando de secciones de un fibrado vectorial a secciones de otro, que localmente está definido usando campos vectoriales en $C_{\tan}^\infty(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$. La notación para el espacio de b -operadores diferenciales de orden m es de secciones del fibrado E al fibrado F es $\text{Dif}_b^m(\mathcal{M}; E, F)$ si incluimos fibrados. En IV.4 discutimos el caso unidimensional con bastante detalle. Otra manera de definir $\text{Dif}_b^m(\mathcal{M}; E, F)$ es como el subespacio de $\text{Dif}^m(\mathcal{M}; E, F)$ cuyos elementos A satisfacen $x^{i\sigma} Ax^{-i\sigma} \in \text{Dif}^m(\mathcal{M}; E, F)$ para todo $\sigma \in \mathbb{C}$ ($x^{i\sigma}$ es el operador multiplicación por $x^{i\sigma}$); el punto es que la única manera en que los coeficientes de $x^{-i\sigma} Ax^{i\sigma}$ son de clase C^∞ hasta la frontera es si cada derivada en x aparece multiplicada por x al menos una vez. Basta con examinar los coeficientes con $i\sigma = 1, \dots, m$.

La motivación parcial inicial para investigar problemas asociados a estos operadores fue el estudio de problemas en variedades con singularidades cónicas, con ímpetu proveniente de varios artículos de Cheeger, por ejemplo [14, 15]. En realidad, la situación en variedades con puntos cónicos es bastante distinta.

¹Sergiu Moroianu una vez comentó que uno puede obtener una teoría nueva usando una letra (nueva) como prefijo para cada concepto viejo, y adornando el correspondiente símbolo matemático con esa letra. Veremos varios ejemplos de este fenómeno.

La expresión local de un tal operador es la usual. Cerca de un punto en la frontera, en las coordenadas que usamos más arriba, tiene la forma

$$(2.2) \quad A = \sum_{k+|\alpha| \leq m} a_{k,\alpha}(x, y) (xD_x)^k D_y^\alpha$$

El símbolo principal usual de A , cerca de la frontera, evaluado en $\nu = \xi dx + \sum \eta_j dy_j \in T^*\mathcal{M}$,

$$\sigma(A)(\nu) = \sum_{k+|\alpha|=m} a_{k,\alpha}(x, y) (x\xi)^k \eta^\alpha.$$

Por lo tanto, evaluado en $\nu' = \frac{\xi}{x} dx + \sum \eta_j dy_j \in T^*\mathcal{M}$ (suponiendo $x \neq 0$) es

$$\sigma(A)(\nu') = \sum_{k+|\alpha|=m} a_{k,\alpha}(x, y) \xi^k \eta^\alpha.$$

Interpretando ν' como elemento de ${}^bT^*\mathcal{M}$, obtenemos que

$$\sigma(A)({}^b\text{ev}^{*-1}(\nu'))$$

es suave (tiene extension suave) hasta el borde. Esta función es el b -símbolo principal de A , denotado ${}^b\sigma(A)$. En coordenadas,

$${}^b\sigma(A)\left(\xi \frac{dx}{x} + \sum \eta_j dy_j\right) = \sum_{k+|\alpha|=m} a_{k,\alpha}(x, y) \xi^k \eta^\alpha.$$

DEFINICIÓN 2.3. *Decimos que $A \in \text{Dif}_b^m(\mathcal{M}; E, F)$ es b -elíptico si su b -símbolo es invertible.*

Un ejemplo fundamental de operadores en esta clase son los diferenciales de de Rham, adaptados al caso presente. Definimos ${}^b\Lambda^q \mathcal{M}$ como el producto exterior de q copias de ${}^bT^*\mathcal{M}$. Si $\phi \in C^\infty(\mathcal{M}; {}^b\Lambda^q \mathcal{M})$, notamos que $X_1, \dots, X_q \in C^\infty(\mathcal{M}; {}^bT\mathcal{M})$, entonces $\Phi(X_1, \dots, X_q)$ es una función de clase C^∞ y que la fórmula para $d\phi$ en (II.6.1) usando campos vectoriales en $C^\infty(\mathcal{M}; {}^bT\mathcal{M})$ en lugar de $C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$ es válida porque $C^\infty(\mathcal{M}; {}^bT\mathcal{M})$ es un álgebra de Lie. El resultado es un complejo

$$\dots \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}; {}^b\Lambda^q \mathcal{M}) \xrightarrow{{}^b d} C^\infty(\mathcal{M}; {}^b\Lambda^{q+1} \mathcal{M}) \rightarrow \dots$$

(si ya sabemos que $d \circ d = 0$, entonces automáticamente ${}^b d \circ {}^b d = 0$). El complejo es b -elíptico en el sentido que para cada $p \in \mathcal{M}$ y $\xi \in {}^bT_p^* \mathcal{M}$, la sucesión de símbolos principales

$$\dots \rightarrow {}^b\Lambda_p^{q-1} \mathcal{M} \xrightarrow{{}^b\sigma({}^b d)} {}^b\Lambda_p^q \mathcal{M} \xrightarrow{{}^b\sigma({}^b d)} {}^b\Lambda_p^{q+1} \mathcal{M} \rightarrow \dots$$

es exacta. Esto es consecuencia de la fórmula

$${}^b\sigma({}^b d)(\xi)(\phi) = \xi \wedge \phi,$$

análoga a $\sigma(d)$ y que el lector puede probar fácilmente.

En general, si E^0, E^1, \dots, E_r son fibrados vectoriales sobre \mathcal{M} un complejo de b -operadores

$$(2.4) \quad 0 \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; E^0) \xrightarrow{A_0} C^\infty(\mathcal{X}; E^1) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow C^\infty(\mathcal{X}; E^{r-1}) \xrightarrow{A_{r-1}} C^\infty(\mathcal{X}; E^r) \rightarrow 0.$$

es b -elíptico si la sucesión de b -símbolos principales es exacta para todo $\xi \in {}^bT^*\mathcal{M}$.

El espacio de Sobolev de orden $m \in \mathbb{N}_0$ de secciones del fibrado vectorial E , denotados $H_b^m(\mathcal{M}; E)$, está definido como sigue. Tomamos una b -densidad \mathfrak{m}_b y una métrica Hermitiana en E . Con ellas definimos $L_b^2(\mathcal{M}; E)$ (ver IV.5). Decimos que $u \in L_b^2(\mathcal{M}; E)$ pertenece a $H_b^m(\mathcal{M}; E)$ si para todo $A \in \text{Dif}_b^m(\mathcal{M}; E, F)$, $Au \in L_b^2(\mathcal{M}; F)$ en el sentido débil, eso es, para cada tal A existe $f_A \in L_b^2(\mathcal{M}; F)$ tal que

$$(u, A^*\phi)_{L_b^2} = (f_A, \phi)_{L_b^2} \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{M}}; F).$$

donde A es, como siempre, el transpuesto formal de A . El fibrado F usado en esta definición, también Hermitiano, es arbitrario: puede ser apenas el fibrado trivial $\mathcal{M} \times \mathbb{C}$.

Discutiremos la topología y definición para $s \in \mathbb{R}$ arbitrario en lugar de $m \in \mathbb{N}_0$ en un momento.

Si ∇ es una conexión en el fibrado vectorial $E \rightarrow \mathcal{M}$ en el sentido usual, entonces la composición

$$C^\infty(\mathcal{M}; E) \xrightarrow{\nabla} C^\infty(E \otimes T^*\mathcal{M}) \xrightarrow{I \otimes {}^b\text{ev}^*} C^\infty(\mathcal{M}; E \otimes {}^bT^*\mathcal{M})$$

produce un b -operador de primer orden, ${}^b\nabla = (I \otimes {}^b\text{ev}^*) \circ \nabla$ con

$${}^b\sigma({}^b\nabla)(\xi)(\phi) = \phi \otimes \xi, \xi \in {}^bT_p^*\mathcal{M}, \phi \in E_p.$$

Notamos que el mapa $\phi \mapsto {}^b\sigma({}^b\nabla)(\xi)(\phi)$ es inyectivo.

Fijamos una métrica en ${}^bT^*\mathcal{M}$ (una b -métrica). Si $u \in L_b^2(\mathcal{M}; E)$ y ${}^b\nabla u \in L^2(\mathcal{M}; E \otimes T^*\mathcal{M})$, entonces la inyectividad del b -símbolo de ${}^b\nabla$ implica que $Au \in L^2(\mathcal{M}; E \otimes T^*\mathcal{M})$ para todo $A \in \text{Dif}_b^1(\mathcal{M}; E, F)$. Esto es así porque podemos descomponer $A = a_1 \circ {}^b\nabla + a_0$ con homomorfismos de fibrados $a_1 : E \otimes {}^bT^*\mathcal{M} \rightarrow F$ y $a_0 : E \rightarrow F$. Fijadas las métricas, definimos

$$\|u\|_{H_b^1}^2 = \|{}^b\nabla u\|_{L_b^2}^2 + \|u\|_{L_b^2}^2$$

y por inducción,

$$\|u\|_{H_b^m}^2 = \|{}^b\nabla u\|_{H_b^{m-1}}^2 + \|u\|_{H_b^{m-1}}^2$$

si $u \in H_b^m(\mathcal{M}; E)$. Si s es un número real positivo, H_b^s se define usando interpolación (no entraremos en detalles), y los espacios con exponente negativo se definen usando dualidad.

También interesan los espacios $x^{-\gamma}H_b^m(\mathcal{M}; E)$, cuyos elementos son de la forma $x^{-\gamma}u$, $u \in H_b^m(\mathcal{M}; E)$. Si $v \in x^{-\gamma}H_b^m(\mathcal{M}; E)$, su norma es

$$\|v\|_{x^{-\gamma}H_b^s} = \|x^\gamma v\|_{H_b^s}$$

es decir, la norma es tal que $x^\gamma : x^{-\gamma}H_b^m(\mathcal{M}; E) \rightarrow H_b^m(\mathcal{M}; E)$ es una isometría.

Supongamos que $A \in \text{Dif}(\mathcal{M}; E, F)$. Entonces A define un operador ${}^bA \in \text{Dif}^m(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}, F_{\mathcal{Y}})$, como sigue: Dado $u \in C^\infty(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}})$, extendemos u al interior de \mathcal{M} , llamemos \tilde{u} la extensión, calculamos $A\tilde{u}$, y restringimos a la frontera. Es fácil probar usando la forma particular de A que el resultado, bA , es independiente de la extensión tomada. También es fácil probar que para cada $\sigma \in \mathbb{C}$,

$$u \mapsto x^{-i\sigma} A(x^{i\sigma} u)$$

es de nuevo un elemento de $\text{Dif}_b^m(\mathcal{M}; E)$. Definimos

$$\mathcal{M}(A)(\sigma) = {}^b(x^{i\sigma} A x^{-i\sigma})$$

Esta es la llamada familia indicial de A . Ella es una familia holomorfa de operadores en $\text{Dif}^m(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}}, F_{\mathcal{Y}})$. En coordenadas (x, y) , si A tiene la forma (2.2), entonces

$$\mathcal{M}(A)(\sigma) = \sum_{k+|\alpha| \leq m} a_{k,\alpha}(0, y) \sigma^k D_y^\alpha$$

Si A es elíptico, entonces $\mathcal{M}(A)(\sigma)$ es también elíptico para todo σ (la parte principal es independiente de σ). Pero más es verdad: la elipticidad de A implica que para cada $p_0 \in \mathcal{Y}$ y $\boldsymbol{\eta} \in T_{p_0}^* \mathcal{Y}$, y cada $\sigma \in \mathbb{R}$, si $df(p_0) = \boldsymbol{\eta}$, entonces

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{e^{-i\tau f(p_0)}}{\tau^m} \mathcal{M}(A)(\tau\sigma)(e^{i\tau f}) \Big|_{p_0}$$

existe si $(\boldsymbol{\eta}, \sigma) \neq 0$ y es invertible (este límite es el b -símbolo de A en $(\sigma, \boldsymbol{\eta})$). Esto se refleja en $\mathcal{M}(A)(\sigma)$ de tal manera que uno puede construir parametrices para $\mathcal{M}(A)(\sigma)$ tomando en cuenta σ (como antes lo hicimos con λ al invertir $A - \lambda I$). Uno obtiene operadores $\tilde{B}(\lambda)$ tales que $\mathcal{M}(A)(\sigma)\tilde{B}(\lambda) = I + R(\lambda)$ con $R(\lambda) \rightarrow 0$ cuando $|\Re\sigma| \rightarrow \infty$ manteniendo $|\Im\sigma|$ en intervalos compactos. Vía serie de Neumann uno obtiene invertibilidad de $\mathcal{M}(A)(\sigma)$ (ver la demostración de la Proposición 3.2 en la página 177). Elípticidad y la compacidad de \mathcal{Y} implican que $\mathcal{M}(A)(\sigma)$ es Fredholm para todo σ . La continuidad en σ de la familia (por ser holomorfa) implican que el índice es constante. Para $\sigma \in \mathbb{R}$ suficientemente grande, el operador es invertible, por lo tanto tiene índice 0. Así, $\text{Ind } \mathcal{M}(A)(\sigma) = 0$ para todo σ . Finalmente, invertibilidad en un punto y holomorfia implican que el conjunto de puntos donde $\mathcal{M}(A)(\sigma)$ no es invertible (y por lo tanto tiene espacio nulo de dimensión finita contenido en $C^\infty(\mathcal{Y}; E_{\mathcal{Y}})$) es un subconjunto discreto de \mathbb{C} sin puntos de acumulación finitos.

