XXIX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA–VENEZUELA 2016

PROPIEDADES ESPECTRALES Y TEOREMAS DE PERTURBACIÓN

Carlos Carpintero
Margot Salas-Brown

MÉRIDA, VENEZUELA, 04 al 09 de septiembre de 2016

XXIX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA–VENEZUELA 2016

Propiedades Espectrales y Teoremas de Perturbación

Carlos Carpintero y Margot Salas-Brown

Universidad de Oriente, Cumaná, Venezuela

ccarpintero@udo.edu.ve
msalas@sucre.udo.edu.ve

MÉRIDA, 4 AL 9 DE SEPTIEMBRE DE 2016

XXIX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana. La XXIX Escuela Venezolana de Matemáticas recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, CODEPRE, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), la Asociación Matemática Venezolana, la Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) y Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA).

2010 Mathematics Subject Classification: 47A20, 47A53, 47A55

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
Rif: G-20004206-0

Propiedades Espectrales y Teoremas de Perturbación
Carlos Carpintero y Margot Salas-Brown

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas.
Depósito legal DC2016000282
ISBN 978-980-261-168-3
Caracas, Venezuela

2016

A la Universidad de Oriente, la casa más alta, la casa que vierte su Orinoco de luz torrencial,

Índice general

Prólogo

En este libro se recogen algunos resultados de las investigaciones que los autores han venido desarrollando, junto a otros investigadores, durante estos últimos cuatro años en las áreas de teoría de operadores, teoría espectral y teoría de perturbación, las cuales han conducido a varios artículos de investigación con inéditos resultados publicados en prestigiosas revistas internacionales, así como también a un buen número de tesis de pregrado y postgrado.

El libro consta de dos partes, la primera parte trata del estudio de propiedades espectrales tipo Teoremas de Browder-Weyl y la segunda parte versa sobre Teoremas de Perturbación. En la primera parte, se describen o caracterizan Teoremas tipo Browder-Weyl a través de restricciones (resp. extensiones) para un operador lineal acotado. Los principales objetivos de esta parte del curso, serán exponer en forma detallada resultados recientes relativos a propiedades tipo Teoremas de Browder-Weyl y restricciones (resp. extensiones) de un operador, así como proporcionar herramientas fundamentales que permitan introducirse rápidamente en los temas a objeto de estudio, y además servir de motivación para el planteamiento de nuevas situaciones que pueden continuarse abordando con miras a futuras investigaciones. Esta parte consta de tres capítulos, en el primer capítulo se presentan de forma somera los preliminares estrictamente requeridos para el desarrollo del curso. En el segundo capítulo, se estudian relaciones entre la teoría de Fredholm de un operador y la de sus restricciones (resp. extensiones) y en el tercer capítulo se presentan los resultados principales relativos a las propiedades tipo Teoremas Browder-Weyl para un operador y sus restricciones (resp. extensiones). La presentación de esta parte del libro, se basa esencialmente en las referencias [28], [29], [30] y [31], que versan sobre investigaciones recientes desarrolladas por los autores en el área de teoría de operadores y teoría espectral local.

En la segunda parte del libro, se describen las principales soluciones positivas y contraejemplos parciales al problema de la clase de perturbación para los operadores semi-Fredholm y Fredholm, se precisan de forma detallada algunas soluciones al problema obtenidas por los autores recientemente, y se señalan algunos problemas relacionados con éstos tópicos que aún permanecen abiertos. La segunda parte del libro también consta de tres capítulos, en el capítulo cuatro se dan las nociones básicas sobres bases de Schauder y operadores asociados al problema de la clase de perturbación. En el quinto capítulo, se exhiben propiedades geométricas de los espacios L_p y se resuelve positivamente el problema de la clase de perturbación para este tipo de espacio y en el sexto y último capítulo, se resuelve positivamente el problema de la clase de perturbación para tipos de espacios más generales, a saber, los espacios fuertemente subproyectivos y fuertemente superproyectivos. La presentación de esta parte del libro, se basa fundamentalmente en las referencias [45], [46] y [47].

Muchos de los resultados presentados en este libro, han contado con la valiosa colaboración de los miembros del Grupo de Análisis y Topología de la Universidad de Oriente, es por ello que los autores quieren expresar su profundo agradecimiento a los colegas Ennis Rosas, Pietro Aiena, Manuel González, José Sanabria, Julio Ramos y Orlando García. También queremos agradecer a los miembros del comité científico y organizador de la XXIX Escuela Venezolana de Matemáticas, en particular a la Profesora Stella Brassesco, por la invitación a escribir estas notas.

Carlos Carpintero y Margot Salas
Cumaná, Mayo 2016

Parte I: Propiedades Espectrales

Con el fin de dar una visión global de la orientación y propósito de los tópicos tratados en esta parte del libro, se comenzará realizando una breve reseña histórica de los aspectos que motivaron el desarrollo de los mismos.

En 1909 Hermann Weyl [92], estudió los espectros de todas las perturbaciones compactas para un operador hermitiano T, y encontró que un punto espectral está en el espectro de cualquier perturbación compacta $T + K$ del operador T, precisamente cuando dicho punto no es un punto aislado de multiplicidad finita del espectro de T. Este resultado clásico, fue posteriormente investigado en forma general y formulado de manera abstracta por Lewis Coburn en el año 1981 [33], y es conocido actualmente en la literatura como el Teorema de Weyl. Posteriormente a Coburn, Vladimir Rakočević introduce en el año 1989 una versión más fuerte que el Teorema de Weyl y la denomina Teorema de a-Weyl [79]. En esta misma dirección, Mohamed Berkani y Jerry Koliha a mediados del año 2003 introducen, empleando los espectros derivados de la recién aparecida Teoría de los operadores B-Fredholm [22], versiones generalizadas de estas propiedades ([18] y [20]), conocidas en la literatura como los Teoremas generalizados de Weyl y a-Weyl, respectivamente. Los trabajos de estos pioneros constituyeron una fuente de inspiración para que hoy en día muchos matemáticos se hayan dedicado a introducir, estudiar, caracterizar y buscar aplicaciones para una vasta gama de propiedades asociadas con un operador lineal acotado T, que actúa de un espacio de Banach complejo en sí mismo; formuladas bien sea en términos de los espectros derivados de la clásica Teoría de los operadores de Fredholm o bien en términos de los espectros derivados de la Teoría de los operadores B-Fredholm. Es así como han aparecido nuevas propiedades en el estilo de los Teoremas de Weyl, tales como: Teorema de Browder [51], Teorema de a-Browder [80], propiedades (ab) y (aw) [23], propiedad (b), Teorema generalizado de Browder ([23] y [24]), propiedad (w) [79], propiedades (v) y (h) ([82] y [89]), y las propiedades (z) y (az) [89], entre otras. En general, dada una restricción (resp. extensión) de un operador, casi nada puede decirse de la relación entre las propiedades antes mencionadas para el operador y su restricción (resp. extensión). Uno de los primeros en investigar la relación entre la Teoría de Fredholm de un operador y la de sus extensiones fue Bruce Barnes [16], [17]. Pietro Aiena [10], también aborda el estudio de la heredabilidad del Teorema de Weyl para extensiones de un operador. Siguiendo esta dirección, Carpintero et al. [28], [29], [30] y [31], en estos últimos años, se han dedicado a estudiar y encontrar caracterizaciones para propiedades espectrales tipo Teoremas de Browder-Weyl, a través de restricciones y extensiones de un operador, obteniendo algunos resultados interesantes los cuales se presentan aquí. Los principales objetivos de esta parte del curso serán, exponer en forma detallada resultados recientes relativos a propiedades espectrales tipo Teoremas de Browder-Weyl y proporcionar al participante herramientas fundamentales que le permitan introducirse en los temas a objeto de estudio lo más rápido posible, y plantearle además ciertas situaciones que pueden continuarse abordando con miras a futuras investigaciones.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se describen en forma general los elementos básicos estrictamente necesarios para el desarrollo de este curso, se presentan además algunos hechos relevantes relativos a las distintas relaciones existentes entre estos, los cuales serán empleados a lo largo de los capítulos venideros. En su debida oportunidad, se dan ciertas citas respecto a las referencias bibliográficas en donde se puede ahondar en mayores detalles sobre las nociones y resultados aquí tratados.

1.1. Deficiencias y cadenas de un operador

En ésta sección se introducen ciertos parámetros básicos en la teoría de operadores asociados con un operador lineal y se estudian algunas relaciones entre éstos.

Sean X e Y espacios de Banach. Se denota por $\mathcal{L}(X,Y)$ el espacio vectorial de todos los operadores lineales y acotados $T : X \to Y$. En particular, cuando $X = Y$, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$ denota el álgebra de todos los operadores lineales y acotados que actúan de X en sí mismo. $\mathcal{K}(X,Y)$ denota el subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X,Y)$ formado por los operadores compactos. Asociados a un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ se consideran los siguientes subespacios lineales:

$$N(T) = \{x \in X : T(x) = 0\} \subset X$$

que es el *núcleo* de T, y

$$R(T) = \{y \in Y : y = T(x) \text{ para algún } x \in X\} \subset Y$$

que es el rango de T.

Es conocido (ver [68, Teorema 1.7.14]) que si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $R(T)$ es cerrado en Y entonces $X/N(T)$ es isomorfo a $R(T)$. Para un subespacio cerrado M de X, X/M denota el espacio cociente el cual se define por:

$$X/M = \{x + M : x \in X\}$$

donde $x + M = \{x + m : m \in M\}$. La dimensión del espacio cociente X/M se denomina *codimensión* de M y se denota por *codim*(M). Para $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, se denotará por $\alpha(T) = \dim N(T)$, la *nulidad* de T y por $\beta(T) = \operatorname{codim} R(T) = \dim Y/R(T)$, el *defecto* de T. Las cantidades $\alpha(T)$ y $\beta(T)$ se denominan las *deficiencias* del operador T, y se distinguirán por $\Delta_\alpha(X,Y) = \{T \in \mathcal{L}(X,Y) : \alpha(T) < \infty\}$ y por $\Delta_\beta(X,Y) = \{T \in \mathcal{L}(X,Y) : \beta(T) < \infty\}$. El *índice* de un operador $T \in \Delta_\alpha(X,Y) \cup \Delta_\beta(X,Y)$, denotado por ind T, se define como

$$\text{ind } T = \begin{cases} \alpha(T) - \beta(T) & \text{, si } \alpha(T) < \infty \text{ y } \beta(T) < \infty \\ \infty & \text{, si } \alpha(T) < \infty \\ -\infty & \text{, si } \beta(T) < \infty \end{cases}$$

El siguiente resultado, conocido como el *Teorema del índice*, recoge una importante propiedad del índice.

Teorema 1.1.1. *Sean* $T, S \in \Delta_\alpha(X,X) \cup \Delta_\beta(X,X)$. *Entonces,*

$$\textit{ind } (TS) = \textit{ind } T + \textit{ind } S.$$

Demostración. Ver [52, Proposición 23.1].

□

$N(T)$ y $R(T)$ son subespacios T-invariantes de X, cualquiera sea el operador $T \in \mathcal{L}(X)$. Más generalmente, también lo son $N(T^n)$ y $R(T^n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe que las potencias T^n, con $n \in \mathbb{N}$, determinan las siguientes sucesiones o cadenas de subespacios de X, denominadas respectivamente, *cadena nula* y *cadena imagen* de T

$$\{0\} = N(T^0) = N(I) \subseteq N(T) \subseteq ... \subseteq N(T^n) \subseteq N(T^{n+1}) \subseteq ...$$

$$X = R(T^0) = R(I) \supseteq R(T) \supseteq ... \supseteq R(T^n) \supseteq R(T^{n+1}) \supseteq ...;$$

con I el operador identidad del álgebra $\mathcal{L}(X)$. A partir de estas cadenas, se definen otros dos parámetros clásicos en la teoría de operadores. Estos son: el *ascent* de T, denotado por $p(T)$, definido como el más pequeño de los enteros no negativos con la propiedad $N(T^p) = N(T^{p+1})$ (si tal entero no existe, se denota $p(T) = \infty$), y el *descent* de T, denotado por $q(T)$, definido como el más pequeño de los enteros no negativos con la propiedad $R(T^q) = R(T^{q+1})$ (si tal entero no existe, se denota $q(T) = \infty$).

Seguidamente se dan algunos resultados relativos a ciertas relaciones entre los parámetros antes descritos, que serán de mucha utilidad en lo sucesivo.

Lema 1.1.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Entonces, para cualquier número entero no negativo m, se tienen:*

(i) $p(T) \leq m < \infty$ *si y sólo si* $R(T^m) \cap N(T^n) = \{0\}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $q(T) \leq m < \infty$ *si y sólo si, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existe un subespacio* Y_n *de* X *tal que* $Y_n \subseteq N(T^m)$ *y* $X = Y_n \oplus R(T^n)$.

Demostración. Ver [52, Proposición 38.1] y [52, Proposición 38.2]. ☐

Lema 1.1.2. *Para cualquier $T \in \mathcal{L}(X)$. Si $p(T)$ y $q(T)$ son finitos, entonces $p(T) = q(T)$.*

Demostración. Ver [52, Proposición 38.3]. ☐

Lema 1.1.3. *Para cualquier $T \in \mathcal{L}(X)$:*

(i) *Si* $p(T) < \infty$ *entonces* $\alpha(T) \leq \beta(T)$;

(ii) *Si* $q(T) < \infty$ *entonces* $\beta(T) \leq \alpha(T)$;

(iii) *Si* $p(T) = q(T) < \infty$ *entonces* $\alpha(T) = \beta(T)$;

(iv) *Si* $\alpha(T) = \beta(T) < \infty$ *y* $p(T) < \infty$, *o* $q(T) < \infty$, *entonces* $p(T) = q(T)$.

Demostración. Ver [52, Proposición 38.5] y [52, Proposición 38.6]. □

Con el fin de fijar ideas respecto a los distintos elementos antes descritos, finaliza esta sección con un sencillo, pero ilustrativo ejemplo. Se invita al lector a verificarlo en detalle.

Ejemplo 1.1.1. (1) Sea $X = \ell^2(\mathbb{Z}^+)$, el espacio de todas las sucesiones de números complejos $x = (x_n)$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^2 < \infty$.

(i) Para $Tx = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$, con $x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}^+)$, se tiene $\alpha(T) = 0$, $\beta(T) = 1$, $p(T) = 0$ y $q(T) = \infty$.

(ii) Para $Tx = (x_2, x_3, x_4, ...)$, con $x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}^+)$, se tiene $\alpha(T) = 1$, $\beta(T) = 1$, $p(T) = \infty$ y $q(T) = \infty$.

(2) Sea $X = C([0, 1])$, el espacio de todas las funciones continuas $x : [0, 1] \to \mathbb{C}$ y considere el operador $T : X \to X$ dado por

$$(Tx)(s) = \int_0^s x(u)du, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (x \in C([0, 1])).$$

Entonces $\alpha(T) = 0$, $p(T) = 0$, $q(T) = \infty$ y $\beta(T) = \infty$.

1.2. Operadores semi-Fredholm

En esta sección se introducen de manera sucinta los operadores semi-Fredholm, algunas de sus subclases y los distintos tipos de espectros que se derivan de cada una de estas clases de operadores.

Sean X e Y espacios de Banach. Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se dice que es *Fredholm* (resp. *semi-Fredholm superior*, *semi-Fredholm inferior*), si $\alpha(T)$ y $\beta(T)$ son finitos (resp. $R(T)$ es cerrado y $\alpha(T) < \infty$, $\beta(T) < \infty$). $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se dice *semi-Fredholm* si T es Fredholm superior o Fredolm inferior. $\Phi(X, Y)$ (resp. $\Phi_+(X, Y)$, $\Phi_-(X, Y)$) denotara la clase de todos los operadores de Fredholm (resp. semi-Fredholm superior, semi-Fredholm inferior) en $\mathcal{L}(X, Y)$. Los operadores semi-Fredholm superior y semi-Fredholm inferior son duales uno del otro (ver [25]); esto es, $T \in \Phi_+(X, Y)$ si y sólo si $T^* \in \Phi_-(Y^*, X^*)$, y $T \in \Phi_-(X, Y)$ si y sólo si $T^* \in \Phi_+(Y^*, X^*)$. Otras propiedades que satisfacen estas clases de operadores son las siguientes:

1. Si $T \in \Phi_+(X,Y)$ y $S \in \Phi_+(Y,Z)$ entonces $ST \in \Phi_+(X,Z)$
2. Si $T \in \Phi_-(X,Y)$ y $S \in \Phi_-(Y,Z)$ entonces $ST \in \Phi_-(X,Z)$
3. Sean $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$, si $ST \in \Phi_+(X,Z)$ entonces $T \in \Phi_+(X,Y)$
4. Sean $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$, si $ST \in \Phi_-(X,Z)$ entonces $S \in \Phi_-(Y,Z)$
5. $T \in \Phi_+(X,Y)$ si y sólo si $\dim N(T-K) < \infty$ para todo operador compacto $K \in \mathcal{K}(X,Y)$
6. $T \in \Phi_-(X,Y)$ si y sólo si $\dim(Y/\overline{R(T-K)}) < \infty$ para todo operador compacto $K \in \mathcal{K}(X,Y)$
7. Si $T \in \Phi_+(X,Y)$ y $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ es un operador de rango finito o compacto entonces $T+K \in \Phi_+(X,Y)$ e $\text{ind}\,(T+K) = \text{ind}\,(T)$
8. Si $T \in \Phi_-(X,Y)$ y $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ es un operador de rango finito o compacto entonces $T+K \in \Phi_-(X,Y)$ e $\text{ind}\,(T+K) = \text{ind}\,(T)$
9. Sea $T \in \Phi_+(X,Y)$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que si $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\|S\| < \epsilon$ entonces $T+S \in \Phi_+(X,Y)$, análogamente si $T \in \Phi_-(X,Y)$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que si $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $\|S\| < \epsilon$ entonces $T+S \in \Phi_-(X,Y)$

De esta última propiedad se deduce que $\Phi_+(X,Y)$ y $\Phi_-(X,Y)$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{L}(X,Y)$. Un ejemplo importante de operadores semi-Fredholm superior son los operadores acotados inferiormente, un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es *acotado inferiormente* o *bounded below* si es inyectivo y tiene rango cerrado. Un ejemplo importante de operador semi-Fredholm inferior son los operadores sobreyectivos. En [25] se puede encontrar una exposición detallada sobre este tema, así como también los detalles de las demostraciones de las propiedades antes mencionadas.

Otras dos clases importantes de operadores en la teoría de Fredholm son las clases de los operadores semi-Browder superior/inferior. Estas clases son definidas como sigue: $T \in \mathcal{L}(X)$ se dice que es un operador *Browder* (resp. *semi-Browder superior*, *semi-Browder inferior*) si T es un operador Fredholm (resp. semi-Fredholm superior, semi-Fredholm inferior) y además $p(T)$ y $q(T)$ son finitos (resp. $p(T) < \infty$, $q(T) < \infty$). $B(X)$ (resp. $B_+(X)$, $B_-(X,Y)$) denotará la clase de todos los operadores de Browder (resp. semi-Browder superior, semi-Browder inferior) en el álgebra $\mathcal{L}(X)$. Un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ se dice *semi-Weyl superior* (resp. *semi-Weyl inferior*), si T es un operador semi-Fredholm superior (resp. semi-Fredholm inferior) con índice $\operatorname{ind} T \leq 0$ (resp. $\operatorname{ind} T \geq 0$). $T \in \mathcal{L}(X)$ se dice que es un operador de *Weyl*, si T es semi-Weyl superior y semi-Weyl inferior, i.e. T es un operador de Fredholm con índice cero. $W(X)$ (resp. $W_+(X)$, $W_-(X,Y)$) denotará la clase de todos los operadores de Weyl (resp. semi-Weyl superior, semi-Weyl inferior) en el álgebra $\mathcal{L}(X)$.

Las clases de operadores definidos anteriormente, determinan los siguientes espectros. El *espectro Fredholm* de un operador $T \in \mathcal{L}(X)$, definido por

$$\sigma_{\mathrm{f}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es Fredholm}\},$$

y el *espectro semi-Fredholm superior* de T, es definido como

$$\sigma_{\mathrm{uf}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es semi-Fredholm superior}\}.$$

El *espectro Browder* y el *espectro Weyl* de T son definidos, respectivamente, por

$$\sigma_{\mathrm{b}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es Browder}\},$$

y

$$\sigma_{\mathrm{w}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es Weyl}\}.$$

Siendo que cada operador de Browder es un operador de Weyl, entonces $\sigma_{\mathrm{w}}(T) \subseteq \sigma_{\mathrm{b}}(T)$. Análogamente, el *espectro semi-Browder superior* y el *espectro semi-Weyl inferior* de T, son definidos como

$$\sigma_{\mathrm{ub}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es semi-Browder superior}\},$$

y

$$\sigma_{\mathrm{uw}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es semi-Weyl superior}\}.$$

Con el ánimo de fijar conceptos, finaliza esta sección con el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 1.2.1. Para cada uno de los operadores del Ejemplo 1.1.1, determine cuales de ellos son semi-Fredholm superior (resp. inferior), semi-Browder superior (resp. inferior), semi-Weyl superior (resp. inferior). Determine además, para cada uno, su espectros semi-Fredholm superior (resp. inferior), semi-Browder superior (resp. inferior), semi-Weyl superior (resp. inferior).

1.3. Operadores semi B-Fredholm

Similarmente a lo realizado en la sección precedente, en esta sección se introducen los operadores semi B-Fredholm u operadores semi-Fredholm en el sentido de Berkani ([18], [20]), se estudian algunas de sus subclases y los espectros derivados por cada una de estas clases de operadores.

Denotaremos por T_n, con $n \in \mathbb{N}$, la restricción de $T \in \mathcal{L}(X)$ al subespacio $R(T^n) = T^n(X)$. De acuerdo con Berkani ([18], [20]), $T \in \mathcal{L}(X)$ se dice un operador semi *B-Fredholm* (resp. *B-Fredholm*, *semi B-Fredholm superior*, *semi B-Fredholm inferior*), si para algún entero $n \geq 0$ el rango $R(T^n)$ es un subespacio cerrado de X y T_n, visto como un operador del espacio $R(T^n)$ en sí mismo, es un operador semi-Fredholm (resp. Fredholm, semi-Fredholm superior, semi-Fredholm inferior). Análogamente, $T \in \mathcal{L}(X)$ se dice un operador *B-Browder* (resp. *semi B-Browder superior*, *semi B-Browder inferior*), si para algún entero $n \geq 0$ el rango $R(T^n)$ es cerrado en X y T_n es un operador Browder (resp. semi-Browder superior, semi-Browder inferior).

Las definiciones anteriores, generalizan las clases de operadores semi-Fredholm y semi-Browder introducidas en la sección anterior, puesto que para todo operador $T \in \mathcal{L}(X)$, $T = T_0$. Así, todo operador semi-Fredholm (resp. semi-Browder) es semi B-Fredolm (resp. semi B-Browder). El siguiente resultado describe el comportamiento del índice de las restricciones T_n para un operador semi B-Fredholm.

Teorema 1.3.1. *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ es un operador semi B-Fredholm y T_n es una restricción semi-Fredholm de T, entonces T_m también es semi-Fredholm para cada $m \geq n$, y además ind $T_m =$ ind T_n*

Demostración. Ver [20, Proposición 2.1]. □

El resultado anterior permite extender la noción de índice a la clase de los operadores semi B-Fredholm. Así, el *índice* de un operador semi B-Fredholm T, se define como el índice de cualquier restricción semi-Fredholm T_n de T. En este sentido, $T \in \mathcal{L}(X)$ se dice que es un *operador B-Weyl* (resp. *semi B-Weyl superior*, *semi B-Weyl inferior*), si T es un operador B-Fredholm (resp. semi B-Fredholm superior, semi B-Fredholm inferior) con índice 0 (resp. $\operatorname{ind} T \leq 0$, $\operatorname{ind} T \geq 0$).

Los espectros correspondientes a los operadores semi B-Fredholm, son definidos en la forma siguiente. El *espectro B-Browder* de un operador $T \in \mathcal{L}(X)$, es dado por

$$\sigma_{\mathrm{bb}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \ \text{ no es B-Browder}\},$$

mientras que el *espectro B-Weyl* de T, es definido por

$$\sigma_{\mathrm{bw}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es B-Weyl}\}.$$

Otra clase de operadores relacionada con los operadores semi B-Fredholm, es la clase de los operadores quasi-Fredholm (introducidos por Labrousse [61]), la cual definiremos a continuación. Previamente, se considera el siguiente conjunto.

$$\Delta(T) = \{n \in \mathbb{N} : m \geq n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow T^n(X) \cap N(T) \subseteq T^m(X) \cap N(T)\}.$$

El *grado de iteración estable* de $T \in \mathcal{L}(X)$, es definido como $\operatorname{dis}(T) = \operatorname{ínf} \Delta(T)$, si $\Delta(T) \neq \emptyset$. Mientras que $\operatorname{dis}(T) = \infty$, si $\Delta(T) = \emptyset$.

Definición 1.3.1. *$T \in \mathcal{L}(X)$ se dice un operador* quasi-Fredholm de grado d, *si existe $d \in \mathbb{N}$ tal que:*

(i) $dis(T) = d$;

(ii) $T^n(X)$ es un subespacio cerrado de X para cada $n \geq d$;

(iii) $T(X) + N(T^d)$ es un subespacio cerrado de X.

T se dice un operador quasi-Fredholm, si es quasi-Fredholm de grado d para algún $d \in \mathbb{N}$.

Berkani y Sarih, mostraron [20, Proposición 2.5], que cada operador semi B-Fredholm es un operador quasi-Fredholm. El *espectro quasi-Fredholm* de T, es definido como

$$\sigma_{\mathrm{qf}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es quasi-Fredholm}\}.$$

Para ahondar en mayores detalles sobre los operadores quasi-Fredholm, pueden consultarse [3], [5] y [19].

El siguiente ejemplo exhibe que la clase de los operadores de Fredholm está estrictamente contenida en la clase de los operadores B-Fredholm. Se invita al lector a verificarlo en detalle.

Ejemplo 1.3.1. Toda proyección $P \in \mathcal{L}(X)$ tal que $N(P)$ sea de dimensión infinita, es un operador semi B-Fredholm, pero no de Fredholm.

1.4. SVEP local de un operador

En esta sección se introduce una importante herramienta de la teoría espectral local conocida como la propiedad de la extensión univaluada, esta propiedad data desde los clásicos trabajos de N. Dunford [36] y [37], pero su versión localizada en un punto se debe a James Finch [39] y fue introducida en 1975. La versatilidad de la versión local de esta propiedad, estriba en que permite enlazar nociones de la teoría espectral local con nociones de la teoría de operadores, lo cual la convierte en una potente herramienta muy explotada en investigaciones recientes.

Definición 1.4.1. *$T \in \mathcal{L}(X)$ se dice que tiene la* propiedad de la extensión univaluada *en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ (abreviado, SVEP en λ_0), si para cada disco abierto $\mathbb{D}_{\lambda_0} \subseteq \mathbb{C}$ centrado en λ_0 la única función analítica $f : \mathbb{D}_{\lambda_0} \to X$ que satiface la ecuación $(\lambda I - T)f(\lambda) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{D}_{\lambda_0}$, es la función $f \equiv 0$ sobre $\mathbb{D}_{\lambda_0}$. Un operador T se dice que tiene la SVEP, si T tiene la SVEP en cada punto $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Evidentemente, $T \in \mathcal{L}(X)$ tiene la SVEP en cada punto del conjunto resolvente $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. También, la propiedad de la extensión univaluada es heredada por restricciones del operador sobre subespacios cerrados e invariantes. Más aún, del teorema de la identidad para funciones analíticas (ver [52]), es fácil deducir que T tiene la SVEP en cada punto de la frontera $\partial\sigma(T)$ del espectro $\sigma(T)$ de T. En particular, T tiene la SVEP en cada punto aislado del espectro. Poco menos evidentes son las relaciones siguientes:

$$p(\lambda I - T) < \infty \Rightarrow T \text{ tiene la SVEP en } \lambda, \tag{1.1}$$

dualmente (T^* el operador dual de T)

$$q(\lambda I - T) < \infty \Rightarrow T^* \text{ tiene la SVEP en } \lambda, \tag{1.2}$$

cuyas demostraciones pueden consultarse en [1, Teorema 3.8].

Recuerde que un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ se dice que es *bounded below*, si T es inyectivo y su rango $R(T)$ es cerrado. Se denota por $\sigma_{\mathrm{ap}}(T)$, el clásico *espectro aproximado puntual* de T, definido según

$$\sigma_{\mathrm{ap}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es bounded below}\}.$$

$\sigma_{\mathrm{su}}(T)$ denotará el *espectro sobreyectivo* de T,

$$\sigma_{\mathrm{su}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es sobreyectivo}\}.$$

Note que $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) = \sigma_{\mathrm{su}}(T^*)$, $\sigma_{\mathrm{su}}(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T^*)$ y $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{su}}(T)$.

Fácilmente, de la definición de la SVEP local, pueden obtenerse las siguientes relaciones:

$$\lambda \notin \operatorname{acc} \sigma_{\mathrm{ap}}(T) \Rightarrow T \text{ tiene la SVEP en } \lambda, \tag{1.3}$$

y

$$\lambda \notin \operatorname{acc} \sigma_{\mathrm{su}}(T) \Rightarrow T^* \text{ tiene la SVEP en } \lambda, \tag{1.4}$$

donde $\operatorname{acc} K$ denota el conjunto de todos los puntos de acumulación de un subconjunto $K \subseteq \mathbb{C}$.

Observación 1.4.1. Para un espacio de Banach X finito dimensional y $T \in \mathcal{L}(X)$, $\sigma(T)$ es un subconjunto finito. En el caso que $\sigma(T)$ sea un subconjunto finito no vacío, como $T \in \mathcal{L}(X)$ tiene la SVEP en cada punto aislado del espectro $\sigma(T)$, T tiene la SVEP. En el caso que $\sigma(T)$ sea vacío, obviamente T tiene la SVEP. Por lo tanto, el caso de interés o no trivial, ocurre cuando X es un espacio de Banach complejo e infinito dimensional. Así, en los teoremas o enunciados que restan de esta parte del texto, se asumirá que los espacios considerados son espacios de Banach complejos e infinito dimensionales para evitar trivialidades.

En el contexto de la teoría de Fredholm, las implicaciones (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4) son realmente equivalencias.

Teorema 1.4.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador semi-Fredholm. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) T *tiene la SVEP en* λ*;*

(ii) $p(\lambda I - T) < \infty$*;*

(iii) $\lambda \notin acc\ \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$

Demostración. Ver [1, Capítulo 3]. $\square$

Dualmente también se tiene,

Teorema 1.4.2. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador semi-Fredholm. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) T^* *tiene la SVEP en* λ*;*

(ii) $q(\lambda I - T) < \infty$*;*

(iii) $\lambda \notin acc\ \sigma_{\mathrm{su}}(T)$

Demostración. Ver [1, Capítulo 3].

$\square$

Similarmente, y de manera más general, P. Aiena [3] también caracteriza la SVEP en un punto para los operadores quasi-Fredholm, como se exhibe en los siguientes resultados.

Teorema 1.4.3. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador quasi-Fredholm. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) T *tiene la SVEP en* λ*;*

(ii) $p(\lambda I - T) < \infty$*;*

(iii) $\lambda \notin acc\ \sigma_{\text{ap}}(T)$.

Demostración. Ver [3, Teorema 2.7]. □

Dualmente,

Teorema 1.4.4. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador quasi-Fredholm. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) T^* *tiene la SVEP en* λ;

(ii) $q(\lambda I - T) < \infty$;

(iii) $\lambda \notin acc\ \sigma_{\text{su}}(T)$.

Demostración. Ver [3, Teorema 2.8] □

En términos de la SVEP, también se pueden obtener algunas relaciones de interés entre los distintos espectros derivados de la teoría de Fredholm. Algunas de éstas, se recogen en el lema siguente.