LEMA 2.5. Si $A \in \text{Dif}_b^m(\mathcal{M}; E, F)$ es elíptico, entonces

$$\text{spec}_b(A) = \{\sigma \in \mathbb{C} : \mathcal{M}(A)(\sigma) \text{ no es invertible}\}$$

es un subconjunto de \mathbb{C} con la propiedad que su intersección con cada banda $\{-a < \Im\sigma < a\}$ es un conjunto finito.

DEFINICIÓN 2.6. El conjunto $\text{spec}_b(A)$ es el espectro de frontera de A .

TEOREMA 2.7. Sea $A \in \text{Dif}_b^m(\mathcal{M}; E, F)$ un operador b -elíptico. Entonces el operador

$$A : x^{-\gamma} H_b^m(\mathcal{M}; E) \subset x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; E) \rightarrow x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; F)$$

es Fredholm si y sólo si

$$\text{spec}_b(A) \cap \{\sigma : \Re\sigma = \gamma\} = \emptyset.$$

Si $u \in x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; E)$ y $Au \in x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; F)$, entonces $u \in x^{-\text{gamma}} H_b^m(\mathcal{M}; E)$.

Para la demostración ver [51]. Esto fue probado originalmente en [53]. Notamos aquí solo que es natural tomar el mismo peso $x^{-\gamma}$ en el dominio y rango, porque si $u \in C^\infty(\mathcal{M}; E)$, entonces $A(x^\gamma u) = x^\gamma A_\gamma u$ con A_γ también en $\text{Dif}_b^m(\mathcal{M}; E, F)$ (porque $x D_x(x^\gamma u) = x^\gamma(x D_x - i)u$).

La condición de invertibilidad de $\mathcal{M}(A)(\sigma)$ para todo $\sigma \in \{i\sigma = \gamma\}$ es equivalente a la invertibilidad de $\mathcal{M}(A)(D_t + i\gamma)$ como operador

$$C^\infty(\mathcal{Y} \times \mathbb{R}; E) \rightarrow C^\infty(\mathcal{Y} \times \mathbb{R}; F)$$

Ese operador es el operador normal de A con peso γ . Visto de cualquiera de las dos maneras, si la noción de elipticidad para un operador es aquella que resulte en que el operador es Fredholm, entonces, en el caso de un operador de tipo b , elipticidad es invertibilidad de su b -símbolo y de su operador normal con peso γ . Y si los objetos que expresan la propiedad deben ser llamados símbolos, entonces, en el caso b , el símbolo del operador es el par que consiste de su b -símbolo y el operador normal con peso $x^{-\gamma}$.

La parametriz (o inversa, si ella existe) de un b -operador elíptico, nunca es compacta (suponiendo $\partial\mathcal{M} \neq \emptyset$). Esto limita, o en el mejor de los casos, dificulta mucho lo que se puede hacer. Sin embargo hay una cantidad enorme de literatura en el contexto de b -variedades, incluyendo análisis del operador del calor, teoría de Hodge, y fórmulas al estilo de Atiyah-Bott-Lefschetz. La dificultad radica en que las inclusiones $x^{-\gamma} H^s(\mathcal{M}; E) \hookrightarrow x^{-\gamma} H^{s'}(\mathcal{M}; E)$ con $s' < s$ no son compactas: aunque \mathcal{M} es compacta, desde el punto de vista del análisis, se comporta como una variedad no-compacta.

Sin embargo, la regularidad elíptica si se recupera (porque regularidad es realmente una propiedad local). Si $A \in \text{Dif}_b^m(\mathcal{M}; E, F)$ es un operador b -elíptico, hay una parametriz gruesa,

$$B : x^{-\gamma} H^s(\mathcal{M}; F) \rightarrow x^{-\gamma} H_b^{s+m}(\mathcal{M}; E)$$

que da regularidad y funciona con cualquier peso $x^{-\gamma}$:

$$AB = I - R, \quad R : x^{-\gamma} H_b^s(\mathcal{M}; F) \rightarrow x^{-\gamma} H_b^\infty(\mathcal{M}; F)$$

donde $H_b^\infty(\mathcal{M}; F) = \bigcap_s H_b^s(\mathcal{M}; F)$. Cuando $\gamma \notin \mathfrak{S} \operatorname{spec}_b(A)$, la parametriz se puede mejorar a un operador

$$B' : x^{-\gamma} H^s(\mathcal{M}; F) \rightarrow x^{-\gamma} H_b^{s+m}(\mathcal{M}; E)$$

y obtener

$$AB' = I - R', \quad R' : x^{-\gamma} H_b^s(\mathcal{M}; F) \rightarrow x^{-\gamma+\delta} H_b^\infty(\mathcal{M}; F).$$

con algún $\delta > 0$. Lo que se gana con esto es que podemos usar la inclusión

$$x^{-\gamma+\delta} H^s(\mathcal{M}; F) \rightarrow x^{-\gamma} H^s(\mathcal{M}; F)$$

que si es compacta, para deducir propiedades Fredholm. En general, el espacio nulo en $x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; E)$ de un operador b -elíptico, para cualquier γ , es de dimensión finita y la clausura de su rango, de de codimensión finita. Pero el rango no es cerrado, excepto cuando $\gamma \notin \operatorname{spec}_b(A)$. El lector puede encontrar detalles de esto en [53, Aserción 2.16 y Lema 6.11] o en el libro de Melrose [51], que está mejor organizado.

Para los Laplacianos de un complejo elíptico, el teorema anterior implica que para la mayoría de los números γ , el espacio nulo de los Laplacianos tiene dimensión finita, y las técnicas que usamos en el Capítulo V permiten probar aquí también que con los dominios naturales los grupos de cohomología de un complejo b -elíptico son isomorfos a los correspondientes espacios de elementos armónicos, y por lo tanto tienen dimensión finita.

Probaremos solo un par de resultados básicos que servirán para contrastar la situación con conos en el siguiente capítulo.

PROPOSICIÓN 2.8. *Sea $A \in \operatorname{Dif}_b^m(\mathcal{M}; E, F)$ un operador b -elíptico, inicialmente visto como operador*

$$A : C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{M}}; E) \subset x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; E) \rightarrow x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; F)$$

y sean \mathcal{D}_{\min} y \mathcal{D}_{\max} sus dominios mínimo y máximo. Entonces $\mathcal{D}_{\min} = \mathcal{D}_{\max}$.

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathcal{D}_{\min} \subset \mathcal{D}_{\max}$, solo tenemos que probar la inclusión opuesta. Sea $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\omega = 1$ en un entorno de 0, $\omega(t) = 0$ para $|t| > 1$. Sea $\omega_\nu(t) = \omega(\nu t)$, $\nu \in \mathbb{N}$. Entonces $\omega_\nu(t) = 0$ si $|t| > 1/\nu$. En lo que sigue, ω_ν se refiere a la composición de ω con x (la función definidora de \mathcal{Y}). Si $u \in \mathcal{D}_{\max}$, entonces $u \in H_{\text{loc}}^m(\overset{\circ}{\mathcal{M}}; E)$ por regularidad elíptica. Por lo tanto, $(1 - \omega_\nu)u \in H_c^m(\mathcal{M}; E)$. En particular, $(1 - \omega_\nu)u$ es el límite en $H_c^m(\mathcal{M}; E)$ de una sucesión $\{\varphi_\ell\}_{\ell=1}^\infty \subset C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{M}}; E)$, y como A es un operador diferencial (preserva soporte) de orden m , $A\varphi_\ell \rightarrow A((1 - \omega_\nu)u)$ en $x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; F)$ cuando $\ell \rightarrow \infty$. Probamos ahora que $\omega_\nu u \rightarrow 0$ en \mathcal{D}_{\max} cuando $\nu \rightarrow \infty$. Solo tenemos

que verificar que $A(\omega_\nu u) \rightarrow 0$ en $x^{-\gamma}L_b^2(\mathcal{M}; F)$, ya que claramente $\omega_\nu u \rightarrow 0$ en $x^{-\gamma}L_b^2(\mathcal{M}; E)$. Es conveniente escribir

$$A = \sum_{k=0}^m A_k(xD_x)^k$$

cerca de la frontera (digamos, cuando $x < \varepsilon$) con operadores A_k de orden $m-k$ con coeficientes que dependen de x pero diferencian solo tangencialmente a $x = \text{constante}$. Con esta notación tenemos, una vez que ν es suficientemente grande,

$$A(\omega_\nu u) = \omega_\nu Au + \sum_{k=1}^m \sum_{k'=0}^{k-1} \binom{k}{k'} ((xD_x)^{k-k'} \omega_\nu) A_k (xD_x)^{k'} u.$$

Claramente, el primer término converge a Au en $X^{-\gamma}L_b^2(\mathcal{M}; F)$. El segundo converge a 0. Para ver esto último, notamos que

$$\sup |(xD_x)^{k-k'} \omega_\nu(x)| = \sup |((xD_x)^{k-k'} \omega)(\nu x)| = \sup |((xD_x)^{k-k'} \omega)(x)| \leq C$$

con c independiente de x y que $(xD_x)^{k-k'} \omega_\nu(x) \rightarrow 0$ para cada x cuando $\nu \rightarrow \infty$ si $k' < k$. Como $A_k(xD_x)^{k'} u \in x^{-\gamma}L_b^2(\mathcal{M}; F)$ tiene norma finita independiente de ν , el teorema de convergencia dominada de Lebesgue implica

$$((xD_x)^{k-k'} \omega_\nu) A_k (xD_x)^{k'} u \rightarrow 0.$$

Esto demuestra $u \in \mathcal{D}_{\text{máx}} \implies u \in \mathcal{D}_{\text{mín}}$ y completa la prueba. \square

Lo mismo sucede con los operadores de un complejo de primer orden. La elipticidad no importa en este caso así que lidiamos con un solo operador.

PROPOSICIÓN 2.9. *Sea $A \in \text{Dif}_b^1(\mathcal{M}; E)$ inicialmente definido como operador*

$$A : C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{M}}; E) \subset x^{-\gamma}L_b^2(\mathcal{M}; E) \rightarrow x^{-\gamma}L_b^2(\mathcal{M}; F)$$

Entonces $\mathcal{D}_{\text{mín}} = \mathcal{D}_{\text{máx}}$.

DEMOSTRACIÓN. De nuevo solo tenemos que probar $u \in \mathcal{D}_{\text{máx}} \implies u \in \mathcal{D}_{\text{mín}}$. Tomamos ω y ω_ν como en la prueba de la proposición anterior. Si $u \in \mathcal{D}_{\text{máx}}$, entonces

$$(2.10) \quad A((1 - \omega_\nu)u) = (1 - \omega_\nu)Au + i {}^b\sigma(A)({}^b d\omega_\nu)(u).$$

En esta fórmula hemos usado la definición de símbolo principal para obtener una forma concreta para el segundo término; esta fórmula es válida para operadores de primer orden. Supongamos que P es un operador diferencial de primer orden. Recordemos que si f es una función a valores reales con diferencial diferente de cero en algún punto de interés y v está en el dominio del operador entonces

$$\sigma(P)(df)(v) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} e^{-i\tau f} P(e^{i\tau f} v)$$

en ese punto. Sin tomar límite,

$$P(e^{i\tau f} v) = e^{i\tau f} P v + \tau e^{i\tau f} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{término con primeras derivadas} \\ \text{de } f \text{ y ninguna derivada en } v \end{array} \right\}$$

El factor en el segundo término es por lo tanto $\sigma(P)(df)(v)$. Como P es diferencial (en contraste con pseudodiferencial), en la fórmula para $\sigma(P)$ podemos insertar diferenciales de funciones arbitrarias (incluso complejas). En (2.10) usamos $(1 - \omega_\nu) = e^{i(-i(1-\omega_\nu))}$, es decir, $f = -i(1 - \omega_\nu)$.

Retomando el hilo de la demostración, como $(1 - \omega_\nu)u \in x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; E)$ y el lado derecho de (2.10) es un elemento de $L^2(\mathcal{M}; F)$, $A((1 - \omega_\nu)u) \in L^2(\mathcal{M}; F)$ y concluimos que $(1 - \omega_\nu)u \in \mathcal{D}_{\text{máx}}$.

Como $(1 - \omega_\nu)u \rightarrow u$ en $x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; E)$ y ambos términos a la derecha convergen en $x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; F)$, $\{(1 - \omega_\nu)u\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión en $x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; E)$ que converge a u en la topología de $\mathcal{D}_{\text{máx}}$. Cada elemento de esta sucesión tiene soporte compacto contenido en $\mathring{\mathcal{M}}$. Necesitamos probar ahora que si $v \in \mathcal{D}_{\text{máx}}$ tiene soporte compacto contenido en $\mathring{\mathcal{M}}$, entonces v es aproximable desde C_c^∞ en la topología de \mathcal{D}_{max} .

Con cualquier sucesión $\{u_\ell\}_{\ell=1}^\infty \subset C^\infty(\mathring{\mathcal{M}}; E)$ tal que $u_\ell \rightarrow u$ en $L_{\text{loc}}^2(\mathcal{M}; E)$ cuando $\ell \rightarrow \infty$ tendremos

$${}^b\sigma(A)({}^b d\omega_\nu)(u_\ell) \rightarrow {}^b\sigma(A)({}^b d\omega_\nu)(u) \text{ si } \ell \rightarrow \infty.$$

Necesitamos probar que $A((1 - \omega_\nu)u)$ es aproximable desde $C_c^\infty(\mathring{\mathcal{M}}; E)$ como elemento de $\mathcal{D}_{\text{máx}}$ en la topología de $L^2(\mathcal{M}; E)$.

Usando particiones de la unidad, reduciendo a los coeficientes de marcos de referencia, y pasando con coordenadas locales x_1, \dots, x_n a \mathbb{R}^n , el problema es probar con el operador

$$u \mapsto V u = \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u$$

(con $a_1, \dots, a_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$), si u es una función en $L^2(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto tal que $V u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces hay una sucesión $\{u_\ell\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_\ell \rightarrow u$ y $V u_\ell \rightarrow V u$ en la topología de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Es natural intentar usando una identidad aproximada. Sea $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\int \chi(x) = 1$. Sea $\chi_\ell = \ell^n \chi(\ell x)$. Por razones conocidas, $u * \chi_\ell \rightarrow u$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$. También $a_0 u_\ell \rightarrow a_0 u$, y basta probar que $\sum_{j=1}^n a_j \partial_{x_j} u_\ell \rightarrow \sum_{j=1}^n a_j \partial_{x_j} u$. Suponemos entonces $a_0 = 0$.

Tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \int u(y) \chi_\ell(x-y) dy &= - \int u(y) \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} a_j(x) \chi_\ell(x-y) dy \\ &= - \int u(y) \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} a_j(y) \chi_\ell(x-y) dy \\ &\quad - \int u(y) \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} \left((a_j(x) - a_j(y)) \chi_\ell(x-y) \right) dy \end{aligned}$$

Para el primer término a la derecha de la última igualdad, viendo la expresión como derivada débil, tenemos (integramos por partes):

$$- \int u(y) \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} a_j(y) \chi_\ell(x-y) dy = \int \sum_{j=1}^n a_j(y) \frac{\partial u}{\partial y_j}(y) \chi_\ell(x-y) dy$$

Esto es $(Vu) * \chi_\ell$, lo cual tiende a Vu en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Para el otro término queremos explotar que $a_j(x) - a_j(y) = 0$ cuando $y = x$. Expresamos esa idea como

$$a_j(x) - a_j(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} a_j(tx + (1-t)y) dt = \sum_{k=1}^n a_{j,k}(x, y) (x_k - y_k)$$

con

$$a_{j,k}(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial a_j}{\partial x_j}(tx + (1-t)y) dt$$

Denotamos $\chi^{(k)} = x_k \chi(x)$ y $\chi_\ell^{(k)}(x) = \ell^n \chi^{(k)}(\ell x)$. Entonces

$$\begin{aligned} \int u(y) \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} \left((a_j(x) - a_j(y)) \chi_\ell(x-y) \right) dy \\ &= \int u(y) \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_j(x, y) \frac{1}{\ell} \chi_\ell^{(k)}(x-y) \right) dy \\ &= \frac{1}{\ell} \int u(y) \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial a_j(x, y)}{\partial y_j} \chi_\ell^{(k)}(x-y) dy \\ &\quad + \int u(y) \sum_{k,j=1}^n a_j(x, y) \frac{1}{\ell} \frac{\partial}{\partial y_j} \chi_\ell^{(k)}(x-y) dy \end{aligned}$$

Los dos términos en la última igualdad son esencialmente convoluciones y pueden ser analizados desde ese punto de vista. El primero de ellos tiende a 0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$ debido al factor $1/\ell$ y la convergencia de la identidad aproximada. El

segundo converge a

$$u(x) \sum_{k,j=1}^n a_j(x, x) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \chi^{(k)}}{\partial y_j}(y) dy$$

también en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pero

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \chi^{(k)}}{\partial y_j}(y) dy = 0$$

porque $\chi^{(k)}$ tiene soporte compacto. Concluimos que $V\chi_\ell \rightarrow Vu$ en la topología de $L^2(\mathbb{R}^n)$. \square

No es verdad que para un complejo elíptico general ocurre que $\mathcal{D}_{\text{máx}}^q = \mathcal{D}_{\text{mín}}^q$, ver V.3. Para ver más sobre el asunto de la igualdad de los dominios mínimo y máximo de un operador, ver Kordyukov [39] y Shubin [72].

3. Cantos

Una generalización natural de b -estructuras es e -estructuras, o estructuras de canto (“edge”). Estas estructuras, introducidas por Mazzeo [47], están definidas de nuevo en variedades \mathcal{M} con borde, que llamaremos \mathcal{N} , con estructura adicional en el borde en la forma de una fibración $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{Y}$ de la frontera sobre otra variedad. De nuevo supondremos que todas las variedades son de clase C^∞ y compactas.

Supongamos por un momento que \mathcal{N} es una variedad conexa. Decimos que $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{Y}$ es una fibración con fibra típica \mathcal{Z} (para nuestros efectos otra variedad compacta), diagramáticamente expresado como a la derecha, si hay una cobertura abierta $\mathfrak{U} = \{\mathcal{V}_a\}_{a \in A}$ de \mathcal{Y} y difeomorfismos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \hookrightarrow & \mathcal{N} \\ & & \downarrow \wp \\ & & \mathcal{Y} \end{array}$$

$$\phi_a : \wp^{-1}(\mathcal{V}_a) \rightarrow \mathcal{V}_a \times \mathcal{Z}$$

tales que si

$$\wp_a : \mathcal{V}_a \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{V}_a$$

es la proyección canónica, entonces $\wp_a \circ \phi_a = \wp|_{\pi^{-1}(\mathcal{V}_a)}$. Este concepto es similar al de fibrado vectorial, omitiendo la parte algebraica.

En una variedad compacta \mathcal{M} con frontera \mathcal{N} , la frontera no es necesariamente conexa, y la fibración que queremos especificar puede tener \mathcal{Y} no conexo, con componentes de variadas dimensiones, y correspondientemente fibras típicas de diferentes dimensiones según la componente. Ignoramos eso en la notación.

Un ejemplo de variedad con frontera fibrada es lo que resulta, comenzando con una variedad no singular, de tomar coordenadas cilíndricas a lo largo de una subvariedad. Por ejemplo, en \mathbb{R}^n , si $\mathcal{Y} = \{0\} \times \mathbb{R}^q$ con 0 el origen en \mathbb{R}^{n-q} ,

coordenadas cilíndricas es tomar coordenadas polares (esféricas) en el factor \mathbb{R}^{n-q} con polo en 0:

$$\mathcal{M} = [0, \infty) \times \mathbb{R}^q \times S^{n-q-1}, \quad \wp(x, y, z) = y,$$

con los factores escritos de manera consistente con las convenciones históricas en el tema.

Construimos el fibrado vectorial de estructura de la variedad \mathcal{M} con frontera fibrada de manera similar al caso de extremos cilíndricos. Definimos el espacio $C_{e\text{-tan}}^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$ como el subespacio de $C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$ cuyos elementos X son tangentes a lo largo de \mathcal{N} a las fibras de \mathcal{N} . Este es, como en el caso cilíndrico, un módulo sobre $C^\infty(\mathcal{M})$ localmente libre finitamente generado, y por lo tanto hay un fibrado vectorial² ${}^eT\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ y mapa ${}^e\text{ev} : {}^eT\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ tal que con el mapa inducido,

$${}^e\text{ev}_* : C^\infty(\mathcal{M}; {}^eT\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$$

es un isomorfismo de $C^\infty(\mathcal{M})$ -módulos en su imagen $C_{e\text{-tan}}^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$. Por la naturaleza de $C_{e\text{-tan}}^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$, ${}^e\text{ev}$ es un isomorfismo sobre el interior de \mathcal{M} .

Si \mathcal{Y} es de dimensión 0, e revierte a b .

Para describir los campos vectoriales en $C_{e\text{-tan}}^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$ cerca de puntos en la frontera de \mathcal{M} y usar esa información para describir marcos de referencia locales de ${}^eT\mathcal{M}$, escogemos coordenadas adaptadas a la situación. Como en el caso cilíndrico, podemos escoger de una vez por todas una función definidora x . Si $p_0 \in \mathcal{N}$, podemos escogemos coordenadas y_1, \dots, y_q para \mathcal{Y} en un entorno de $\wp(p_0)$, y extendemos las funciones $y_j \circ p\wp$ a un entorno de p_0 en \mathcal{M} ; denotamos estas nuevas funciones también por y_1, \dots, y_q . Finalmente tomamos funciones z_1, \dots, z_{n-q-1} definidas cerca de p_0 en \mathcal{M} tales que $y_1, \dots, y_q, z_1, \dots, z_{n-q-1}$ restringidas a \mathcal{N} son coordenadas para \mathcal{N} cerca de p_0 . Entonces las z_μ , restringidas a las fibras de \wp (las cuales son difeomorfas a \mathcal{Z}) producen coordenadas en las fibras. En conjunto, $x, y_1, \dots, y_q, z_1, \dots, z_{n-q-1}$, son coordenadas para \mathcal{M} cerca de p_0 .

En términos de las coordenadas x, y, z , un elemento $V \in C_{e\text{-tan}}^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$ tiene la forma

$$V = a(x, y, z)x \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=1}^q b_j(x, y, z)x \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{\mu=1}^{n-q-1} c_\mu(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z_\mu}$$

con coeficientes de clase C^∞ . Vemos que a lo largo de $x = 0$, solo una combinación lineal de los ∂_{z_μ} sobrevive.

Podemos ver los objetos

$$x \frac{\partial}{\partial x}, x \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, x \frac{\partial}{\partial y_q}, \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n-q-1}}$$

²Ver la nota al pie de la página 192.

como un marco de referencia local para ${}^eT\mathcal{M}$ cerca de p_0 . Bajo el mapa ${}^e\text{ev}$, en el interior estos elementos revierten a su significado como campos vectoriales (independientes, por eso ${}^e\text{ev}$ es un isomorfismo sobre \mathcal{M}), mientras que a lo largo de la frontera, solo los elementos tangenciales a las fibras perduran.

El fibrado dual a ${}^eT\mathcal{M}$, naturalmente, ${}^eT^*\mathcal{M}$. El dual del mapa ${}^e\text{ev}$ produce el mapa dual ${}^e\text{ev}^* : T^*\mathcal{M} \rightarrow {}^eT^*\mathcal{M}$.

Los operadores diferenciales (ente secciones de fibrados $E, F \rightarrow \mathcal{M}$) adaptados a esta estructura son los elementos de $\text{Dif}_e^m(\mathcal{M}; E, F)$. En el interior ellos son operadores diferenciales comunes. Cerca de puntos en la frontera, en coordenadas adaptadas, tienen la forma

$$(3.1) \quad A = \sum_{k+|\alpha|+|\beta|\leq m} a_{k,\alpha,\beta}(x, y, z)(xD_x)^k(xD_y)^\alpha D_z^\beta$$

La definición de símbolo principal adaptada a estos operadores usa el mapa ${}^e\text{ev}^*$ y el símbolo usual de la misma manera que en el caso cilíndrico. El símbolo es una sección sobre el fibrado dual a ${}^eT\mathcal{M}$. La noción de elipticidad, e -elipticidad en este contexto, es clara.