Lema 1.4.1. *Para cualquier operador $T \in \mathcal{L}(X)$, se tienen las siguientes igualdades:*

(i) $\sigma_{\text{b}}(T) = \sigma_{\text{w}}(T) \cup acc\,\sigma(T)$;

(ii) $\sigma_{\text{ub}}(T) = \sigma_{\text{uw}}(T) \cup acc\,\sigma_{ap}(T)$;

(iii) $\sigma(T) = \sigma_{\text{ap}}(T) \cup \Xi(T)$;

donde $\Xi(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T$ *no tiene la SVEP en* $\lambda\}$.

Demostración. Ver [1, Capítulo 3]). □

Finaliza esta sección con la invitación al lector de encontrar un ejemplo de un operador $T \in \mathcal{L}(X)$, con X complejo e infinito dimensional, tal que T tenga la SVEP.

Capítulo 2

Teoría de Fredholm y restricciones de un operador

En general, dada una restricción (resp. extensión) de un operador, casi nada puede decirse de la relación entre la teoría de Fredholm del operador y la de su restricción (resp. extensión). Uno de los primeros en investigar relaciones entre la teoría de Fredholm de un operador y la de las restricciones (resp. extensiones) de éste fue Bruce Barnes [16],[17]. En este capítulo, nos proponemos extender los resultados obtenidos por Barnes, relativos a las relaciones entre la Teoría de Fredholm de un operador y la de sus extensiones (resp. extensiones), así como también los resultados obtenidos por Aiena en [10] y por Carpintero et al. en [28], [29] y [30], debilitando tanto las condiciones topológicas exigidas al subespacio sobre el que se toma la restricción (resp. extensión) del operador, como las exigidas al operador mismo.

2.1. Restricciones y extensiones de un operador

En esta sección se estudian las relaciones existentes entre los distintos parámetros descritos en el capítulo anterior, para un operador y su restricción a cierta clase de subespacios.

En lo sucesivo, siempre se asumirá que W es un subespacio propio cerrado no trivial de un espacio de Banach X. Se denota por $\mathcal{P}(X,W)$, a la colección

$$\mathcal{P}(X,W) = \{T \in \mathcal{L}(X) : T(W) \subseteq W \text{ y para algún } n \in \mathbb{Z}^+, T^n(X) \subseteq W\}.$$

Dado $T \in \mathcal{P}(X,W)$, T_W denota la restricción de T sobre el subespacio T-invariante W de X. Observe que $0 \in \sigma_{\text{su}}(T)$, para todo $T \in \mathcal{P}(X,W)$. Pues $T \in \mathcal{P}(X,W)$ y T sobreyectivo, implican que $X = T^n(X) \subseteq W$, para algún $n \geq 1$, contradiciendo el supuesto que W es un subespacio propio de X. Posteriormente se verá que $\sigma_{\text{su}}(T)$ y $\sigma_{\text{su}}(T_W)$, pueden diferir sólo en 0.

Observación 2.1.1. Si $\mathcal{F}(W)$ denota el ideal de los operadores de rango finito de $\mathcal{L}(W)$, entonces todo operador $F \in \mathcal{F}(W)$ con rango n-dimensional es de la forma $Fw = \sum_{k=1}^{n} f_k(w)Fw_k$, donde $Fw_k \in W$ y $f_k \in W^*$ (W^* denota el espacio dual de W) para $k = 1, ..., n$. Por el Teorema de Hahn-Banach, cada $f_k \in W^*$ tiene una extensión $\widehat{f_k} \in X^*$ (X^* denota el espacio dual de X); así F tiene una extensión $\widehat{F}$ en $\mathcal{L}(X)$, dada por $\widehat{F}x = \sum_{k=1}^{n} \widehat{f_k}(x)Fw_k$, para todo $x \in X$. Además, $\widehat{F} \in \mathcal{F}(X)$ y $(\widehat{F})^m(X) \subseteq \widehat{F}(X) \subseteq W$, cualquiera sea el entero $m \geq 1$. Esto es, $\widehat{F} \in \mathcal{P}(X,W)$.

A continuación, se presentan algunos resultados debidos a B. Barnes [17].

Lema 2.1.1. *Sea $T \in \mathcal{P}(X,W)$. Entonces $(\lambda I - T)^{-1}(W) = W$, para todo $\lambda \neq 0$.*

Demostración. Ver [17, Proposición 3].

□

Lema 2.1.2. *Sea $T \in \mathcal{P}(X,W)$. Entonces, para todo $\lambda \neq 0$, $R(\lambda I - T)$ es cerrado en X si y sólo si $R(\lambda I - T_W)$ es cerrado en W.*

Demostración. Ver [17, Teorema 6(1)].

□

A continuación, se enuncian y demuestran varios lemas que serán claves a lo largo del texto. Comenzaremos examinando algunas relaciones algebraicas entre un operador $T \in \mathcal{P}(X,W)$ y su restricción T_W.

Lema 2.1.3. *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Entonces*

$$N((\lambda I - T)^m) = T^n(N((\lambda I - T)^m)),$$

cualesquiera sean $\lambda \neq 0$ y $n, m \in \mathbb{N}$.

Demostración. $N((\lambda I - T)^m) = T^n(N((\lambda I - T)^m))$, es trivialmente válida para $m = 0$. Además, es bien conocida la igualdad $N(\lambda I - T) = T(N(\lambda I - T))$, para todo $\lambda \neq 0$. Así, por inducción matemática, se concluye la igualdad $N(\lambda I - T) = T^n(N(\lambda I - T))$, para $\lambda \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in N((\lambda I - T)^m)$, con $m > 1$, se tienen

$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda I - T)^m x \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \lambda^{m-k} T^k x \\
&= \lambda^m x + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \lambda^{m-k} T^k x. \\
&= \lambda^m x + T \left(\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \lambda^{m-k} T^{k-1} x \right)
\end{aligned}$$

Entonces $x = T\left(\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k (-\lambda^{-k}) T^{k-1} x\right)$. Como $(\lambda I - T)^m T^{k-1} = T^{k-1}(\lambda I - T)^m$, para $k = 1, ..., m$ y $x \in N((\lambda I - T)^m)$, sigue que

$$(\lambda I - T)^m \left(\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k (-\lambda^{-k}) T^{k-1} x \right) = 0.$$

En consecuencia, $\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k (-\lambda^{-k}) T^{k-1} x \in N((\lambda I - T)^m)$. Así, se concluye la inclusión $N((\lambda I - T)^m) \subseteq T(N((\lambda I - T)^m))$. Por otro lado, si $x \in T(N((\lambda I - T)^m))$, existe $u \in N((\lambda I - T)^m)$ tal que $x = Tu$. Nuevamente, la igualdad $(\lambda I - T)^m T = T(\lambda I - T)^m$ implica que

$$(\lambda I - T)^m x = (\lambda I - T)^m T u = T(\lambda I - T)^m u = T0 = 0.$$

Luego $x \in N((\lambda I - T)^m)$, resultando la inclusión $T(N((\lambda I - T)^m)) \subseteq N((\lambda I - T)^m)$. Finalmente, de $N((\lambda I - T)^m) = T(N((\lambda I - T)^m))$, se concluye por inducción matemática la igualdad $N((\lambda I - T)^m) = T^n(N((\lambda I - T)^m))$, para todo $\lambda \neq 0$ y todo $n, m \in \mathbb{N}$.

$\square$

Lema 2.1.4. *Si $T \in \mathcal{P}(X, W)$ y $\lambda \neq 0$. Entonces:*

(i) $N((\lambda I - T_W)^m) = N((\lambda I - T)^m)$, *cualquiera sea m;*

(ii) $R((\lambda I - T_W)^m) = R((\lambda I - T)^m) \cap W$, *para todo m;*

(iii) $\alpha(\lambda I - T_W) = \alpha(\lambda I - T)$*;*

(iv) $p(\lambda I - T_W) = p(\lambda I - T)$*;*

(v) $\beta(\lambda I - T_W) = \beta(\lambda I - T)$*.*

Demostración. (i) $N((\lambda I - T)^m) = N((\lambda I - T_W)^m)$, es trivialmente válida para $m = 0$. Sean $x \in N((\lambda I - T)^m)$ y $m \geq 1$. Por el Lema 2.1.3, $x \in N((\lambda I - T)^m) = T^n(N((\lambda I - T)^m))$. Además, por hipótesis, $T^n(X) \subseteq W$ para cierto $n \geq 1$. Entonces, $x \in T^n(X) \subseteq W$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda I - T)^m x \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \lambda^{m-k} T^k x \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \lambda^{m-k} (T_W)^k x \\ &= (\lambda I - T_W)^m y \end{aligned}$$

Así, $x \in N((\lambda I - T_W)^m)$, de lo cual se obtiene

$$N((\lambda I - T)^m) \subseteq N((\lambda I - T_W)^m).$$

Por otra parte, siendo T_W la restricción de T sobre W,

$$N((\lambda I - T_W)^m) \subseteq N((\lambda I - T)^m).$$

Concluyéndose la igualdad $N((\lambda I - T)^m) = N((\lambda I - T_W)^m)$.

(ii) Como T_W es la restricción de T sobre W,

$$R((\lambda I - T_W)^m) \subseteq R((\lambda I - T)^m) \cap W.$$

Para mostrar la inclusión $R((\lambda I - T)^m) \cap W \subseteq R((\lambda I - T_W)^m)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. En primer lugar note que $R((\lambda I - T_W)^m) = R((\lambda I - T)^m) \cap W$

es trivialmente cierta, para $m = 0$. Para $m = 1$, dado $y \in R(\lambda I - T) \cap W$ existe $x \in X$ tal que $(\lambda I - T)x = y \in W$, así $(\lambda I - T)x \in W$. Por el Lema 2.1.1, $x \in (\lambda I - T)^{-1}(W) = W$, luego $y = (\lambda I - T)x = (\lambda I - T_W)x \in R(\lambda I - T_W)$ y se concluye que $R(\lambda I - T) \cap W \subseteq R(\lambda I - T_W)$. Supóngase ahora que, para $m > 1$, $y \in R((\lambda I - T)^m) \cap W$. Como en el caso anterior, existe $x \in X$ tal que $(\lambda I - T)^m x = y \in W$. Nuevamente, por el Lema 2.1.1, $(\lambda I - T)^{m-1}x \in (\lambda I - T)^{-1}(W) = W$ y entonces $(\lambda I - T)^{m-1}x \in W$. De acuerdo al razonamiento anterior, se concluye que $(\lambda I - T)^{m-2}x \in (\lambda I - T)^{-1}(W) = W$, y así $(\lambda I - T)^{m-2}x \in W$. Repitiendo el razonamiento anterior, despues de un cierto número de veces, se obtendrá que $x \in (\lambda I - T)^{-1}(W) = W$. Entonces

$$y = (\lambda I - T)^m x = (\lambda I - T_W)^m x \in R(\lambda I - T_W)^m,$$

y así $R(\lambda I - T)^m \cap W \subseteq R(\lambda I - T_W)^m$, para $m > 1$. En consecuencia, la igualdad $R((\lambda I - T_W)^m) = R((\lambda I - T)^m) \cap W$ es válida para todo $m \in \mathbb{N}$.

(iii) y (iv), siguen inmediatamente de (i).

(v) Observe que el subespacio $R(\lambda I - T_W)$ de W, tiene un complemento algebraico en W (ver [52, Prop. 4.1]). Sea M uno de tales complementos, entonces M es un subespacio de W y $W = R(\lambda I - T_W) \oplus M$. Según (ii), $R(\lambda I - T_W) = R(\lambda I - T) \cap W$. Luego, se tiene que

$$\{0\} = R(\lambda I - T_W) \cap M = R(\lambda I - T) \cap W \cap M = R(\lambda I - T) \cap M.$$

Así, $R(\lambda I - T) \cap M = \{0\}$. Ahora, se mostrará que $X = R(\lambda I - T) + M$. Siendo el espectro $\sigma(T^n)$ un subconjunto compacto y no vacío del plano complejo, el conjunto resolvente $\mathbb{C} \setminus \sigma(T^n) \neq \emptyset$. Sea $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $\mu I - T^n$ es invertible en $\mathcal{L}(X)$. Entonces, dado $y \in X$ existe $x \in X$ tal que $y = (\mu I - T^n)x$. Así $y = \mu x - T^n x$, puede escribirse como $y = u + v$; donde $u = \mu x \in X$ y $v = -T^n x \in T^n(X) \subseteq W$, para cierto $n \geq 1$. De esta descomposición, como $\lambda^n I - T^n = (\lambda I - T)h(T)$, donde $h(T) = \lambda^{n-1}I + \lambda^{n-2}T + ... + T^{n-1}$, y $R(\lambda I - T_W) \subseteq R(\lambda I - T)$ para todo $\lambda \neq 0$. Se obtiene que

$$\begin{aligned}
y &= u + v \\
&= \lambda^{-n}(\lambda^n I - T^n)u + \lambda^{-n}T^n u + v \\
&= \lambda^{-n}(\lambda I - T)h(T)u + (\lambda^{-n}T^n u + v) \in R(\lambda I - T) + W \\
&= \lambda^{-n}(\lambda I - T)h(T)u + (\lambda^{-n}T^n u + v) \in R(\lambda I - T) + R(\lambda I - T_W) + M \\
&= \lambda^{-n}(\lambda I - T)h(T)u + (\lambda^{-n}T^n u + v) \in R(\lambda I - T) + M
\end{aligned}$$

Obteniéndose que $X \subseteq R(\lambda I - T) + M$, y así $X = R(\lambda I - T) + M$. Pero, como $R(\lambda I - T) \cap M = \{0\}$, entonces $X = R(\lambda I - T) \oplus M$; lo cual implica que $\beta(\lambda I - T_W) = \dim M = \beta(\lambda I - T)$. De donde sigue la igualdad $\beta(\lambda I - T_W) = \beta(\lambda I - T)$.

□

En el mismo estilo del Lema 2.1.2, el siguiente resultado trata de la relación existente entre la propiedad de la extensión univaluada de un operador $T \in \mathcal{P}(X, W)$ y la de su restricción T_W.

Lema 2.1.5. *Si $T \in \mathcal{P}(X, W)$, entonces T tiene la SVEP en λ si y sólo si T_W tiene la SVEP en λ.*

Demostración. Fácilmente puede mostrarse que T (resp. T_W) tiene la SVEP en λ si y sólo si $\lambda I - T$ (resp. $\lambda I - T_W$) tiene la SVEP en 0. Así, sin pérdida de generalidad, puede asumirse que $\lambda = 0$. Como la SVEP se hereda por restricciones sobre subespacios cerrados e invariantes; si T tiene la SVEP en 0, entonces T_W tiene la SVEP en 0. Recíprocamente, supóngase que T_W tiene la SVEP en 0 y sean $\mathbb{D}_0 \subseteq \mathbb{C}$ un disco abierto centrado en 0 y $f : \mathbb{D}_0 \to X$ una función analítica tal que $(\mu I - T)f(\mu) = 0$, para todo $\mu \in \mathbb{D}_0$. Sigue de este supuesto que $\mu^k f(\mu) = T^k f(\mu)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, como $T \in \mathcal{P}(X, W)$, existe $n \geq 1$ tal que $T^n(X) \subseteq W$ y así $f(\mu) = \mu^{-n}T^n f(\mu) \in T^n(X) \subseteq W$, para cualquier $\mu \in \mathbb{D}_0 \setminus \{0\}$. Por otra parte, si $\mu = 0$ existe una sucesión $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{D}_0$, tal que $\lambda_k \neq 0$ y $\lambda_k \to 0$. Por lo cual, $(f(\lambda_k))_{k=1}^{\infty} \subseteq W$ y $f(\lambda_k) \to f(0)$. Siendo W un subespacio cerrado, se tiene que $f(0) \in W$. Luego, $f : \mathbb{D}_0 \to W$ es una función analítica tal que $(\mu I - T_W)f(\mu) = 0$ para cada $\mu \in \mathbb{D}_0$. De lo cual, por la hipótesis que T_W tiene la SVEP en 0, se deduce que $f \equiv 0$ sobre $\mathbb{D}_0$ y entonces T tiene la SVEP en 0.

□

2.2. Espectros de un operador y de sus restricciones

En esta sección se extienden los resultados obtenidos por B. Barnes en [16] y [17], relativos a las relaciones de la teoría de Fredholm de un operador y la de sus restricciones. Se comienza enunciado y demostrando un resultado similar al dado por B. Barnes en [16], pero bajo hipótesis mucho más débiles.

Teorema 2.2.1. *Si $T \in \mathcal{P}(X, W)$ y $q(T) = \infty$, o $p(T) = \infty$, entonces se tienen las siguientes igualdades:*

(i) $\sigma_{\mathrm{su}}(T) = \sigma_{\mathrm{su}}(T_W)$;

(ii) $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T_W)$;

(iii) $\sigma(T) = \sigma(T_W)$;

(iv) $\sigma_{\mathrm{w}}(T) = \sigma_{\mathrm{w}}(T_W)$;

(v) $\sigma_{\mathrm{uw}}(T) = \sigma_{\mathrm{uw}}(T_W)$;

(vi) $\sigma_{\mathrm{b}}(T) = \sigma_{\mathrm{b}}(T_W)$;

(vii) $\sigma_{\mathrm{ub}}(T) = \sigma_{\mathrm{ub}}(T_W)$.

Demostración. (i) En primer lugar, observe que $\lambda I - T$ (resp. $\lambda I - T_W$) es sobreyectivo si y sólo si $\beta(\lambda I - T) = 0$ (resp. $\beta(\lambda I - T_W) = 0$). Ahora, por el Lema 2.1.4, $\beta(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T_W)$, para todo $\lambda \neq 0$. En consecuencia, $\sigma_{\mathrm{su}}(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{su}}(T_W) \setminus \{0\}$. Según esto, para mostrar la igualdad $\sigma_{\mathrm{su}}(T) = \sigma_{\mathrm{su}}(T_W)$, sólo basta mostrar que $0 \in \sigma_{\mathrm{su}}(T)$ y $0 \in \sigma_{\mathrm{su}}(T_W)$. Para $T \in \mathcal{P}(X, W)$, se conoce que $0 \in \sigma_{\mathrm{su}}(T)$. Ahora, se demostrará que $0 \in \sigma_{\mathrm{su}}(T_W)$. Supóngase que $0 \notin \sigma_{\mathrm{su}}(T_W)$. Entonces T_W es sobreyectivo, así $W = (T_W)^k(W) = T^k(W)$ cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$. Como $T \in \mathcal{P}(X, W)$, existe $n \geq 1$ tal que $T^n(X) \subseteq W$ y entonces $W = T^m(W) \subseteq T^m(X) \subseteq T^n(X) \subseteq W$, cualquiera sea $m \geq n$. De donde siguen las igualdades $T^m(X) = T^n(X) = T^m(W) = W$, para todo $m \geq n$, así resulta $q(T) < \infty$, lo cual contradice el hecho que $q(T) = \infty$. Por otra parte, T_W sobreyectivo implica que $q(T_W) = 0$, y así $(T_W)^*$ tiene la SVEP en 0. Por lo cual $0 \notin \Xi((T_W)^*)$, siguiendo de esto que

$$0 \notin \sigma_{\mathrm{su}}(T_W) \cup \Xi((T_W)^*) = \sigma((T_W)^*) = \sigma(T_W) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T_W) \cup \Xi(T_W).$$

En consecuencia $0 \notin \Xi(T_W)$, esto es, T_W tiene la SVEP en 0. Como $T \in \mathcal{P}(X, W)$, por el Lema 2.1.5, T tiene la SVEP en 0. Pero, como se observó anteriormente, $T \in \mathcal{P}(X, W)$ implica la existencia de un $n \geq 1$ tal que $T^m(X) = T^n(W) = W$, para todo $m \geq n$. Así, en virtud del isomorfismo $\frac{T^k(X)}{T^{k+1}(X)} \cong \frac{X}{N(T^k)+T(X)}$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, dado por $T^k x + T^{k+1}(X) \to x + (N(T^k) + T(X))$, se concluye que $X = N(T^m) + T(X)$ cualquiera sea $m \geq n$. Además, $\operatorname{dis}(T) = \operatorname{ínf} \Delta(T) \leq n$, ya que $T^m(X) \cap N(T) = T^n(X) \cap N(T)$ para todo $m \geq n$. Así, T es un operador quasi-Fredholm y T tiene la SVEP en 0. Por el Teorema 1.4.3, $p(T) < \infty$, lo cual contradice el hecho que $p(T) = \infty$.

(ii) Note primero que, para $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ap}}(T) \setminus \{0\}$, $\lambda I - T$ no es bounded below y $\lambda \neq 0$. Luego, se presentan las posibilidades siguientes: $p(\lambda I - T) > 0$ o $(\lambda I - T)(X)$ no es cerrado en X. Por los Lemas 2.1.4 y 2.1.2, estas posibilidades equivalen, respectivamente, a $p(\lambda I - T_W) > 0$ o $(\lambda I - T_W)(W)$ no es cerrado en W. De donde se deduce que $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{ap}}(T_W) \setminus \{0\}$. Como en la parte (i), para la igualdad $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T_W)$, es suficiente mostrar que $0 \in \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$ y $0 \in \sigma_{\mathrm{ap}}(T_W)$. Supóngase que $0 \notin \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$ entonces T es inyectivo. En consecuencia T tiene la SVEP en 0, luego $0 \notin \Xi(T)$. Como $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) \cup \Xi(T) = \sigma(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{su}}(T)$, se tiene que $0 \notin \sigma_{\mathrm{su}}(T)$, una contradicción. Por lo tanto $0 \in \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$. Similarmente, $0 \notin \sigma_{\mathrm{ap}}(T_W)$ implica T_W inyectivo. Así, T_W tiene la SVEP en 0 y $0 \notin \Xi(T_W)$. Nuevamente, como $\sigma_{\mathrm{ap}}(T_W) \cup \Xi(T_W) = \sigma(T_W) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T_W) \cup \sigma_{\mathrm{su}}(T_W)$, se tiene que $0 \notin \sigma_{\mathrm{su}}(T_W)$. Por la parte (i), $0 \notin \sigma_{\mathrm{su}}(T)$, y como se probó anteriormente esto es imposible. Entonces $0 \in \sigma_{\mathrm{ap}}(T_W)$, y así la igualdad $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T_W)$ es válida.

(iii) Para la igualdad $\sigma(T) = \sigma(T_W)$, observe que $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{su}}(T)$ (resp. $\sigma(T_W) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T_W) \cup \sigma_{\mathrm{su}}(T_W)$). Combinando (i) y (ii) con estas igualdades, se concluye que $\sigma(T) = \sigma(T_W)$.

(iv) Como en la primera parte de las pruebas de (i) y (ii), de los Lemas 2.1.4 y 2.1.2, siguen que $\sigma_{\mathrm{f}}(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{f}}(T_W) \setminus \{0\}$ y $\sigma_{\mathrm{w}}(T) \setminus \{0\} =$

$\sigma_{\rm w}(T_W) \setminus \{0\}$. De nuevo, como en las partes (i) y (ii), para la igualdad $\sigma_{\rm w}(T) = \sigma_{\rm w}(T_W)$, es suficiente mostrar que $0 \in \sigma_{\rm w}(T)$ y $0 \in \sigma_{\rm w}(T_W)$. En primer lugar, se mostrará que $0 \in \sigma_{\rm w}(T)$. Si $0 \notin \sigma_{\rm w}(T)$, entonces T es un operador de Weyl. Esto es, T es de Fredholm con $\operatorname{ind}(T) = 0$. Siendo $T \in \mathcal{P}(X, W)$, existe un $n \geq 1$ tal que $T^n(X) \subseteq W$. De donde siguen las inclusiones

$$T^{n+m}(X) \subseteq T^n(W) \subseteq W \subseteq X \quad (\forall m \in \mathbb{N}),$$

de las cuales se obtienen las desigualdades

$$\dim \frac{W}{T^{n+m}(X)} \geq \dim \frac{W}{T^m(W)} = \beta(T_W^m).$$

Pero, como $\frac{W}{T^{n+m}(X)} \subseteq \frac{X}{T^{n+m}(X)}$, resultan entonces

$$\beta(T^{n+m}) = \dim \frac{X}{T^{n+m}(X)} \geq \dim \frac{W}{T^{n+m}(X)} \geq \dim \frac{W}{T^m(X)} = \beta(T_W^m).$$

Así, $\beta(T^{n+m}) \geq \beta(T_W^m)$, cualquiera sea $m \in \mathbb{N}$. Por otra parte, las inclusiones $N(T_M^m) \subseteq N(T^m) \subseteq N(T^{n+m})$, implican $\alpha(T_M^m) \leq \alpha(T^{n+m})$. Entonces $T_W^m \in \mathcal{L}(W)$ es un operador semi-Fredholm superior, y así T_W es semi-Fredholm superior. Como $T \in \mathcal{L}(X)$ es de Weyl, por [52, Proposición 26.2], existen un operador biyectivo $R \in \mathcal{L}(X)$ y un operador de rango finito $K \in \mathcal{L}(X)$ tales que $T = R + K$. Luego, $T_W = R_W + K_W$, con R_W inyectivo y K_W de rango finito. De donde sigue que

$$\operatorname{ind}\,(T_W) = \operatorname{ind}\,(R_W + K_W) = \operatorname{ind}\,(R_W) \leq 0$$

En consecuencia $T_W \in \mathcal{L}(W)$ es un operador semi-Weyl superior. Nuevamente por [52, Proposición 26.2], existen un operador inyectivo $S \in \mathcal{L}(W)$ y un operador de rango finito $F \in \mathcal{L}(W)$ tales que $T_W = S + F$. Según esto, $S = T_W - F$. Pero, como, $T_W(W)$ es cerrado y $F(W)$ es un subespacio finito dimensional de W, entonces $S(W)$ es cerrado, y así $S \in \mathcal{L}(W)$ es bounded below. Por lo tanto, $0 \notin \sigma_{\rm ap}(S) = \sigma_{\rm ap}(T_W - F)$. De la Observación 2.1.1, $F \in \mathcal{L}(W)$ tiene una extensión $\widehat{F} \in \mathcal{L}(X)$ tal que $\widehat{F} \in \mathcal{P}(X, W)$, entonces $T - \widehat{F} \in \mathcal{P}(X, W)$. En consecuencia, $(T - \widehat{F})_W = T_W - F$ y $0 \in \sigma_{\rm ap}(T - \widehat{F})$. Así, por lo demostrado en la parte (ii), $0 \in \sigma_{\rm ap}(T - \widehat{F}) = \sigma_{\rm ap}((T - \widehat{F})_W) = \sigma_{\rm ap}(T_W - F)$. Es decir

$0 \notin \sigma_{\mathrm{ap}}(T_W - F)$ y $0 \in \sigma_{\mathrm{ap}}(T_W - F)$, una contradicción. Por lo tanto, se concluye que $0 \in \sigma_{\mathrm{w}}(T)$. En segundo lugar, se mostrará que $0 \in \sigma_{\mathrm{w}}(T_W)$. Para esto, supóngase que $0 \notin \sigma_{\mathrm{w}}(T_W) = \sigma_{\mathrm{uw}}(T_W) \cup \sigma_{\mathrm{lw}}(T_W)$. Según esto, en particular, $0 \notin \sigma_{\mathrm{uw}}(T_W)$. Es decir, $T_W \in \mathcal{L}(W)$ es un operador semi-Weyl superior. Lo cual es imposible, como se vio anteriormente. Por lo tanto $0 \in \sigma_{\mathrm{w}}(T_W)$, y así se obtiene la igualdad $\sigma_{\mathrm{w}}(T) = \sigma_{\mathrm{w}}(T_W)$.

(v) Nuevamente como en la primera parte de las pruebas de (i) y (ii), según los Lemas 2.1.4 y 2.1.2, se tienen $\sigma_{\mathrm{uf}}(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{uf}}(T_W) \setminus \{0\}$ y $\sigma_{\mathrm{uw}}(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{uw}}(T_W) \setminus \{0\}$. Similarmente a la parte (iv), para mostrar la igualdad $\sigma_{\mathrm{uw}}(T) = \sigma_{\mathrm{uw}}(T_W)$, sólo se necesita mostrar que $0 \in \sigma_{\mathrm{uw}}(T)$ y $0 \in \sigma_{\mathrm{uw}}(T_W)$. Según lo mostrado en la parte anterior, necesariamente $0 \in \sigma_{\mathrm{uw}}(T_W)$ y para demostrar que $0 \in \sigma_{\mathrm{uw}}(T)$, se procede en forma similar a lo demostrado en la parte (iv). Siendo $0 \in \sigma_{\mathrm{uw}}(T_W)$ y $0 \in \sigma_{\mathrm{uw}}(T)$, se obtiene entonces que $\sigma_{\mathrm{uw}}(T) = \sigma_{\mathrm{uw}}(T_W)$.

Finalmente, para mostrar las partes (vi) y (vii), observe que $\sigma_{\mathrm{b}}(T) = \sigma_{\mathrm{w}}(T) \cup \operatorname{acc} \sigma(T)$ (resp. $\sigma_{\mathrm{b}}(T_W) = \sigma_{\mathrm{w}}(T_W) \cup \operatorname{acc} \sigma(T_W)$). Combinando, respectivamente, estas igualdades con (iv) y (v), se obtienen (vi) y (vii).

$\square$

Para un operador $T \in \mathcal{L}(X)$, $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$ equivale a que λ es un polo de la función resolvente T (ver [52, Proposición 50.2]). También se conoce que todo polo del resolvente de T, es un punto aislado del espectro $\sigma(T)$. Así, para $T \in \mathcal{P}(X, W)$, si 0 no es un punto aislado del espectro $\sigma(T)$, entonces $q(T) = \infty$ o $p(T) = \infty$. De acuerdo con estas consideraciones, se obtiene un interesante corolario del Teorema 3.3.1.

Corolario 2.2.1. *Si $T \in \mathcal{P}(X, W)$ y 0 no es un punto aislado del espectro $\sigma(T)$, entonces:*

(i) $\sigma_{\mathrm{su}}(T) = \sigma_{\mathrm{su}}(T_W)$;

(ii) $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T_W)$;

(iii) $\sigma(T) = \sigma(T_W)$;

(iv) $\sigma_{\mathrm{w}}(T) = \sigma_{\mathrm{w}}(T_W)$;

(v) $\sigma_{\mathrm{uw}}(T) = \sigma_{\mathrm{uw}}(T_W)$;

(vi) $\sigma_{\mathrm{b}}(T) = \sigma_{\mathrm{b}}(T_W)$;

(vii) $\sigma_{\mathrm{ub}}(T) = \sigma_{\mathrm{ub}}(T_W)$.

Finaliza esta sección con un ejemplo ilustrativo del comportamiento de los espectros de un operador T y los de su restricción T_W, cuando T no satisface las hipótesis del Teorema 3.3.1 y/o el Corolario 2.2.1. Se invita al lector a verificar los detalles.

Ejemplo 2.2.1. Sea X un espacio de Banach, y asuma que W y Z son subespacios propios cerrados de X tales que $X = W \oplus Z$. Sea T la proyección de X sobre W la cual es nula en Z. Como T es un operador proyección, i.e $T^2 = T$, entonces $\sigma(T) = \{0, 1\}$. Más aún, $\sigma_{\mathrm{su}}(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T) = \sigma_{\mathrm{w}}(T) = \sigma_{\mathrm{uw}}(T) = \sigma_{\mathrm{b}}(T) = \sigma_{\mathrm{ub}}(T) = \sigma(T)$. Por otra parte, el operador $T_W = T|_{T(X)}$ es el operador identidad sobre W, así $\sigma(T_W) = \{1\}$. Además, $\sigma_{\mathrm{su}}(T_W) = \sigma_{\mathrm{ap}}(T_W) = \sigma_{\mathrm{w}}(T_W) = \sigma_{\mathrm{uw}}(T_W) = \sigma_{\mathrm{b}}(T_W) = \sigma_{\mathrm{ub}}(T_W) = \sigma(T_W)$.