Como $C_{e\text{-tan}}^\infty(\mathcal{M})$ es un álgebra de Lie, hay un complejo natural que sustituye al complejo de de Rham (de nuevo definido usando la fórmula (II.6.1), esta vez con elementos $X_j \in C_{e\text{-tan}}^\infty(\mathcal{M})$) asociado a los fibrados vectoriales ${}^e\Lambda^q \mathcal{M} = \Lambda^q {}^eT^*\mathcal{M}$. El complejo resultante es

$$\dots \rightarrow C^\infty(\mathcal{M} \wedge^q \mathcal{M}) \xrightarrow{{}^e d} C^\infty(\mathcal{M} \wedge^{q+1} \mathcal{M}) \rightarrow \dots$$

Los espacios L^2 son los mismos³ del caso cilíndrico, es decir, basados en L_b^2 . El espacio de Sobolev $H_e^m(\mathcal{M}; E)$ para m entero positivo se define de manera similar, con la ayuda de una conexión ∇ en $E \rightarrow \mathcal{M}$ y el mapa

$${}^e\text{ev}^* : T^*\mathcal{M} \rightarrow {}^eT^*\mathcal{M},$$

usando la composición

$$(I \otimes {}^e\text{ev}^*) \circ \nabla : C^\infty(\mathcal{M} : E) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M} : E \otimes {}^eT^*\mathcal{M})$$

Los espacios $H_e^s(\mathcal{M}; E)$ con s real arbitrario se definen usando interpolación y dualidad. Igualmente se definen los espacios con peso $x^{-\gamma} H_e^s(\mathcal{M}; E)$.

En el caso escalar, si $m \in \mathbb{N}_0$,

$$H_e^m(\mathcal{M}) = \{u \in L_b^2(\mathcal{M}) : X_1 \cdots X_k \in L_b^2(\mathcal{M}) \ \forall X_1, \dots, X_k \in C_{e\text{-tan}}^\infty(\mathcal{M}, T\mathcal{M}), \ 0 \leq k \leq m\}$$

³Mazzeo [47] usa una densidad usual hasta el borde, y termina al igual que nosotros en la Sección IV.5 con un término aditivo 1/2 en un número de fórmulas. En esta sección ese término está ausente; la razón es que $L^2 = x^{-1/2} L_b^2$

$$(3.2) \quad H_e^m(\mathcal{M}) = \{u \in L_b^2(\mathcal{M}) : \forall k \in \mathbb{N}_0, k \leq m, \\ \forall X_1, \dots, X_k \in C_{e\text{-tan}}^\infty(\mathcal{M}, T\mathcal{M}) \ X_1 \cdots X_k \in L_b^2(\mathcal{M})\}$$

Al igual que en el caso cilíndrico, si $A \in \text{Dif}_e^m(\mathcal{M}; E, F)$ es e -elíptico, o de primer orden, entonces los dominios mínimo y máximo de A definido inicialmente como operador

$$A : C_e^\infty(\mathcal{M}; E) \subset x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; E) \rightarrow x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; F)$$

coinciden.

TEOREMA 3.3 (Mazzeo [47, Teoremas 3.8 y 3.23]). *Supongamos que $A \in \text{Dif}_e^m(\mathcal{X}; E, F)$ es e -elíptico y $u \in x^{-\gamma'} H_e^s(\mathcal{M}; E)$ para algún γ' y s' . Si $Au \in x^{-\gamma} H_b^s(\mathcal{M}; F)$, entonces $u \in x^{-\gamma} H_b^{s+m}(\mathcal{M}; E)$*

Este es un teorema de regularidad. La hipótesis sobre u es que de entrada es algo razonable en términos de regularidad y comportamiento en la frontera. La prueba es vía la construcción de un operador B tal que $B(x^{-\gamma} H_b^s(\mathcal{M}; F)) \subset x^{-\gamma+m} H_b^s(\mathcal{M}; F)$ para cualquier s y γ . En el artículo de Mazzeo, A es un operador pseudodiferencial adaptado a la topología diferencial de \mathcal{M} (la fibración de la frontera). Para nosotros es suficiente que A sea diferencial.

La aserción (IV.5.5) es una aplicación del Teorema 3.3 en el caso en que las fibras de la frontera son sus propios puntos ($\mathcal{N} = \mathcal{Z}$ y $\wp : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{Z}$ es la identidad), con el operador $x^m A$ (para esto último, ver la Sección X.2, en particular el argumento en torno al operador (X.2.1)).

El e -símbolo de A dado en coordenadas adaptadas por la fórmula (3.1), en

$$\nu = \xi \frac{dx}{x} + \sum_j \eta_j \frac{dy_j}{x} + \sum \zeta_\mu dz_\mu$$

es

$${}^e \sigma(A)(\nu) = \sum_{k+|\alpha|+|\beta|=m} a_{k,\alpha,\beta}(x, y, z) \xi^k \eta^\alpha \zeta^\beta$$

Además de este símbolo, hay otro par de símbolos relevantes en la frontera.

El espacio $\text{Dif}_e^m(\mathcal{M}; E, F)$ es un subespacio de $\text{Dif}_b^m(\mathcal{M}; E, F)$ y por lo tanto, si $A \in \text{Dif}_e^m(\mathcal{M}; E, F)$, entonces A posee una familia indicial, localmente

$$\mathcal{M}(A)(y, \sigma) = \sum_{k+|\alpha|+|\beta| \leq m} a_{k,\alpha,\beta}(0, y, z) \sigma^k D_z^\beta.$$

Esta es una familia de operadores diferenciales que actúan tangencialmente a las fibras de \wp , con $y \in \mathcal{Y}$ y $\sigma \in \mathbb{C}$ como parámetros. Además hay la familia normal, de nuevo en coordenadas

$$N(A)(x, y, z) = \sum_{k+|\alpha|+|\beta| \leq m} a_{k,\alpha,\beta}(0, y, z) (xD_x)^k (xD_u)^\alpha D_z^\beta$$

Este operador es esencialmente, congelar los coeficientes en $x = 0$, pero sin anular x cuando aparece con las derivadas. Las derivadas en y son ahora derivadas en una nueva variable u . Aquí $(x, u, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^q \times \mathcal{Z}$ con $y \in \mathcal{Y}$ esencialmente como parámetro.

Una de las dificultades más serias que uno confronta al tratar de desarrollar una teoría completa de e -operadores es que la familia indicial, al depender de $y \in \mathcal{Y}$, produce espectro de frontera que en principio también depende de y . En ciertas situaciones geoméricamente importantes, situaciones especiales que no discutiremos, el espectro de frontera es constante. En ausencia de esto, típicamente hay que añadir hipótesis. Por ejemplo, Mazzeo introduce

$$(3.4) \quad \{\sigma \in \mathbb{C} : \exists y \in \mathcal{Y} \text{ tal que } \mathcal{M}(A)(y, \sigma) \text{ no es invertible}\} \text{ no depende de } y \in \mathcal{Y}.$$

En [35] usamos hipótesis considerablemente menos restrictivas para establecer las bases de una teoría general para tratar este tipo de operadores (más en el siguiente capítulo):

$$(3.5) \quad \text{Existe } \gamma \text{ tal que } \text{spec}_e(A) = \{(y, \sigma) \in \mathbb{C} : \text{tal que } \mathcal{M}(A)(y, \sigma) \text{ no es invertible}\} \text{ no contiene puntos en } \mathcal{Y} \times \{\sigma : \Im \sigma = \gamma \text{ ó } \Im \sigma = \gamma - m\}.$$

Otra hipótesis importante atañe al operador normal. La familia normal, en coordenadas, es

$$\hat{N}(A)(\eta) = \sum_{k+|\alpha|+|\beta| \leq m} a_{k,\alpha,\beta}(0, y, z) (xD_x)^k (x\eta)^\alpha D_z^\beta.$$

Esta es una familia de b -operadores que captura más del comportamiento de A en la frontera que meramente el operador indicial (que corresponde a $\eta = 0$). En esta familia, la interpretación correcta de (y, η) es como covector $\boldsymbol{\eta} = \sum \eta_j dy_j \in T^*\mathcal{Y}$. Escribimos $\hat{A}(\boldsymbol{\eta})$ para referirnos a esta familia. La hipótesis adicional es

$$(3.6) \quad \text{Para cada } \boldsymbol{\eta} \in \dot{T}^*\mathcal{Y}, \text{ ambos } \hat{A}(\boldsymbol{\eta}) \text{ y su transpuesto } A^t \text{ satisface la propiedad de continuación única.}$$

La propiedad de continuación única para $\hat{A}(\boldsymbol{\eta})$ se refiere a lo siguiente: Si $\hat{A}(\boldsymbol{\eta})u = 0$ y $u = 0$ a orden ∞ en $x = 0$, entonces $u = 0$.

La propiedad (3.6) implica que para cada $\boldsymbol{\eta} \in \dot{T}^*\mathcal{Y}$,

$$(3.7) \quad \hat{A}(\boldsymbol{\eta}) : x^{-\gamma} H_b^m(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathcal{Z}; E) \subset x^{-\gamma} L_b^2(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathcal{Z}; E) \rightarrow x^{-\gamma} L_b^2(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathcal{Z}; F)$$

es inyectivo si γ es suficientemente negativo, y sobreyectivo si γ es suficientemente positivo. La idea es que γ muy negativo implica anulación en $x = 0$ de los elementos de $x^{-\gamma} H_b^m$, mientras que γ muy positivo incrementa el chance de encontrar una solución (sobreyectividad).

Para cada $\boldsymbol{\eta} \in \dot{T}^*\mathcal{Y}$ sea $\delta'(\boldsymbol{\eta})$ el máximo γ para el cual (3.7) es inyectivo y $\gamma''(\boldsymbol{\eta})$ el mínimo γ para el cual (3.7) es sobreyectivo. Esto produce un par de funciones semicontinuas de uno u otro lado. Tomando una métrica Riemanniana en \mathcal{Y} para definir el fibrado de coesferas, la compacidad de $S^*\mathcal{Y}$ y

la semicontinuidad de γ' y γ'' como funciones en $S^*\mathcal{Y}$ implican que podemos escoger $\gamma'_{\min} = \min \gamma'(\boldsymbol{\eta})$ y $\gamma''_{\max} = \max \gamma''(\boldsymbol{\eta})$ (Mazzeo [47, p. 1649].)

TEOREMA 3.8 (Mazzeo [47, Teorema 6.1, p. 1652]). *Supongamos que $A \in \text{Dif}_e^m(\mathcal{M}; E, F)$ es e-elíptico y satisface (3.4) y (3.6). Sea γ tal que $\text{spec}_e(A) \cap \{\mathcal{Y}\} \times \{\sigma : \Im\sigma = \gamma\} = \emptyset$. Si $\gamma < \delta'_{\min}$ o $\gamma > \delta''_{\max}$, entonces*

$$A : x^{-\gamma} H_b^m(\mathcal{M}; E) \subset x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; E) \rightarrow x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; E)$$

es semi-Fredholm, con espacio nulo de dimensión finita en el primer caso, y con co-espacio de dimensión finita en el segundo.

Que A es semi-Fredholm significa que su rango es cerrado, y que uno de los dos números, $\dim \ker A$ o $\dim \text{coker } A$ es finito.

4. Variedades de dispersión

Las variedades de dispersión son variedades \mathcal{M} , compactas con borde \mathcal{Y} , con estructura cerca de $\partial\mathcal{M} = \mathcal{Y}$ modelada en \mathbb{R}^n cierta compactificación radial de \mathbb{R}^n . Las ideas geométricas en este contexto fueron introducidas por Melrose. Sus lecciones sobre el tema están disponibles en [52].

El problema fundamental en \mathbb{R}^n es determinar la forma de un obstáculo (un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n) o la distorsión producida por un “potencial” mediante comparar las soluciones de la ecuación de onda en ausencia del obstáculo con las soluciones cuando el obstáculo está presente. En el caso del potencial, el planteamiento del problema es como sigue (los siguientes párrafos tomados de Lax y Phillips, [43]). Consideremos el Laplaciano usual en \mathbb{R}^n ,

$$\Delta = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j^2}$$

(por consistencia con secciones anteriores, el signo del Laplaciano está escogido para tener positividad) y sea $V \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ no-negativa. Dadas funciones $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, y $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sea u la solución del problema a valores iniciales

$$(4.1) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta + V \right) u = 0 \text{ en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(0, z) = u_0(z), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, z) = u_1(z). \end{cases}$$

Entonces para cualquier t , $z \mapsto u(z, t)$ es una función en $H^1(\mathbb{R}^n)$ y $z \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}(0, z)$ es una función en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sea

$$U(t) : \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^n) & & L^2(\mathbb{R}^n) \\ \oplus & \rightarrow & \oplus \\ H^1(\mathbb{R}^n) & & H^1(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

el operador

$$U(t) \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t, \cdot) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \end{bmatrix}.$$

Este operador toma el dato de Cauchy al tiempo 0 y produce el dato de Cauchy al tiempo t de la solución. En el espacio $H = H^1(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$E(w_0 \oplus w_1) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla_z w_0(z)|^2 + |w_1|^2 + V(z)|w_0(z)|^2 \right) dz$$

donde ∇ es el gradiente. Esta es ciertamente una seminorma. Pero si $E(w) = 0$, entonces $w_1 = 0$, $\nabla_z w_0$ y $Vw_0 = 0$. Como $\nabla_z w_0 = 0$, w_0 es constante, pero la condición $w_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ implica que esa constante tiene que ser 0. Entonces $(w_0 \oplus w_1) \mapsto E(w_0 \oplus w_1)$ es una norma. Es fácil ver que esa norma es equivalente a la norma obtenida von $V = 0$ y que es inducida por un production interno. El operador $U(t)$ es unitario: $E(u_0(t, \cdot), u_t(t, \cdot))$ es independiente de t si u es la solución del problema (4.1). Por unicidad de la solución, $U(t)$ satisface $U(t+s) = U(t)U(s)$ y es invertible: $t \mapsto U(t)$ es un grupo uniparamétrico unitario.

Hacemos lo mismo con las soluciones suponiendo $V = 0$, llamamos al operador U_0 .

Los operadores de onda son

$$W_+ u = \lim_{t \rightarrow \infty} U(-t)U_0(t)u W_- u = \lim_{t \rightarrow -\infty} U(-t)U_0(t)u$$

Una manera de entender W_+ , por ejemplo, es así. Si al tiempo t_0 tenemos datos de Cauchy $\mathbf{u} = (u_0, u_1)$, esa información vino vía la ecuación de ondas libre del dato de Cauchy $U(-t_0)\mathbf{u}$. Vía la ecuación de ondas con potencial, ese dato de Cauchy al tiempo 0 se transforma en $U(t_0)U(-t_0)\mathbf{u}$ al tiempo t_0 ; $U(t_0)U(-t_0)$ compara lo que recibimos vía la ecuación libre con lo que recibimos vía la ecuación perturbada. Observar desde una posición remota es tomar el límite cuando $t_0 \rightarrow \infty$.

Ellos relacionan $U(t)$ y $U_0(t)$:

$$U(s)U(-t)U_0(t) = U(s-t)U_0(t-s)U_0(s)$$

y tomando los límites $t \rightarrow \pm\infty$,

$$U(s)W_{\pm\infty} = W_{\pm\infty}U_0(s)$$

El operador de dispersión es $S = W_+^{-1}W_-$, y el problema es reconstruir V dado S .

La información contenida es S está en cierto sentido en infinito, que es a donde terminan (o de donde vienen) las soluciones de la ecuación cuando $t \rightarrow \infty$ (o cuando t se incrementa desde $-\infty$). Po esto, la “frontera” de R^n debería jugar un papel básico. Como el espacio donde se mueven las soluciones es Euclidiano, son líneas rectas, o rayos, los que juegan un papel.

Melrose enfoca el análisis en $(\Delta - \lambda^2)$ y su inversa. Después de todo, el operador de ondas puede obtenerse de la resolvente vía la fórmula

$$(-D_t^2 + \Delta)u = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(t-t')\lambda} (\Delta - \lambda^2)u(t', z) dt'$$

El análisis ocurre en la bola unitaria cerrada de \mathbb{R}^n , vista como compactificación radial de \mathbb{R}^n . Una manera de ver esa compactificación es como el hemisferio $\mathcal{M} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\mathcal{M} = S_+^n = \{(\zeta_1, \dots, \zeta_{n+1}) : \zeta_1 \geq 0\}$ junto con el mapa $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow S_+^n$,

$$\gamma(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}, \frac{z}{\sqrt{1 + |z|^2}} \right).$$

Vemos que cuando $z \rightarrow \infty$ a lo largo de un radio, $\gamma(z)$ tiende a un punto de \mathcal{Y} , i.e., si $z = r\hat{z}_0$ con $\hat{z}_0 \in S^{n-1}$ entonces $\gamma(z) \rightarrow \hat{z}_0$ cuando $r \rightarrow \infty$. Escribiremos \mathcal{M} en lugar de S_+^n . Evidentemente \mathcal{M} una variedad con borde $\mathcal{Y} = S^{n-1}$. Denotando por x la primera componente de $p \in \mathcal{M}$ tenemos una función definidora de \mathcal{Y} . Denotando por y_1, \dots, y_n las demás componentes de un punto arbitrario de \mathcal{M} , tenemos como mapa inverso (definido en $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$),

$$\zeta = \frac{1}{x}y.$$

El mapa γ toma $z \in \mathbb{R}^n$, pasa a $(1, z) \in \mathbb{R}^{n+1}$, luego calcula el punto de intersección del rayo por $(1, z)$ y el hemisferio.

La motivación de la definición de la estructura de dispersión proviene de reescribir y analizar el Laplaciano como un operador en \mathcal{M} (o en $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ si hay singularidades en \mathcal{Y} , pero usando las coordenadas de \mathcal{M} ; no hay singularidades). Pensando el mapa γ como mapa en $R \times \mathbb{R}^{n+1}$ y usando x, y_1, \dots, y_n como coordenadas,

$$d\gamma_* \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right) = -x^2 y_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{k=1}^n x \left(\delta_{jk} - y_j y_k \frac{\partial}{\partial z_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Este campo vectorial es tangente⁴ a \mathcal{M} . Vemos que $d\gamma_*(\partial_{z_j})$ se obtiene de

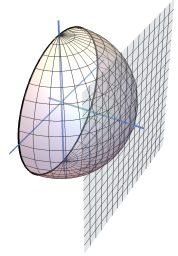
$$V_j = -x y_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{k=1}^n \left(\delta_{jk} - y_j y_k \frac{\partial}{\partial z_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_k}$$

multiplicando por x , y que V_j es un campo vectorial de $C_{\tan}^\infty(\mathcal{M})$, y Δ es una suma de cuadrados (por composición) de campos en $x C_{\tan}^\infty(\mathcal{M})$.

En una variedad arbitraria \mathcal{M} , compacta con frontera \mathcal{Y} , definimos

$$C_{sc}^\infty(\mathcal{M}) = x C_{\tan}^\infty(\mathcal{M}).$$

⁴Aplicando el campo vectorial a $\rho = x^2 + |y|^2$ obtenemos $2xy_j(1 - x^2 - |y|^2)$, lo cual se anula si $\rho = 1$, como debe ser.



Como en las dos secciones anteriores, este espacio de campos vectoriales es localmente libre finitamente generado sobre $C^\infty(\mathcal{M})$, hay de nuevo un fibrado vectorial

$${}^{sc}\text{ev} : {}^{sc}T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$$

Este fibrado es una estructura de dispersión. Com en las secciones previas en este capítulo, hay una definición general de operadores de dispersión, una noción de símbolo y de elipticidad (que de nuevo involucra el comportamiento de varias partes del operador sobre \mathcal{M} y sobre \mathcal{Y}), espacios de Sobolev, complejo de de Rham. Los operadores elípticos, y los operadores de orden 1, tienen dominios naturales únicos una vez que el peso $x^{-\gamma}$ ha sido fijado.

El análisis propiamente sigue ideas similares a las que no hemos discutido en ningún caso en este capítulo. El lector interesado puede consultar las lecciones de Melrose [52]

Análisis en variedades con singularidades

1. Variedades cónicas

Nos limitaremos al caso de variedades cónicas. Una variedad cónica es una variedad con frontera con un tipo específico de estructura en la frontera. Para motivar los conceptos antes de introducirlos, discutimos un ejemplo.

Primero, las variedades. El conjunto

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{(w_0, w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : w_0^2 = \alpha^2(w_1^2 + \dots + w_n^2), w_1 \geq 0\}$$

con $\alpha > 0$ es, fuera del origen, una subvariedad de clase C^∞ de \mathbb{R}^n , (la mitad de) un cono con base circular. Podemos ver el cono como el resultado de colapsar la frontera, $\{0\} \times S^{n-1}$ del cilindro \mathcal{M} dado por

$$(1.1) \quad [0, \varepsilon] \times \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1^2 + \dots + y_n^2 = 1\}$$

a un punto. Queremos hacer análisis en variedades que tienen singularidades puntuales de este tipo. Más generalmente, queremos trabajar con variedades que tienen puntos cerca de los cuales la variedad se ve topológicamente como el cociente de $[0, \varepsilon] \times \mathcal{Y}$ para alguna variedad cerrada \mathcal{Y} por la relación que colapsa $\{0\} \times \mathcal{Y}$ a un punto.

Ahora los operadores. El Laplaciano en \mathbb{R}^n , escrito en coordenadas polares $(x, \theta) \in [0, \infty) \times S^{n-1}$, es

$$\frac{1}{x^2}((xD_x)^2 + i(n-2)x D_x + \Delta_{S^{n-1}})$$

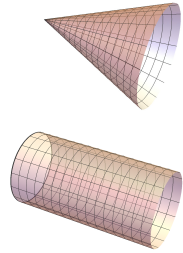
donde $\Delta_{S^{n-1}}$ es el Laplaciano en la esfera unitaria. Más generalmente, tomemos $\tilde{\mathcal{M}}$ (en (1.1)) y \mathcal{M} como en el párrafo anterior. El mapa $\wp : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ que colapsa el borde $\mathcal{Y} = \{0\} \times S^{n-1}$ de \mathcal{M} es

$$\wp(x, y) = \left(x, \frac{x}{\alpha}y\right).$$

La restricción de \wp a $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ define un difeomorfismo

$$\overset{\circ}{\wp} : \overset{\circ}{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{Y} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}} \setminus \{0\}$$

que nos permite escribir el Laplaciano de $\tilde{\mathcal{M}} \setminus \{0\}$ como un operador en $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$, el cual procedemos a calcular.



La métrica de \mathbb{R}^{n+1} induce una métrica en $\tilde{\mathcal{M}} \setminus \{0\}$. Vía el difeomorfismo φ (fuera del borde) esa métrica es

$$g = \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) dx^2 + \frac{x^2}{\alpha^2} h$$

donde h es la métrica de S^{n-1} . Suponiendo $y_n > 0$ podemos usar y_1, \dots, y_{n-1} como coordenadas en S^{n-1} . Las funciones x, y_1, \dots, y_{n-1} son coordenadas locales en \mathcal{M} respecto a las cuales la matriz $[g(\partial_{y_i}, \partial_{y_j})]_{i,j=0}^n$ es

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & \frac{x^2}{\alpha^2} (I + \Omega) \end{bmatrix}$$

donde Ω es la matriz con entradas $\Omega_{i,j} = \frac{y_i y_j}{y_n^2}$, $i, j = 1, \dots, n-1$. Esta es la matriz de la métrica en S^{n-1} respecto a las coordenadas y_1, \dots, y_{n-1} . Su determinante es

$$|g| = \frac{x^{2(n-2)}}{\alpha^{2(n-1)}} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) |h|$$

Momentáneamente usando la notación $y_0 = x$, la fórmula general del Laplaciano actuando sobre funciones,

$$\Delta u = - \sum_{i,j=0}^{n-1} \frac{1}{|g|^2} \frac{\partial}{\partial y_i} g^{ij} |g|^{1/2} \frac{\partial u}{\partial y_j}$$

con $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$, produce

$$\Delta u = \frac{1}{x^2} \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} (xD_x)^2 - i(n-2)x D_x + \alpha^2 \Delta_{S^{n-1}} \right).$$

Observamos ahora que Δ tiene la estructura de

$$\frac{1}{x^2} P, \quad P \in \text{Dif}_b^2(M).$$

La elipticidad de $P = x^2 \Delta$ como b operador es clara. En el interior, es un Laplaciano, por lo tanto elíptico, además $\alpha^2/(1 + \alpha^2 + 1)\sigma^2 + \alpha^2 \sigma_2(\Delta_{S^{n-1}})$ es no-negativo y 0 si y solo si $\sigma = 0 = \sigma(\Delta_{S^{n-1}})$, lo cual es imposible en un covector $\neq 0$.