Capítulo 3

Propiedades espectrales sobre subespacios invariantes

A partir de los trabajos de Coburn [33] y Rakočević [79], y con la aparición de la teoría de los operadores semi B-Fredholm de Berkani [18], [20], se ha venido investigando intensamente con respecto a la formulación de nuevas variantes de propiedades espectrales tipo teoremas Browder-Weyl, así como también con respecto al estudio de las clases de operadores que las satisfacen, sus caracterizaciones y comportamiento bajo perturbaciones, entre otros tópicos relacionados. En esta dirección, los autores han venido investigando recientemente, si muchas de estas nuevas variantes de teoremas tipo Browder-Weyl se transmiten de un operador a sus restricciones y/o extensiones y viceversa. En este capítulo se describe un marco teórico general, del cual se derivan como casos particulares muchos de los resultados obtenidos en [28], [29] y [30]. Así como también, se aborda el mismo problema, pero bajo condiciones más amplias o débiles sobre el subespacio [31].

3.1. Propiedades tipo Teoremas Browder-Weyl

En esta sección se describen una serie de propiedades espectrales, o variantes de teoremas tipo Browder-Weyl, recientemente introducidas. Previamente se describen algunos subconjuntos del plano complejo relacionados con éstas.

iso K, denota el conjunto de todos los puntos aislados de un subconjunto $K \subseteq \mathbb{C}$. Para un operador $T \in \mathcal{L}(X)$, se definen los conjuntos siguientes.

$$\begin{aligned} p_{00}(T) &= \sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{b}}(T), \\ p_{00}^{a}(T) &= \sigma_{\mathrm{ap}}(T) \setminus \sigma_{\mathrm{ub}}(T), \\ \pi_{00}(T) &= \{\lambda \in \operatorname{iso} \sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}, \\ \pi_{00}^{a}(T) &= \{\lambda \in \operatorname{iso} \sigma_{\mathrm{ap}}(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}. \end{aligned}$$

Observe que para cada $T \in \mathcal{L}(X)$, $p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}^{a}(T)$.

Interesan ahora, las relaciones de los subconjuntos anteriormente descritos para un operador $T \in \mathcal{P}(X, W)$ y su restricción T_W. Como una inmediata consecuencia del Teorema 3.3.1, se obtiene el siguiente resultado.

Lema 3.1.1. *Si $T \in \mathcal{P}(X, W)$ y $q(T) = \infty$, o $p(T) = \infty$, entonces las siguientes igualdades son válidas:*

(i) $p_{00}(T) = p_{00}(T_W)$;

(ii) $p_{00}^{a}(T) = p_{00}^{a}(T_W)$.

Demostración. (i) y (ii) son consecuencias inmediatas del Teorema 3.3.1. □

De manera análoga al Corolario 2.2.1, se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.1.2. *Sea $T \in \mathcal{P}(X, W)$. Si 0 no es un punto aislado del espectro $\sigma(T)$, entonces las siguientes igualdades son ciertas:*

(i) $p_{00}(T) = p_{00}(T_W)$;

(ii) $p_{00}^{a}(T) = p_{00}^{a}(T_W)$;

(iii) $\pi_{00}(T) = \pi_{00}(T_W)$;

(iv) $\pi_{00}^{a}(T) = \pi_{00}^{a}(T_W)$.

Demostración. (i) y (ii) siguen del Corolario 2.2.1.

(iii) Dado $\lambda \in \pi_{00}(T)$, entonces $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Asumiendo que 0 no es un punto aislado de $\sigma(T)$, entonces $\lambda \neq 0$. Por el Lema 2.1.4 y el Corolario 2.2.1, sigue que $0 < \alpha(\lambda I - T_W) = \alpha(\lambda I - T) < \infty$ y $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T) = \operatorname{iso}\sigma(T_W)$. Por lo tanto $\lambda \in \pi_{00}(T_W)$, y se tiene la inclusión $\pi_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T_W)$. Mediante un argumento similar, se concluye la inclusión $\pi_{00}(T_W) \subseteq \pi_{00}(T)$.

(iv) La prueba es análoga a la de la parte (iii).

$\square$

Seguidamente se describen varias propiedades espectrales, o variantes de teoremas tipo Browder-Weyl, introducidas recientemente en [21], [23], [24], [33], [51], [79], [80], [82], [88] y [89].

Definición 3.1.1. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ se dice que satisface la propiedad:*

(i) (w), *si* $\sigma_{ap}(T) \setminus \sigma_{\mathrm{uw}}(T) = \pi_{00}(T)$ *([79]);*

(ii) (aw), *si* $\sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{w}}(T) = \pi_{00}^{a}(T)$ *([23]);*

(iii) (b), *si* $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) \setminus \sigma_{\mathrm{uw}}(T) = p_{00}(T)$ *([21],[24]);*

(iv) (ab), *si* $\sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{w}}(T) = p_{00}^{a}(T)$ *([23]);*

(v) (z) *si* $\sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{uw}}(T) = \pi_{00}^{a}(T)$ *([88]);*

(vi) (az), *si* $\sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{uw}}(T) = p_{00}^{a}(T)$ *([88]);*

(vii) (h), *si* $\sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{uw}}(T) = \pi_{00}(T)$ *([82],[89]).*

Además, T se dice que satisface el:

(viii) teorema de Browder, si $\sigma_{\mathrm{w}}(T) = \sigma_{\mathrm{b}}(T)$ *([51]);*

(ix) teorema de a-Browder, si $\sigma_{\mathrm{uw}}(T) = \sigma_{\mathrm{ub}}(T)$ *([80]);*

(x) teorema generalizado de Browder, si $\sigma_{\mathrm{bw}}(T) = \sigma_{\mathrm{bb}}(T)$ *([51]);*

(xi) teorema de Weyl, si $\sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{w}}(T) = \pi_{00}(T)$ *([33]);*

(xii) teorema de a-Weyl, si $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) \setminus \sigma_{\mathrm{uw}}(T) = \pi^a_{00}(T)$ *([79]);*

Culmina esta sección con la invitación al lector a determinar, cuáles de las propiedades anteriores satisface el operador de Volterra

$$(Tx)(s) = \int_0^s x(u)du, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (x \in C([0,1])),$$

$C([0,1])$ el espacio de todas las funciones continuas $x : [0,1] \to \mathbb{C}$.

3.2. Propiedades de T versus Propiedades de T_W

En esta sección se demuestra que las propiedades espectrales estudiadas en la sección anterior para un operador $T \in \mathcal{P}(X,W)$, pueden ser determinadas en forma respectiva a través de las propiedades espectrales de la restricción T_W. De manera más concisa y precisa, se muestra que las propiedades espectrales consideradas en la sección anterior para $T \in \mathcal{P}(X,W)$ y T_W son equivalentes.

En primer término se tiene el siguiente resultado, cuya hipótesis es de naturaleza algebraica.

Teorema 3.2.1. *Si* $T \in \mathcal{P}(X,W)$ *y* $q(T) = \infty$, *o* $p(T) = \infty$, *entonces* T *satisface la propiedad (iii) (resp.,(iv), (vi), (viii), (ix), (x)) en la Definición 3.1.1 si y sólo si* T_W *satisface la propiedad (iii) (resp.,(iv), (vi), (viii), (ix), (x)) en la Definición 3.1.1.*

Demostración. Por el Teorema 3.3.1 y el Lema 3.1.1, se obtiene de manera inmediata el resultado. En el caso de la propiedad (x), observe la equivalencia entre el Teorema de Browder y el Teorema generalizado de Browder mostrada en [5].

□

Según el comentario previo al Corolario 2.2.1, el Teorema 3.2.1 puede extenderse asumiendo hipótesis más débiles de naturaleza topológica.

Teorema 3.2.2. *Si* $T \in \mathcal{P}(X,W)$ *y* 0 *no es un punto aislado de* $\sigma(T)$, *entonces* T *satisface la propiedad (i) (resp.,(ii)-(xii)) en la Definición 3.1.1 si y sólo si* T_W *satisface la propiedad (i)(resp.,(ii)-(xii)) en la Definición 3.1.1.*

Demostración. Por el Lema 3.1.2 y el Corolario 2.2.1, se obtiene de forma inmediata el resultado. Nuevamente, para el caso de la propiedad (x), observe la equivalencia entre el Teorema de Browder y el Teorema generalizado de Browder probada en [5].

□

El siguiente ejemplo, similar al Ejemplo 2.2.1, muestra el comportamiento de T y su restricción T_W con respecto a las propiedades espectrales descritas en la Definición 3.1.1, cuando T no satisface las hipótesis de los Teoremas 3.2.1 y 3.2.2. Se invita al lector a verificar los detalles.

Ejemplo 3.2.1. En el Ejemplo 2.2.1, si W es infinito dimensional y Z es finito dimensional, entonces T satisface las propiedades (i)-(vii) y (xi)-(xii) en la Definición 3.1.1. Pero, T_W no satisface las propiedades (i)-(vii) y (xi)-(xii) en la Definición 3.1.1.

Observación 3.2.1. Si $R(T^n) = T^n(X)$ es un subespacio cerrado, para algún $n \geq 1$. Entonces $T \in \mathcal{P}(X, W)$, con $W = R(T^n)$, además $T_W = T_n$. En consecuencia, los resultados dados en [28], [29] y [30] son casos particulares de los Teoremas 3.2.1 y 3.2.2. Pero, si $R(T^n) = T^n(X)$ no es un subespacio cerrado, los resultados dados en [28], [29] y [30] no pueden usarse. Sin embargo, en tal caso, se pueden usar los Teoremas 3.2.1 y 3.2.2 para describir las propiedades descritas en la Definición 3.1.1 a través de la restricció T_W, con $W = \overline{R(T^n)}$.

3.3. Contextos más generales

En esta sección se aborda el estudio de las propiedades descritas en la Definición 3.1.1 para un operador, a través de extensiones del mismo, pero ahora en un contexto un poco más general en relación a lo que a la naturaleza y condiciones del subespacio se refiere. Se considerará que la norma sobre el subespacio vectorial en cuestión no necesariamente es la norma heredada, o inducida, del espacio y se mostrará, bajo ciertas condiciones, que las propiedades mencionadas en la Definición 3.1.1 se trasmiten de un operador a sus extensiones y viceversa.

Siguiendo a B. Barnes [16], se asumirá que $Y = (Y, \| \, . \, \|_Y)$ es un espacio de Banach y que $X = (X, \| \, . \, \|_X)$ es un subespacio de Y el cual también es Banach, pero $X \neq Y$ y además X está continuamente embebido en Y. Esto es, la restricción $I_Y \mid_X : (X, \| \, . \, \|_X) \to (X, \| \, . \, \|_Y)$ es continua. Se denota por

$$\mathcal{M}(X,Y) = \{T \in \mathcal{L}(X) : T \text{ tiene una extensión } \overline{T} \in \mathcal{L}(Y) \text{ y } \overline{T}(Y) \subseteq X\}.$$

Todo operador $T \in \mathcal{L}(X)$ de rango finito está en $\mathcal{M}(X,Y)$. Pues, si $\dim T(X) < \infty$, existe un subespacio $Z \subseteq Y$ tal que $Y = T(X) \oplus Z$. Entonces codim $Z = \dim T(X) < \infty$, y como Y es de Banach, $T(X)$ es complementado. Es decir, la proyección $\overline{P}$ de Y sobre $T(X)$ es acotada, además extiende a T y $\overline{P}(Y) \subseteq X$. Es fácil ver que $0 \in \sigma(\overline{T})$ para cualquier extensión $\overline{T}$ de $T \in \mathcal{M}(X,Y)$, ya que $R(\overline{T}) = \overline{T}(Y) \subseteq X \neq Y$. Sin embargo, $\sigma(T)$ y $\sigma(\overline{T})$ pueden diferir sólo en 0. Adicionalmente, X es un subespacio $\overline{T}$-invariante, puesto que $\overline{T}(X) \subseteq \overline{T}(Y) \subseteq X$. Note también que $\mathcal{M}(X,Y)$ es un ideal a izquierda de $\mathcal{L}(X)$, i.e., si $T \in \mathcal{M}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{L}(X)$ entonces $ST \in \mathcal{M}(X,Y)$.

B. Barnes [16] estudió algunas relaciones entre los espectros clásicos de la teoría de Fredholm para un operador $T \in \mathcal{M}(X,Y)$ y los espectros de extensiones $\overline{T} \in \mathcal{L}(Y)$ de T, y mostró el siguiente resultado.

Teorema 3.3.1. *Sea $\overline{T} \in \mathcal{L}(Y)$ una extensión de $T \in \mathcal{M}(X,Y)$. Entonces:*

(i) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma(\overline{T}) \setminus \{0\}$;

(ii) $\sigma_f(T) \setminus \{0\} = \sigma_f(\overline{T}) \setminus \{0\}$;

(iii) $\sigma_w(T) \setminus \{0\} = \sigma_w(\overline{T}) \setminus \{0\}$;

(iv) Si $\lambda \notin \sigma_f(T)$, *ind* $(\lambda I - T) =$ *ind* $(\lambda I - \overline{T})$ *para todo* $\lambda \neq 0$;

(v) Si X es denso en Y, entonces $\sigma(T) = \sigma(\overline{T})$, $\sigma_f(T) = \sigma_f(\overline{T})$ *y* $\sigma_w(T) = \sigma_w(\overline{T})$.

(vi) Si X es cerrado, pero no complementado en Y, entonces $\sigma(T) = \sigma(\overline{T})$, $\sigma_f(T) = \sigma_f(\overline{T})$ *y* $\sigma_w(T) = \sigma_w(\overline{T})$.

Demostración. Ver [16, Teorema 4]

□

Similarmente al Lemma 2.1.4, a continuación se establecen algunas relaciones básicas entre los parámetros introducidos en la primera sección del Capítulo 1, para un operador $T \in \mathcal{M}(X,Y)$ y una extensión $\overline{T} \in \mathcal{L}(Y)$.

Lema 3.3.1. *Sea $\overline{T} \in \mathcal{L}(Y)$ una extensión de $T \in \mathcal{M}(X,Y)$. Entonces, para todo $\lambda \neq 0$:*

(i) $N((\lambda I - \overline{T})^m) = N((\lambda I - T)^m)$, *cualquiera sea $m \in \mathbb{N}$;*

(ii) $R((\lambda I - T)^m) = R((\lambda I - \overline{T})^m) \cap X$, *cualquiera sea $m \in \mathbb{N}$;*

(iii) $\alpha(\lambda I - \overline{T}) = \alpha(\lambda I - T)$;

(iv) $p(\lambda I - \overline{T}) = p(\lambda I - T)$;

(v) $\beta(\lambda I - \overline{T}) = \beta(\lambda I - T)$.

Demostración. Si denotamos $M = X$, entonces $T = \overline{T}\mid_M$. Así, el resultado es una aplicación inmediata del Lemma 2.1.4.

□

El siguiente resultado provee una importante relación de índole topológica entre los rangos $R(\lambda I - \overline{T})$ y $R(\lambda I - T)$. En la prueba de este resultado, se emplea la noción de subespacio paracerrado (o paracompleto) y el Lema de Neubauer (ver [61]). Adicionalmente, están involucrados un parámetro conocido como el *módulo minimal reducido* de un operador $T \in \mathcal{L}(X)$, definido como

$$\gamma(T) = \inf_{x \notin N(T)} \frac{\| Tx \|}{\text{dist } (x, N(T))}.$$

El cual permite caracterizar la cualidad de un operador no nulo de tener rango cerrado en la forma siguiente ([52, Proposición 36.1]),

$$T(X) \text{ es cerado si y sólo si } \gamma(T) > 0.$$

Lema 3.3.2. *Sea $\overline{T} \in \mathcal{L}(Y)$ una extensión de $T \in \mathcal{M}(X,Y)$. Supóngase que X es denso en Y o que X es cerrado en Y. Si $\lambda \neq 0$, entonces $R(\lambda I - \overline{T})$ es cerrado en Y si y sólo si $R(\lambda I - T)$ es cerrado en X.*

Demostración. (Suficiencia) Por el Lemma 3.3.1(i), para cualquier $x \in X$

$$\begin{aligned} \| (\lambda I - T)x \| &= \| (\lambda I - \overline{T})x \| \\ &\geq \gamma(\lambda I - \overline{T}) \,\mathrm{dist}\, (x, N(\lambda I - \overline{T})) \\ &= \gamma(\lambda I - \overline{T}) \,\mathrm{dist}\, (x, N(\lambda I - T)) \end{aligned}$$

Así,

$$\gamma(\lambda I - T) = \inf_{x \notin N(\lambda I - T)} \frac{\| (\lambda I - T)x \|}{\mathrm{dist}\, (x, N(\lambda I - T))} \geq \gamma(\lambda I - \overline{T}).$$

Por lo cual, se tiene que $\gamma(\lambda I - T) \geq \gamma(\lambda I - \overline{T})$. Entonces $\gamma(\lambda I - \overline{T}) > 0$ implica $\gamma(\lambda I - T) > 0$. Esto muestra, por ser X e Y espacios de Banach, que

$$R(\lambda I - \overline{T}) \text{ cerrado en } Y \Rightarrow R(\lambda I - T) \text{ cerrado en } X.$$

(Necesidad) Supóngase que $R(\lambda I - T)$ es cerrado en X. Considere los dos casos siguientes.

Caso I: X es denso en Y.
En este caso, observe que

$$\| (\lambda I - T)x \| \geq \gamma(\lambda I - T) \,\mathrm{dist}\, (x, N(\lambda I - T)), \quad \forall x \in X.$$

Supóngase ahora que $y \in Y$. Como X se supone denso en Y, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ tal que $y = \lim_{n \to \infty} x_n$. Según esto, y por el Lema 3.3.1(i),

$$\begin{aligned} \| (\lambda I - \overline{T})y \| &= \| (\lambda I - \overline{T})(\lim_{n \to \infty} x_n) \| \\ &= \lim_{n \to \infty} \| (\lambda I - T)(x_n) \| \\ &\geq \lim_{n \to \infty} \gamma(\lambda I - T) \,\mathrm{dist}\, (x_n, N(\lambda I - T)) \\ &= \gamma(\lambda I - T) \,\mathrm{dist}\, (\lim_{n \to \infty} x_n, N(\lambda I - T)) \\ &= \gamma(\lambda I - T) \,\mathrm{dist}\, (y, N(\lambda I - \overline{T})) \end{aligned}$$

De lo cual,

$$\gamma(\lambda I - \overline{T}) = \inf_{y \notin N(\lambda I - \overline{T})} \frac{\| (\lambda I - \overline{T})y \|}{\mathrm{dist}\, (y, N(\lambda I - \overline{T}))} \geq \gamma(\lambda I - T).$$

Luego $\gamma(\lambda I - \overline{T}) \geq \gamma(\lambda I - T)$, y como $R(\lambda I - T)$ cerrado, entonces $\gamma(\lambda I - T) > 0$. Así, $\gamma(\lambda I - \overline{T}) > 0$. Lo cual muestra que $R(\lambda I - \overline{T})$ es cerrado en Y.

Caso II: X es cerrado en Y.
Por el Lema 3.3.1(ii), $R(\lambda I - \overline{T}) \cap X = R(\lambda I - T)$. Como X es cerrado en Y, se tiene que $R(\lambda I - \overline{T}) \cap X$ es cerrado en Y. Además, si $\lambda \neq 0$ los polinomios $\lambda - z$ y z no tiene divisores comunes, luego existen dos polinomios $u(z)$ y $v(z)$ tales que $1 = (\lambda - z)u(z) + zv(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces $\overline{T}^0 = (\lambda I - \overline{T})u(\overline{T}) + \overline{T}v(\overline{T})$ y así $Y \subseteq R(\lambda I - \overline{T}) + R(\overline{T}) \subseteq R(\lambda I - \overline{T}) + X \subseteq Y$. Es decir $R(\lambda I - \overline{T}) + X = Y$, lo que implica que $R(\lambda I - \overline{T}) + X$ es cerrado en Y. Como $R(\lambda I - \overline{T})$ y X son subespacios paracerrados, y $R(\lambda I - \overline{T}) \cap X$ y $R(\lambda I - \overline{T}) + X$ son cerrados en Y, por el Lema de Neubauer [61, Prop. 2.1.2], se tiene que $R(\lambda I - \overline{T})$ es cerrado en Y.

$\square$

De la caracterización de Atkinson para los operadores de Fredholm, $T \in \mathcal{L}(X)$ es un operador de Fredholm si y sólo si su proyección es invertible en el álgebra cociente $\mathcal{L}(X)/\mathcal{F}(X)$, donde $\mathcal{F}(X)$ es el ideal de los operadores de rango finito del álgebra $\mathcal{L}(X)$. Más generalmente, T es un operador semi-Fredholm superior (resp., inferior) si y sólo si su proyección es invertible a izquierda (resp., derecha) en el álgebra cociente $\mathcal{L}(X)/\mathcal{F}(X)$. En base a éstos hechos, y por los Lemas 3.3.1 y 3.3.2, las igualdades del Teorema 3.3.1 se pueden extender a otros espectros derivados de la teoría de Fredholm.

Teorema 3.3.2. *Sea $\overline{T} \in \mathcal{L}(Y)$ una extensión de $T \in \mathcal{M}(X,Y)$. Entonces:*

(i) $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{ap}}(\overline{T}) \setminus \{0\}$;

(ii) $\sigma_{\mathrm{uf}}(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{uf}}(\overline{T}) \setminus \{0\}$;

(iii) $\sigma_{\mathrm{uw}}(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{uw}}(\overline{T}) \setminus \{0\}$;

(iv) $\sigma_{\mathrm{ub}}(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{ub}}(\overline{T}) \setminus \{0\}$;

(v) $\sigma_{\mathrm{b}}(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{b}}(\overline{T}) \setminus \{0\}$;

(vi) Si X es denso en Y, entonces $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(\overline{T})$ *y* $\sigma_{\mathrm{b}}(T) = \sigma_{\mathrm{b}}(\overline{T})$.

(vii) Si X es cerrado, pero no complementado en Y, entonces $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(\overline{T})$ y $\sigma_{\mathrm{b}}(T) = \sigma_{\mathrm{b}}(\overline{T})$.

(viii) Si X es denso en Y y $T(X)$ es cerrado en X, entonces $\sigma_{\mathrm{uf}}(T) = \sigma_{\mathrm{uf}}(\overline{T})$, $\sigma_{\mathrm{uw}}(T) = \sigma_{\mathrm{uw}}(\overline{T})$ y $\sigma_{\mathrm{ub}}(T) = \sigma_{\mathrm{ub}}(\overline{T})$.

(ix) Si X es cerrado, pero no complementado en Y, y $T(X)$ es cerrado en X, entonces $\sigma_{\mathrm{uf}}(T) = \sigma_{\mathrm{uf}}(\overline{T})$, $\sigma_{\mathrm{uw}}(T) = \sigma_{\mathrm{uw}}(\overline{T})$ y $\sigma_{\mathrm{ub}}(T) = \sigma_{\mathrm{ub}}(\overline{T})$.

Demostración. (i), (ii), (iii), (iv) y (v) siguen de los Lemas 3.3.1 y 3.3.2.

(vi) Según lo demostrado en (i), $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{ap}}(\overline{T}) \setminus \{0\}$. Ahora, si $0 \notin \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$ entonces T es inyectivo. En consecuencia T tiene la SVEP en 0, y resulta que $0 \notin \Xi(T)$. Como $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) \cup \Xi(T) = \sigma(T) = \sigma(\overline{T})$; se tiene que $0 \notin \sigma(\overline{T})$, lo cual es una contradicción. De manera similar, $0 \notin \sigma_{\mathrm{ap}}(\overline{T})$ implica $\overline{T}$ inyectivo. Así, $\overline{T}$ tiene la SVEP en 0, y entonces $0 \notin \Xi(\overline{T})$. Nuevamente, como $\sigma_{\mathrm{ap}}(\overline{T}) \cup \Xi(\overline{T}) = \sigma(\overline{T})$, se tiene que $0 \notin \sigma(\overline{T})$, lo cual es una contradicción. En consecuencia $0 \in \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$ y $0 \in \sigma_{\mathrm{ap}}(\overline{T})$, así resulta la igualdad $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) = \sigma_{\mathrm{ap}}(\overline{T})$.

Para la igualdad $\sigma_{\mathrm{b}}(T) = \sigma_{\mathrm{b}}(\overline{T})$, observe que $\sigma_{\mathrm{w}}(T) = \sigma_{\mathrm{w}}(\overline{T})$ entonces $\sigma_{\mathrm{b}}(T) = \sigma_{\mathrm{w}}(T) \cup \operatorname{acc} \sigma(T) = \sigma_{\mathrm{w}}(\overline{T}) \cup \operatorname{acc} \sigma(\overline{T}) = \sigma_{\mathrm{b}}(\overline{T})$.

(vii) La prueba es análoga a la parte (vi).

(viii) Para mostrar la igualdad $\sigma_{\mathrm{uf}}(T) = \sigma_{\mathrm{uf}}(\overline{T})$, note en primer lugar que $\sigma_{\mathrm{uf}}(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{uf}}(\overline{T}) \setminus \{0\}$. Supóngase que $0 \notin \sigma_{\mathrm{uf}}(T)$. Entonces T es un operador semi-Fredholm superior, así su proyección en el álgebra $\mathcal{L}(X)/\mathcal{F}(X)$ es invertible a izquierda. Por lo cual, existen un operador $S \in \mathcal{L}(X)$ y un operador $F \in \mathcal{F}(X)$ tales que $ST - F$ es la identidad sobre X. Entonces, $\overline{P} = S\overline{T} - \overline{F}$ es la proyección de Y sobre X. Así $Y = X \oplus N(\overline{P})$, lo que implica que X es cerrado en Y. En consecuencia $X = Y$, una contradicción. Por lo tanto, $0 \in \sigma_{\mathrm{uf}}(T)$. Se mostrará ahora que $0 \in \sigma_{\mathrm{uf}}(\overline{T})$. Para tal fin, supóngase que $0 \notin \sigma_{\mathrm{uf}}(\overline{T})$. Entonces $\overline{T}$ es un operador semi-Fredholm superior, esto implica que $\alpha(\overline{T}) < \infty$. Pero, como $N(T) = N(\overline{T}) \cap X \subseteq N(\overline{T})$, sigue que $\alpha(T) < \infty$. Ahora, por hipótesis, $T(X)$ es cerado en X, entonces T es un operador semi-Fredholm superior, y como se vio anteriormente esto es imposible.

Así $0 \in \sigma_{\mathrm{uf}}(\overline{T})$ y $0 \in \sigma_{\mathrm{uf}}(T)$, resultando la igualdad $\sigma_{\mathrm{uf}}(T) = \sigma_{\mathrm{uf}}(\overline{T})$.

Para mostrar la igualdad $\sigma_{\mathrm{uw}}(T) = \sigma_{\mathrm{uw}}(\overline{T})$, note que por la parte (iii), se conoce que $\sigma_{\mathrm{uw}}(T) \setminus \{0\} = \sigma_{\mathrm{uw}}(\overline{T}) \setminus \{0\}$. Así, bastará sólo mostrar que $0 \in \sigma_{\mathrm{uw}}(T) \cap \sigma_{\mathrm{uw}}(\overline{T})$. Supóngase que $0 \notin \sigma_{\mathrm{uw}}(T)$. Entonces T es un operador semi-Fredholm superior, pues T es semi-Weyl superior. Procediendo como en el párrafo anterior, sigue que X tiene un complemento cerrado en Y, contradiciendo el supuesto que X no es complementado en Y. De manera similar, si $0 \notin \sigma_{\mathrm{uw}}(\overline{T})$ entonces $\overline{T}$ es un operador semi-Fredholm superior. Procediendo como antes, sigue que X tiene un complemento cerrado en Y, lo cual nuevamente contradice el supuesto que X no es complementado en Y. Así, $0 \in \sigma_{\mathrm{uw}}(T) \cap \sigma_{\mathrm{uw}}(\overline{T})$ y entonces $\sigma_{\mathrm{uw}}(T) = \sigma_{\mathrm{uw}}(\overline{T})$.

Conforme a la parte (vi), se concluye que

$$\sigma_{\mathrm{ub}}(T) = \sigma_{\mathrm{uw}}(T) \cup \operatorname{acc}\sigma_{\mathrm{ap}}(T) = \sigma_{\mathrm{uw}}(\overline{T}) \cup \operatorname{acc}\sigma_{\mathrm{ap}}(\overline{T}) = \sigma_{\mathrm{ub}}(\overline{T}).$$

Entonces $\sigma_{\mathrm{ub}}(T) = \sigma_{\mathrm{ub}}(\overline{T})$.

(ix) De manera similar a lo demostrado en la parte (viii), para la igualdad $\sigma_{\mathrm{uf}}(T) = \sigma_{\mathrm{uf}}(\overline{T})$, es suficiente examinar el caso $\lambda = 0$. Supóngase que $0 \notin \sigma_{\mathrm{uf}}(T)$, procediendo como en la parte (viii), existe una proyección acotada $\overline{P}$ de Y sobre X. Así, $Y = X \oplus N(\overline{P})$ y entonces X es complementado en Y, una contradicción. En consecuencia, $0 \in \sigma_{\mathrm{uf}}(T)$. La prueba de $0 \in \sigma_{\mathrm{uf}}(\overline{T})$, también es análoga a la parte (viii). Por lo tanto $0 \in \sigma_{\mathrm{uf}}(\overline{T})$ y $0 \in \sigma_{\mathrm{uf}}(T)$, así resulta la igualdad $\sigma_{\mathrm{uf}}(T) = \sigma_{\mathrm{uf}}(\overline{T})$.

Procediendo de nuevo como en la parte (viii), se obtienen las igualdades $\sigma_{\mathrm{uw}}(T) = \sigma_{\mathrm{uw}}(\overline{T})$ y $\sigma_{\mathrm{ub}}(T) = \sigma_{\mathrm{ub}}(\overline{T})$.

$\square$

Observación 3.3.1. Según lo mostrado en el Teorema 3.3.2, partes (viii) y (ix), se concluye que $0 \notin \sigma_{\mathrm{ap}}(T) \setminus \sigma_{\mathrm{uw}}(T)$, $0 \notin \sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{uw}}(T)$, $0 \notin \sigma(T) \setminus \sigma_{\mathrm{w}}(T)$, $0 \notin \sigma_{\mathrm{ap}}(\overline{T}) \setminus \sigma_{\mathrm{uw}}(\overline{T})$, $0 \notin \sigma(\overline{T}) \setminus \sigma_{\mathrm{uw}}(\overline{T})$ y $0 \notin \sigma(\overline{T}) \setminus \sigma_{\mathrm{w}}(\overline{T})$.

Como una inmediata consecuencia del Lema 3.3.1, y los Teoremas 3.3.1 y 3.3.2, se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.3.3. *Sea $\overline{T} \in \mathcal{L}(Y)$ una extensión de $T \in \mathcal{M}(X,Y)$. Para cualquiera de las siguientes condiciones:*

(i) X es un subespacio propio denso en Y;

(ii) X es cerrado, pero no complementado en Y.

Si $T(X)$ es cerrado en X, o 0 no es un punto aislado de $\sigma(T)$, las siguientes igualdades son válidas:

(i) $p_{00}(\overline{T}) = p_{00}(T)$;

(ii) $p_{00}^{a}(\overline{T}) = p_{00}^{a}(T)$;

(iii) $\pi_{00}(\overline{T}) = \pi_{00}(T)$;

(iv) $\pi_{00}^{a}(\overline{T}) = \pi_{00}^{a}(T)$.

Demostración. (i) y (ii) siguen del Teorema 3.3.2.