Tomamos el ejemplo como motivación para definir la variedad, estructura, y operadores a estudiar en el caso cónico: La variedad será una variedad \mathcal{M} compacta con frontera \mathcal{Y} . La idea es que la variedad con puntos singulares es el resultado de colapsar cada componente de la frontera \mathcal{Y} a un punto (posiblemente colapsado varias de esas componentes al mismo punto). Los operadores de orden m so operadores de la forma

$$A = \frac{1}{x^m} P, \quad P \in \text{Dif}_b^m(M; E, F).$$

si $E, F \rightarrow \mathcal{M}$ son fibrados. Estos son los operadores “cónicos.”

Como en el capítulo anterior, también en este caso hay un fibrado de estructura. La guía para encontrarlo es el comportamiento del símbolo principal de un operador cónico arbitrario. Debido a la singularidad $1/x^m$ si A es de orden m , el símbolo principal usual es singular sobre puntos de la frontera. El $C^\infty(\mathcal{M})$ -módulo es

$$C_{cn}^\infty(\mathcal{M}; T^*\mathcal{M}) = \{\alpha \in C^\infty(\mathcal{M}; T^*\mathcal{M}) : \iota^\alpha = 0\}$$

donde $\iota : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{M}$ es el mapa inclusión. La condición sobre α es como sigue. Primero, α es una 1-forma C^∞ . Segundo, en coordenadas adaptadas como en la Sección IX.2, cerca de $p_0 \in \mathcal{Y}$, entonces

$$\alpha = \alpha_0(x, y)dx + \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{b}_j(x, y)dy_j$$

con coeficientes de clase C^∞ hasta la frontera. Pero como

$$\iota^*\alpha = \sum_{j=1}^{n-1} b_j(0, y)dy_j,$$

la condición $\iota^*\alpha = 0$ implica $\tilde{b}_j(0, y) = 0$, por lo tanto $\tilde{b}_j(x, y) = xb_j(x, y)$ para ciertas b_j también C^∞ hasta la frontera. Así, α es, cerca de p_0 , una combinación lineal de $dx, xdy_1, \dots, xdy_{n-1}$ con coeficientes C^∞ . Vemos de nuevo que hay un fibrado vectorial $\pi : \mathcal{T}^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, el fibrado cotangente cónico, y homomorfismo $\text{ev}^* : \mathcal{T}^*\mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}$ que es un isomorfismo sobre $\mathring{\mathcal{M}}$, tal que el mapa inducido

$$\text{ev}_*^* : C^\infty(\mathcal{M}; \mathcal{T}^*\mathcal{M}) \rightarrow C_{cn}^\infty(\mathcal{M}; T^*\mathcal{M}) \subset C^\infty(\mathcal{M}; T^*\mathcal{M})$$

es un isomorfismo de $C^\infty(\mathcal{M})$ -módulos. En el interior de \mathcal{M} podemos usar como (notación para un) marco de referencia para $\mathcal{T}\mathcal{M}$ las secciones dx_1, \dots, dx_n definidas usando coordenadas locales. Cerca de la frontera, en coordenadas adaptadas, usamos $dx, xdy_1, \dots, xdy_{n-1}$ como notación para un marco de referencia. Como en el caso b , cuando están siendo interpretadas como secciones locales de $\mathcal{T}\mathcal{M}$, las xdy_j no solo no son nulas en la frontera $x = 0$, sino también independientes. Pero aplicando $\text{ev}(xdy_j)$, el resultado es nulo en \mathcal{Y} .

Tomemos $A \in x^{-m} \text{Dif}_b^m(\mathcal{M}; E, F)$. Cerca de la frontera,

$$A = \frac{1}{x^m} \sum_{k+|\alpha| \leq m} a_{k,\alpha}(x, y)(xD_x)^k D_y^\alpha$$

con funciones $a_{k,\alpha}$ de clase C^∞ hasta la frontera. El símbolo principal de A en $\tilde{\xi} \in \mathring{T}\mathcal{M}$, $\xi = \xi dx + \sum \eta_j dy_j$ es

$$\sigma(A)(\tilde{\xi}) = \frac{1}{x^m} \sum_{k+|\alpha|=m} a_{k,\alpha}(x, y)(x\xi)^k \eta^\alpha.$$

Como los coeficientes de A incluyen el factor x^{-m} , en general no podemos calcular el símbolo usual de A en $x = 0$. Pero si evaluamos en $\xi = \xi dx + \sum \eta_j x dy_j$ con $\xi > 0$, obtenemos

$$\sigma(A)(\xi) = \frac{1}{x^m} \sum_{k+|\alpha|=m} a_{k,\alpha}(x, y) (x\xi)^k (x\eta)^\alpha.$$

El número total de factores x en cada sumando es m con la consiguiente cancelación:

$$\sigma(A)(\xi) = \sum_{k+|\alpha|=m} a_{k,\alpha}(x, y) \xi^k \eta^\alpha.$$

Vemos entonces que si α es un elemento de $C_{cn}^\infty(\mathcal{M}; T^*\mathcal{M})$, entonces $\sigma(A)(\alpha)$, inicialmente calculado en $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$, tiene extensión a todo \mathcal{M} . Usamos esto para definir ${}^c\sigma(A)$:

El símbolo cónico de $A \in x^{-m} \text{Dif}_b^m(\mathcal{M}; E, F)$ es la extensión por continuidad de la sección de ${}^c\pi^* \text{Hom}(E, F)$ del mapa

$${}^cT^*\mathcal{M} \ni \xi \mapsto \sigma(A)({}^c\text{ev}^{-1}(\xi)) \in \text{Hom}(E_p, F_p), \quad p = {}^c\pi(\xi), \quad p \in \overset{\circ}{\mathcal{M}}.$$

Con esta definición de símbolo, definimos elipticidad como siembre: A es c -elíptico si ${}^c\sigma(A)(\xi)$ es invertible para todo $\xi \in {}^cT\mathcal{M}$. Una definición equivalente para todos los efectos es invertibilidad del b -símbolo de $x^m A$. La única desventaja de $x^m A$ es que depende de la función definidora x , aunque de manera inocua en lo que se refiere a invertibilidad. La definición con el c -símbolo es completamente intrínseca.

Pasamos ahora al análisis. Fijamos una b -medida en \mathcal{M} y fibrados vectoriales $E, F \rightarrow \mathcal{M}$ con métricas Hermitianas. Sea $A \in x^{-m} \text{Dif}_b^m(\mathcal{M}; E, F)$ un operador elíptico, sea $\gamma \in \mathbb{R}$. Comenzando con el operador

$$A : C_c^\infty(\mathcal{M}; E) \subset x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; E) \rightarrow x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; F)$$

definimos \mathcal{D}_{\min} (o $\mathcal{D}_{\min}(A)$ si necesitamos especificar el operador) como el dominio de la clausura, y

$$\mathcal{D}_{\max} = \{u \in x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; E) : Au \in x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; F)\}$$

(o $\mathcal{D}_{\max}(A)$), con producto interno

$$(u, v)_A = (Au, Av)_{x^{-\gamma} L_b^2} + (u, v)_{x^{-\gamma} L_b^2}.$$

En contraste con el caso de b -operadores elípticos, no es necesariamente cierto que \mathcal{D}_{\min} y \mathcal{D}_{\max} coinciden. Por otro lado, no solo son operadores Fredholm para todo γ , sino además tienen paramétrices compactas.

Al contrario de la situación con operadores b -elípticos, el dominio mínimo y máximo de un operador cónico c -elíptico no necesariamente son iguales. Sin embargo, la diferencia entre ellos no es muy grande.

PROPOSICIÓN 1.2 (Lesch [45]). *Sea $A \in x^{-m} \text{Dif}_b^m(\mathcal{M}; E, F)$ un operador c -elíptico inicialmente visto como operador*

$$A : C_c^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{M}}; E) \subset x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; E) \rightarrow x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; F)$$

con $\gamma \in \mathbb{R}$ arbitrario y sean \mathcal{D}_{\min} y \mathcal{D}_{\max} sus dominios mínimo y máximo. Entonces $\mathcal{D}_{\max}/\mathcal{D}_{\min}$ tiene dimensión finita.

Continuando con el operador c -elíptico A , la siguiente proposición clarifica la naturaleza del dominio mínimo.

PROPOSICIÓN 1.3 (Gil y Mendoza [21], Prop. 3.6). *Si $A \in x^{-m} \text{Dif}_b^m(M; E)$ es c -elíptico, entonces*

- 1) $\mathcal{D}_{\min}(A) = \mathcal{D}_{\max}(A) \cap \left(\bigcap_{\varepsilon > 0} x^{-\gamma+m-\varepsilon} H_b^m(M; E) \right)$
- 2) $\mathcal{D}_{\min}(A) = x^{-\gamma} H_b^m(M; E)$ si y solo si $\text{spec}_b(A) \cap \{\Im\sigma = -\nu/2\} = \emptyset$.

Los elementos del dominio máximo son de la forma $v + \omega w$ con $v \in \mathcal{D}_{\min}$, $\omega \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\omega(x) = 1$ cerca de $x = 0$ y w de la forma

$$(1.4) \quad w = \sum_{\sigma_j \in \Sigma} \sum k = 0_{\sigma_j}^{K_j} \sum_{\ell=0}^{L_{\sigma_j}} x^{i\sigma_j+k} \log^\ell x a_{\sigma_j, k, \ell}$$

con Σ la parte $\text{spec}_b(x^m A)$ en la banda $\gamma - m < \Im\sigma < \gamma$:

$$\Sigma = \text{spec}_b(x^m A) \cap \{\sigma \in \mathbb{C} : \gamma - m < \Im\sigma < \gamma\}$$

con el requerimiento que

$$x^m A(\omega v) \in x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; F).$$

Los $a_{\sigma_j, k, \ell}$ son secciones de E , suaves, y K_j es el mayor entero tal que $\Im\sigma - K_j \geq \gamma - m$.

En muchos aspectos los operadores cónicos elípticos en variedades compacta se comportan como los operadores elípticos usuales en esas variedades. Los $a_{\sigma_j, k, \ell}$ son como los datos de Cauchy para un problema elíptico usual. Un problema de frontera para un operador c -elíptico es:

Dada $f \in x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; F)$, y una especificación de los coeficientes $a_{\sigma_j, k, \ell}$, encontrar $u \in x^{-\gamma} L_b^2(\mathcal{M}; E)$ tal que $Au = f$ con $u \equiv \omega w$ mód \mathcal{D}_{\min} con w dado por (1.4).

Otro aspecto interesante es la interacción de los cocientes

$$\mathcal{D}_{\min}(A^q)/\mathcal{D}_{\max}(A_q)$$

en un complejo c -elíptico

$$(1.5) \quad 0 \rightarrow C^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{M}}; E^0) \xrightarrow{A_0} C^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{M}}; E^1) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow C^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{M}}; E^{r-1}) \xrightarrow{A_{r-1}} C^\infty(\overset{\circ}{\mathcal{M}}; E^r) \rightarrow 0$$

de operadores de primer orden. Para el caso más general posible el lector interesado puede consultar Krainer y Mendoza [38].

2. Variedades cuneiformes

La idea de variedad cuneiforme es un espacio topológico $\tilde{\mathcal{M}}$ y un subconjunto cerrado $\mathcal{Y} \subset \tilde{\mathcal{M}}$ tales que $\tilde{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{Y}$ y \mathcal{Y} son ambas variedades suaves, obtenidos de una variedad de cantos (ver IX.3; incorporamos aquí la notación de esa sección) con frontera fibrada sobre \mathcal{Y} , colapsando cada una de las fibras de $\partial\mathcal{M}$ a un punto. Así, $\tilde{\mathcal{M}}$ es una variedad estratificada con un solo estrato singular (con componentes que pueden tener distintas dimensiones). En principio, el objeto primario es la variedad estratificada, pero el análisis ocurre en \mathcal{M} , que consideramos como la resolución de las singularidades de $\tilde{\mathcal{M}}$. Suponemos en lo que sigue que \mathcal{M} es compacta.

Los operadores diferenciales de orden \mathcal{M} adaptados a esta estructura serán, en analogía con la situación cónica, elementos de $x^{-m} \text{Dif}_e^m(\mathcal{M}; E, F)$. Como en la sección anterior, el factor x^{-m} cambie mucho el carácter de los operadores.