(iii) Para demostrar la igualdad $\pi_{00}(\overline{T}) = \pi_{00}(T)$, por el Lema 3.3.1(iii), es suficiente examinar el caso $\lambda = 0$. Se afirma que $0 \notin \pi_{00}(T)$. Para mostrar esta afirmación, suponga que $0 \in \pi_{00}(T)$. Entonces $\alpha(T) < \infty$, bajo el supuesto que $T(X)$ es cerrado en X, T es un operador semi-Fredholm superior. Como en la prueba del Teorema 3.3.2, se obtiene que $X = Y$, una contradicción. Luego, como se afirmó, $0 \notin \pi_{00}(T)$. De manera similar, $0 \in \pi_{00}(\overline{T})$ implica $\alpha(T) < \infty$, y como $N(T) = N(\overline{T}) \cap X \subseteq N(\overline{T})$. Nuevamente se tiene que T es un operador semi-Fredholm superior, lo cual conduce a una contradicción de la hipótesis. Luego $0 \notin \pi_{00}(\overline{T})$. Ahora, por el Teorema 3.3.1, $\sigma(T) = \sigma(\overline{T})$. Entonces $\operatorname{iso}\sigma(T) = \operatorname{iso}\sigma(\overline{T})$. Además, por el Lema 3.3.1(iii), $\alpha(\lambda I - T) = \alpha(\lambda I - \overline{T})$ para todo $\lambda \neq 0$. En consecuencia, se tiene la igualdad $\pi_{00}(\overline{T}) = \pi_{00}(T)$. Por otra parte, bajo el supuesto que 0 no es un punto aislado de $\sigma(T)$, se tendrá que $0 \notin \operatorname{iso}\sigma(T) = \operatorname{iso}\sigma(\overline{T})$. Lo cual implica, por el Lema 3.3.1(iii), que $\pi_{00}(\overline{T}) = \pi_{00}(T)$.

(iv) La prueba es análoga a la parte (iii).

□

Finaliza esta sección con sendos resultados principales análogos al Teorema y el Corolario 2.2.1.

Teorema 3.3.3. *Sea $\overline{T} \in \mathcal{L}(Y)$ una extensión de $T \in \mathcal{M}(X,Y)$. Para cualquiera de las siguientes condiciones:*

(i) X es un subespacio propio denso en Y;

(ii) X es cerrado, pero no complementado en Y.

Si $T(X)$ es cerrado en X, o 0 no es un punto aislado de $\sigma(T)$, entonces T satisface la propiedad (i) (resp.,(ii)-(xii)) de la Definición 3.1.1 si y sólo si $\overline{T}$ satisface la propiedad (i)(resp.,(ii)-(xii)) de la Definición 3.1.1.

Demostración. Por los Teoremas 3.3.1, 3.3.2 y el Lema 3.3.3, además considerando la Observación 3.3.1, se obtiene inmediatamente el resultado. Para el caso de la propiedad (x), observe la equivalencia entre el Teorema de Browder y el Teorema generalizado de Browder mostrada en [5].

□

Recordemos que cada punto aislado de $\sigma(T)$ es un punto de frontera de $\sigma(T)$ y que T tiene la SVEP en cada punto punto de frontera de $\sigma(T)$. Además, por ser X de Banach, se cumple que $T(X)$ es cerrado en X si $\beta(T) < \infty$. En consecuencia, la condición 0 no es un punto aislado de $\sigma(T)$, se puede reemplazar por la condición: $p(T) = \infty$ o $q(T) = \infty$. Así como también, se puede remplazar la condición $T(X)$ es cerrado en X por la condición $\beta(T) < \infty$. Por lo tanto, del Teorema se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.3.1. *Sea $\overline{T} \in \mathcal{L}(Y)$ una extensión de $T \in \mathcal{M}(X,Y)$. Para cualquiera de las siguientes condiciones:*

(i) X es un subespacio propio denso en Y;

(ii) X es cerrado, pero no complementado en Y.

Si $\beta(T) < \infty$, o $p(T) = \infty$, o $q(T) = \infty$, entonces T satisface la propiedad (i) (resp.,(ii)-(xii)) de la Definición 3.1.1 si y sólo si $\overline{T}$ satisface la propiedad (i)(resp.,(ii)-(xii)) de la Definición 3.1.1.

Parte II: Teoremas de Perturbación

Con el fin de dar una orientación de los temas abordados en esta parte del libro, se realizará en primer lugar una breve reseña histórica de los tópicos a desarrollar. El problema de la clase de perturbación en Teoría de Fredholm se refiere a la estabilidad de los operadores semi-Fredholm bajo perturbaciones aditivas y tuvo sus orígenes, a principios del siglo XX, con el estudio abstracto de ecuaciones integrales. Los resultados dados por Kato en 1958 [58], y por Vladimirskii en 1967 [87], son el punto de partida para el estudio formal de este problema. Kato y Vladimirskii establecen, respectivamente, que la suma de un operador semi-Fredholm superior y un operador estrictamente singular es semi-Fredholm superior, y que la suma de un operador semi-Fredholm inferior y un operador estrictamente cosingular es semi-Fredholm inferior. De modo que, el problema de la clase de perturbación consiste en determinar, si es cierto o no que los operadores estrictamente singulares y los operadores estrictamente cosingulares son los únicos operadores que satisfacen estas propiedades, respectivamente. Este problema fue planteado en 1960 por Gohberg, Markus y Feldman [43] para operadores semi-Fredholm superior. Luego este mismo problema fue propuesto por Caradus en 1974, [25], y por Pietsch en 1980, [76].

La clase de perturbación para operadores Fredholm Φ está totalmente determinada, de hecho coincide con la clase de operadores inesenciales (ver [62]). Sin embargo, la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm superior Φ_+ y semi-Fredholm inferior Φ_- es, en general, desconocida. Por los resultados antes mencionados de Kato y Vladimirskii se tiene que la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm supe-

rior, $P\Phi_+$, contiene a los operadores estrictamente singulares $\mathcal{SS}(X,Y)$ y que la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm inferior, $P\Phi_-$,contiene a los operadores estrictamente cosingulares $\mathcal{SC}(X,Y)$.
Durante años se ha estudiado el problema de la clase de perturbación, obteniendo solución positiva para pares de espacios concretos, este problema permaneció si resolverse en su totalidad durante más de 40 años y no fue hasta el 2003 que González, [49], logró resolver el problema negativamente, utilizando producto de espacios de Banach exóticos de tipo hereditariamente indescomponible (H.I.) y de tipo cociente indescomponible (Q.I.).
Aún cuando este problema tiene solución negativa, es interesante encontrar pares de espacios de Banach X, Y concretos que lo resuelvan, ya que esto proporciona una caracterización intrínseca de los operadores en $P\Phi_+$ y $P\Phi_-$, puesto que la propiedad que caracteriza a los operadores $K \in \mathcal{SS}(X,Y)$ depende de la acción de K sobre subespacios cerrados de X, mientras que la propiedad que caracteriza a los operadores $K \in P\Phi_+(X,Y)$ depende de las propiedades de la suma de K con todos los operadores en $\Phi_+(X,Y)$. El objetivo de esta parte del curso es proporcionar en detalle los resultados recientes en este tema, de manera que el participante pueda familiarizarse con estos tópicos.

Capítulo 4

Operadores asociados a la teoría de perturbación

En este capítulo se recopilan algunas nociones básicas necesarias para comprender los capítulos posteriores, así como también propiedades de ciertas clases de operadores lineales acotados, como lo son los operadores estrictamente singulares, estrictamente cosingulares, improyectivos e inesenciales.

4.1. Nociones básicas

En esta sección se recuerdan algunos conceptos básicos y se establecen notaciones que serán usadas a lo largo de esta parte del libro.
El espacio dual de X, se denota por X^*, y está formado por todos los funcionales lineales y acotados definidos sobre X. Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se denota por $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ el operador adjunto de T, el cual se define como $(T^*f)(x) = f(Tx)$ para cada $x \in X$ y cada $f \in Y^*$.
Sea M un subconjunto de un espacio de Banach X, el *anulador* de M, el cual se denota por $M^\perp$, es el subespacio cerrado de X^* definido por:

$$M^\perp = \{f \in X^* : f(x) = 0 \, \text{para cada} \, x \in M\}.$$

El *preanulador* de un subconjunto W de X^*, el cual se denota por ${}^\perp W$, es el subespacio cerrado de X definido por:

$${}^\perp W = \{x \in X : f(x) = 0 \, \text{para cada} \, f \in W\}.$$

Un operador $P \in \mathcal{L}(X,X)$ es una proyección, si $P^2 = P$. Un subespacio M de X se denomina complementado si existe una proyección $P \in \mathcal{L}(X,X)$ tal que $R(P) = M$. Todo subespacio de X de dimensión finita (o codimensión finita) es complementado. Subespacios complementados son siempre cerrados. Si M es un subespacio complementado de X, entonces existe un subespacio cerrado N de X tal que X es suma directa de M yN, esto se denota en la forma $X = M \oplus N$ y significa que $M \cap N = \{0\}$ y $X = M + N$, además se cumple que X/M es isomorfo a N.
Los siguientes resultados son bien conocidos, se puede consultar [59] y [68] para una exposición más detallada:

1. Si M es un subespacio cerrado de X, entonces $X^*/M^\perp$ es isomorfo a M^* y $M^\perp$ es isomorfo a $(X/M)^*$.

2. Si M es un subespacio cerrado de X entonces $\ ^\perp(M^\perp) = M$.

3. Sea M un subespacio de X^*, M es cerrado en la topología débil* si y sólo si $(^\perp M)^\perp = M$.

4. Si M es un subespacio reflexivo de X^* entonces $(^\perp M)^\perp = M$.

5. Si M y N son subespacios cerrados de X tales que $X = M \oplus N$ entonces $X^* = M^\perp \oplus N^\perp$.

6. Si M y N son subespacios cerrados de X entonces $(M+N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$

7. Si M y N son subespacios cerrados de X entonces $(M+N)$ es cerrado en X sí y sólo si $M^\perp + N^\perp$ es cerrado en X^*

Si M es un subespacio de X entonces se denota por J_M la función inclusión de M en X y si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ entonces $T|_M$ denota la composición $T \circ J_M$, si N es un subespacio de Y entonces se denota por Q_N la aplicación cociente de Y en Y/N. Se denota por I_X al operador identidad sobre X. Se dice que un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es un isomorfismo si es inyectivo y tiene rango cerrado, esto es equivalente a decir que existe una constante $C > 0$ tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in X$.

Lema 4.1.1. [7, Lema 2.2] *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$,*

1. *Si M es un subespacio cerrado de X tal que $T|_M$ es un isomorfismo, $T(M)$ es complementado en Y con complemento cerrado N entonces M es complementado en X y $T^{-1}(N)$ es el complemento cerrado de M*

2. *Si N es un subespacio cerrado de Y tal que $Q_N \circ T$ es sobreyectiva, $T^{-1}(N)$ es complementado en X con complemento cerrado M entonces N es complementado en Y y $T(M)$ es el complemento cerrado de N*

4.2. Bases en espacios de Banach

En esta sección se introduce el concepto de base de Schauder de un espacio de Banach y la noción correspondiente de sucesión básica. Para más detalles de este tema se recomienda ver [11] y [64]

Definición 4.2.1. Sea X un espacio de Banach, una sucesión (x_n) de elementos de X se denomina *base* de X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares (a_n) tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.

Definición 4.2.2. Sean X un espacio de Banach y (x_n) una sucesión de elementos de X, suponga que existe una sucesión (x_n^*) en el espacio dual X^* tal que

1. $x_k^*(x_j) = 1$ si $j = k$ y $x_k^*(x_j) = 0$ si $j \neq k$,
2. para cada $x \in X$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$.

Entonces la sucesión (x_n) es llamada una *base de Schauder* para X y los funcionales (x_n^*) son llamados *funcionales biortogonales* asociados a (x_n).

Teorema 4.2.1. [11, Teorema 1.1.3] *Sea X un espacio de Banach (separable), una sucesión (x_n) en X es base de Schauder para X si y sólo si (x_n) es una base para X.*

Observe que si (x_n) es una base, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, fijo, se tiene que

$$x_k^*(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) := a_k,$$

y la expresión

$$P_k(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) := \sum_{n=1}^{k} a_n x_n$$

define un operador acotado $P_k : X \to X$ tal que $\lim_{k\to\infty} P_k(x) = x$ para cada $x \in X$, que se denomina *proyección natural* asociada a la base (x_k).

Definición 4.2.3. Sea (x_n) una base para un espacio de Banach X y considere la sucesión (P_k) de las proyecciones naturales asociadas a la base, entonces la constante $K > 0$ tal que $K = \sup_n \|P_n\|$ se denomina *constante básica* de la sucesión (x_n). En el caso que $K = 1$ se dice que la base (x_n) es monótona.

Definición 4.2.4. Una sucesión (x_n) en un espacio de Banach X se dice *sucesión básica*, si (x_n) es base de $[x_n]$, es decir, si es base del espacio cerrado generado por (x_n).

Teorema 4.2.2. [11, Proposición 1.1.9] *Una sucesión (x_n), no nula, en un espacio de Banach X es básica si y sólo si existe una constante positiva K tal que*

$$\|\sum_{j=1}^{m} a_j x_j\| \leq K \|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\|$$

para toda sucesión de escalares (a_n) y para cualquier par de enteros m, n tales que $m \leq n$.

Definición 4.2.5. Dos bases, o sucesiones básicas, (x_n) y (y_n) en los espacios de Banach X, Y, respectivamente, se denominan *equivalentes*, lo cual se denota por $(x_n) \sim (y_n)$, si siempre que se tome una sucesión de escalares (a_n), se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ converge.

Teorema 4.2.3. [11, Teorema 1.3.2] *Dos bases, o sucesiones básica, (x_n) y (y_n) son equivalentes si y sólo si existe un isomorfismo $T : [x_n] \to [y_n]$ tal que $T(x_n) = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Corolario 4.2.1. [11, Corolario 1.3.4] *Sean (x_n) y (y_n) dos bases para los espacios de Banach X, Y, respectivamente, entonces $(x_n) \sim (y_n)$ si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que para toda sucesión de* *escalares* (a_n)*, distinta de cero para una cantidad finita de términos, se tiene que*

$$C^{-1}\|\sum_{n=1}^{\infty} a_i y_i\| \leq \|\sum_{n=1}^{\infty} a_i x_i\| \leq C\|\sum_{n=1}^{\infty} a_i y_i\|.$$

Definición 4.2.6. Una sucesión básica (x_n) en un espacio X se dice *complementada* si el espacio cerrado generado por (x_n), el cual denotaremos por $[x_n]$, es complementado como subespacio de X

Teorema 4.2.4. [11, Teorema 1.3.9] (Principio de las pequeñas perturbaciones) *Sea* (x_n) *una sucesión en un espacio de Banach* X *con constante básica* K*. Si* (y_n) *es una sucesión en* X *tal que*

$$2K\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n - y_n\|}{\|x_n\|} = \theta < 1.$$

Entonces

1. (y_n) *es una sucesión básica con constante a lo más* $K(1+\theta)(1-\theta)^{-1}$.

2. (y_n) *es base si* (x_n) *lo es, en tal caso la constante básica de* (y_n) *es a lo más* $K(1+\theta)(1-\theta)^{-1}$.

3. $[y_n]$ *es complementado si* $[x_n]$ *lo es.*

Teorema 4.2.5. [11, Proposición 1.5.4] (Principio de selección Bessaga-Pełczyński) *Si* (x_n) *es una sucesión débil nula en un espacio de Banach* X *tal que* $\inf_n \|x_n\| > 0$ *entonces* (x_n) *tiene una subsucesión básica.*

Teorema 4.2.6. [11, Teorema 1.5.6] *Sea* S *un subconjunto acotado de un espacio de Banach* X *tal que* $0 \notin \overline{S}^{\|\cdot\|}$*, entonces las siguientes son equivalentes*

(i) S *no contiene sucesión básica*

(ii) $\overline{S}^{w}$ *es débil compacta y no contiene al* 0

Teorema 4.2.7. [11, Lema 1.6.1] *Si* (x_n) *es una sucesión básica en un espacio de Banach* X *y* $x \in X$ *es un punto de clausura débil de* (x_n) *entonces* $x = 0$.

Teorema 4.2.8. [11, Corolario 1.6.4] *Un espacio de Banach X es reflexivo si y sólo si toda sucesión acotada tiene una subsucesión que converge débilmente*

Teorema 4.2.9. [11, Teorema 10.2.1] (Teorema sobre ℓ_1 de Rosenthal) *Sea (x_n) una sucesión acotada en el espacio de Banach X. Entonces (x_n) tiene una subsucesión débil de Cauchy, o (x_n) tiene una subsucesión equivalente a la base unitaria de ℓ_1.*

Definición 4.2.7. Una base (x_n) de un espacio de Banach X se llama *incondicional* si para cada $x \in X$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n$ converge incondicionalmente.

4.3. Operadores estrictamente singulares, estrictamente cosingulares

En 1958 Kato [58] introduce el concepto de operador estrictamente singular como una generalización del concepto de operador compacto. En 1965 Pelczynski [73] introduce la noción dual de operador estrictamente singular, esta clase de operadores se denominan estrictamente cosingulares. En esta sección se estudian estos tipos de operadores y algunas de sus propiedades

Definición 4.3.1. Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ se denomina *estrictamente singular* si ninguna restricción $T|_M$ de T a un subespacio cerrado de dimensión infinita M de X es un isomorfismo.

Definición 4.3.2. Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ se denomina *estrictamente cosingular* si no existe subespacio cerrado de codimensión infinita N de Y tal que $Q_N T$ es sobreyectiva.

Se denota por $\mathcal{SS}(X,Y)$ y $\mathcal{SC}(X,Y)$ las clases de los operadores estrictamente singular y estrictamente cosingular respectivamente. Estas operadores también se llaman *operadores de Kato* y *operadores de Pelczynski*, respectivamente. Para un estudio detallado de las propiedades básicas de estas dos clases ver [75].
En [76] se muestra que $\mathcal{SS}(X,Y)$ y $\mathcal{SC}(X,Y)$ son subespacios cerrados de $\mathcal{L}(X,Y)$, más aún, si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{SS}(X,Y)$ y $L \in \mathcal{L}(Y,Z)$

entonces $UST \in \mathcal{SS}(X,Y)$. De manera similar, si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{SC}(X,Y)$ y $L \in \mathcal{L}(Y,Z)$ entonces $UST \in \mathcal{SC}(X,Y)$.
Los operadores compactos constituyen un ejemplo de operadores que son estrictamente singular y estrictamente cosingular, tal y como lo exhibe el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1. *Todo operador compacto es estrictamente singular y estrictamente cosingular*

Demostración. Suponga que $T \notin \mathcal{SS}(X,Y)$ y $T \in \mathcal{K}(X.Y)$, entonces existe un subespacio cerrado M de dimensión infinita de X tal que $T|_M$ es un isomorfismo, como $T|_M$ es compacto y tiene rango cerrado, entonces su rango $T(M)$ tiene dimensión finita y por tanto M también tiene dimensión finita, lo cual es una contradicción. Esto muestra que $\mathcal{K}(X.Y) \subset \mathcal{SS}(X,Y)$. Análogamente, suponga que $T \notin \mathcal{SC}(X,Y)$ y $T \in \mathcal{K}(X.Y)$, entonces existe un subespacio cerrado N de codimensión infinita de Y tal que $Q_N T$ es sobreyectiva, como $Q_N T$ es compacto y tiene rango cerrado, entonces su rango Y/N tiene dimensión finita y por tanto N tiene codimensión finita, lo cual es una contradicción. Esto muestra que $\mathcal{K}(X.Y) \subset \mathcal{SC}(X,Y)$. □

En [6] se puede encontrar un ejemplo que muestra que el recíproco del teorema anterior en general no es cierto.
Otro ejemplo importante de operador estrictamente singular son los operadores débil compactos cuyo dominio satisfaga la propiedad de Dunford-Pettis. Recuerde que un espacio de Banach X satisface la propiedad de *Dunford-Pettis* si todo operador débil compacto $T\colon X \to Y$ es completamente continuo, es decir, siempre que (x_n) converja débilmente en X entonces (Tx_n) converge en norma en Y. Los espacios $L_\infty(0,1)$, $L_1(0,1)$ y el espacio $C(K)$ de las funciones continuas sobre el conjunto compacto K, son ejemplos de espacios que tienen la propiedad de Dunford-Pettis (ver [63, Teorema II. 4.30] y [11, Teorema 5.4.5]).

Proposición 4.3.1. *Sea X un espacio de Banach que satisface la propiedad de Dunford-Pettis, entonces todo operador débil compacto $T\colon X \to Y$ es estrictamente singular.*

Demostración. Sea M un subespacio cerrado de X tal que la restricción $T|_M$ es un isomorfismo y sea (x_n) una sucesión acotada en M. Como T

es débil compacto existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que $T(x_{n_k})$ converge débilmente. Dado que $T|_M$ es un isomorfismo entonces (x_{n_k}) converge débilmente. Esto nos dice que M es reflexivo. Como X satisface la propiedad de Dunford-Pettis, el operador T es completamente continuo. Entonces la sucesión (Tx_{n_k}) converge en norma, por lo que T es compacto. De aquí que M tiene dimensión finita y por tanto T es estrictamente singular. □

Los operadores estrictamente singular y cosingular están relacionados por dualidad de la siguiente manera

Teorema 4.3.2. *Sean X, Y espacios de Banach, si $T^* \in \mathcal{SC}(Y^*, X^*)$ entonces $T \in \mathcal{SS}(X, Y)$. Análogamente, si $T^* \in \mathcal{SS}(Y^*, X^*)$ entonces $T \in \mathcal{SC}(X, Y)$.*

Demostración. Suponga que $T \notin \mathcal{SS}(X, Y)$ entonces existe un subespacio cerrado M de X, de dimensión infinita, tal que la restricción $T|_M$ es un isomorfismo. Considere $M^\perp$ el anulador de M, entonces $M^\perp$ es un subespacio cerrado de X^*, de codimensión infinita. Se mostrará que $Q_{M^\perp}T^*$ es sobreyectiva. Como $T|_M : M \to Y$ es acotado inferiormente, entonces $(T|_M)^* : Y^* \to M^*$ es sobreyectiva. Ahora, sea $[f] \in X^*/M^\perp$ entonces $f|_M \in M^*$, por la sobreyectividad de $(T|_M)^*$ existe $g \in Y^*$ tal que $(T|_M)^*(g) = f|_M$, de aquí que $f - T^*(g) \in M^\perp$ y por tanto $Q_{M^\perp}(T^*g) = [f]$, es decir $Q_{M^\perp}T^*$ es sobreyectiva. De manera que $T^* \notin \mathcal{SC}(Y^*, X^*)$. Análogamente, si $T \notin \mathcal{SC}(X, Y)$ entonces existe un subespacio cerrado N de Y, de codimensión infinita, tal que $Q_N T$ es sobreyectiva. Observe que $N^\perp$ es un subespacio cerrado de Y^* de codimensión infinita. Se mostrará que $(T^*|_{N^\perp})$ es un isomorfismo. Dado que $Q_N T$ es sobreyectiva se tiene que $(Q_N T)^*$ es acotado inferiormente. Considere el isomorfismo sobreyectivo $S : (Y/N)^* \to N^\perp$ definido por $S(f)y = f(Q_N(y))$ para todo $f \in (Y/N)^*$, $y \in Y$. Ahora bien si $x \in X$ y $g \in N^\perp$, entonces

$$(T^*g)(x) = g(Tx) = S^{-1}(g)(Q_N(Tx)) = (Q_N T)^*(S^{-1}gx).$$

De donde se obtiene que $(T^*|_{N^\perp}) = (Q_N T)^* S^{-1}$, y por tanto $(T^*|_{N^\perp})$ es un isomorfismo. Luego $T^* \notin \mathcal{SC}(X, Y)$. □

En [6] se puede encontrar un ejemplo que muestra que los recíprocos de las relaciones anteriores en general no son ciertos.

4.4. Operadores inesenciales e improyectivos

Dada un álgebra de Banach $\mathfrak{A}$ con unidad $e \neq 0$, el radical de $\mathfrak{A}$, denotado por $rad\,\mathfrak{A}$, se define como

$$rad\mathfrak{A} = \{r \in \mathfrak{A} : e - ar \text{ es invertible para todo } a \in \mathfrak{A}\}.$$

Sean $\mathcal{L}(X)$ el álgebra de Banach de todos los operadores lineales y acotados de X en si mismo y $\mathcal{K}(X)$ el ideal de los operadores compactos sobre X, en 1963 Kleinecke [60] introduce la clase de operadores inesenciales de X en X, denotada por $\mathcal{I}n(X)$, como $\mathcal{I}n(X) = \pi^{-1}\{Rad(\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X))\}$, donde $\pi : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$ es la aplicación cociente. En 1978, Pietsch [75] define y estudia los operadores inesenciales actuando entre diferentes espacios espacios de Banach.

Definición 4.4.1. Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ se denomina *inesencial* si $I_X - ST \in \Phi(X)$ para todo $S \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Se denota por $\mathcal{I}n(X,Y)$ la clase de los operadores inesenciales de $\mathcal{L}(X,Y)$. En [76] se muestra que $\mathcal{I}n(X,Y)$ es en subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X,Y)$. Algunas propiedades de este tipo de operador se enuncian a continuación:

1. Si $T \in \mathcal{I}n(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ y $U \in \mathcal{L}(W,X)$ entonces $STU \in \mathcal{I}n(W,Z)$.

2. $T \in \mathcal{I}n(X,Y)$ si y sólo si $I_Y - TS \in \Phi(Y)$ para todo $S \in \mathcal{L}(Y,X)$.

3. Si $T^* \in \mathcal{I}n(Y^*,X^*)$ entonces $T \in \mathcal{I}n(X,Y)$.

En [76] se muestra que las clases de los operadores estrictamente singulares y estrictamente cosingulares están contenidas en la clase de los operadores inesenciales, tal y como se exhibe en el siguiente ressultado.

Teorema 4.4.1. *Sean X, Y espacios de Banach, entonces $\mathcal{SS}(X,Y) \cup \mathcal{SC}(X,Y) \subset \mathcal{I}n(X,Y)$.*

La clase de operadores improyectivos es introducida en 1972 por Tarafdar [83],

Definición 4.4.2. Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es llamado *improyectivo* si no existe un subespacio cerrado de dimensión infinita, M de X, tal que $T|_M$ sea un isomorfismo y $T(M)$ sea complementado en Y.

Se denota por $\mathcal{I}mp(X,Y)$ a la clase de los operadores improyectivos de $\mathcal{L}(X,Y)$.
Observe que para cada par de espacios de Banach X, Y se cumple que $\mathcal{I}n(X,Y) \subset \mathcal{I}mp(X,Y)$. En efecto, suponga que $T \notin Imp(X,Y)$ entonces existe un subespacio cerrado de dimensión infinita, M de X, tal que $T|_M$ es un isomorfismo y $T(M)$ es complementado en Y, sea N el complemento de $T(M)$. Defina $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ como $Sy = (T|_M)^{-1}(y)$ si $y \in T(M)$ y $Sy = 0$ para $y \in N$. Dado que $ker(I_X - ST) = M$ se tiene que $I_X - ST \notin \Phi(X)$, de aquí que T no es inesencial.
En [83] se demuestra que $\mathcal{I}mp(X,Y)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{L}(X,Y)$. Más aún, estos operadores admiten una caracterización en términos de aplicaciones cocientes, tal y como se exhibe en el siguiente resultado.

Teorema 4.4.2. *Un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es improyectivo si y sólo si no existe un subespacio cerrado N de Y, de codimensión infinita, tal que $Q_N T$ sea sobreyectiva y $T^{-1}(N)$ sea complementado en X.*

Demostración. Suponga que $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es un operador improyectivo y que N es un subespacio cerrado de Y tal que $Q_N T$ es sobreyectiva y $T^{-1}(N)$ es complementado en X. Si M es el complemento cerrado de $T^{-1}(N)$ entonces, por el Lema 4.1.1, $T(M)$ es complementado en Y con complemento N. Observe que $T|_M$ es un isomorfismo, como T es improyectivo se tiene que M tiene dimensión finita y por tanto N tiene codimensión finita.
Recíprocamente, suponga que T no es improyectivo, entonces existe un subespacio cerrado M de X, de dimensión infinita tal que $T|_M$ es un isomorfismo y $T(M)$ es complementado en Y. Sea N el complemento cerrado de $T(M)$ en Y, entonces N tiene codimensión infinita y $Q_N T$ es sobreyectiva. Usando el Lema 4.1.1, se tiene que $T^{-1}(N)$ es complementado en X. $\square$

Proposición 4.4.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, si $T^* \in \mathcal{I}mp(Y^*,X^*)$ entonces $T \in \mathcal{I}mp(X,Y)$.*

Demostración. Suponga que $T \notin \mathcal{I}mp(X,Y)$ entonces existe un subespacio cerrado M de X de dimensión infinita tal que $T|_M$ es un isomorfismo y $T(M)$ es complementado, de aquí que $(T|_M)^*$ es sobreyectivo, $(T(M))^\perp$ es complementado e Y^* y $M^\perp$ es un subespacio cerrado de codimensión infinita de X^*. Como $Q_{M^\perp} = (T|_M)^*$ y $(T^*)^{-1}(M^\perp) = (T(M))^\perp$, se sigue en virtud del Teorema 4.4.2 que $T^* \notin \mathcal{I}mp(Y^*, X^*)$. □

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.4.1. *Sea X es un espacio reflexivo, $T \in \mathcal{I}mp(X)$ si y sólo si $T^* \in \mathcal{I}mp(X^*)$*

4.5. La clase de perturbación para operadores semi-Fredholm

Sea $\mathcal{A}$ una clase de operadores continuos entre espacios de Banach. La *Clase de perturbación* $P\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}$ se define en [62] por sus componentes, es decir,

$$P\mathcal{A}(X,Y) := \{K \in \mathcal{L}(X,Y) : K+A \in \mathcal{A}(X,Y), \text{ para cada } A \in \mathcal{A}(X,Y)\},$$

donde X, Y son espacios de Banach tales que $\mathcal{A}(X,Y)$ es no vacío. En el caso que $X = Y$ se escribe $\mathcal{A}(X)$ en vez de $\mathcal{A}(X,X)$.

Teorema 4.5.1. [62, Lema 2.1] *Dados dos espacios de Banach X, Y para los cuales $P\mathcal{A}(X,Y) \neq \emptyset$, se cumple que:*

1. *$P\mathcal{A}(X,Y)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X,Y)$*
2. *Si $T \in P\mathcal{A}(X,Y)$, entonces TS y UT están en $P\mathcal{A}(X,Y)$ para todo $S \in \mathcal{L}(X)$ y todo $U \in \mathcal{L}(Y)$*

Lema 4.5.1. [8, Lemma 3.3] *Sea $\mathcal{A}$ una de las clases Φ_+, Φ_- o Φ. Suponga que $\mathcal{A}(X,Y) \neq \emptyset$ y sea $K \in P\mathcal{A}(X,Y)$. Entonces:*

1. *Si A es un isomorfismo de W sobre X y B es un isomorfismo de Y sobre Z, entonces $BKA \in P\mathcal{A}(W,Z)$.*
2. *Si $A \in \mathcal{L}(X)$ y $B \in \mathcal{L}(Y)$, entonces $BKA \in P\mathcal{A}(X,Y)$.*

Es conocido que si X, Y son espacios de Banach tales $\Phi(X,Y)$ es no vacío entonces la clase $P\Phi(X,Y)$ coincide con $\mathcal{I}n(X,Y)$ [62], sin embargo, la clase de perturbación de Φ_+ y de Φ_- en general se desconoce. El siguiente resultado muestra la relación existente entre las clases $P\Phi_+(X,Y)$, $P\Phi_+(X,Y)$ y $\mathcal{SS}(X,Y)$, $\mathcal{SC}(X,Y)$ y $\mathcal{I}n(X,Y)$

Teorema 4.5.2. *Sean X, Y espacios de Banach para los cuáles la correspondiente clase de perturbación esté definida, entonces se cumple que*

1. $\mathcal{SS}(X,Y) \subset P\Phi_+(X,Y)$ *([58, Teorema 5.2]),*
2. $\mathcal{SC}(X,Y) \subset P\Phi_-(X,Y)$ *([87, Corolario 1]),*
3. $P\Phi_+(X,Y) \cup P\Phi_-(X,Y) \subset \mathcal{I}n(X,Y)$ *([25, Teorema 5.6.9]).*

Demostración. (1) Suponga que $\Phi_+(X,Y) \neq \emptyset$, sean $T \in \mathcal{SS}(X,Y)$ y $S \in \Phi_+(X,Y)$, se mostrará que $T+S \in \Phi_+(X,Y)$, para esto suponga lo contrario, es decir $T+S \notin \Phi_+(X,Y)$. Entonces existe un operador compacto $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ tal que $\dim N(T+S-K) = \infty$, denotemos por $M = N(T+S-K)$. De modo que M es un subespacio cerrado, de dimensión infinita de X y $T|_M = (K-S)|_M$. Observe que $K-S \in \Phi_+(X,Y)$ ya que $S \in \Phi_+(X,Y)$ y K es compacto. Luego $T|_M = (K-S)|_M \in \Phi_+(M,Y)$, de aquí que $T|_M \notin \mathcal{SS}(M,Y)$ y en consecuencia $T \notin \mathcal{SS}(X,Y)$ lo cual es una contradicción.

(2) Suponga que $\Phi_-(X,Y) \neq \emptyset$, sean $T \in \mathcal{SC}(X,Y)$ y $S \in \Phi_-(X,Y)$, se mostrará que $T+S \in \Phi_-(X,Y)$, para esto suponga lo contrario, es decir $T+S \notin \Phi_-(X,Y)$. Entonces existe un operador compacto $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ tal que $\dim(Y/\overline{R(T+S-K)}) = \infty$, denotemos por $M = \overline{R(T+S-K)}$. De modo que M es un subespacio cerrado, de codimensión infinita de Y. Observe que para todo $x \in X$, $(T+S-K)x \in M$ por lo que $Q_M(T+S-K)x = Q_M(0)$ y de aquí que $Q_M T = Q_M(K-S)$. Dado que $K-S \in \Phi_-(X,Y)$ se tiene que $Q_M T = Q_M(K-S) \in \Phi_-(X,Y/M)$ y por lo tanto $Q_M T \notin \mathcal{SC}(X,Y/M)$, así $T \notin \mathcal{SC}(X,Y)$ lo cual es una contradicción.

(3) Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $T \notin \mathcal{I}n(X,Y)$, entonces existe un operador $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ tal que $I_X - ST \notin \Phi_+(X)$, y por tanto para cada operador $U \in \Phi_+(X,Y)$ se tiene que $U(I_X - ST) = U - UST \notin \Phi_+(X,Y)$. Dado que $U \in \Phi_+(X,Y)$ se obtiene que $UST \notin P\Phi_+(X,Y)$ y así $T \notin P\Phi_+(X,Y)$.
De igual manera, si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $T \notin \mathcal{I}n(X,Y)$, entonces existe un operador $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ tal que $I_Y - TS \notin \Phi_-(Y)$. Luego para cada operador $U \in \Phi_-(Y,X)$ se tiene que $U(I_Y - TS) = U - UTS \notin \Phi_-(Y,X)$. Dado que $U \in \Phi_-(Y,X)$ se obtiene que $UTS \notin P\Phi_-(Y,X)$ y así $T \notin P\Phi_-(X,Y)$. $\square$

Durante más de 40 años se estudió el problema de la clase de perturbación, y se obtuvieron soluciones positiva para pares de espacios concretos, sin embargo no se obtuvo una solución general positiva hasta el 2003, fue González [49], quien logró resolver el problema negativamente, utilizando producto de espacios de Banach exóticos de tipo hereditariamente indescomponible (H.I.) y de tipo cociente indescomponible (Q.I.). Un espacio de Banach X se dice que es *indescomponible* si no se puede expresar como la suma directa de dos subespacios cerrados de dimensión infinita. Se dice que X es *hereditariamente indescomponible* si todo subespacio cerrado de X es indescomponible. Se dice que X es *hereditariamente cociente indescomponible* si todo cociente de X es indescomponible. Los espacios de Banach de dimensión finita son ejemplos triviales de espacios indescomponibles. Este tipo de espacios de Banach se denominan exóticos debido a que sus propiedades contrastan enormemente con las de los espacios clásicos conocidos. Aún cuando desde 1981 Weis [91], había trabajado con este tipo de espacios hereditariamente indescomponible (H.I.) y cociente indescomponible (Q.I.), no fue sino hasta 1993 que Gowers y Maurey [50] proporcionan un primer ejemplo de este tipo de espacio.

Teorema 4.5.3. [49, Teorema 4] *Sea X un espacio de Banach reflexivo y hereditariamente indescomponible, sea Y un subespacio cerrado de X tal que $dim(Y) = dim(X/Y) = \infty$. Si $Z = X \times Y$ entonces*

$$P\Phi_+(Z) \neq \mathcal{SS}(Z)$$

y

$$P\Phi_-(Z^*) \neq \mathcal{SC}(Z^*)$$

Aún cuando la solución general del problema de la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm es negativa, es interesante encontrar pares de espacios X, Y tales que las igualdades $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ y $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ sean ciertas, ya que esto proporciona una caracterización intrínseca de los operadores en $P\Phi_+$ y $P\Phi_-$, puesto que la propiedad que caracteriza a los operadores $K \in \mathcal{SS}(X,Y)$ depende de la acción de K sobre subespacios cerrados de X, mientras que la propiedad que caracteriza a los operadores $K \in P\Phi_+(X,Y)$ depende de las propiedades de la suma de K con todos los operadores en $\Phi_+(X,Y)$.
Desde los años 70, diversos autores han proporcionado diversos pares de Banach concretos para los cuales las igualdades $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$

y $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ son ciertas, las cuales se nombran a continuación.
Para $\Phi_+(X,Y) \neq \emptyset$, la igualdad $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ ocurre en los siguientes casos:

1. Y subproyectivo ([8]);
2. $X = Y = L_p(0,1)$, $1 \leq p \leq \infty$ ([90]);
3. X hereditariamente indescomponible ([8, Teorema 3.14]);
4. X es separable y Y contiene una copia complementada de $C[0,1]$ ([9]).
5. $X = L_p(0,1)$ para $1 < p < 2$ y Y satisface la propiedad de Orlicz ([47]);
6. $X = L_1(0,1)$ y Y es secuencialmente débil completo ([47]);
7. X es fuertemente subproyectivo ([45]);
8. X es el espacio de Lorentz $\Lambda_{W,p}(0,1)$ de cotipo finito para $1 < p < 2$, o $L_{p,q}(0,1)$ o $L_{p,q}(0,\infty)$ para $1 < p \leq 2$, $1 \leq q \leq 2$ y $\mathcal{SS}(\ell_2,Y) = \mathcal{K}(\ell_2,Y)$ ([46]);
9. X es el espacio de funciones de Orlicz $L_\varphi(0,1)$ con $E_\varphi\infty$=$\{t^p\}$ para $1 < p < 2$ y $\mathcal{SS}(\ell_2,Y) = \mathcal{K}(\ell_2,Y)$ ([46]).

Para $\Phi_-(X,Y) \neq \emptyset$, la igualdad $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ se cumple en los siguientes casos:

1. X superproyectivo ([8]);
2. $X = Y = L_p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ ([90]);
3. Y cociente indescomponible ([8, Teorema 3.14]);
4. X contiene una copia complementada de ℓ_1 y Y es separable ([9]).
5. $Y = L_p(0,1)$ para $2 < p < \infty$ y X^* satisface la propiedad de Orlicz ([47]);
6. $X = L_1(0,1)$ y Y es secuencialmente débil completo ([47]);

7. Y es fuertemente superproyectivo ([45]);

8. X es el espacio de Lorentz $\Lambda_{W,p}(0,1)$ de cotipo finito para $2 < p < \infty$, o $L_{p,q}(0,1)$ o $L_{p,q}(0,\infty)$ para $2 \leq p, q < \infty\infty$ y $\mathcal{SS}(\ell_2, Y) = \mathcal{K}(\ell_2, Y)$ ([46]);

9. X es el espacio de funciones de Orlicz $L_\varphi(0,1)$ con $E_\varphi\infty^{=}\{t^p\}$ para $2 < p < \infty$ y $\mathcal{SS}(\ell_2, Y) = \mathcal{K}(\ell_2, Y)$ ([46]).

En los próximos capítulos se estudian detalladamente los resultados obtenidos en [90], [8], [47] y [45]

Capítulo 5

Espacios L_p

En este capítulo see estudian soluciones positivas al problema de la clase de perturbación, al considerar el espacio de funciones p-integrable L_p. Los primeros en considerar los espacios L_p para resolver este problema fueron Milmam (1969) [69] y Weis (1977) [90]. Milman demostró que $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ si $X = Y = L_p(\mu)$ y $2 < p < \infty$, también mostró que $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ si $X = Y = L_p(\mu)$ y $1 < p < 2$. Luego Weis logró extender estos resultados para $1 \leq p \leq \infty$. En el 2010 González y Salas-Brown [47], logran extender la solución dada por Milman y Weis al considerar operadores que actúan de un espacio L_p a un espacio L_q para valores de p y q específicos.
A continuación se proporcionan algunas propiedades geométricas de los espacios L_p, las definiciones y resultados sobre los espacios L_p que se presentan han sido tomados de los textos [11] y [27].
Si $1 \leq p < \infty$, el espacio $L_p(0,1)$ consiste (salvo en igualdad en casi todas partes) de las funciones medibles f definidas sobre $(0,1)$ tales que

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p d\mu(t)\right)^{1/p} < \infty$$

donde μ denota la medida de Lebesgue sobre $(0,1)$.
El espacio $L_\infty(0,1)$ consiste (salvo en igualdad en casi todas partes) de las funciones medibles f definidas sobre $(0,1)$ tales que

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{\lambda > 0 : |f(t)| \leq \lambda \text{ a.e}\}$$

Para $1 \leq p \leq \infty$, el espacio $L_p(0,1)$ se denotará, por comodidad, por L_p, su norma por $\|\cdot\|_p$ y la medida de Lebesgue sobre $(0,1)$ por μ. Note que, para $1 \leq p < q \leq \infty$ y para una función medible f sobre $(0,1)$, se cumple que $\|f\|_p \leq \|f\|_q$; de aquí que el espacio L_q está continuamente embebido en L_p.

5.1. Propiedades Geométricas

El espacio L_p para $1 \leq p < \infty$ tiene una base monótona (ver [11, Proposición 6.1.3]), la cual se denomina *el sistema de Haar*. El sistema de Haar se define como la sucesión de funciones (h_n), sobre $[0,1]$ tales que $h_1 = 1$ y para $n = 2^k + s$ (donde $k = 1, 2, ...,$ y $s = 1, 2, ..., 2^k$),

$$h_n(t) = \begin{cases} 1, & si \quad t \in [\frac{2s-2}{2^{k+1}}, \frac{2s-1}{2^{k+1}}), \\ -1, & si \quad t \in [\frac{2s-1}{2^{k+1}}, \frac{2s}{2^{k+1}}), \\ 0, & \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Más aún, el sistema de Haar es una base incondicional en L_p para $1 < p < \infty$, este resultado fue establecido en 1932 por Paley [72], los detalles de la demostración también se pueden encontrar en [11, Teorema 6.1.6] Para $p = 1$, el espacio L_p no tiene base incondicional (ver [64, Proposición 1.d.1]), sin embargo, todo subespacio cerrado de dimensión infinita de L_1 contiene una sucesión básica incondicional, tal y como lo exhibe el siguiente resultado.

Proposición 5.1.1. *Para $1 \leq p < \infty$, todo subespacio cerrado infinito dimensional de L_p contiene una sucesión básica incondicional.*

Demostración. Para $1 < p < \infty$, la base de Haar (h_n) es una base incondicional de L_p, luego todo subespacio cerrado de dimensión infinita contiene un subespacio Z el cual tiene una base equivalente a un bloque de (h_n) (ver [64, Proposición 1.a.11]). Para el espacio L_1, dado un subespacio cerrado M de dimensión infinita de L_1, se tiene que M contiene un subespacio isomorfo a ℓ_1 o es isomorfo a un subespacio de L_q con $1 < q \leq 2$ [81, Teorema 8]. Dado que la base unitaria de ℓ_1 es incondicional el resultado también es cierto para $p = 1$. $\square$

El siguiente resultado trata sobre subespacios cerrados de L_p. La demostración del mismo, en el caso que M sea isomorfo a ℓ_2 puede encontrarse en [74, Teorema 3.1], y en el caso que M sea isomorfo a ℓ_p, puede ver [11, Teorema 7.2.6 y Teorema 6.4.8].

Teorema 5.1.1. *Sea $1 < p < \infty$ y M un subespacio cerrado de L_p isomorfo a ℓ_p o isomorfo a ℓ_2, entonces M contiene un subespacio isomorfo a M y complementado en L_p.*

El siguiente resultado fue mostrado en 1962 por Kadets y Pelczyński [57], también se puede encontrar una demostración en [11, Teorema 6.4.8].

Teorema 5.1.2. *Sea M un subespacio cerrado infinito dimensional de L_p, para $2 \leq p < \infty$. Entonces M contiene un subespacio isomorfo a ℓ_p y complementado en L_p o M es isomorfo a ℓ_2 y complementado en L_p.*

En el caso que M sea un subespacio no reflexivo de L_1 se tiene la siguiente versión del teorema anterior.

Teorema 5.1.3. [11, Proposición 5.6.2] *Sea M un subespacio cerrado infinito dimensional no reflexivo de L_1, entonces M contiene un subespacio isomorfo a ℓ_1 y complementado en L_1.*

El siguiente teorema presenta un propiedad para operadores lineales definidos sobre L_∞, y es consecuencia de [11, Teorema 5.5.5].

Teorema 5.1.4. *Si $T \in \mathcal{L}(L_\infty, Y)$ entonces T es débil compacto o existe un subespacio cerrado M, de dimensión infinita, de L_∞ tal que M es isomorfo a ℓ_∞ y $T|_M$ es un isomorfismo.*

El siguiente teorema fue demostrado por Rosenthal en 1973 [81], en [11, Teorema 7.2.6] también puede encontrar los detalles de esta demostración.

Teorema 5.1.5. *Suponga que M es un subespacio cerrado de L_p ($1 \leq p < 2$). Entonces M no contiene subespacios isomorfos a ℓ_p si y sólo si la bola cerrada unitaria de M es p-equi-integrable, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo conjunto medible $E \subset (0,1)$ con $\mu(E) < \delta$ se cumple que*

$$\sup_{f \in B_M} \int_E |f|^p d\mu < \varepsilon.$$

A continuación se presentan una serie de propiedades relevantes relacionadas con los espacios de sucesiones ℓ_p.

Proposición 5.1.2. *Todo subespacio cerrado Y de dimensión infinita de ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ contiene un subespacio cerrado Z tal que Z es isomorfo a ℓ_p y complementado en ℓ_p.*

La demostración de la proposición anterior puede ser encontrada en [11, Proposición 2.2.1].

Proposición 5.1.3. [11, Proposición 2.5.2] *Si un espacio de Banach X contiene un subespacio M isomorfo a ℓ_∞ entonces M es complementado en X.*

Proposición 5.1.4. *Todo subespacio complementado M isomorfo a ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) de un espacio de Banach X contiene un subespacio M_1 isomorfo a M, complementado en X y con complemento isomorfo a X.*

Demostración. Supongamos que N es un complemento cerrado de M en X. Tomando dos subespacios M_1 y M_2 de M isomorfos a M y tales que $M = M_1 \oplus M_2$, basta notar que $M_2 \oplus N$ es isomorfo a X. □

Un espacio de Banach X se denomina *primario*, si siempre que M y N sean subespacios cerrados de X y $X = M \oplus N$, entonces se cumple que M o N es isomorfo a X. En [13, Teorema 7] se muestra que el espacio L_p es primario para $1 \leq p \leq \infty$. Del hecho que L_p sea un espacio primario, se obtiene el siguiente resultado

Teorema 5.1.6. *El espacio L_p para $1 \leq p \leq \infty$, es isomorfo a sus subespacios cerrados de codimensión finita.*

Demostración. Sea M es un subespacio cerrado de L_p de codimensión finita entonces existe un subespacio cerrado N de L_p de dimensión finita tal que $L_p = M \oplus N$, por ser L_p primario se cumple que M o N es isomorfo a L_p, pero N no puede ser isomorfo a L_p por ser de dimensión finita, de manera que M debe ser isomorfo a L_p. □

Los espacios L_p para $1 \leq p \leq 2$ estan enmarcados en una clase de espacios de Banach más amplia, estos son los espacios de Banach que satisfacen la propiedad de Orlicz.

Definición 5.1.1. Se dice que un espacio X satisface la *propiedad de Orlicz* si cada sucesión semi-normalizada y débil nula (x_n) en X tiene una subsucesión (x_{n_k}) que satisface una 2-estimación inferior, es decir, si existe una constante $C > 0$ tal que, para cada sucesión de escalares (a_k),

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{n_k}\Big\| \geq C\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2\Big)^{1/2}.$$

Recuerde que una sucesión (x_n) en un espacio de Banach X se denomina *semi-normalizada*, si es acotada y satisface $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$, y se dice que (x_n) es *débil nula*, si (x_n) converge débilmente a 0.
En 1930, Orlicz [71], establece que el espacio L_p satisface la propiedad de Orlicz para $1 \leq p \leq 2$, y en 1991, Räbiger [78], muestra la existencia de una clase de retículos de Banach que satisfacen la propiedad de Orlicz, el muestra que todo retículo de Banach de cotipo 2 satisface la propiedad de Orlicz.
Un espacio de Banach es de *cotipo* q, para algún $q \geq 2$, si existe una constante $0 < M < \infty$ tal que para toda colección finita $(x_j)_{j=1}^{n}$ de elementos de X se tiene que

$$\int_0^1 \|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)x_j\| \geq M^{-1}(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q)^{1/q}$$

donde (r_n) es la sucesión formada por las *funciones de Radamacher* las cuales se definen por $r_n(t) = sgn(sen(2^n\pi t))$. Para más detalles acerca de las funciones de Radamacher puede consultar [11] y [27].
El espacio L_p para $1 \leq p \leq 2$, tiene cotipo 2 ([11, Teorema 6.2.14]). El espacio de funciones de Lorentz $L_{p,q}(0,1)$ tiene cotipo 2 para $1 \leq q \leq p < 2$ y para $1 < p < q \leq 2$ ([34]).

Teorema 5.1.7. *Un espacio de Banach que satisface la propiedad de Orlicz no contiene subespacios isomorfos a c_0.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach que satisface la propiedad de Orlicz y suponga que existe un subespacio M de X que es isomorfo a c_0, sea $T : c_0 \to M$ un isomorfismo sobreyectivo, entonces existe $L > 0$ tal que $\|Tx\| \geq L\|x\|_\infty$ para todo $x \in c_0$. Para $n \in \mathbb{N}$, sea e_n la sucesión que es igual a cero en todas sus componentes, excepto en la n-ésima posición donde vale 1. Se observa que cada $e_n \in c_0$ y que la sucesión (e_n) converge débilmente a 0. Hagamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = Te_n$, entonces (x_n) converge débilmente a 0, además

$$\|x_n\| = \|Te_n\| \geq L\|e_n\|_\infty = L$$

y
$$\|x_n\| = \|Te_n\| \leq \|T\|\|e_n\|_\infty = \|T\|$$
lo que significa que (x_n) es una sucesión semi-normalizada y débil nula en X. Como X satisface la condición de Orlicz, existe una subsucesión (x_{n_k}) y una constante $C > 0$ tal que para la sucesión de escalares (a_k) con $a_k = 1/\sqrt{k}$ se tiene que

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{n_k}\| \geq C\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2\right)^{1/2} = C\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right)^{1/2} = \infty$$

Si se toma $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_{n_k}$ entonces $x \in c_0$ y por tal motivo $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|_\infty < \infty$; pero

$$\|Tx\| = \|T\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_{n_k}\right)\| = \|\sum_{k=1}^{\infty} a_k T(e_{n_k})\| = \|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{n_k}\| = \infty$$

lo cual conduce a una contradicción. □

En [12, Teorema 4.60] se muestra que si un retículo de Banach X no contiene subespacios isomorfos a c_0 entonces X es secuencialmente débil completo. Luego todo retículo de Banach que satisface la propiedad de Orlicz es secuencialmente débil completo.
Recuerde que un espacio de Banach Y es *secuencialmente débil completo*, si toda sucesión débil de Cauchy en Y converge débilmente. El espacio de las funciones integrables a.e, L_1 es un ejemplo de un espacio secuencialmente débil completo tal y como se exhibe en el siguiente resultado.

Teorema 5.1.8. [11, Teorema 5.2.10] *El espacio L_1 es secuencialmente débil completo.*

Ahora se enuncian un grupo de proposiciones que serán de gran utilidad para establecer y desarrollar los resultados relativos a la clase de perturbación sobre los espacios L_p.

Proposición 5.1.5. *Sean M y L dos subespacios cerrados de dimensión infinita de L_p, L isomorfo a L_p, tales que $M + L$ es cerrado y $M \cap L$ es de dimensión finita entonces L contiene un subespacio cerrado L', de codimensión finita tal que $M \cap L' = \{0\}$, $M + L'$ es cerrado y L' es isomorfo a L_p.*

Demostración. Dado que $M \cap L$ es de dimensión finita entonces $M \cap L$ es complementado en L_p, esto es existe un subespacio cerrado W de L_p de dimensión infinita tal que $L_p = (M \cap L) \oplus W$. Tomemos $L' = L \cap W$ entonces L' es un subespacio cerrado de L_p y $M \cap L' = \{0\}$. Observe que L' tiene codimensión finita en L puesto que $L = (M \cap L) \oplus L'$ y dado que L es isomorfo a L_p, se tiene que L es primario y por lo tanto isomorfo a L'. Finalmente $M + L'$ es cerrado puesto que $M + L$ es cerrado $\square$

Proposición 5.1.6. *Sea $K \in \mathcal{L}(L_p, Y)$ y H un subespacio cerrado de dimensión infinita de L_p tal que $K|_H$ es semi-Fredholm superior, entonces existe un subespacio cerrado H' de H, de codimensión finita tal $K|_{H'}$ es un isomorfismo.*

Demostración. Dado que $K|_H$ es semi-Fredholm superior, entonces $N(K|_H)$ tiene dimensión finita y $R(K|_H)$ es cerrado, de manera que existe un subespacio H' de H, cerrado de dimensión infinita tal que $H = N(K|_H) \oplus H'$. Entonces H' tiene codimensión finita y $K|_{H'}$ es un isomorfismo. $\square$

Proposición 5.1.7. *Sea $f \in \text{Ł}_p$ tal que $\|f\|_p \leq 1$ entonces dado $M > 0$ se tiene que*

$$\mu\left(\{t \in (0,1)\colon |f(t)| > M\}\right) < 1/M^p.$$

Demostración. Sea $f \in \text{Ł}_p$ tal que $\|f\|_p \leq 1$ entonces

$$\begin{aligned}
1 &\geq \int_0^1 |f(t)|^p d\mu(t) \\
&= \int_{\{t\in(0,1)\colon |f(t)|>M\}} |f(t)|^p d\mu(t) + \int_{\{t\in(0,1)\colon |f(t)|\leq M\}} |f(t)|^p d\mu(t) \\
&\geq \int_{\{t\in(0,1)\colon |f(t)|>M\}} |f(t)|^p d\mu(t) \\
&> \int_{\{t\in(0,1)\colon |f(t)|>M\}} M^p d\mu(t) = M^p \mu\left(\{t \in (0,1)\colon |f(t)| > M\}\right)
\end{aligned}$$

De aquí que

$$\mu\left(\{t \in (0,1)\colon |f(t)| > M\}\right) < 1/M^p$$

que era lo que se quería demostrar. $\square$

Proposición 5.1.8. *Sea $T : L_p \to L_p$ con $1 < p < 2$, si (f_n) es una sucesión en L_p tal que (f_n) converge débilmente a cero, (Tf_n) no converge a cero y si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo conjunto medible $E \subset (0,1)$ con $\mu(E) < \delta$ se cumple que*

$$\sup_n \int_E |f_n|^p d\mu < \varepsilon^p.$$

Entonces existe un subespacio M isomorfo a ℓ_2 tal que $T|_M$ es un isomorfismo

Demostración. Sea (f_n) una sucesión en L_p que satisfaga las hipótesis, Dado que (Tf_n) no converge a cero, podemos seleccionar una constante $c_1 > 0$ y una subsucesión (f_{n_k}) de (f_n) tal que $\|T(f_{n_k})\| > c_1$ para todo $k \in Z_+$ y por tanto $\|f_{n_k}\| > \frac{C_1}{\|T\|} = c_2$. Luego, pasando a subsucesión, podemos suponer que las sucesiones (Tf_n) y (f_n) están acotadas inferiormente, de modo que (f_n) se puede suponer normalizada.
Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo conjunto medible $E \subset (0,1)$ con $\mu(E) < \delta$ se cumple que

$$\sup_n \int_E |f_n|^p d\mu < \varepsilon^p.$$

Llamemos $M_\varepsilon = (1/\delta)^{1/p}$, entonces de la Proposición 5.1.7 se obtiene que $\mu\{|f_n| > M_\varepsilon\} \leq \frac{1}{M_\varepsilon^p} = \delta$, $n \in Z_+$
Se define

$$\widetilde{f_n}(t) = \begin{cases} f_n(t), & \text{si } |f_n(t)| \leq M_\varepsilon, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observe que $\|\widetilde{f_n}\|_p \leq \|f_n\|_p$ y $|\widetilde{f_n}(t) - f_n(t)| \leq |f_n(t)|$ por lo que $\|\widetilde{f_n} - f_n\|_p \leq \|f_n\|_p = 1$. Luego la sucesión $(\widetilde{f_n} - f_n)$ es una sucesión acotada en un espacio reflexivo, por lo que tiene una subsucesión que converge débilmente. Pasando a subsucesión, podemos suponer que $\widetilde{f_n} - f_n \underrightarrow{w} f$ para algún $f \in L_p(0,1)$. Observe que

1. $\|f\|_p < \varepsilon$.
2. $\widetilde{f_n} \underrightarrow{w} f$,
3. $\|\widetilde{f_n} - f_n\|_p < \varepsilon$ (esto se debe a que $\mu\{|f_n| > M_\varepsilon\} \leq \frac{1}{M_\varepsilon^p} = \delta$ y se sigue, por hipótesis, que $\|\widetilde{f_n} - f_n\|_p^p = \int_{\{|f_n| > M_\varepsilon\}} |f_n|^p d\mu < \varepsilon^p$.)

4. $\|\widetilde{f_n}\|_p \geq \|f_n\|_p - \varepsilon \geq \text{ínf}\,\|f_n\| - \varepsilon > c_2 - \varepsilon$,

5. $\|\widetilde{f_n}\|_\infty = \text{ínf}\{B : |\widetilde{f_n}| < B,\ \mu.a.e\} \leq M_\varepsilon$, y como $\widetilde{f_n} \xrightarrow{w} f$ entonces $\|f\|_\infty \leq M_\varepsilon$

Observe también, que

$$\begin{aligned}
\|Tf_n\|_p^p &= \int |Tf_n|^p \, d\mu \\
&= \int_{\{|f_n| \leq M_\varepsilon\}} |Tf_n|^p \, d\mu + \int_{\{|f_n| > M_\varepsilon\}} |Tf_n|^p \, d\mu \\
&= \|T\widetilde{f_n}\|_p^p + \int |T(f_n \chi_B)|^p \, d\mu \ \ (\text{donde } B = \{|f_n| > M_\varepsilon\}) \\
&= \|T\widetilde{f_n}\|_p^p + \|T(f_n \chi_B)\|_p^p \\
&\leq \|T\widetilde{f_n}\|_p^p + \|T\|^p \, \|f_n \chi_B\|_p^p \\
&= \|T\widetilde{f_n}\|_p^p + \|T\|^p \int_B |f_n|^p \, d\mu \\
&\leq \|T\widetilde{f_n}\|_p^p + \|T\|^p \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

Así,

$$\|T\widetilde{f_n}\|_p^p \geq \|Tf_n\|_p^p - \|T\|^p \varepsilon^p,$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned}
\|T\widetilde{f_n}\|_p &\geq \left(\|Tf_n\|_p^p - \|T\|^p \varepsilon^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \|Tf_n\|_p - \|T\|\varepsilon,
\end{aligned}$$

siempre que $\varepsilon > 0$ sea lo suficientemente pequeño. Denotemos por $g_n = \widetilde{f_n} - f$, la sucesión (g_n) satisface las siguientes condiciones:

1. $g_n \xrightarrow{w} 0$,

2. $\|g_n\|_p = \|\widetilde{f_n} - f\|_p \leq \|\widetilde{f_n}\|_p + \|f\|_p \leq 1 + \varepsilon \leq 2$ (para $\varepsilon < 1$).

3. $\|g_n\|_p = \|\widetilde{f_n} - f\|_p \geq \|\widetilde{f_n}\|_p - \|f\|_p \geq c_2 - 2\varepsilon > \frac{c_2}{2}$ (para ε lo suficientemente pequeño).

4. $\|g_n\|_\infty = \|\widetilde{f_n} - f\|_\infty \leq \|\widetilde{f_n}\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2M_\varepsilon$

Como $1 < p < 2$ entonces (g_n) es una sucesión semi normalizada y débil nula en L_2. Luego, por el Teorema 4.2.5 se obtiene que (g_n) es una sucesión básica en L_2, de modo que (g_n) contiene una subsucesión (g_{n_k}), equivalente a la base unitaria de ℓ_2 en L_2. Así, para escalares cualquiera $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$, se cumple que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i T(g_{n_i})\right\|_p &\leq \|T\|\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i g_{n_i}\right\|_p\\ &\leq \|T\|\left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i g_{n_i}\right\|_2\\ &\leq \|T\|K_1\left(\sum_{i=1}^{r}|\alpha_i|^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Además (Tg_{n_k}) es una sucesión acotada en L_p, que converge débilmente a cero y satisface:

$$\begin{aligned}\|Tg_{n_k}\|_p &= \|T(\widetilde{f_{n_k}}-f)\|_p \geq \|T\widetilde{f_{n_k}}\|_p - \|Tf\|_p\\ &\geq \|T\widetilde{f_{n_k}}\|_p - \|T\|\|f\|_p \geq \|T\widetilde{f_{n_k}}\|_p - \|T\|\varepsilon\\ &\geq \|Tf_{n_k}\|_p - 2\|T\|\varepsilon > c_1 - 2\|T\|\varepsilon > \frac{c_1}{2}\end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 4.2.5 se obtiene que (Tg_{n_k}) es una sucesión básica, y por tanto (Teorema II. 3.7 [63]) se obtiene que

$$K_2\left(\sum_{i=1}^{r}|\alpha_i|^2\right)^{1/2} \leq \left\|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i T(g_{n_i})\right\|_p$$

Denotemos por $J\colon L_2 \longrightarrow L_p$ el operador inclusión, entonces se ha probado que TJ es un isomorfismo sobre un subespacio de L_2 isomorfo a ℓ_2. De aquí que T es un isomorfismo sobre un subespacio M de L_p isomorfo a ℓ_2. $\square$

5.2. El problema de la clase de perturbación

A continuación, se detalla la solución del problema de la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm dada por Weiss [90], cuando se consideran operadores lineales y acotados que van de un espacio L_p en sí mismo.