Obtenemos en este caso la estructura diferencial asociada comenzando con el espacio de 1-formas suaves de \mathcal{M} para las cuales

$$\iota_y^* \alpha = 0 \text{ para todo } y \in \mathcal{Y}$$

donde $\iota_y : \varphi^{-1}(y) \rightarrow \mathcal{Y}$ es la inclusión de la fibra de $\varphi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{Y}$ sobre $y \in \mathcal{Y}$ en \mathcal{N} (o en \mathcal{M}). Como en todos los casos que hemos discutido, este espacio de 1-formas, $C_w^\infty(T^*\mathcal{M})$, es isomorfo como $C^\infty(\mathcal{M})$ -módulo al espacio de secciones de un fibrado vectorial $w\pi : wT^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. El correspondiente homomorfismo es

$$w_{\text{ev}}^* : wT^*\mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}.$$

Este mapa es un isomorfismo en el interior de \mathcal{M} . Dando a \mathcal{M} esta estructura tenemos una estructura cuneiforme (“wedge”).

Usando coordenadas adaptadas para \mathcal{M} , $x, y_1, \dots, y_q, z_1, \dots, z_{n-q-1}$, cerca de un punto de \mathcal{N} , como en IX.3, un marco local de $wT^*\mathcal{M}$ es

$$dx, dy_1, \dots, dy_q, xdz_1, \dots, dz_{n-q-1}.$$

Usando esto y argumentando exactamente como en la sección anterior, vemos que si $A \in x^{-m} \text{Dif}_e^m(\mathcal{M}; E, F)$, entonces

$$wT^*\mathcal{M} \ni \xi \mapsto \sigma(A)(w_{\text{ev}}^{*-1}(\xi)) \in \text{Hom}(E_p, F_p), \quad p = w\pi(\xi) \in \mathring{\mathcal{M}}$$

tiene una extensión continua a una sección $w\sigma(A)$ de $w\pi^* \text{Hom}(E, F)$, que naturalmente llamamos el w -símbolo de A . La definición de elipticidad es clara.

El análisis de operadores cuneiformes elípticos es bastante más complicado que cualquiera de los otros casos que ya hemos visto, porque incluye problemas de frontera para operadores elípticos usuales (este es el caso en que cada punto

de \mathcal{N} es una fibra: $\mathcal{Y} = \mathcal{N}$, no hay coordenadas z . Es esto lo que los hace considerablemente más interesantes que todos los casos de las secciones y capítulos anteriores.

Que el análisis operadores cuneiformes incluyen el caso de operadores elípticos regulares es fácil de ver. Digamos que en ciertas coordenadas cerca de un punto de la frontera de \mathcal{M} el operador es

$$A = \sum_{k+|\alpha|=m} a_{k,\alpha}(x, y) D_x^k D_y^\alpha.$$

Multiplicamos y dividimos por x^m . Tenemos

$$(2.1) \quad P = x^m A = \sum_{k+|\alpha|=m} a_{k,\alpha}(x, y) x^{m-k-|\alpha|} (x D_x)^k (x D_y)^\alpha.$$

con otros coeficientes $a_{k,\alpha}(x, y)$ usando

$$x^\ell D_x u = x D_x (x^{\ell-1} u) + i(\ell-1) x^{\ell-1} u$$

repetidas veces para obtener, si $\ell \geq k$,

$$x^\ell D_x^k = (x D_x - i(\ell-1))(x D_x - i(\ell-2)) \dots (x D_x - i(\ell-k+1)) x^{\ell-k},$$

ver también IV.4.4. Es fácil ver que la elipticidad usual en el caso de A se transfiere a la w -elipticidad de $x^{-m} P (= A)$.

Pero además de incluir problemas de frontera en la teoría elíptica clásica de operadores diferenciales, el concepto de valores de frontera es complicado. Esto es porque en general, el la familia indicial de $x^m A$ depende de $y \in \mathcal{M}$, y por lo tanto el espectro de frontera también depende de y . El efecto de esta dependencia es que para cada y , la estructura de los elementos que en el caso cónico es (1.4), depende de y .

Una observación interesante es que la estructura del espectro de frontera de un operador diferencial elíptico de orden m en el sentido usual es común a todos los operadores de esa clase ($\{-ik : k = 0, 1, \dots, m-1\}$ si el orden del operador es m). Esto deja de ser así en el caso general de operadores cuneiformes w -elípticos: para ellos, el espectro de frontera pasa a ser una propiedad del operador.

Entre los avances recientes en la teoría, los dos frentes más activos han sido promovidos por Mazzeo y colaboradores, y por Krainer y Mendoza.

En ciertos casos, el primer grupo ha usado como hipótesis básica que el espectro de frontera es (localmente) independiente del punto base (ver Mazzeo y Vertman, [50] o Vertman [77]). Esto es una suposición más fuerte de los que las palabras indican, porque también hay una suposición sobre la constancia de la estructura de cada una de las singularidades (la presencia de logaritmos en la fórmula (1.4), que en el fondo es cambios en la estructura de Jordan de una matriz). Otras hipótesis que remueven el problema conciernen situaciones en donde el operador puede ser deformado sin cambiar la naturaleza del problema.

Esto es típicamente posible cuando el propósito de la investigación es alguna consecuencia topológica en donde los operadores son laplacianos de Hodge respecto a alguna métrica pero la métrica específica, aparte de estar adaptada al problema, no es importante; este es por ejemplo el caso de los artículos de Albin, Leichtnam, Mazzeo, y Piazza [3, 4] y de estos autores y Banagl [5]. Estos últimos artículos conciernen variedades estratificadas más complicadas que las discutidas aquí.

En el artículo de Krainer y Mendoza [37] (para una versión más ligera, ver [36]) no hay suposiciones sobre el comportamiento del espectro de frontera aparte de pedir que no cruce ciertas líneas $\{\sigma \in \mathbb{C} : \Im\sigma = \gamma, \gamma - 1\}$. Los operadores son de primer orden. Con esta suposición, la parte del espectro de frontera que importa determina un fibrado vectorial sobre \mathcal{Y} , que en cierto sentido se comporta como si fuera la frontera en cuanto a que las condiciones de borde se especifican a lo largo de \mathcal{Y} . Los detalles de esto están en [35].

En general, la resolución de problemas de frontera en variedades estratificadas (con desingularización estas resultan ser variedades con esquinas) no está resuelto, y hay mucho por hacer.

Finalmente, el lector interesado debe consultar la literatura de Schulze y sus colaboradores, por ejemplo [65, 66, 67, 68, 71]. Las técnicas en estos artículos son mucho más analíticas que geométricas, y los resultados distintos aunque puedan parecer similares. Pero una juiciosa combinación de análisis y geometría probablemente sea de mucha ayuda.

Bibliografía

- [1] M. Abramowitz y I. Stegun, eds., Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs and Tables, Applied Mathematics Series 55, National Bureau of Standards, Washington, DC, 1964. <http://dlmf.nist.gov/5.12>
- [2] Adams, R. A., Fournier, J. J. F., *Sobolev spaces* Second edition. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), **140**. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [3] Albin, P., Leichtnam, E., Mazzeo, R., Piazza, P., *The signature package on Witt spaces* Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **45** (2012), no. 2, 241–310.
- [4] Albin, P., Leichtnam, E., Mazzeo, R., Piazza, P., *Hodge theory on Cheeger spaces, a aparecer en J. Reine Angew. Math.* [arXiv 1307.5473](https://arxiv.org/abs/1307.5473).
- [5] Albin, P., Banagl, M., Leichtnam, E., Mazzeo, R., Piazza, P., *Refined intersection homology on non-Witt spaces* J. Topol. Anal. **7** (2015), no. 1, 105–133.
- [6] Atiyah, M. F., Bott, R., *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I.*, Ann. of Math. **86** (1967), 374–407.
- [7] Bei, F., *The L^2 -Atiyah-Bott-Lefschetz theorem on manifolds with conical singularities: a heat kernel approach*, Ann. Global Anal. Geom. **44** (2013), no. 4, 565–605.
- [8] Besenyei, Á., *Peano’s unnoticed proof of Borel’s theorem*, Amer. Math. Monthly **121** (2014), no. 1, 69–72.
- [9] Borel, É., *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Ann. Sci. l’École Norm. Sup. (3) **12** (1895), 9–55. http://archive.numdam.org/article/ASENS_1895_3_12_9_0.pdf
- [10] J. Brüning y M. Lesch, *Hilbert complexes*, J. Funct. Anal. **108** (1992), no. 1, 88–132.
- [11] Cairns, S. S., *Triangulation of the manifold of class one*, Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), no. 8, 549–552.
- [12] Carleman, T., *Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes*, Skand. Mat.-Kongr., (1935) 34–44. **Zbl 0012.07001**.
- [13] Chazarain, J., Piriou, A. *Introduction to the theory of linear partial differential equations*. Studies in Mathematics and its Applications, 14. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1982.
- [14] J. Cheeger, *On the spectral geometry of spaces with cone-like singularities*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **76** (1979), 2103–2106.
- [15] J. Cheeger, *Spectral geometry of singular Riemannian spaces*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 4, 575–657.
- [16] Folland, G. B., *Real analysis. Modern techniques and their applications*, 2nd ed. Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts. New York, NY (1999).
- [17] Frobenius, G., *Ueber das Pfaffsche Problem*, J. Reine Angew. Math. **82** (1877), 230–315. <http://eudml.org/doc/148315>
- [18] Genocchi, A., con anotaciones de G. Peano, *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale*, Fratelli Bocca, Roma, 1884. <https://ia802205.us.archive.org/9/items/calculodifferen00peangoog/calculodifferen00peangoog.pdf>

- [19] Gilkey, P., *Invariance Theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*, Publish or Perish Press, 1985. <http://www.emis.de/monographs/gilkey/index.html>
- [20] Gil, J. B., Krainer, T., y Mendoza, G. A., *Geometry and spectra of closed extensions of elliptic cone operators*, *Canad. J. Math.* **59** (2007), no. 4, 742–794. [arXiv:math/0410178](https://arxiv.org/abs/math/0410178).
- [21] Gil, J. B. y Mendoza, G. A., *Adjoint of elliptic cone operators*, *Amer. J. Math.* **125** (2003), 357–408. [arXiv:math/0108095](https://arxiv.org/abs/math/0108095).
- [22] Guillemin, V., Sternberg, S., *Geometric asymptotics*, *Math. Surveys*, **14**, Amer. Math. Soc, Providence, R.I., 1977.
- [23] Hadamard, J., *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, Yale University Press, New Haven, 1923. <https://ia601400.us.archive.org/20/items/lecturesoncauchy00hadauoft/lecturesoncauchy00hadauoft.pdf>
- [24] Hatcher, A., *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. <https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>
- [25] Helgason, S., *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics, 80. Academic Press, Inc., New York-London, 1978.
- [26] Hilbert, D., *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig, 1912. <https://ia601402.us.archive.org/7/items/grundzugeallg00hilbrich/grundzugeallg00hilbrich.pdf>
- [27] Hill, C. D., Taylor, M., *Integrability of rough almost complex structures*, *J. Geom. Anal.* **13** (2003), no. 1, 163–172.
- [28] Hodge, W. V. D. *The theory and applications of harmonic integrals*, 2d ed. Cambridge University Press, 1952.
- [29] Hörmander, L., *Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems*, *Ann. Math.* **83** (1966), 129–209.
- [30] Hörmander, L., *Linear partial differential operators* Third revised printing. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 116 Springer-Verlag New York Inc., New York 1969.
- [31] Husemoller, D., *Fibre Bundles*, Third Edition, Graduate Texts in Mathematics **20**. Springer-Verlag New York, 1994.
- [32] Ikehara, S., *An extension of Landau's theorem in the analytic theory of numbers*, *J. Math. and Phys. M.I.T.* (2) **10** (1931), 1–12.
- [33] Kirsten, K., *Spectral functions in mathematics and physics*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002. [arXiv:hep-th/0007251v1](https://arxiv.org/abs/hep-th/0007251v1)
- [34] Kohn, J. J., Nirenberg, L., *An algebra of pseudo-differential operators*, *Comm. Pure Appl. Math.* **18** (1965) 269–305.
- [35] Krainer, T. y Mendoza, G. A., *The kernel bundle of a holomorphic Fredholm family*, *Comm. Partial Differential Equations* **38** (2013), 2107–2125. [arXiv:1301.5811](https://arxiv.org/abs/1301.5811)
- [36] Krainer, T. y Mendoza, G. A., *Boundary value problems for elliptic wedge operators: the first order case*. In: J. Escher, E. Schrohe, J. Seiler, and C. Walker (Eds.), *Elliptic and Parabolic Equations*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, bf 119 (2015), 209–232.
- [37] Krainer, T. y Mendoza, G. A., *Boundary value problems for first order elliptic wedge operators*, *Amer. J. Math.*, **138**, no. 3 (2016), 585–656. [arXiv:1403.6894](https://arxiv.org/abs/1403.6894)
- [38] Krainer, T. y Mendoza, G. A., *Elliptic complexes of first-order cone operators: ideal boundary conditions*, sometido a consideración editorial. [arXiv:1611.06526](https://arxiv.org/abs/1611.06526)
- [39] Kordyukov, Yu. A., *L^p -theory of elliptic differential operators on manifolds of bounded geometry*, *Acta Appl. Math.* **23** (1991), 223–260.
- [40] Kotake, T., *The fixed point theorem of Atiyah-Bott via parabolic operators*, *Comm. Pure Appl. Math.* **22** (1969), 789–806.
- [41] Kondrachov, V. I. *Certain properties of functions in the spaces L^p* , *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* **48**, (1945) 535–538.