Proposición 5.2.1. *Sea $T : L_p \to L_p$ con $2 \leq p < \infty$, si T no es estrictamente singular entonces existe un un subespacio M de L_p isomorfo a l_p o l_2 tal que $T|_M$ es un isomorfismo y M y $T(M)$ son subespacios complementados de $L_p(0,1)$*

Demostración. Suponga que T no es estrictamente singular, entonces existe un subespacio cerrado M de L_p infinito dimensional tal que $T|_M$ es un isomorfismo, observe que $T(M)$ es un subespacio cerrado, de dimensión infinita de L_p, luego por el Teorema 5.1.2, se tiene que:

1. $T(M)$ es isomorfo a l_2, en tal caso $T(M)$ es complementado en $L_p(0,1)$ o
2. $T(M)$ contiene un subespacio que es isomorfo a l_p y complementado en L_p

Si el caso es *1.* entonces M es un subespacio cerrado de $L_p(0,1)$ isomorfo a l_2 tal que $T|_M$ es un isomorfismo y $T(M)$ es complementado en L_p. Luego, por Lema 4.1.1, se obtiene que M es complementado en L_p.
Si el caso es *2.* llamemos Z al subespacio de $T(M)$ isomorfo a l_p y complementado en L_p, entonces $W = T|_M^{-1}(Z)$ es isomorfo a l_p, por lo cual es cerrado. Además $T|_W$ es un isomorfismo y $T|_M(W) = Z$ es complementado entonces por el Lema 4.1.1 se tiene que W es complementado en L_p. □

Proposición 5.2.2. *Sea $T : L_p \to L_p$ con $1 < p < 2$, si T no es estrictamente singular, entonces existe un subespacio M de L_p isomorfo a ℓ_p o ℓ_2, tal que $T|_M$ es un isomorfismo, M y $T(M)$ son complementados en L_p.*

Demostración. Suponga que T no es estrictamente singular, entonces existe un subespacio cerrado M de L_p infinito dimensional tal que $T|_M : M \to T(M)$ es un isomorfismo, por lo que existe $C > 0$ tal que $C\|f\| <$

$\|Tf\|$ para todo $f \in M$. Es posible que M tenga un subespacio isomorfo a ℓ_p o no. En el primer caso $T(M)$ también contiene un subespacio isomorfo a ℓ_p. Luego, por el Teorema 5.1.1, existe un subespacio Z de $T(M)$, isomorfo a ℓ_p y complementado en L_p. Sea $M_0 = (T|_M)^{-1}(Z)$, entonces $T(M_0) = Z$ es complementado en L_p y $T|_{M_0}$ es un isomorfismo. Luego, en virtud del Lema 4.1.1, se obtiene que M_0 es complementado en L_p.

Suponga ahora que M no contiene subespacios isomorfos a ℓ_p, y sea (f_n) una sucesión básica incondicional en M , la cual se puede suponer normalizada, es decir, $\|f_n\|_p = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, por lo que $\|Tf_n\| > C$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Luego, como (f_n) es una sucesión básica acotada de un espacio reflexivo, pasando a subsucesión, se puede suponer que (f_n) converge débilmente a cero y (Tf_n) no converge a cero.

Al no contener M subespacios isomorfos a l_p entonces, por el Teorema 5.1.5, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo conjunto medible $E \subset (0,1)$ con $\mu(E) < \delta$ se cumple que

$$\sup_{f \in B_M} \int_E |f|^p d\mu < \varepsilon.$$

Luego, en virtud de la Proposición 5.1.8, existe un subespacio N isomorfo a l_2 tal que $T|_N$ es un isomorfismo, por tanto existe un subespacio Z de N isomorfo a l_2 y complementado en L_p. De modo que $W = (T|_N)^{-1}(Z)$ es un subespacio de L_p tal que $T|_W$ es un isomorfismo, W y $T(W)$ son complementados en L_p. $\square$

El siguiente resultado es consecuencia de las dos proposiciones anteriores.

Teorema 5.2.1. *Sea $T : L_p \to L_p$ con $1 < p < \infty$, si T no es estrictamente singular, entonces existe un subespacio M de L_p isomorfo a ℓ_p o ℓ_2 tal que $T|_M$ es un isomorfismo, M y $T(M)$ son complementados en L_p.*

A continuación se muestra una solución positiva al problema de la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm,

Corolario 5.2.1. *Si $X = L_p(\mu)$, con $1 < p < \infty$, entonces $\mathcal{SS}(X) = P(\Phi_+(X)) = P(\Phi(X)) = P(\Phi_-(X)) = \mathcal{SC}(X)$*

Demostración. Suponga que existe $T \in P(\Phi(X)) \backslash \mathcal{SS}(X)$. Entonces, por Teorema 5.2.1, existe un subespacio M de X tal que $T|_M : M \to T(M)$ es un isomorfismo y M y $T(M)$ son complementados. Sea $P : X \to T(M)$ una proyección, como $T \in P(\Phi(X))$ entonces $PTJ \in P(\Phi(M, T(M)))$. Observe que $PTJ : M \to T(M)$ es un isomorfismo, por lo que $PTJ \in \Phi(M, T(M)$, luego $0 = PTJ - PTJ \in \Phi(M, T(M)$, lo cual es imposible. □

La siguiente solución al problema de la clase de perturbación fue proporcionada por González y Salas-Brown en [47], a continuación se exponen los detalles. En primer lugar, observe que para $1 \leq p \leq \infty$, el conjunto $\Phi_+(L_p, Y)$ es no vacío si y sólo si el espacio Y contiene un subespacio isomorfo a L_p. En efecto, si $T \in \Phi_+(L_p, Y)$ entonces $N(T)$ tiene dimensión finita y $R(T)$ es cerrado, de modo que existe un subespacio cerrado M de L_p, de dimensión infinita tal que $L_p = N(T) \oplus M$, dado que el espacio de Banach L_p es isomorfo a sus subespacios cerrados de codimensión finita, se sigue que L_p y M son isomorfos y por tanto $T(M)$ es un subespacio de Y isomorfo a L_p. Recíprocamente, si N es un subespacio de Y isomorfo a L_p. Considere el isomorfismo sobreyectivo $S : L_p \to N$ y el operador T obtenido al extender el rango de S a todo el espacio Y, entonces $T \in \Phi_+(L_p, Y)$.
El siguiente resultado establece condiciones sobre un espacio de Banach Y para que $P\Phi_+(L_p, Y) = \mathcal{SS}(L_p, Y)$ para $1 < p < 2$.

Teorema 5.2.2. *Sean $1 < p < 2$, Y un espacio de Banach que contiene un subespacio isomorfo a L_p y que satisface la propiedad de Orlicz. Entonces $P\Phi_+(L_p, Y) = \mathcal{SS}(L_p, Y)$.*

Demostración. Sea $K \in \mathcal{L}(L_p, Y)$ y suponga que existe un subespacio cerrado H de dimensión infinita de L_p tal que la restricción $K|_H$ es un isomorfismo. Probaremos que $K \notin P\Phi_+(L_p, Y)$.

Primeramente, se considera el caso en que H contiene un subespacio isomorfo a ℓ_p. Por Teorema 5.1.1, pasando a subespacio si es necesario, se puede asumir que H es un subespacio complementado isomorfo a ℓ_p. Sea M el subespacio cerrado de L_p tal que $L_p = H \oplus M$. Dado que L_p es primario (Teorema 5.1.6), se sigue que M es isomorfo a L_p.
Por hipótesis, Y contiene un subespacio L el cual es isomorfo a L_p. Considere ahora los siguientes casos posibles:

(1) $K(H)+L$ es cerrado y $K(H)\cap L$ tiene dimensión finita,

(2) $K(H)\cap L$ tiene dimensión infinita,

(3) $K(H)+L$ es no cerrado y $K(H)\cap L$ tiene dimensión finita.

(1) En virtud de la Proposición 5.1.5, se puede sustituir L por un subespacio de codimensión finita, y se puede asumir que $K(H)\cap L=\{0\}$. Sea $U\in\mathcal{L}(M,L)$ un isomorfismo sobreyectivo. Considere el operador

$$T\colon L_p = H\oplus M \longrightarrow K(H)\oplus L \subset Y$$

definido por $T(x,y):=-K(x)+U(y)$, entonces T es un isomorfismo, por lo que $T\in\Phi_+(L_p,Y)$. Observe que $N(T+K)$ tiene dimensión infinita pues contiene al subespacio H. Por lo tanto, $T+K\notin\Phi_+(L_p,Y)$, de aquí que $K\notin P\Phi_+(L_p,Y)$.

(2) Dado que $K(H)$ es isomorfo a ℓ_p, y $K(H)\cap L$ es un subespacio cerrado de dimensión infinita de $K(H)$ entonces por Proposición 5.1.2, $K(H)\cap L$ contiene un subespacio N_1 isomorfo a ℓ_p.

Como N_1 es un subespacio de L y L es isomorfo a L_p, se tiene por Teorema 5.1.1, que N_1 contiene un subespacio N_2 isomorfo a ℓ_p y complementado en L. Digamos $L=N_2\oplus W$, donde W es un subespacio cerrado de dimensión infinita de L.

Como L_p es primario, el complemento de N_2 en L es isomorfo a L_p, es decir, W es isomorfo a L_p. Así, reemplazando L por este complemento y reemplazando H por $(K|_H)^{-1}(N_2)$, el cual es un subespacio complementado en L_p y es isomorfo a ℓ_p, se puede asumir que la suma $K(H)+L$ es directa y cerrada; y por lo tanto estamos bajo las condiciones del caso (1).

(3) En este caso, se definirá un operador compacto $K_1\in\mathcal{L}(L_p,Y)$ tal que $(K+K_1)(H)\cap L$ tenga dimensión infinita.

Note que de ser posible esto, entonces $(K+K_1)|_H$ sería un operador semi-Fredholm superior, puesto que al ser $K|_H$ un isomorfismo $K|_H\in\Phi_+(H,Y)$ y la clase de operadores semi-Fredholm es estable bajo la suma de operadores compactos.

En virtud de la Proposición 5.1.6, pasando a un subespacio de codimensión finita, se puede asumir que $(K+K_1)|_H$ es un isomorfismo.

Luego, usando el argumento del caso (2) se obtendría un operador $T\in\Phi_+(L_p,Y)$ tal que $T+K+K_1\notin\Phi_+(L_p,Y)$. Entonces $T+K\notin\Phi_+(L_p,Y)$, de aquí que $K\notin P\Phi_+(L_p,Y)$.

Ahora bien, se procede a definir tal operador compacto. Como en el caso (1), se puede asumir que $K(H) \cap L = \{0\}$. Del hecho que $K(H) + L$ es no cerrado, se sigue que existe una sucesión normalizada (y_n) en $K(H)$ tal que $\mathrm{dist}(y_n, L) < 2^{-n}$. Observe que (y_n) no tiene subsucesiones convergentes, pues en caso contrario, de existir una subsucesión convergente a un punto y, se tendría que $\|y\| = 1$ y $y \in K(H) \cap L$, lo cual no es posible. Análogamente, el límite de cada subsucesión que converja débilmente debe ser 0. Dado que ℓ_p es reflexivo, se puede concluir que (y_n) converge débilmente a 0. Luego, por la Proposición 4.2.5, pasando a subespacio, se puede suponer que (y_n) es una sucesión básica.
Sea (h_n) una sucesión en H tal que $K(h_n) = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado que K es un isomorfismo sobre H, (h_n) es una sucesión básica. Por lo tanto existe una sucesión acotada (h_n^*) en el espacio dual ${L_p}^*$ tal que $\langle h_i^*, h_j \rangle = \delta_{ij}$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$.
Se selecciona ahora, una sucesión (z_n) en L tal que$\|y_n - z_n\| < 2^{-n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} \|h_i^*\| \|z_i - y_i\| < \infty$, la expresión

$$K_1(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h_i^*, f \rangle (z_i - y_i),$$

define un operador compacto $K_1 \in \mathcal{L}(L_p, Y)$ tal que $(K + K_1)(h_n) = z_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí que $(K + K_1)(H) \cap L$ tenga dimensión infinita, tal y como se quería probar.

Ahora se considera el caso que H no contenga subespacios isomorfos a ℓ_p. Por el Teorema 5.1.5, la bola unitaria en L_p, B_H es p-equi-integrable. Por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$\mu(A) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \|f \chi_A\|_p < \varepsilon, \quad \text{para todo } f \in B_H. \tag{5.1}$$

Se denota por $M_\varepsilon := \delta_\varepsilon^{-1/p}$; de aquí que $1/M_\varepsilon^p = \delta_\varepsilon$.
Por Proposición 5.1.7, se tiene que

$$\mu\big(\{t \in (0,1) \colon |f(t)| > M_\varepsilon\}\big) < 1/M_\varepsilon^p = \delta_\varepsilon. \tag{5.2}$$

para toda $f \in B_H$.
Se fija $0 < \varepsilon < 1/2$. Por Proposición 5.1.1, se puede tomar una sucesión básica incondicional, normalizada (f_n) en H. Dado que $K|_H$ es un isomorfismo, existe una constante $C > 0$ tal que $\|Kf\| \geq C\|f\|_p$ para cada $f \in H$.

Se define $g_n \in L_p$ por

$$g_n(t) = \begin{cases} f_n(t), & \text{si } |f_n(t)| \leq M_\varepsilon, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

De las expresiones (5.1) y (5.2) se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|g_n - f_n\|_p^p &= \int_0^1 |g_n - f_n|^p d\mu(t) \\ &= \int_{\{t\in(0,1):\ |f(t)|>M_\varepsilon\}} |f_n|^p d\mu(t) < \varepsilon^p \end{aligned}$$

Por lo que $\|g_n\|_p \geq \|g_n\|_p - \varepsilon = 1-\varepsilon$. Dado que L_p es reflexivo, y $(g_n - f_n)$ es una sucesión acotada en L_p, pasando a subsucesión, se puede asumir que $(g_n - f_n)$ converge débilmente a $g \in L_p$ con $\|g\|_p \leq \varepsilon$.
La sucesión (f_n) converge débilmente a 0, pues es una sucesión básica en un espacio reflexivo. Entonces (g_n) converge débilmente a g, de aquí que $|g(t)| \leq M_\varepsilon$ c.t.p.
La sucesión (h_n) definida por $h_n(t) := g_n(t) - g(t)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ satisface:

- $\|h_n\|_p = \|g_n(t) - g(t)\|_p \leq \|g_n(t)\|_p + \|g(t)\|_p \leq 1 + \varepsilon < \frac{3}{2}$.
- $\|h_n\|_p \geq \|g_n(t)\|_p - \|g(t)\|_p \geq 1 - 2\varepsilon$.
- $\|h_n\|_\infty = \|g_n(t) - g(t)\|_\geq \|g_n(t)\|_\infty + \|g(t)\|_\infty \leq 2M_\varepsilon$.
- (h_n) converge débilmente a cero en L_p.

Además, (Kh_n) converge débilmente a cero en Y, luego seleccionando ε lo suficientemente pequeño, se puede asumir que (Kh_n) es semi normalizada. En efecto,

$$\|Kh_n\| \geq \|Kf_n\| - \|K(f_n - g_n)\| - \|Kg\| > C - 2\varepsilon\|K\|.$$

Dado que $\|h_n\|_\infty \leq 2M_\varepsilon$ para cada n, la sucesión (h_n) es semi-normalizada y débil nula en L_2, luego por el Teorema 4.2.5 (h_n) contiene una subsucesión básica. Pasando a subsucesión, se puede asumir que (h_n) es equivalente a la base unitaria de ℓ_2 en L_2 y que (Kh_n) satisface una 2-estimación inferior en Y, como este espacio satisface la propiedad de

Orlicz, existen constantes $0 < C_1 < C_2 < \infty$ tales que, para cada sucesión de escalares (a_n),

$$\begin{aligned} C_1\big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\big)^{1/2} &\leq \big\|\sum_{n=1}^{\infty}a_nKh_n\big\| \leq \|K\|\cdot\big\|\sum_{n=1}^{\infty}a_nh_n\big\|_p \\ &\leq \|K\|\cdot\big\|\sum_{n=1}^{\infty}a_nh_n\big\|_2 \leq C_2\|K\|\cdot\big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Denotemos por $J\colon L_2 \longrightarrow L_p$ el operador inclusión, entonces se ha probado que KJ es un isomorfismo sobre un subespacio de L_2 isomorfo a ℓ_2. De aquí que K es un isomorfismo sobre un subespacio M de L_p isomorfo a ℓ_2. Por el Teorema 5.1.1, se puede asumir que M es complementado en L_p.
Siguiendo un argumento similar al seguido en el caso que K es un isomorfismo sobre un subespacio complementado isomorfo a ℓ_p se concluye la prueba. $\square$

Se analiza ahora, que condiciones se deben imponer sobre el espacio Y de manera que se pueda extender el Teorema 5.2.2 a los valores de p no considerados en dicho teorema.
El siguiente resultado es una versión del Teorema 5.2.2 para $p = 1$, la condición impuesta al espacio Y es que sea secuencialmente débil completo. Observe que todo retículo de Banach que satisface la propiedad de Orlicz es secuencialmente débil completo

Teorema 5.2.3. *Sea Y un espacio de Banach secuencialmente débil completo que contiene un subespacio isomorfo a L_1. Entonces $P\Phi_+(L_1, Y) = \mathcal{SS}(L_1, Y)$.*

Demostración. Sea $K \in \mathcal{L}(L_1, Y)$ y suponga que no es un operador estrictamente singular. Por la Proposición 4.3.1, K no es débil compacto. Dado que Y es secuencialmente débil completo, existe una sucesión acotada (x_n) en L_1 tal que (Kx_n) no tiene subsucesiones débilmente Cauchy. Por el Teorema 4.2.9, se puede asumir que tanto (x_n) como (Kx_n) son equivalentes a la base de ℓ_1. Denotando por H el subespacio cerrado generado por (x_n), se tiene que H es isomorfo a ℓ_1 y $K|_H$ es un isomorfismo. El resto de la prueba es similar al caso cuando H contiene un subespacio isomorfo a ℓ_p en la prueba del Teorema 5.2.2. $\square$

El siguiente corolario es consecuencia directa de los Teoremas 5.2.2 y 5.2.3 y proporciona una solución concreta al problema de la clase de perturbación.
En primer lugar se conoce que para $1 \leq p, q \leq 2$, $\Phi_+(L_p, L_q)$ es no vacío sí y sólo si $q \leq p$ (ver [13, Teorema 26]), además, L_q tiene la propiedad de Orlicz.

Corolario 5.2.2. *Sea* $1 \leq q \leq p < 2$, *entonces* $P\Phi_+(L_p, L_q) = \mathcal{SS}(L_p, L_q)$.

Se observa que cuando $1 \leq p = q < 2$ en el corolario anterior, se obtiene el resultado dado por Weis en 1977 [90]. De modo que los Teoremas 5.2.2 y 5.2.3 extienden en cierto sentido el resultado de Weis.
A continuación se presentan algunas diferencias entre los casos $q < p$ y $q = p$ en los resultados previos
Sea $1 \leq q < p < 2$, entonces $\mathcal{SS}(L_p, L_q) \neq \mathcal{I}n(L_p, L_q)$.
En efecto, dado que L_q contiene subespacios isomorfos a ℓ_p (ver [11, Proposición 6.4.3]), si expresamos $L_p = M \oplus N$ con M isomorfo ℓ_p, entonces existe un operador $K \in \mathcal{L}(L_p, L_q)$ el cual es un isomorfismo sobre M y vale 0 en N, de aquí que $K \notin \mathcal{SS}$. Sin embargo, $K \in \mathcal{I}n$ ya que L_q no contiene subespacios complementados isomorfos a ℓ_p [48, Corolario 2].

Para $1 \leq p < 2$, $\mathcal{SS}(L_p) = \mathcal{I}n(L_p)$, ver [90], y dado que cada subespacio cerrado de L_2 es complementado se tiene que, $\mathcal{SS}(L_p, L_2) \neq \mathcal{I}n(L_p, L_2)$ y $\mathcal{SS}(L_2) = \mathcal{I}n(L_2)$.

Para valores de $p \geq 2$, sólo basta que $\Phi_+(L_p, Y)$ sea no vacío, o equivalentemente, que Y contenga un subespacio isomorfo a L_p. Este caso inspiró a resolver el problema de la perturbación para una clase de espacios más amplia, la cual será objeto de estudio en el próximo capítulo.

Teorema 5.2.4. *Sea* $2 \leq p < \infty$ *y* Y *un espacio de Banach que contiene un subespacio isomorfo a* L_p, *entonces* $P\Phi_+(L_p, Y) = \mathcal{SS}(L_p, Y)$.

Demostración. Sea $K \in \mathcal{L}(L_p, Y)$ y suponga que K no es un operador estrictamente singular, entonces existe un subespacio cerrado H de L_p, de dimensión infinita, tal que la restricción $K|_H$ es un isomorfismo.
Por el Teorema 5.1.2, se puede asumir que H es isomorfo a ℓ_p o isomorfo a ℓ_2 y complementado en L_p. Por otro lado, Y contiene un subespacio L isomorfo a L_p. Luego, considerando las tres siguiente posibilidades relativas a los subespacios $K(H)$ y L,

(1) $K(H) + L$ es cerrado y $K(H) \cap L$ es de dimensión finita,

(2) $K(H) \cap L$ es de dimensión infinita,

(3) $K(H) + L$ no es cerrado y $K(H) \cap L$ es de dimensión finita.

y repitiendo los argumentos dados en la primera parte de la prueba del Teorema 5.2.2, se concluye que $K \notin P\Phi_+(L_p, Y)$. □

Teorema 5.2.5. *Sea Y un espacio de Banach que contiene un subespacio isomorfo a L_∞, entonces $P\Phi_+(L_\infty, Y) = \mathcal{SS}(L_\infty, Y)$.*

Demostración. Sea $K \in \mathcal{L}(L_\infty, Y)$ y suponga que $K \notin \mathcal{SS}(L_\infty, Y)$ dado que L_∞ tiene la propiedad de Dunford Pettis, se tiene por Proposición 4.3.1, que K no es débil compacto. Luego, por Teorema 5.1.4, existe un subespacio cerrado H de L_∞, de dimensión infinita, tal que H es isomorfo a ℓ_∞ y $K|_H$ es un isomorfismo. Por el Teorema 5.1.3 se puede suponer que H es complementado en L_∞ y $K(H)$ es complementado en Y. Así se puede asumir que $L_\infty = H \oplus M$ y $Y = K(H) \oplus Y_0$, con M isomorfo a L_∞ y Y_0 isomorfo a Y. De manera que Y_0 contiene un subespacio isomorfo a L_∞. Sea $S \in \mathcal{L}(M, Y_0)$ un isomorfismo, se define el operador

$$T : L_\infty = H \oplus M \to Y = K(H) \oplus Y_0$$

como $T(h, m) = K(h) + S(m)$, entonces T es un isomorfismo, por lo que $T \in \Phi_+(L_\infty, Y)$, pero $T + K \notin \Phi_+(L_\infty, Y)$ puesto que $H \subset N(T + K)$. □

Como consecuencia de los Teoremas 5.2.2 y 5.2.4, se derivan algunos resultados sobre $P\Phi_-$.

Proposición 5.2.3. *Sea X un espacio de Banach que contiene un cociente isomorfo a L_q. Suponga que*

(a) *$2 < q < \infty$ y X^* satisface la propiedad de Orlicz, o*

(b) *$1 \leq q \leq 2$.*

Entonces $P\Phi_-(X, L_q) = \mathcal{SC}(X, L_q)$.

Demostración. Suponga que $K \in \mathcal{L}(X, L_q)$ y que K no es un operador estrictamente cosingular, esto es, $K \notin \mathcal{SC}(X, L_q)$. Sea $1 < q < \infty$ y $p := q/(q-1)$, entonces $K^* \in \mathcal{L}(L_p, X^*)$ y $K^* \notin \mathcal{SS}(L_p, X^*)$. Luego, por los Teoremas 5.2.2 y 5.2.4, existe un operador $T \in \Phi_+(L_p, X^*)$ tal que $T + K^* \notin \Phi_+(L_p, X^*)$.
Dado que L_q es reflexivo, existe un operador $S \in \mathcal{L}(X, L_q)$ tal que $S^* = T$ [44, Teorema II.2.16]. De modo que $S \in \Phi_-(X, L_q)$ y $S + K \notin \Phi_-(X, L_q)$, de aquí que $K \notin P\Phi_-(X, L_q)$.
El caso $q = 1$, es consecuencia de un resultado de Pełczyński [73, Teorema 1]: si $K \in \mathcal{L}(X, L_1)$ no es un operador estrictamente cosingular entonces existe un subespacio complementado M de X isomorfo a ℓ_1 tal que $K|_M$ es un isomorfismo y $K(M)$ es complementado en L_1. Digamos $X = M \oplus X_0$ y $L_1 = K(M) \oplus L$, con X_0 isomorfo a X y L isomorfo a L_1. De esta manera se obtiene un operador $T \in \Phi_-(X, L_1)$ tal que $T + K \notin \Phi_-(X, L_1)$. $\square$

Se sigue por dualidad [13, Teorema 26], que $\Phi_-(L_p, L_q)$ es no vacío si y sólo si $2 \leq q \leq p \leq \infty$. Por lo que el siguiente resultado es una consecuencia directa de la Proposición 5.2.3.

Corolario 5.2.3. *Sea $2 \leq q \leq p \leq \infty$, entonces $P\Phi_-(L_p, L_q) = \mathcal{SC}(L_p, L_q)$.*

Capítulo 6

Espacios subproyectivos y superproyectivos

En este capítulo se estudian soluciones al problema de la clase de perturbación al considerar espacios subproyectivos, superproyectivos y versiones fuertes de estos. Los espacios subproyectivos y superproyectivos fueron introducidos en 1964 por Whitley [93], con el fin de estudiar el adjunto de los operadores estrictamente singular y estrictamente cosingular. Es conocido que $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ si Y es subproyectivo, y que $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ si X es superproyectivo. Motivados por el hecho que muchos espacios subproyectivos conocidos satisfacen la condición que el complemento del subespacio N es isomorfo al espacio X en cuestión, se introduce una versión *fuerte* de los espacios antes mencionados, de forma análoga se introduce una versión *fuerte* de los espacios superproyectivos. Estas versiones fuertes se denominan espacios de Banach fuertemente subproyectivos y fuertemente superproyectivos y fueron definidas en el 2010 por González, Martínez-Abejón y Salas-Brown [45], estas nuevas clases de espacios proporcionan otra solución positiva al problema de la clase de perturbación y permite obtener ejemplos concretos de espacios de Banach para los cuales las igualdades $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ y $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ son ciertas.

6.1. Espacios subproyectivos y superproyectivos

A continuación se definen los espacios de Banach subproyectivos y superproyectivos y se exhibe una solución positiva al problema de la clase de perturbación al considerar este tipo de espacios.

Definición 6.1.1. Se dice que un espacio de Banach X es *subproyectivo*, si todo subespacio cerrado M de X de dimensión infinita, contiene un subespacio N de dimensión infinita, complementado en X.

Definición 6.1.2. Se dice que un espacio de Banach X es *superproyectivo*, si todo subespacio cerrado M de X de codimensión infinita está contenido en un subespacio N de codimensión infinita, complementado en X.

Los espacios subproyectivos y superproyectivos se preservan bajo isomorfismos, y obedecen una relación de dualidad siempre y cuando el espacio en cuestión sea reflexivo. Específicamente si X es reflexivo, entonces X es subproyectivo sí y sólo si X^* es superproyectivo, análogamente si X es reflexivo entonces X es superproyectivo sí y sólo si X^* es subproyectivo.

Ejemplo 6.1.1. A continuación se muestran algunos espacios subproyectivos y superproyectivos (ver [93])

1. Todo espacio de Hilbert es subproyectivo y superproyectivo.
2. El espacio de sucesiones ℓ_p para $1 < p < \infty$ es subproyectivo y superproyectivo.
3. El espacio c_0 de las sucesiones convergentes a 0, es subproyectivo.
4. El espacio de funciones $L_p(0,1)$ para $2 \leq p < \infty$ es subproyectivo y el espacio de funciones $L_p(0,1)$ para $1 < p \leq 2$ es superproyectivo.

El siguiente resultado resuelve positivamente el problema de la clase de perturbación al mostrar que la clase de operadores estrictamente singulares coincide con la clase de operadores inesenciales cuando se supone que el espacio de llegada es subproyectivo. De igual forma, la clase de operadores estrictamente cosingulares coincide con la clase de operadores inesenciales cuando se supone que el dominio es superproyectivo.

Teorema 6.1.1. *Sean X, Y espacios de Banach,*

1. *Si Y es subproyectivo entonces $\mathcal{SS}(X,Y) = \mathcal{I}n(X,Y)$*

2. *Si X es superproyectivo entonces $\mathcal{SC}(X,Y) = \mathcal{I}n(X,Y)$.*

Demostración. (1) Suponga que $T \notin \mathcal{SS}(X,Y)$, entonces existe un subespacio cerrado M de X, de dimensión infinita y tal que $T|_M$ es un isomorfismo. De modo que $T(M)$ es un subespacio cerrado de Y de dimensión infinita, como Y es subproyectivo, pasando a subespacio, podemos suponer que $T(M)$ es complementado en Y, digamos $Y = T(M) \oplus N$, entonces $X = M \oplus T^{-1}(N)$. Defina $K \in \mathcal{L}(Y,X)$ como T^{-1} en $T(M)$ y 0 en N. Observe que $KTx = x$ para todo $x \in M$, por lo que $M \subset N(I_X - KT)$. De aquí que $I_X - KT \notin \Phi(X)$ y por tanto $T \notin \mathcal{I}n(X,Y)$.
(2) Suponga que $T \notin \mathcal{SC}(X,Y)$, entonces existe un subespacio cerrado N de Y, de codimensión infinita y tal que $Q_N T$ es sobreyectiva. Observe que $T^{-1}(N)$ es un subespacio cerrado de codimensión infinita de X ya que Y/N es isomorfo a $X/T^{-1}(N)$. Como X es subproyectivo, pasando a subespacio, podemos suponer que $T^{-1}(N)$ es complementado en X. Es claro que $N(T) \subset T^{-1}(N)$, de aquí que si $X = M \oplus T^{-1}(N)$ entonces $T(M) \cap N = \{0\}$. Mas aún, $Y = T(X) + N$ implica que $Y = T(M) + N$, de donde se concluye que $T(M)$ es cerrado ([84], Teorema IV.5.10), y por lo tanto $Y = T(M) \oplus N$. Finalmente, definiendo $K \in \mathcal{L}(Y,X)$ como en la parte anterior, se obtiene que $T \notin \mathcal{I}n(X,Y)$. $\square$

6.2. Espacios fuertemente subproyectivos

En esta sección se introduce el concepto de espacio fuertemente subproyectivo dado por González, Martínez-Abejón y Salas-Brown en [45], se estudian algunas propiedades de estos espacios, se dan condiciones necesarias y suficientes para que la clase $\Phi_+(X,Y)$ sea no vacía cuando X es fuertemente subproyectivo y se presentan ejemplos de espacios de Banach clásicos que satisfacen esta propiedad.

Definición 6.2.1. Se dice que un espacio X es *fuertemente subproyectivo*, si para todo subespacio cerrado M de X de dimensión infinita existe un subespacio N de X de dimensión infinita, complementado, contenido en M y tal que su complemento es isomorfo a X.

En primer lugar, se muestra que la propiedad de ser fuertemente subproyectivo se conserva a través de isomorfismos.

Teorema 6.2.1. *Un espacio isomorfo a un espacio fuertemente subproyectivo es fuertemente subproyectivo.*

Demostración. Sean X un espacio fuertemente subproyectivo, Y un espacio isomorfo a X y $T : X \to Y$ un isomorfismo sobreyectivo. Sea M un subespacio cerrado de dimensión infinita de Y, entonces $T^{-1}(M)$ es un subespacio cerrado de dimensión infinita de X, por lo que existe un subespacio cerrado N, de dimensión infinita, contenido en $T^{-1}(M)$, complementado y con complemento isomorfo a X, digamos $X = N \oplus H$ con $H \simeq X$, entonces $T(N)$ es un subespacio cerrado de Y, de dimensión infinita, contenido en M, complementado y con complemento isomorfo a Y. □

El siguiente resultado muestra que la condición de ser fuertemente subproyectivo también se hereda a subespacios cerrados.

Teorema 6.2.2. *Un subespacio cerrado de dimensión infinita de un espacio fuertemente subproyectivo es fuertemente subproyectivo.*

Demostración. Sean X un espacio fuertemente subproyectivo, Y un subespacio cerrado de dimensión infinita de X y M un subespacio cerrado de dimensión infinita de Y. Entonces por ser X fuertemente subproyectivo, M contiene un subespacio cerrado N, de dimensión infinita, complementado en X y con complemento isomorfo a X , es decir $X = N \oplus W$, donde W es un subespacio cerrado de X isomorfo a X. Entonces $Y = N \oplus (W \cap Y)$, de modo que N es complementado en Y y tiene complemento isomorfo a Y. □

A continuación se presenta un resultado que permitirá caracterizar cuando la clase $\Phi_+(X, Y)$ es no vacía si el espacio X es fuertemente subproyectivo.

Teorema 6.2.3. *Sea X un espacio de Banach fuertemente subproyectivo, entonces todo subespacio cerrado de codimensión finita de X, contiene un subespacio isomorfo a X.*

Demostración. Sean X un espacio de Banach fuertemente subproyectivo y Z un subespacio de X de codimensión finita, digamos $dim X/Z = n$, entonces existe un subespacio M de X tal que $X = Z \oplus M$, observe que $dim M = n$ y por tanto Z tiene dimensión infinita.

Luego, por hipótesis, existe un subespacio cerrado H de Z, de dimensión infinita, complementado en X y con complemento isomorfo a X, es decir $X = H \oplus X_0$ con X_0 isomorfo a X, note que X_0 tiene codimensión infinita. Además $Z = H \oplus (Z \cap X_0)$ por lo que $X = H \oplus (Z \cap X_0) \oplus M$. Tome W un subespacio de H tal que $dimW = n$, entonces $H = W \oplus Y$, donde Y es un subespacio cerrado de H, Sea $Z_0 = W \oplus Y \oplus (Z \cap X_0) \oplus M$, de modo que $X = W \oplus Z_0$. Observe que Z_0 y Z son isomorfos y que $(Z \cap X_0) \oplus M$ es un subespacio de Z_0 isomorfo a X_0 y por tanto a X, de donde se concluye el resultado. $\square$

Como consecuencia inmediata del teorema anterior se tiene el siguiente resultado.

Corolario 6.2.1. *Sea X un espacio de Banach fuertemente subproyectivo, entonces $\Phi_+(X, Y) \neq \emptyset$ si y sólo si Y contiene un subespacio isomorfo a X*

Demostración. Sea X un espacio fuertemente subproyectivo y $T \in \Phi_+(X, Y)$, entonces $R(T)$ es cerrado y existe un subespacio M de codimensión finita de X tal que $X = N(T) \oplus M$, por el Teorema 6.2.3, M contiene un subespacio M_0 isomorfo a X. Así $T(M_0)$ es un subespacio de Y isomorfo a X.
Recíprocamente, si Y_0 es un subespacio de Y isomorfo a X considere el isomorfismo sobreyectivo $S : X \to Y_0$ y el operador T obtenido al extender el rango de S a todo el espacio Y, entonces $T \in \Phi_+(X, Y)$. $\square$

A continuación, se presenta un lema que permitirá mostrar que muchos de los ejemplos de espacios subproyectivos conocidos, son fuertemente subproyectivos.

Lema 6.2.1. *Sea X un espacio subproyectivo, si el subespacio N de la Definición 6.2.1 es isomorfo a $N \times N$ entonces X es fuertemente subproyectivo.*

Demostración. Sea X un espacio subproyectivo y M un subespacio cerrado de X, de dimensión infinita, entonces existe un subespacio cerrado N de X, de dimensión infinita, tal que $N \subset M$ y N es complementado en X, es decir $X = N \oplus H$. Por hipótesis, se puede suponer que existen dos subespacios cerrados N_1 y N_2 de N, isomorfos a N tales que $N = N_1 \oplus N_2$. De modo que N_1 es un subespacio de M, $N_2 \oplus H$ es isomorfo a X y $X = N_1 \oplus (N_2 \oplus H)$, lo cual demuestra que X es un subespacio fuertemente subproyectivo. $\square$

El espacio de las sucesiones p-sumables, ℓ_p para $1 \leq p < \infty$ es isomorfo a $\ell_p \times \ell_p$, el espacio de las sucesiones convergentes a 0, c_0, es isomorfo a $c_0 \times c_0$. De manera que si el subespacio N de la Definición 6.2.1, es isomorfo a ℓ_p o a c_0, entonces en virtud del Lema 6.2.1, se obtiene que el espacio en cuestión es fuertemente subproyectivo.

Se finaliza esta sección con una lista de ejemplos de espacios de Banach fuertemente subproyectivos.

Ejemplo 6.2.1. *Los espacios l_p, para $1 \leq p < \infty$ y c_0 son fuertemente subproyectivos.* En efecto, sea M un subespacio cerrado de l_p (resp. c_0) de dimensión infinita, entonces por la Proposición 5.1.2, M contiene un subespacio cerrado N, tal que N es isomorfo a l_p y complementado en l_p (resp. c_0).

Ejemplo 6.2.2. *Los espacios L_p, para $2 \leq p < \infty$ son fuertemente subproyectivos.* En efecto, por Teorema 5.1.2, se tiene que todo subespacio de dimensión infinita de L_p es siempre isomorfo a ℓ_2 y complementado, o contiene un subespacio isomorfo a ℓ_p y complementado en L_p. Luego aplicando el Lema 6.2.1 se concluye el resultado deseado.

Ejemplo 6.2.3. Sea $1 \leq p < \infty$ y sea $w = (w_n)$ una sucesión decreciente de números positivos tales que $w_1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$. El *espacio de sucesiones de Lorentz*, denotado por $d(w,p)$, es el espacio de Banach de todos los escalares $x = (a_1, a_2, ...)$ para el cual

$$\|x\| = \sup_{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi(n)}|^p w_n \right)^{1/p} < \infty$$

donde π varía sobre todas las permutaciones de enteros positivos.
Si (a_n^*) es un reordenamiento decreciente de la sucesión $(|a_n|)$ entonces la norma anterior también puede ser expresada de la forma

$$\|x\| = \sup_{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^*)^p w_n \right)^{1/p} < \infty$$

para $x = (a_1, a_2, ...) \in d(w, p)$. Si $w_n = n^{p/q} - (n-1)^{p/q}$, con $1 \leq q < \infty$, entonces el espacio $d(w, p)$ se denota por $\ell_{q,p}$. En [64], se muestra que $d(w, p)$ es reflexivo si $1 < p < \infty$ y $\ell_{q,p}$ es reflexivo, para $1 < p, q < \infty$. En [64, Proposición 4.e.3], se muestra que todo subespacio cerrado de dimensión infinita de $d(w, p)$ contiene un subespacio isomorfo a ℓ_p y complementado en $d(w, p)$. Del hecho que $\ell_p \times \ell_p$ es isomorfo a ℓ_p y del Lema 6.2.1, se obtiene que el espacio $d(w, p)$ es fuertemente subproyectivo.

Ejemplo 6.2.4. Sea $1 \leq p < \infty$ y W una función positiva, continua y decreciente sobre $(0, \infty)$ tal que

- $\lim_{t\to 0} W(t) = \infty$,
- $\int_0^1 W(t)dt = 1$ y
- $\int_0^\infty W(t)dt = \infty$.

el *espacio de funciones de Lorentz* denotado por $L_{W,p}(I)$, donde $I = (0, a)$ con $0 < a \leq \infty$, es el conjunto de todas las funciones medibles sobre I tal que

$$\|f\| = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty f^*(t)^p W(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

donde $f^*(t) = \inf\{y \geq 0 : \mu(\{x \in I : |f(x)| > y\}) \leq t\}$.
Para $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, el espacio $L_{p,q}(I)$, es el conjunto de todas las funciones medibles sobre I tal que

$$\|f\|_{p,q} = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty f^*(t)^q t^{\frac{q}{p}-1} d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \tag{6.1}$$

donde $I = (0, a)$ con $0 < a \leq \infty$, provisto de la medida de Lebesgue. Si $1 \leq q < p$, el espacio $L_{p,q}(I)$ coincide con el espacio de funciones de Lorentz $L_{W,q}(I)$, cuando $W(t) = \frac{q}{p}t^{\frac{q}{p}-1}$, $0 < t < \infty$.
Es conocido (ver [35]), identificando por supuesto, funciones iguales en casi todas partes, que para $1 \leq q < p$, el espacio $L_{p,q}(I)$ es de Banach con la norma $\|\cdot\|_{p,q}$. Sin embargo, para $1 < p < q < \infty$, la relación $\|\cdot\|_{p,q}$ es una cuasi-norma, la cual es equivalente a la norma

$$\|f\|_{(p,q)} = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty f^{**}(t)^q t^{\frac{q}{p}-1} dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{6.2}$$

donde $f^{**}(t) = \left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds\right)$. El espacio $L_{p,q}(I)$ es un espacio de Banach con la norma (6.2),ver [53]. Debido a que las expresiones (6.1) y (6.2) son equivalentes, se trabajará con la expresión (6.1).
Es conocido que $\|f\|_p^p = \int_0^\infty [f^*(t)]^p dt$ (ver [53]), de donde se obtiene que los espacios $L_{p,p}(I)$ y $L_p(I)$ coinciden.
Para $1 < p, q < \infty$, los espacios $L_{p,q}(I)$ y $L_{W,p}(0,1)$ son reflexivos (ver [53, Proposición (2.7)] y [42]).

- El espacio $L_{p,q}(0,\infty)$ es fuertemente subproyectivo, para $2 < p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$.

- El espacio $L_{W,p}(0,1)$ es fuertemente subproyectivo, para $2 < p < \infty$ (ver[42, Observación5.7]).

- El espacio $L_{p,q}(0,1)$ es fuertemente subproyectivo, para $2 \leq p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$.

Ejemplo 6.2.5. Dada una sucesión de escalares $a = (a_k)_k$, se define

$$\|a\|_J = \sup\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}(a_{k_i} - a_{k_{i-1}})^2\right)^{1/2}\right\};$$

donde el supremo es tomado sobre todas las sucesiones de enteros $(k_i)_{i=0}^n$ tales que $1 \leq k_0 < k_1 < ... < k_n$.
El espacio J, de *James*, está dado por

$$J = \left\{a : \|a\|_J < \infty \text{ y } \lim_{k\to\infty} a_k = 0\right\}$$

El espacio de James fue construido en 1950 por R. C. James [55], y constituye un ejemplo clásico de un espacio de Banach con base pero sin base incondicional, el cual es no reflexivo, pero es isométricamente isomorfo a su dual, esto es $J \simeq J^{**}$ pero $\dim J^{**}/J = 1$.
En [40, Corolario 2.d.4] se muestra que todo subespacio cerrado de dimensión infinita de J contiene un subespacio isomorfo a ℓ_2 y complementado en J. Luego, en virtud del Lema 6.2.1, se concluye que el espacio J es fuertemente subproyectivo.

Ejemplo 6.2.6. Sea c_{00}, el subespacio de c_0 formada por las sucesiones cuyos términos son no nulos para una cantidad finita de puntos, para $1 < p < \infty$ considere la norma

$$\|x\|_{B_p} = \sup\{\left(\sum_{k=1}^{n} \|E_k(x)\|_{\ell_1}^{p}\right)^{1/p} : (E_k)_{k=1}^{n} \in \mathcal{A}\}$$

donde $\mathcal{A}$ es el conjunto de sucesiones de bloque $(E_k)_{k=1}^{n}$ de intervalos $E_k \subset \mathbb{N}$ tales que $n \leq \min E_1$ y donde $E_k(x)$ denota la proyección natural de x sobre el intervalo E_k. El espacio de Baernstein B_p es la completación de c_{00} con la norma $\|\cdot\|_{B_p}$.
Este espacio reflexivo fue construido en 1972 por Baernstein [15], y en [32, Teorema 0.15] se muestra que todo subespacio cerrado de dimensión infinita de B_p contiene un subespacio cerrado isomorfo a ℓ_p y complementado. Por lo que el espacio B_p es fuertemente subproyectivo.

Ejemplo 6.2.7. En 1974, Tsirelson [85] proporciona el primer ejemplo de un espacio de Banach que no contiene copias de ℓ_p para $1 \leq p < \infty$, o c_0. En 1974 Figel y Johnson [41], construyen el dual del espacio encontrado por Tsirelson. Este dual es el espacio que hoy en día se conoce como el espacio de Tsirelson, el cual se denota por T. Este espacio T es un espacio de Banach reflexivo con base incondicional, que no contiene copias de ℓ_p para $1 \leq p < \infty$, o c_0. Considere c_{00} junto con la norma

$$\|x\|_T = \max\{\|x\|_\infty, \sup \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \|E_i(x)\| : (E_i)_{i=1}^{n} \in \mathcal{A}\}$$

donde $\mathcal{A}$ es el conjunto de sucesiones de bloque $(E_i)_{i=1}^{n}$ de intervalos $E_i \subset \mathbb{N}$ tales que $n \leq \min E_1$ y donde $E_i(x)$ denota la proyección natural de x sobre el intervalo E_i. El espacio T de Tsirelson es la completación del espacio c_{00} con la norma $\|\cdot\|_T$. En [11, Teorema 10.3.2] se puede encontrar los detalles de la construcción de este espacio.
Sea (t_n) la base unitaria del espacio T, por [32, Proposición II.7] todo subespacio cerrado de T contiene un subespacio N complementado en T e isomorfo a un subespacio cerrado generado por una subsucesión de la base (t_n). Por otra parte, de [32, Proposición I.12] se tiene que N es isomorfo a $N \times N$. Luego, por el Lema 6.2.1 se concluye que el espacio T es fuertemente subproyectivo.

Ejemplo 6.2.8. Un espacio compacto K es llamado *scatered* (o *disperso*) si todo conjunto no vacío de K tiene un punto aislado. Si Γ es un conjunto dotado con la topología discreta entonces la compactificación por un punto de Γ es un ejemplo de un conjunto disperso.
El espacio de las funciones continuas $C(K)$, con K disperso y compacto es fuertemente subproyectivo. En efecto, todo subespacio cerrado de dimensión infinita de $C(K)$ es isomorfo a c_0 y complementado en $C(K)$ (ver [66, Teorema 11]). De modo que, por el hecho que c_0 es isomorfo a $c_0 \times c_0$ y en virtud del Lema 6.2.1 se concluye que el espacio $C(K)$ es fuertemente subproyectivo.

6.3. Espacios fuertemente superproyectivos

En esta sección se introduce el concepto de espacio fuertemente superproyectivo, se estudian algunas propiedades de estos espacios, se dan condiciones necesarias y suficientes para que la clase $\Phi_-(X, Y)$ sea no vacía cuando Y es fuertemente superproyectivo, se presenta una relación de dualidad para espacios reflexivos entre los espacios fuertemente subproyectivos y fuertemente superproyectivos, se presentan ejemplos de espacios de Banach clásicos que satisfacen esta propiedad, y se proporcionan herramientas que serán de utilidad en el desarrollo de la siguiente sección.

Definición 6.3.1. Se dice que un espacio X es *fuertemente superproyectivo*, si para todo subespacio cerrado M de X de codimensión infinita existe un subespacio N de X de codimensión infinita, complementado, que contiene a M e isomorfo a X.

En primer lugar, se muestra que la propiedad de ser fuertemente superproyectivo se conserva a través de isomorfismos.

Teorema 6.3.1. *Un espacio isomorfo a un espacio fuertemente superproyectivo es fuertemente superproyectivo.*

Demostración. Sean X un espacio fuertemente superproyectivo, Y un espacio isomorfo a X, $T : X \to Y$ un isomorfismo sobreyectivo y M un subespacio cerrado de codimensión infinita de Y, entonces $T^{-1}(M)$ es un subespacio cerrado de codimensión infinita de X, como X es fuertemente superproyectivo entonces existe un subespacio cerrado N, de codimensión infinita, que contiene a $T^{-1}(M)$, complementado e isomorfo a X, es decir $X = N \oplus H$ con $N \simeq X$, entonces $T(N)$ es un subespacio cerrado de Y, de codimensión infinita, que contiene a M, complementado e isomorfo a Y. Lo cual prueba que Y es fuertemente superproyectivo. $\square$

En similitud con el Teorema 6.2.3, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 6.3.2. *Sea Y un espacio de Banach fuertemente superproyectivo, entonces todo cociente de Y, por un subespacio de dimensión finita tiene un cociente isomorfo a Y.*

Demostración. Sea Z un subespacio de dimensión finita de Y, entonces $Y = Z \oplus W$, con W un subespacio cerrado de dimensión infinita. Como Z tiene codimensión infinita y Y es fuertemente superproyectivo, existe un subespacio H de Y, cerrado de codimensión infinita, que contiene a Z, es complementado en Y y es isomorfo a Y. Entonces se puede escribir $Y = H \oplus Y_0$, $H \simeq Y$, se observa que Y_0 es un subespacio cerrado de Y de codimensión infinita tal que $Y/Y_0 \simeq Y$.
Sea F un subespacio de Y_0 tal que $dimF = dimZ$, entonces $\frac{Y/F}{Y_0/F} \simeq Y/Y_0 \simeq Y$, de modo que $\frac{Y/F}{Y_0/F}$ es un cociente de Y/F isomorfo a Y. Dado que Y/F y Y/Z son isomorfos se obtiene el resultado deseado. $\square$

Como consecuencia inmediata del teorema anterior se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 6.3.1. *Sea Y un espacio de Banach fuertemente superproyectivo, entonces $\Phi_-(X, Y) \neq \emptyset$ si y sólo si X tiene un cociente isomorfo a Y*

Demostración. Sea Y un espacio de Banach fuertemente superproyectivo tal que $\Phi_-(X, Y) \neq \emptyset$, sea $T \in \Phi_-(X, Y)$, entonces $R(T)$ tiene codimensión finita, de manera que existe un subespacio W de Y, de dimensión finita tal que $Y = W \oplus R(T)$. De aquí que

$$\frac{Y}{W} \simeq R(T) \simeq \frac{X}{N(T)}$$

luego, por Teorema 6.3.2, Y/W tiene un cociente isomorfo a Y, digamos $\frac{Y/W}{W_0/W}$ con $\frac{Y/W}{W_0/W} \simeq Y/W_0 \simeq Y$. De donde se obtiene el resultado requerido.

Recíprocamente, sea M un subespacio cerrado de X tal que X/M es isomorfo a Y, se considera un isomorfismo sobreyectivo $T : X/M \to Y$ y la aplicación cociente $Q_M : X \to X/M$, entonces $T \circ Q_M : X \to Y$ es un isomorfismo y por lo tanto $T \circ Q_M \in \Phi_-(X, Y)$. $\square$

A continuación, se presenta un lema util para mostrar que muchos de los ejemplos de espacios superproyectivos conocidos, son fuertemente superproyectivos.

Lema 6.3.1. *Sea X un espacio superproyectivo, si el complemento de el subespacio N de la Definición 6.3.1 es isomorfo a $N \times N$ entonces X es fuertemente superproyectivo.*

Demostración. Sea M un subespacio cerrado de codimensión infinita de X. Entonces existe un subespacio de codimensión infinita N de X, que contiene a M y complementado en X. Luego, se puede escribir $X = N \oplus H$, por hipótesis, se puede suponer que existen dos subespacios cerrados H_1 y H_2 de H, isomorfos a H tales que $H = H_1 \oplus H_2$. De modo que $N \oplus H_1$ contiene a M y $X = (N \oplus H_1) \oplus H_2$, por lo que $N \oplus H_1$ es isomorfo a X, lo cual demuestra que X es un subespacio fuertemente superproyectivo. $\square$

Algunos ejemplos de espacios fuertemente superproyectivos pueden ser obtenidos por dualidad. El siguiente teorema muestra la relación existente entre espacios fuertemente subproyectivos y fuertemente superproyectivos para espacios de Banach reflexivos.

Teorema 6.3.3. *Sea X un espacio de Banach reflexivo, entonces X es fuertemente subproyectivo si y sólo si su dual X^* es fuertemente superproyectivo.*

Demostración. Sea X un espacio reflexivo tal que X es fuertemente subproyectivo, sea M un subespacio cerrado, de codimensión infinita, de X^*, de modo que $M^\perp$ es un subespacio cerrado de dimensión infinita de X, luego existe un subespacio cerrado, de dimensión infinita N de X, tal que $N \subset M^\perp$, N es complementado en X y el complemento de N es isomorfo a X, de aquí que X/N es isomorfo a X. Así $N^\perp$ es un subespacio de X^*, complementado, de codimensión infinita, isomorfo a X^* que contiene a M. De aquí que X^* es fuertemente superproyectivo.

Recíprocamente, sea X un espacio reflexivo tal que X^* es fuertemente superproyectivo, y sea M un subespacio cerrado, de dimensión infinita de X, entonces M^* es un subespacio de dimensión infinita de X^* isomorfo a $X^*/M^\perp$, de manera que $M^\perp$ es un subespacio de codimensión infinita de X^*, luego, por hipótesis, existe un subespacio cerrado N de X^*, de codimensión infinita, que contiene a $M^\perp$, complementado e isomorfo a X^*. De manera que $N^\perp$ es un subespacio cerrado de $X^{**} = X$ de dimensión infinita, está contenido en M, es complementado en X y con complemento isomorfo a X. $\square$

A continuación se presentan ejemplos de espacios de Banach fuertemente superproyectivos.

Ejemplo 6.3.1. Los siguientes espacios son fuertemente superproyectivos

1. l_p para $1 < p < \infty$.
2. L_p para $1 < p \leq 2$.
3. $d(w, p)$ para $1 < p < \infty$.
4. $L_{p,q}(0, 1)$ para $1 < p \leq 2$ y $1 < q < \infty$.
5. $L_{W,p}(0, 1)$ y $L_{p,q}(0, \infty)$ para $1 < p < 2$ y $1 < q < \infty$.
6. El espacio de Tsirelson T.
7. El espacio de Baernstein B_p para $1 < p < \infty$.

En efecto, dado que los espacios antes mencionados son reflexivos, entonces en virtud del Teorema 6.3.3 y de los Ejemplos 6.2.1, 6.2.2, 6.2.3, 6.2.4, 6.2.7 y 6.2.6 se obtiene el resultado deseado.

Ejemplo 6.3.2. El dual del espacio de James, J^*, es fuertemente superproyectivo. En efecto, sea M un subespacio cerrado de J^* de codimensión infinita, entonces $M^\perp$ es un subespacio cerrado de J^{**} de dimensión infinita. Por el Ejemplo 6.2.5, J es fuertemente subproyectivo y dado que $J^{**} \simeq J$, entonces J^{**} es fuertemente subproyectivo, luego existe un subespacio cerrado N de J^{**} de dimensión infinita, contenido en $M^\perp$, complementado y con complemento isomorfo a J^{**}, es decir $J^{**} = N \oplus W$, con $W \simeq J^{**}$.

Se observa que, $N^\perp$ contiene a M, tiene codimensión infinita y

$$J^* \simeq J^{***} = N^\perp \oplus W^\perp,$$

como $J^{**} \simeq J$ entonces $N^\perp \simeq J^*$. De donde se concluye que J^*, es fuertemente superproyectivo.

Ejemplo 6.3.3. El espacio de las funciones continuas $C(K)$, con K disperso y compacto es fuertemente superproyectivo. En efecto, sea M un subespacio cerrado de codimensión infinita de $C(K)$, por [70, Teorema 4.2], $C(K)/M$ tiene un cociente isomorfo a c_0 o a ℓ_2, esto es, existe un subespacio cerrado A de $C(K)$, tal que $M \subset A$ y $C(K)/A \simeq c_0$ o $C(K)/A \simeq \ell_2$.
Como K es disperso entonces $C(K)^* \equiv \ell_1(K)$, por lo que $C(K)^*$ no tiene copias de ℓ_2, por lo tanto $C(K)/A$ no puede ser isomorfo a ℓ_2 pues en caso contrario $A^\perp$ sería un subespacio de $C(K)^*$ isomorfo a ℓ_2. De modo que $C(K)/A \simeq c_0$.
Considere el operador $Q_A : C(K) \to C(K)/A$, por la Proposición 4.3.1 se tiene que Q_A no es débil compacto, como $C(K)$ tiene la propiedad de Pelczynski entonces existe un subespacio F de $C(K)$, isomorfo a c_0 y tal que $Q_A \circ J_F$ es un isomorfismo. Dado que $C(K)/A \simeq c_0$, por [11, Corolario 2.5.9], se tiene que que $Q_A(F)$ es complementado en $C(K)/A$, digamos $C(K)/A = Q_A(F) \oplus N$ para algún subespacio cerrado N de $C(K)/A$. Por lo tanto $C(K) = F \oplus Q_A^{-1}(N)$, y M está contenido en un subespacio complementado de codimensión infinita, se obtiene que $C(K)$ es superproyectivo. Finalmente, dado que F es isomorfo a c_0 se concluye, en virtud del Lema 6.3.1, que $C(K)$ es fuertemente superproyectivo.

Los lemas y proposiciones que continuación se presentan servirán de herramientas en las demostraciones de los teoremas de la próxima sección.

Lema 6.3.2. *Sea $K \in \mathcal{L}(X, Y)$, Y_0 subespacio cerrado de Y tal que $Q_{Y_0}K$ es sobreyectiva. Si E es un subespacio cerrado de X tal que $E \supset K^{-1}(Y_0)$ entonces existe un subespacio cerrado F de Y tal que $F \supset Y_0$ y $E = K^{-1}(F)$. Además, si E tiene codimensión infinita entonces F tiene codimensión infinita.*

Demostración. Suponga que $Q_{Y_0}K$ es una función sobreyectiva y considere el isomorfismo

$$U : \frac{X}{N(Q_{Y_0}K)} \longrightarrow R(Q_{Y_0}K)$$

inducido por $Q_{Y_0}K$, el cuál está dado explícitamente por: $U\left(x + K^{-1}(Y_0)\right) = Q_{Y_0}Kx$, y las aplicaciones cocientes: $P : X \to X/\left(K^{-1}(Y_0))\right)$ y $q : Y \to Y/Y_0$.

Sea E un subespacio cerrado de X tal que $E \supset K^{-1}(Y_0)$, se define $F = q^{-1}\left(U(PE)\right)$, entonces

- F es cerrado en Y,
- $F \supset Y_0$ y
- $E = K^{-1}(F)$.

Además, si E tiene codimensión infinita en X, entonces $q^{-1}\left(U(PE)\right)$ tiene codimensión infinita en Y de donde se concluye que F tiene codimensión infinita. $\square$

Proposición 6.3.1. *Sean X un espacio de Banach, M y L dos subespacios cerrados de dimensión infinita de X, L isomorfo a X y fuertemente subproyectivo, tales que $M + L$ es cerrado y $M \cap L$ es de dimensión finita entonces L contiene un subespacio cerrado L', de codimensión finita tal que $M \cap L' = \{0\}$, $M + L'$ es cerrado y L' es isomorfo a L.*

Demostración. Dado que $M \cap L$ es de dimensión finita entonces $M \cap L$ es complementado en L, esto es, existe un subespacio cerrado W de L de dimensión infinita tal que $L = (M \cap L) \oplus W$. Luego por el Teorema 6.2.3, W contiene un subespacio L' de codimensión finita e isomorfo a L. Además $M \cap L' = \{0\}$ y $M + L'$ es cerrado tal y como se requería. $\square$

Una propiedad importante que poseen los espacios subproyectivos es que se hereda a cocientes, tal y como se exhibe en el siguiente resultado.

Teorema 6.3.4. *Un cociente de un espacio superproyectivo es superproyectivo.*

Demostración. Sean X un espacio superproyectivo, M un subespacio cerrado de X. Se mostrará que X/M es fuertemente superproyectivo. Para esto sea A un subespacio cerrado de X/M de codimensión infinita,

A se puede expresar como $A = N/M$ donde N es un subespacio cerrado de X que contiene a M. Considerando la aplicación cociente $Q_M : X \to X/M$, entonces $N = Q_M^{-1}(A)$, por lo que N tiene codimensión infinita. Como X es fuertemente superproyectivo, existe un subespacio cerrado B de X, de codimensión infinita, que contiene a N, complementado e isomorfo a X. De modo que, $Q_M(B)$ es un subespacio cerrado de codimensión infinita de X/M, que contiene a A y complementado en X/M. $\square$

Lema 6.3.3. [56, Remark III.1.] *Sea (g_n) una sucesión acotada en el espacio dual Y^*, tal que* $\inf_n \|g_n\| > 0$ *y* 0 *es un punto de la clausura w^* de $\{g_n : n \in N\}$, entonces (g_n) tiene una subsucesión (g_{n_k}) para la cuál existe una sucesión acotada (y_k) en Y tal que $g_{n_i}(y_j) = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in N$*

6.4. El problema de la clase de perturbación

En esta sección se resuelve el problema de la clase de perturbación para operadores semi-Fredholm utilizando espacios fuertemente subproyectivos y fuertemente superproyectivos. También se proporcionan ejemplos concretos de espacios de Banach para los cuales las igualdades $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$ y $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$ son válidas.

Teorema 6.4.1. *Sean X, Y espacios de Banach tales que X es fuertemente subproyectivo y $\Phi_+(X,Y) \neq \emptyset$ entonces $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$.*

Demostración. Sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $K \notin \mathcal{SS}(X,Y)$, entonces existe un subespacio cerrado H de X de dimensión infinita, tal que la restricción $K|_H$ es un isomorfismo. Se mostrará que $K \notin P\Phi_+(X,Y)$.

Como X es fuertemente subproyectivo, pasando a subespacio, se puede suponer que H es complementado en X, entonces X se puede expresar como:

$$X = H \oplus M$$

con M isomorfo a X. Siendo $\Phi_+(X,Y) \neq \emptyset$ entonces por el Corolario 6.2.1, existe un subespacio L de Y isomorfo a X; así que uno de los siguientes casos puede ocurrir:

(1) $K(H) + L$ es cerrado y $K(H) \cap L$ tiene dimensión finita,

(2) $K(H) \cap L$ tiene dimensión infinita,

(3) $K(H) + L$ es no cerrado y $K(H) \cap L$ tiene dimensión finita.

(1) Como L es fuertemente subproyectivo, pues es isomorfo a X, entonces por la Proposición 6.3.1, se puede reemplazar L por un subespacio de codimensión finita, de manera que $K(H) \cap L = \{0\}$.
Sea $U \in \mathcal{L}(M, L)$ un isomorfismo sobreyectivo, se considera el operador

$$T \colon X = H \oplus M \longrightarrow K(H) \oplus L \subset Y$$

dado por $T(x, y) := -K(x) + U(y)$. Observe que T es un isomorfismo, por lo que $T \in \Phi_+(X, Y)$. Además , $H \subset N(T + K)$ por lo que $N(T + K)$ tiene dimensión infinita. En consecuencia, $T + K \notin \Phi_+(X, Y)$, y de aquí que $K \notin P\Phi_+(X, Y)$.

(2) Como L es fuertemente subproyectivo y $K(H) \cap L$ es un subespacio cerrado de dimensión infinita de L, entonces existe un subespacio L_1 de L, cerrado de dimensión infinita, complementado, contenido en $K(H) \cap L$ y cuyo complemento es isomorfo a L, de manera que L se puede expresar como:

$$L = L_1 \oplus L_3$$

con L_3 isomorfo a L.
Dado que L_1 es un subespacio cerrado de dimensión infinita de $K(H) \cap L$ y como $K|_H$ es un isomorfismo, entonces $H_2 = (K|_H)^{-1}(L_1)$ es un subespacio cerrado de X de dimensión infinita. Por ser X fuertemente subproyectivo, existe un subespacio cerrado H_3 de H_2, cerrado de dimensión infinita, complementado en X y con complemento isomorfo a X, entonces se tiene que:

$$X = H_3 \oplus X_2$$

con X_2 isomorfo a X.
Así reemplazando L por el complemento de L_1, es decir, reemplazando L por L_3 y H por N_3, el cual es un subespacio de H complementado, se puede asumir que $K(N_3) + L_3$ es cerrado y $K(N_3) \cap L_3 = \{0\}$ y por tanto se está bajo las condiciones del caso (1).

(3) En este caso se definirá un operador compacto $K_1 \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $(K + K_1)(H) \cap L$ tenga dimensión infinita.
Se observa que, de ser posible esto, $(K + K_1)|_H \in P\Phi_+(X, Y)$, así que, pasando a un subespacio de codimensión finita, se puede suponer que

$(K+K_1)|H$ es un isomorfismo. Por lo tanto, el argumento del caso (2) garantiza la existencia de un operador $T \in \Phi_+(X,Y)$ tal que $T + K + K_1 \notin \Phi_+(X,Y)$, como K_1 es compacto debe ocurrir que $T+K \notin \Phi_+(X,Y)$ y por lo tanto $K \notin P\Phi_+(X,Y)$.