- [42] Lax, P. D., Phillips, R., *Scattering theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **70**, no. 1 (1964), 130–142. <https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183525789>
- [43] Lax, P. D., Phillips, R., *Scattering theory*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 26 Academic Press, New York-London 1967.
- [44] Lefschetz, S., *Intersections and transformations of complexes and manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926), no. 1, 1–49.
- [45] M. Lesch, *Operators of Fuchs type, conical singularities, and asymptotic methods*, Teubner-Texte zur Math. vol 136, B.G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1997. [arXiv:dg-ga/9607005](https://arxiv.org/abs/dg-ga/9607005)
- [46] Levi, E.E., *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940) December 1907, Volume 24, Issue 1, 275–317.
- [47] Mazzeo, R., *Elliptic theory of differential edge operators I*, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), 1615–1664.
- [48] Mazzeo, R., <http://math.stanford.edu/~mazzeo/Web/Talks/asit3.pdf>
- [49] Mazzeo, R., Vertman, B., *Analytic torsion on manifolds with edges* Adv. Math. **231** (2012), no. 2, 1000–1040.
- [50] Mazzeo, R., Vertman, B., *Elliptic theory of differential edge operators, II: Boundary value problems* Indiana Univ. Math. J. **63** (2014), no. 6, 1911–1955.
- [51] Melrose, R. B., *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem*, Research Notes in Mathematics, 4. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1993. <http://www-math.mit.edu/~rbm/book.html>
- [52] Melrose, R. B., *Geometric scattering theory*, Stanford Lectures. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. <http://www-math.mit.edu/~rbm/lecstn.ps>
- [53] Melrose, R. B., y Mendoza, G. A., *Elliptic pseudodifferential operators of totally characteristic type*. MSRI preprint 1984. <https://math.temple.edu/~gmendoza/psPapers/b-elliptic-1983.pdf>
- [54] Minakshisundaram, S., Pleijel, Å, *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds*, Canadian J. Math. **1** (1949) 242–256.
- [55] Moise, E. E., *Affine Structures in 3-Manifolds: V. The Triangulation Theorem and Hauptvermutung*, Ann. Math. **56**, (1952) 96–114.
- [56] Neri, U., *Singular integrals*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 200. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [57] Newlander, A., Nirenberg, L., *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. Math. **65**, (1957) 391–404.
- [58] Nirenberg, L., *Pseudo-differential operators*, en *Global Analysis*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVI, Berkeley, Calif., 1968, pp. 149–167 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
- [59] Nirenberg, L., *Lectures on linear partial differential equations*. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 17. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973.
- [60] Plancherel, M., *Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies*, Rend. Circ. Matem. Palermo (1910).
- [61] Radó, T., *Über den Begriff der Riemannschen Fläche*, Acta Szeged **2**, (1925) 101-121. <http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/rado.pdf>
- [62] Rellich, F., *Ein Satz über mittlere Konvergenz*, Nachrichten Göttingen (1930), 30–35.
- [63] de Rham, G., *Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions*, Thèse. Journ. de Math. (9) **10**, (1931) 115–200.
- [64] Rudin, W., *Functional analysis*, Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.
- [65] B.-W. Schulze, *Pseudo-differential Operators on Manifolds with Singularities*, North Holland, Amsterdam, 1991.

- [66] B.-W. Schulze, *Boundary Value Problems and Singular Pseudo-Differential Operators*, Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley, Chichester, 1998.
- [67] B.-W. Schulze, *An algebra of boundary value problems not requiring Shapiro-Lopatinskiĭ conditions*, J. Funct. Anal. **179** (2001), 374–408.
- [68] B.-W. Schulze and J. Seiler, *Edge operators with conditions of Toeplitz type*, J. Inst. Math. Jussieu **5** (2006), 101–123.
- [69] Seeley, R. T., *Singular integrals on compact manifolds*, Amer. J. Math. **81** (1959) 658–690.
- [70] Seeley, R. T., *Complex powers of an elliptic operator*. En: *Singular Integrals*, Proc. Sympos. Pure Math. **X**, AMS, Providence, R.I., 1967, 288–307.
- [71] J. Seiler, *Pseudodifferential Calculus on Manifolds with Non-Compact Edges*, PhD Thesis, University of Potsdam, Germany, 1997.
- [72] M. A. Shubin, *Spectral theory of elliptic operators on noncompact manifolds*, in Méthodes semi-classiques, Vol. 1 (Nantes, 1991). Astérisque **207** (1992), 5, 35–108. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.27.4473>
- [73] <https://math.stackexchange.com/questions/63050/every-power-series-is-the-taylor-series-of-some-c-infty-function>
- [74] Swan, R., *Vector bundles and projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **105** (1962) 264–277.
- [75] Trèves, F., *Basic Linear Partial Differential Equations*, Pure and Applied Mathematics, **62**, Academic Press, New York-London, 1975. (También Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006.)
- [76] Treves, F., *Hypo-analytic Structures. Local theory*, Princeton Mathematical Series, **40**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.
- [77] Vertman, B., *Heat-trace asymptotics for edge Laplacians with algebraic boundary conditions*, J. Anal. Math. **125** (2015), 285–318.
- [78] Vick, J. W., *Homology Theory, An introduction to algebraic topology*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 145. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [79] Warner, F., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Vol 94, Springer Verlag, 1983.
- [80] Webster, S. M., *A new proof of the Newlander-Nirenberg theorem*, Math. Z. **201** (1989), no. 3, 303–316.
- [81] Whitehead, J. H. C., *On C^1 -complexes*, Ann. Math. **41**, (1940) 809–824.
- [82] Whitney, H., *Differentiable manifolds in euclidean space*, Proc. Nat. Ac. of Sci., **21** (1935), 462–463.
- [83] Whitney, H., *Differentiable manifolds*, Ann. of Math. **37** (1936), no. 3, 645–680.
- [84] Wiener, N., *Tauberian Theorems*, Ann. Math. **22**, (1932) 1–100.

Índice alfabético

- C^k , 37
- C_c^k , 37
- D_{x_j} , 37
- $H^k(\Omega)$, 56
- $H^k(\mathbb{R}^n)$, 57
- $H_0^k(\Omega)$, 57
- H_b^m , 194
- $S_{1,0}^\mu(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, 47
- Dif, 37
- Λ^2 , 63
- bT , 191
- ${}^cT^*$, 213
- cT , 202
- sT , 209
- spec_b , 196
- sop, 37
- σ , 38
- ${}^wT^*$, 216
- ζ , 167

- APS
 - Condición de, 4
- Atiyah-Bott
 - obstrucción a la condición de Lopatinski-Shapiro, 109
- Atiyah-Bott-Lefschetz
 - Fórmula de, 129
- Atiyah-Patodi-Singer
 - Condición de, 4
- Atiyah-Singer
 - formulación del teorema, 164
 - Teorema del índice, 153

- b -elíptico, 193
- b -Sobolev
 - espacio de, 194
 - norma, 194

- Calderón
 - proyector de, 104
- Cantos
 - variedad con, 201
- Complejo
 - de de Rham, 26
 - de Dolbeault, 30
 - de operadores diferenciales, 111
 - elíptico, 112
 - simplicial, 130
- Complejo de Hilbert, 117
- Condiciones de frontera, 1
 - locales, 2
 - mixtas, 5
- Condición de
 - Atiyah-Patodi-Singer, 4
 - Dirichlet, 1
 - Lopatinski-Shapiro, 108
 - Neumann, 1
 - Robin, 2
- Cuneiforme
 - variedad, 216
- Cónica
 - variedad, 211

- Datos de Cauchy, 4
- de Rham
 - complejo de, 26
 - derivada débil, 57
- Dirichlet
 - Condición de, 1
- Dispersión
 - variedad de, 206
- Dolbeault
 - complejo de, 30

- elíptico

- b , 193
- c , 214
- e , 203
- w , 216
- complejo, 112
- operador, 38
- Espacio de b -Sobolev, 194
- Espacio de Sobolev, 56
- Espectro
 - de frontera, 196
- Estructura elíptica, 115
- estructura-casi compleja, 28
- Extremos cilíndricos, 189
- Familia indicial, 195
- Fredholm, 81
- Función ζ , 167
- Fórmula de Atiyah-Bott-Lefschetz, 129
- Hodge
 - Teoría de, 111
- Homología, 129
 - simplicial, 131
 - singular, 132
- Índice
 - Multi-, 37
 - Teorema del, 153
- Indicial
 - familia, 195
- Introducción, 1
- Involutivo
 - subfibrado, 29
- Isomorfismo
 - de fibrados vectoriales, 35
- Lefschetz
 - fórmula de Atiyah-Bott, 137
 - número de, 129
- Localmente finita
 - partición de la unidad, 75
- Lopatinski-Shapiro
 - condición de, 108
- Morfismo de fibrados vectoriales, 35
- Multi-índice, 37
 - Longitud de, 37
- Mínimo
 - rayo de crecimiento, 169
- Neumann
 - Condición de, 1
- Número de Lefschetz, 129
- Operador diferencial
 - elíptico, 38
 - escalar, 37
 - Parametriz de, 39
 - sistema, 37
- Operador Fredholm, 81
- Operador pseudodiferencial
 - clásico, 52
 - Definición, 47
 - elíptico, 52
- Operadores pseudodiferenciales, 37, 46
- Parametricas, 39
- Partición de la unidad, 75
- Problemas de valores de frontera, 85
- Proyector de Calderón, 104
- pseudodiferencial
 - clásico, 52
 - elíptico, 52
 - operador, 47
 - símbolo principal, 52
- Rayo de crecimiento mínimo, 169
- Robin
 - Condición de, 2
- Simplicial
 - homología, 131
- Singularidades
 - variedad con, 211
- Soporte, 37
- subfibrado involutivo, 29
- Símbolo de tipo $(1, 0)$, 47
- Símbolo principal, 38
- Teorema
 - de Newlander-Nirenberg, 29
 - del Índice, 153
- Teoría de Hodge, 111
- tipo
 - Símbolo de, 47
- Transformada de Mellin
 - en \mathbb{R}_+ , 90
 - en variedad con borde, 98
- Triangulación, 129
- Variedad
 - compleja, 27
 - con borde, 18
 - con cantos, 201
 - con extremos cilíndricos, 189
 - con singularidades, 211

- cuneiforme, 216
- cónica, 211
- de clase C^∞ , 16
- de dispersión, 206
- no compacta, 189
- suave, 16
- topológica, 16

Variedades, 15

Vecindad tubular, 98

Asociación Matemática Venezolana

Presidente: Pedro Berrizbeitia

Consejo Directivo Nacional

Pedro Berrizbeitia
Capítulo Capital

Alexander Carrasco
Capítulo de Centro Occidente

Oswaldo Araujo
Capítulo de Los Andes

Said Kas-Danouche
Capítulo de Oriente

Oswaldo Larreal
Capítulo Zuliano

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela.

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
Consejo Directivo

Director

Eloy Sira

Subdirector

Alexander Briceño

**Representantes del Ministerio del Poder Popular para la
Educación Universitaria, Ciencia y Tecnología**

Guillermo Barreto

Luther Rodríguez

José Vicente Montoya

Gerencia General

Alejandro Rivas

Comisión Editorial

Eloy Sira (**Coordinador**)

Horacio Bior

Jesús Eloy Conde

María Teresa Curcio G.

Rafael Gassón

Pamela Navarro

Héctor Suárez

Erika Wagner