Como en el caso (1), se puede asumir que $K(H) \cap L = \{0\}$. Del hecho que $K(H)+L$ no sea cerrado, se deduce que existe una sucesión normalizada (y_n) en $K(H)$ tal que $\operatorname{dist}(y_n, L) < 2^{-n}$.

Se observa que (y_n) no tiene subsucesiones débilmente convergentes, pues en caso contrario, si $y \in K(H)$ es el limite de alguna subsucesión, se tendría que $\|y\| = 1$ y se puede escoger una sucesión (u_n) en L tal que $\|u_n - y_n\| \to_{n\to\infty} 0$, de aquí que (u_n) converge débilmente a y, por lo que $y \in L$. Luego, $y \in K(H) \cap L = \{0\}$, lo cual no es posible pues $\|y\| = 1$. Por tanto (y_n) tampoco tiene subsucesiones convergentes.

Se denota por $S = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, del hecho que (y_n) no tenga subsucesiones convergentes, se deduce que $0 \notin \overline{S}^{\|\cdot\|}$ y del hecho que (y_n) no tenga subsucesiones débilmente convergentes, se deduce que $0 \notin \overline{S}^{w}$ y que $\overline{S}^{w}$ no débil compacta. Luego, en virtud del Teorema4.2.6, $S = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene una sucesión básica. Pasando a subsucesión, se puede asumir (y_n) es una sucesión básica.

Sea (h_n) una sucesión en H tal que $K(h_n) = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado que K es un isomorfismo sobre H, (h_n) es una sucesión básica y semi-normalizada.

Por lo tanto, existe una sucesión acotada (h_n^*) en el espacio dual X^* tal que $\langle h_i^*, h_j \rangle = \delta_{ij}$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$.

Como $\operatorname{dist}(y_n, L) < 2^{-n}$, se puede seleccionar (z_n) en L tal que $\|y_n - z_n\| < 2^{-n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La expresión

$$K_1(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h_i^*, f \rangle (z_i - y_i),$$

define un operador compacto $K_1 \in \mathcal{L}(X,Y)$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $(K+K_1)(h_n) = z_n$, por lo que $[z_n] \subset L \cap (K+K_1)(H)$. Observe que (z_n) no tiene subsucesiones convergentes por lo que $[z_n]$ tiene dimensión infinita. De aquí que $(K+K_1)(H) \cap L$ tenga dimensión infinita, tal y como se deseaba. $\square$

Cabe destacar que el Teorema 6.4.1 no es consecuencia del resultado dado en [62], el cual establece que si Y es subproyectivo y $\Phi_+(X,Y) \neq \emptyset$

entonces $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$. En efecto, en primer lugar se debe observar que las condiciones dadas en el resultado antes mencionado es sobre el espacio codominio Y; mientras que en el Teorema 6.4.1 la condición se impone sobre el espacio dominio X.
Más aún, dado que los ejemplos conocidos de espacios subproyectivo son también fuertemente subproyectivo, el hecho que $\Phi_+(X,Y) \neq \emptyset$ y Y sea subproyectivo implica que X es subproyectivo. Por lo tanto, en muchos casos el resultado dado en [62] es consecuencia del Teorema 6.4.1, aquí establecido.
El siguiente resultado aunque es una versión dual del Teorema 6.4.1, tiene un interés independiente ya que la demostración del mismo no sigue por dualidad. De hecho, la demostración del siguiente resultado es técnicamente más complicada que la demostración del Teorema 6.4.1, debido a que se consideran cocientes en lugar de subespacios.

Teorema 6.4.2. *Sean X, Y espacios de Banach tales que Y es fuertemente superproyectivo y $\Phi_-(X,Y) \neq \emptyset$ entonces $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$.*

Demostración. Sea $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $K \notin \mathcal{SC}(X,Y)$, entonces existe un subespacio cerrado Y_0 de Y de codimensión infinita tal que la $Q_{Y_0}K$ es sobreyectiva, es decir $Y = R(K)+Y_0$. Se mostrará que $K \notin P\Phi_-(X,Y)$.

Por ser Y fuertemente superproyectivo, pasando a subespacio, se puede suponer que Y_0 es complementado e isomorfo a Y, de manera que Y se puede expresar como $Y = Y_0 \oplus N$.
Sea $P : Y \to Y$ la proyección de Y sobre N, entonces $N(P) = Y_0$ y $R(P) = N$, de modo que

$$R(PK) = P(R(K) + Y_0) = N$$

y

$$N(PK) = K^{-1}(Y_0).$$

Como $\Phi_-(X,Y) \neq \emptyset$ entonces, por el Corolario 6.3.1, existe un subespacio M de X tal que X/M es isomorfo a Y.
De manera que, X/M es isomorfo a Y_0, se considera la función $S_1 \in \mathcal{L}(X,Y_0)$ definida por $S_1(x) = (S \circ Q_M)(x)$, donde Q_M es la aplicación cociente de X sobre X/M y S es un isomorfismo entre X/M y Y_0,

entonces S_1 es una función sobreyectiva tal que $N(S_1) = M$ y $R(S_1) = Y_0$.
Como antes, y de manera dual, uno de los siguientes tres casos puede ocurrir:

(1) $K^{-1}(Y_0) + M$ es cerrado y $K^{-1}(Y_0) + M$ tiene codimensión finita,

(2) $\overline{K^{-1}(Y_0) + M}$ tiene codimensión infinita,

(3) $K^{-1}(Y_0) + M$ es no cerrado y $\overline{K^{-1}(Y_0) + M}$ tiene codimensión finita.

(1) Como $K^{-1}(Y_0) + M$ tiene codimensión finita entonces existe un subespacio cerrado W de X de dimensión finita tal que $X = (K^{-1}(Y_0) + M) \oplus W$.
Se denota por $M_1 = M + W$, entonces $\dim(M_1/M)$ es finita y $K^{-1}(Y_0) + M_1 = X$. Como X/M es fuertemente superproyectivo entonces, por el Teorema 6.3.2, existe un subespacio cerrado M_2 que contiene a M_1 tal que X/M_2 es isomorfo a Y. De aquí que, se puede asumir que $K^{-1}(Y_0) + M = X$
Se considera el operador $T \colon X \longrightarrow Y$ definido por $T(x) := S_1(x) - PK(x)$. Se cumple que $R(T) = Y$, en efecto, sea $y \in Y$ entonces $y = y_0 + y_1$ con $y_0 \in Y_0$ y $y_1 \in N$.
Se mostrará que

$$y_0 = S_1(x_0) \text{ para algún } x_0 \in K^{-1}(Y_0) \tag{6.3}$$

y

$$y_1 = PK(x_1) \text{ para algún } x_1 \in M \tag{6.4}$$

Para mostrar (6.3), dado que $R(S_1) = Y_0$, se toma $x \in X$ tal que $S_1(x) = y_0$, como $K^{-1}(Y_0) + M = X$, entonces x se puede expresar como $x = x_0 + x_0'$ con $x_0 \in K^{-1}(Y_0)$ y $x_0' \in M$. Así $x_0' \in N(S_1)$, de aquí se obtiene que $y_0 = S_1(x) = S_1(x_0)$.
Para mostrar (6.4), dado que $N = R(PK)$, entonces existe $x \in X$ tal que $y_1 = PK(x)$, como $K^{-1}(Y_0) + M = X$ entonces x se puede expresar como $x = x_1 + x_1'$ con $x_1' \in K^{-1}(Y_0)$ y $x_1 \in M$. Dado que $K(x_1') \in Y_0 = N(P)$ entonces se tiene que $y_1 = PK(x) = PK(X_1)$.

Finalmente para x_0 y x_1 obtenidos de las expresiones (6.3) y (6.4), se observa que $x = x_0 - x_1 \in X$ y así

$$\begin{aligned} T(x_0 - x_1) &= (S_1 - PK)(x_0 - x_1) \\ &= S_1(x_0 - x_1) - PK(x_0 - x_1) \\ &= S_1(x_0) + PK(x_1) \\ &= y_0 + y_1 = y \end{aligned}$$

Se obtiene así que el operador T es sobreyectivo y por lo tanto $T \in \Phi_-(X,Y)$. Sin embargo, $R(T+K) = R(S_1+(I_X-P)K) \subset Y_0$, por lo que $R(T+K)$ tiene codimensión infinita. De manera que, $T+K \notin \Phi_-(X,Y)$ y en consecuencia $K \notin P\Phi_-(X,Y)$.
(2) Ahora se considera el caso que $\overline{K^{-1}(Y_0)+M}$ tiene codimensión infinita, entonces dado que

$$\frac{X}{\overline{K^{-1}(Y_0)+M}} = \frac{X/M}{\left(\overline{K^{-1}(Y_0)+M}\right)/M}$$

se tiene que $\left(\overline{K^{-1}(Y_0)+M}\right)/M$ tiene codimensión infinita en X/M. Como X/M es fuertemente superproyectivo, por ser isomorfo a Y, existe un subespacio de codimensión infinita X_1/M de X/M, complementado, que contiene a $\left(\overline{K^{-1}(Y_0)+M}\right)/M$ y que es isomorfo a X/M. De manera que X/M se puede expresar como:

$$\frac{X}{M} = \frac{X_1}{M} \oplus \frac{N}{M},$$

con $N \supset M$ y X_1/M isomorfo a X/M. De aquí se obtiene que:

- $\overline{K^{-1}(Y_0)+M} \subset X_1$,
- X_1 tiene codimensión infinita en X,
- X_1/M es isomorfo a Y,
- X/N es isomorfo a Y.

Luego, por la Proposición 6.3.2, existe Y_1 subespacio cerrado de Y de codimensión infinita tal que $Y_1 \supset Y_0$, $X_1 = K^{-1}(Y_1)$, de modo que $K^{-1}(Y_1) + N = X$.

Como Y_1 tiene codimensión infinita en Y, existe un subespacio Y_2 de Y de codimensión infinita que contiene a Y_1, complementado e isomorfo a Y
Así $Q_{Y_2}K$ es sobreyectiva, Y_2 es complementado e isomorfo a Y, $K^{-1}(Y_2)+N=X$, con X/N isomorfo a Y y por tanto, se está bajo las condiciones del caso (1)
(3) Si $K^{-1}(Y_0)+M$ es no cerrado y $\overline{K^{-1}(Y_0)+M}$ tiene codimensión finita entonces $K^{-1}(Y_0)^{\perp}+M^{\perp}$ es no cerrado y $K^{-1}(Y_0)^{\perp}\cap M^{\perp}$ tiene dimensión finita, reemplazando $M^{\perp}$ por un subespacio de codimensión finita, se puede asumir que

$$K^{-1}(Y_0)^{\perp}\cap M^{\perp}=\{0\}.$$

Se definirá un operador compacto $K_1\in\mathcal{L}(X,Y)$ tal que

$$\overline{(K+K_1)^{-1}(Y_0)+M}$$

tenga codimensión infinita.
Del hecho que $K^{-1}(Y_0)^{\perp}+M^{\perp}$ no sea cerrado, se deduce que existe una sucesión normalizada (f_n) en $K^{-1}(Y_0)^{\perp}$ tal que $\operatorname{dist}(f_n,M^{\perp})<2^{-n}$. Se observa que (f_n) no tiene subsucesiones convergentes, pues en caso contrario si f es el limite de alguna subsucesión, se tendría que $\|f\|=1$ y $f\in K^{-1}(Y_0)^{\perp}\cap M^{\perp}$, lo cuál no es posible.
Si se toma $f\in\overline{\{f_n:n\in N\}}^{w^*}$, entonces $f\in\overline{K^{-1}(Y_0)^{\perp}}^{w^*}\cap\overline{M^{\perp}}^{w^*}$ como $K^{-1}(Y_0)^{\perp}$ y $M^{\perp}$ son débil* cerrados entonces $f\in K^{-1}(Y_0)^{\perp}\cap M^{\perp}$ y por tanto $f=0\in\overline{\{f_n:n\in N\}}^{w^*}$. Sea (g_n) una sucesión en $Y_0^{\perp}$ tal que $K^*(g_n)=f_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$, esto es posible pues $K^{-1}(Y_0)^{\perp}=K^*(Y_0^{\perp})$. Como $K^*|_{Y_0^{\perp}}$ es un isomorfismo entonces $0\in\overline{\{g_n:n\in N\}}^{w^*}$. Luego, por la Proposición 6.3.3, pasando a subsucesión existe una sucesión acotada (y_n) en Y tal que $g_i(y_j)=\delta_{ij}$ para cada $i,j\in\mathbb{N}$.
Ahora se selecciona (h_n) en $M^{\perp}$ tal que $\|f_n-h_n\|<2^{-n}$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Entonces $K_1\in\mathcal{L}(X,Y)$ definido por

$$K_1(x)=\sum_{i=1}^{\infty}(h_i-f_i)(x)y_i,$$

es un operador compacto, y el adjunto de dicho operador está dado por

$$K_1^*(g)=\sum_{i=1}^{\infty}g(y_i)(h_i-f_i).$$

Se observa que $(K^* + K_1^*)(g_m) = h_n$ para cada $m \in \mathbb{N}$, de aquí que $(K + K_1)^*(Y_0^\perp) \cap M^\perp$ tenga dimensión infinita.
Pero $(K+K_1)^{-1}(Y_0)^\perp = (K+K_1)^*(Y_0^\perp)$, por lo que $\overline{(K + K_1)^{-1}(Y_0) + M}$ tiene codimensión infinita tal y como se deseaba.
Ahora bien, se tiene que existe $K_1 \in \mathcal{L}(X, Y)$ compacto, tal que el subespacio $\overline{(K + K_1)^{-1}(Y_0) + M}$ tiene codimensión infinita.
Se observa que $Q_{Y_0}(K + K_1) \in \Phi_-(X, Y)$, pues $Q_{Y_0}K \in \Phi_-(X, Y/Y_0)$ por ser $Q_{Y_0}K$ sobreyectiva y por ser $Q_{Y_0}K_1$ compacto. Por lo que pasando a un subespacio de codimensión infinita, se puede suponer que $Q_{Y_0}(K + K_1)$ es sobreyectiva.
Así $Q_{Y_0}(K + K_1)$ es sobreyectiva, Y_0 es un subespacio complementado, de codimensión infinita en Y y $\overline{(K + K_1)^{-1}(Y_0) + M}$ tiene codimensión infinita, por lo que se tienen las condiciones del caso (2), así existe un operador $T \in \Phi_-(X, Y)$ tal que $T + K + K_1 \notin \Phi_-(X, Y)$, por tanto $T + K \notin \Phi_-(X, Y)$ de donde se concluye que $K \notin P\Phi_-(X, Y)$. $\square$

Es necesario comentar que el Teorema 6.4.2, no es consecuencia del resultado dado en [62] que establece: si X superproyectivo $\Phi_-(X, Y) \neq \emptyset$ entonces $P\Phi_(X, Y) = \mathcal{SC}(X, Y)$. En efecto, las condiciones dadas en el resultado antes mencionado es sobre el espacio dominio X; mientras que en el Teorema 6.4.2 la condición se impone sobre el espacio codominio Y.
Más aún, dado que los ejemplos conocidos de espacios superproyectivo son también fuertemente superproyectivo, el hecho que $\Phi_-(X, Y) \neq \emptyset$ y X sea superproyectivo implica que Y es superproyectivo. Por lo tanto, en muchos casos el resultado dado en [62] es consecuencia del Teorema 6.4.2 que se ha establecido.

Finaliza esta sección con una lista de soluciones positivas al problema de la clase de perturbación.
Como consecuencia directa del Teorema 6.4.1 y de los Ejemplos 6.2.1, 6.2.2 , 6.2.3, 6.2.4, 6.2.5, 6.2.7, 6.2.8 y 6.2.6 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 6.4.1. *Sean X, Y espacios de Banach, si Y contiene un subespacio isomorfo a X y el espacio X es*

1. *$X = \ell_p$ para $1 \leq p < \infty$.*

2. *$X = c_0$, el espacio de las sucesiones convergentes a 0.*

3. *$X = L_p$ con $2 \leq p < \infty$.*

4. *$X = d(w,p)$ con $1 \leq p < \infty$ y $w = (w_n)$ una sucesión decreciente de números positivos tales que $w_1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$.*

5. *$X = \ell_{p,q}$, el espacio de sucesiones de Lorentz con $1 \leq p, q < \infty$.*

6. *$X = L_{W,q}(0,\infty)$ o $X = L_{p,q}(0,\infty)$, el espacio de funciones de Lorentz para $2 < p < \infty$.*

7. *$X = L_{p,q}(0,1)$, el espacio de funciones de Lorentz para $2 \leq p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$.*

8. *$X = J$, el espacio de James.*

9. *$X = B_p$, el espacio de Baernstein para $1 < p < \infty$.*

10. *$X = T$, el espacio de Tsirelson.*

11. *$X = C(K)$ el espacio de las funciones continuas sobre un conjunto compacto y disperso K.*

12. *Un subespacio cerrado de los espacios anteriores.*

Entonces $P\Phi_+(X,Y) = \mathcal{SS}(X,Y)$.

También, como consecuencia directa del Teorema 6.4.2 y de los Ejemplos 6.3.1, 6.3.3 y 6.3.2 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 6.4.2. *Sean X, Y espacios de Banach, si X tiene un cociente isomorfo a Y y el espacio Y es*

1. *$Y = \ell_p$ para $1 < p < \infty$.*

2. *$Y = c_0$, el espacio de las sucesiones convergentes a 0.*

3. *$Y = L_p$ para $1 < p \leq 2$.*

4. *$Y = d(w,p)^*$ el dual del espacio $d(w,p)$, para $1 < p < \infty$ y $w = (w_n)$ una sucesión decreciente de números positivos tales que $w_1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$.*

5. *$Y = \ell_{p,q}^*$, el dual del espacio $\ell_{p,q}$ para $1 < p, q < \infty$.*

6. $Y = L_{W,q}(0,\infty)^*$ *o* $Y = L_{p,q}(0,\infty)^*$, *para* $2 < p < \infty$.

7. $Y = L_{p,q}(0,1)$, *el espacio de funciones de Lorentz para* $2 \leq p < \infty$ *y* $1 < q < \infty$.

8. $Y = J^*$, *el dual del espacio de James.*

9. $Y = B_p^*$, *el dual del espacio de Baernstein para* $1 < p < \infty$.

10. $Y = T^*$, *el dual de el espacio de Tsirelson.*

11. $Y = C(K)$ *el espacio de las funciones continuas sobre un conjunto compacto y disperso* K.

12. *Un cociente de los espacios anteriores.*

Entonces $P\Phi_-(X,Y) = \mathcal{SC}(X,Y)$.

Bibliografía

[1] P. Aiena, *Fredholm and local spectral theory, with applications to multipliers.*, Kluwer Acad. Publishers (2004).

[2] P. Aiena, *Classes of Operators Satisfying a-Weyl's theorem*, Studia Math. **169** (2005), 105–122.

[3] P. Aiena, *Quasi-Fredholm operators and localized SVEP*. Acta Sci. Mat. (Szeged) **73** (2007), 251-263.

[4] P. Aiena, E. Aponte and E. Balzan, *Weyl type theorems for left and right polaroid operators*, Int. Equa. Oper. Theory. **136** (2010), 2839-2848.

[5] P. Aiena, M. T. Biondi and C. Carpintero, *On Drazin invertibility*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 2839-2848.

[6] P. Aiena and M. González, *On the perturbation classes of semi-Fredholm operators and Fredholm operators,* Rendiconti Circ. Mat. Palermo Ser II Suppl. **40** (1996), 37–46.

[7] P. Aiena and M. González, *On inessential and improjective operators,* Studia Math. **131** (1998), 271–287.

[8] P. Aiena and M. González, *Inessential operators between Banach spaces,* Rendiconti Circ. Mat. Palermo Ser II Suppl. **68** (2002), 3–26.

[9] P. Aiena, M. González and A. Martinón, *On the perturbation classes of continuous semi-Fredholm operators,* Glasgow Math. J. **45** (2003), 91–95.

[10] P. Aiena, C. Muneo and Z. Lingling, *Weyl's theorems and extensions of bounded linear operators*, Tokyo J. Math. **35**(2) (2012), 279-289.

[11] F. Albiac and N. J. Kalton, *Topics in Banach space theory,* Springer, New York, 2006.

[12] C.D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Positive operators,* Academic Press, Orlando, 1985.

[13] D. Alspach and E. Odell, L_p *spaces.* Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I, 123–159, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[14] M. Amouch and M. Berkani, *On the property* (gw), Mediterr. J. Math **5**(3)(2008), 371-378.

[15] A. Baernstein, *On relexuvity and summability,* Studia Math. **42** (1972), 91–94.

[16] B. Barnes, *The spectral and Fredholm theory of extensions of bounded linear operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **105**(4) (1989), 941-949.

[17] B. Barnes, *Restrictions of bounded linear operators: closed range*, Proc. Amer. Math. Soc. **135**(6) (2007), 1735-1740.

[18] M. Berkani, *Restriction of an operator to the range of its powers*, Studia Math. **140**(2) (2000), 163-175.

[19] M. Berkani, *On a class of quasi-Fredholm operators*, Int. Equa. Oper. Theory **34** (1) (1999), 244-249.

[20] M. Berkani and M. Sarih, *On semi B-Fredholm operators*, Glasgow Math. J. **43** (2001), 457-465.

[21] M. Berkani and H. Zariouh, *Extended Weyl type theorems*, Math. Bohemica. **134**(4) (2009), 369-378.

[22] M. Berkani and J. Koliha, *Weyl type theorems for bounded linear operators.* Acta Sci. Math. (Szeged). **69** (2003), 359-376.

[23] M. Berkani and H. Zariouh, *New extended Weyl type theorems*, Mat. Vesnik. **62** (2010), 145-154.

[24] M. Berkani, M. Sarih and H. Zariouh, *Browder-type theorems and SVEP*, Mediterr. J. Math. **8** (2011), 399-409.

[25] S. Caradus, W. Pfaffenberger and B. Yood, *Calkin algebras and algebras of operators in Banach spaces,* M. Dekker Lecture Notes in Pure & Appl. Math. 9, New York 1974.

[26] N. L. Carothers and S. J. Dilworth, *Subspaces of* $L_{p,q}$*,* Proceedings of the American Math. Soc. **104** (1988), 537-545.

[27] N. L. Carothers, *A short course on Banach space theory* Cambridge, New York, 2005.

[28] C. Carpintero, D. Muñoz, E. Rosas, O. García and J. Sanabria, *Weyl type theorems and restrictions for bounded linear operators*, Extractha Mathematicae. **28**(1) (2013), 127-139.

[29] C. Carpintero, D. Muñoz, E. Rosas, O. García and J. Sanabria, *Weyl type theorems and restrictions*, Mediterr. J. Math. **11** (2014), 1215-1228, DOI 10.1007/s00009-013-0369-7.

[30] C. Carpintero, E. Rosas, J. Rodriguez, D. Muñoz and K. Alcalá, *Spectral Properties and Restrictions of Bounded Linear Operators*, Ann. Funct. Anal. **6(2)**(2015), 173-183, DOI: 10.15352/afa/06-2-15.

[31] C. Carpintero, E. Rosas, J. Rodriguez, J. Sanabria and O. García, *On spectral properties and extensions of bounded linear operators*, Boletín de Matemáticas. **22**(2) (2015), 177-190.

[32] P. Casazza and T.J. Shura. *Tsirelson's space,* Springer. Lecture Notes in Math. **1363**, (1989).

[33] L. A. Coburn, *Weyl's Theorem for Nonnormal Operators*, Research Notes in Mathematics. **51** (1981).

[34] J. Creekmore, *Type and cotype in Lorentz* $L_{p,q}$ *spaces,* Indag. Math. Proc. A **84** (2) (1981), June 20.

[35] S. J. Dilworth, *Special Banach lattices and their applications,* Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol I, North-Holland, (2001), 497-532.

[36] N. Dunford, *Spectral operators*, Pacific J. Math. **4** (1954), 321-354.

[37] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators*, Part II (1967). Wiley New York (1971).

[38] P. Enflo and H.P. Rosenthal, *Some results concerning $L^p(\mu)$-spaces,* J. Funct. Anal. **14** (1973), 325–348.

[39] J. K. Finch, *The single valued extension property on a Banach space*, Pacific J. Math. **58** (1975), 61-69.

[40] H. Fetter and B. Gamboa de Buen, *The James forest*, Cambridge University Press. London Mathe- matical Society Lecture Note Series, 236. Cambridge, 1997.

[41] T. Fiegiel and W. B. Johnson, *A uniformly convex Banch space which contains no ℓ_p,* Compositiio Math. **29** (1974), 170–190.

[42] T. Figiel, W. B. Johnson, and L. Tzafriri, *On Banach lattices and spaces having local unconditional structure, with application to Lorentz function spaces.* J. Approx. Theory. **13**, (1975), 395–412.

[43] I.C. Gohberg, A.S. Markus and I.A. Feldman, *Normally solvable operators and ideals associated with them,* (Russian), Bul. Akad. Štiince RSS Moldoven 1960 no. **10** (76), 51–70. (Translation: Amer. Math. Soc. Transl. (2) 61 (1967), 63–84.

[44] S. Goldberg, *"Unbounded linear operators,"* McGraw-Hill, New York 1966.

[45] M. González, A. Martínez-Abejón and M. Salas-Brown, *Perturbation classes for semi-Fredholm operators on subprojective and superprojective spaces,* Ann. Acad. Sc. Fenn. Math, **36** (2011), 481-491.

[46] M. González, J. Pello and M. Salas-Brown. *Perturbation classes of semi-Fredholm operators in Banach lattices*, J. Math. Anal. Appl, **420** (2014), 792-800.

[47] M. González and M. Salas-Brown, *Perturbation classes for semi-Fredholm operators on $L_p(\mu)$-spaces,* J.Math. Anal. Appl. **370** (2010) 11-17.

[48] M. González, *On essentially incomparable Banach spaces,* Math. Z. **215** (1994), 621–629.

[49] M. González, *The perturbation classes problem in Fredholm theory,* J. Funct. Anal. **200** (2003), 65–70.

[50] W.T. Gowers and B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem,* J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 851–874.

[51] R. E. Harte and W. Y. Lee, *Another note on Weyl's theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 2115-2124.

[52] H. Heuser, *Functional Analysis*, Marcel Dekker, New York 1982.

[53] R.A. Hunt, *On $L(p,q)$ spaces,* Enseign. Math. **12** (1966), 249–274.

[54] R.B. Israel, *Perturbations of Fredholm operators,* Studia Math. **52** (1974), 1–8.

[55] R. C. James *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Ann. Math. (2) **52** (1950), 518–527.

[56] W. B. Johnson, H. P. Rosenthal, *On w^*-basic sequences and their applications to the study of Banach spaces,* Studia Math. **43** (1972),77–92.

[57] M. I. Kadets and M. G. A. Pelczyńki,*Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p,* Studia Math. **21** (1961/1962), 161-176.

[58] T. Kato, *Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators,* J. d'Analyse Math. **6** (1958), 261–322.

[59] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators,* Springer; Berlin, 1980.

[60] D. Kleinecke, *Almost finite, compact and inessential operators,* Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 863–868.

[61] J. P. Labrousse, *Les opérateurs quasi Fredholm: une généralization des opérateurs semi Fredholm*, Rend. Circ. Mat. Palermo. **29**(2) (1980), 161-258.

[62] A. Lebow and M. Schechter, *Semigroups of operators and measures of noncompactness,* J. Funct. Anal. **7** (1971), 1–26.

[63] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces.* Lecture Notes in Math. 338. Springer; Berlin, 1973.

[64] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces I. Sequence spaces.* Springer; Berlin, 1977.

[65] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces II. Function spaces.* Springer; Berlin, 1979.

[66] H. P. Lotz, N. T. Peck and H. Porta.*Semi-embeddings of Banach spaces.* Proc. Edimburgh Math. Soc. **22** (1979), 155–233.

[67] M. Mbekhta and V. Müller, *On the axiomatic theory of the spectrum II*, Studia Math. **119** (1996), 129-147.

[68] R. E. Megginson, *An introduction to Banach space theory.* Springer; New York, 1998.

[69] V.D. Mil'man, *Certain properties of strictly singular operators,* (Russian), Funkcional. Anal. i Priložen. **3** (1969), 93–94. (Translation: Funct. Anal. Appl. **3** (1969), 77–78.

[70] J. Mújica, *Separable quotiens of Banach spaces.* Rev. Mat. Univ. Compl. Madrid. **10** (1997),299–330.

[71] W. Orlicz, *Über unbedingte Konvergenz in Funktionräumen,* Studia Math. **1** (1930), 83–85.

[72] R.E.A.C Paley, *A remarkable series of orthogonal functions,* Proc. London Math.. Soc., **34** (1932), 241-264

[73] A. Pełczyński, *On strictly singular and strictly cosingular operators II. Strictly singular and strictly cosingular operators in $L(\nu)$-spaces,* Bull. Acad. Polon. Sci. **13** (1965), 37-41.

[74] A. Pełczyński and H.P. Rosenthal, *Localization techniques in L^p spaces,* Studia Math. **52** (1975), 265–289.

[75] A. Pietsch, *Inessential operators in Banach spaces.* Integral Equations and Operator Theory **1**, (1978), 589–591.

[76] A. Pietsch, *Operator ideals,* North-Holland; Amsterdam, New York, Oxford, 1980.

[77] G. Plebanek, *A construction of a Banach space $C(K)$ with few operators.* Topology Appl. **143** (2004), 217–239.

[78] F. Räbiger, *Lower 2-estimates for sequences in Banach lattices,* Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 81–83.

[79] V. Rakočević, *Operators obeying a-Weyl's theorem*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **34** (1989), no. 10, 915-919.

[80] V. Rakočević, *On the essential approximate point spectrum II*, Math. Vesnick. **36** (1984), 89-97.

[81] H.P. Rosenthal, *On subspaces of L^p,* Ann. Math. **97** (1973), 344–373.

[82] J. Sanabria, C. Carpintero, E. Rosas and O. García, *On generalized property (v) for bounded linear operators*, Studia Math. **212** (2012), 141-154.

[83] E. Tarafdar, *Improjective operators and ideals in a category of Banach spaces,* J. Austral. Math. Soc. **14** (1972), 274–292.

[84] A.E. Taylor and D.C. Lay, *Introduction to functional analysis,* Wiley, New York, 1980.

[85] B. S. Tsirelson, *It is impossible to imbed ℓ_p of c_0 into an arbitrary Banach space,*Funkcional. Anal. Prilozen. **8** (1974), 57–60.

[86] H.-O. Tylli, *Lifting non-topological divisors of zero modulo the compact operators,* J. Funct. Anal. **125** (1994), 389–415.

[87] J.I. Vladimirskii, *Strictly cosingular operators,* Soviet Math. Doklady **8** (1967), 739–740.

[88] H. Zariouh, *Property (gz) for bounded linear operators*, Mat. Vesnik. **65**(1) (2013), 94-103

[89] H. Zariouh, *New version of property (az)*, Mat. Vesnik. **66**(3) (2014), 317-322

[90] L. Weis, *On perturbation of Fredholm operators in $L_p(\mu)$-spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. **67** (1977), 287–292.

[91] L. Weis, *Perturbation classes of semi-Fredholm operators,* Math. Z. **178** (1981), 429–442.

[92] H. Weyl, *Uber beschrankte quadratiche Formen, deren Differenz vollsteigist*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **27** (1909), 373-392.

[93] R.J. Whitley, *Strictly singular operators and their conjugates,* Trans. Amer. Math. Soc. **113** (1964), 252–261.

Asociación Matemática Venezolana
Presidente: Pedro Berrizbeitia

Consejo Directivo Nacional

Pedro Berrizbeitia
Capítulo Capital

Alexander Carrasco
Capítulo de Centro Occidente

Oswaldo Araujo
Capítulo de Los Andes

Said Kas-Danouche
Capítulo de Oriente

Oswaldo Larreal
Capítulo Zuliano

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela.

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela