XXIX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA–VENEZUELA 2016

CURSO INTRODUCTORIO SOBRE INCLUSIONES DIFERENCIALES

Vinicio R. Ríos

MÉRIDA, VENEZUELA, 04 al 09 de septiembre de 2016

XXIX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA–VENEZUELA 2016

Curso Introductorio
Sobre Inclusiones Diferenciales

Vinicio R. Ríos
Universidad del Zulia, Venezuela
vrios@demat-fecluz.org

MÉRIDA, 4 AL 9 DE SEPTIEMBRE DE 2016

XXIX ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana.

La XXIX Escuela Venezolana de Matemáticas recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, CODEPRE, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), la Asociación Matemática Venezolana, la Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) y Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA).

2010 Mathematics Subject Classification: 26E25, 34A36, 34A60, 34D20, 34K35.

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
Rif: G-20004206-0

Curso Introductorio Sobre Inclusiones Diferenciales
Vinicio R. Ríos

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas
Depósito legal DC2016000284
ISBN 978-980-261-170-6
Caracas, Venezuela
2016

Dedicado al Departamento de Matemática
de la Facultad Experimental de Ciencias de LUZ.

Prólogo

En 1897 el matemático Noruego Marius Sofus Lie destacó de manera superlativa la relevancia del campo de las ecuaciones diferenciales dentro de las matemáticas, expresando que dicha disciplina era la más importante de todas, en virtud del rol tan singular desempeñado por la misma en el modelaje e interpretación de las manifestaciones que envuelven al tiempo. Quizás lo aparentemente ostentoso de la afirmación de Lie encontró justificación en la importante cantidad de problemas de ciencias e ingeniería que fueron tratados en dicha época por medio de las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, el advenimiento del siglo XX trajo al mundo tecnológico desafíos que requerían el desarrollo de nuevas teorías, preferiblemente deterministas, con un espectro más ambicioso de aplicaciones. Uno de los escenarios donde resultó imperativo el acceso a esta nueva tecnología matemática, estuvo signado por la competencia entre los programas espaciales Ruso y Norteamericano. La necesidad por el diseño e implementación de estrategias de control para los vuelos espaciales, le dio un ímpetu definitivo al nacimiento de la teoría de controles óptimos y permitió además, entre otras bondades, la ramificación de muchas de sus ideas seminales hacia otras instancias donde los modelos diferenciales convencionales, como la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),\ t \in \mathbb{R}, \tag{EDO}$$

resultaban inapropiados. El paradigma encargado de suplir las deficiencias del modelo EDO, que a su vez le brindó mayor versatilidad a la teoría de controles óptimos, fue propuesto en la década de los 30 por Marchaud y Zaremba como una generalización de EDO (ver [26, 27, 44, 45]), razón por la cual adoptó el nombre de *inclusión diferencial*. La estética simbólica de una inclusión diferencial autónoma es de la forma

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)),\ t \in \mathbb{R}, \tag{ID}$$

donde F es una aplicación que transforma puntos de un espacio en conjuntos de otro. De esta manera, el lado derecho en ID brinda la posibilidad de alojar más de una velocidad en cada estado del sistema, y como consecuencia la inclusión ID puede admitir más de una solución por cada condición inicial. Esta holgura estructural le ha permitido a las inclusiones diferenciales constituirse en una herramienta muy conveniente dentro del estudio de dinámicas no lineales y discontinuas, como por ejemplo, aquellas asociadas al funcionamiento de circuitos eléctricos, pilotos automáticos y mecanismos con fuerzas de fricción, las cuales exhiben con cierta regularidad zonas multivaluadas para sus puntos de equilibrios.

A lo largo de su proceso de maduración, la teoría de las inclusiones diferenciales no sólo ha logrado ahondar satisfactoriamente en cada uno de los temas mencionados anteriormente y en aquellos abarcados en la teoría clásica de las ecuaciones diferenciales, sino que además ha inaugurado estudios sistemáticos para otras áreas importantes, tales como la de los sistemas dinámicos generalizados, la teoría de juegos diferenciales y la economía dinámica. Dada la relevancia que posee el estudio de las inclusiones diferenciales dentro de la formación científica de un público identificado con la teoría de sistemas dinámicos deterministas y sus aplicaciones, hemos convenido en ofrecer este curso introductorio en el cual se expone un resumen de algunos de los conceptos y resultados básicos más representativos que giran en torno al paradigma ID.

La selección de los tópicos incluidos en la presente monografía, así como también el enfoque y estilo empleado en su escritura, han sido definidos pensando en los objetivos muy nobles que año tras año han caracterizado a nuestra querida Escuela Venezolana de Matemáticas. En tal sentido y en la medida de lo posible, presentaremos los conceptos y resultados dentro de un contexto finito dimensional, percatando de antemano al lector que la gran mayoría de los mismos siguen siendo válidos en espacios de Banach y de Hilbert más generales, aunque algunas veces supeditados a un mayor tecnicismo. Otra instancia en la cual hemos imprimido un sentido práctico a nuestra exposición, es la autonomía de ID con respecto al tiempo. Al igual que en el caso del modelo EDO, las consideraciones que deben hacerse bajo la presencia de una variable temporal explicita en ID, ameritan un manejo técnico algo significativo de la medida de Lebesgue y cercenan el beneficio de la invarianza en el tiempo para las trayectorias de los sistemas considerados, lo cual impide algunas simplificaciones importantes que ayudan a dar claridad en la exposición de las ideas.

Los contenidos contemplados en este trabajo residen en tres capítulos, el primero de los cuales es una pequeña disertación sobre la teoría de multifunciones y sus propiedades topológicas principales, como por ejemplo su continuidad y la existencia de selecciones continuas. Además, se estudia el importante ejemplo de las multifunciones disipativas y su aproximación de Yosida. El segundo capítulo está dedicado al problema de existencia de soluciones para ID y a la conducta cualitativa de las mismas bajo diferentes conjuntos de hipótesis estructurales. Finalmente, el tercer cápitulo proporciona una muestra de tres contextos relevantes donde las inclusiones diferenciales han sido aplicadas de manera efectiva, a saber, la teoría de controles óptimos, la invarianza de trayectorias y la estabilidad de equilibrios.

Acompañando a cada capítulo se encuentra un número moderado de ejercicios de diferentes niveles. Buena parte de ellos están orientados al afianzamiento de los conceptos básicos, probablemente nuevos para el lector, mientras que otros revisitan propiedades de objetos estudiados en los cursos de análisis de una licenciatura en matemáticas, pero que guardan una relación profunda con el material estudiado. Adicionalmente, el autor ha incluido una cantidad pequeña de problemas que han surgido de su experiencia dentro del aula y de su ejercicio como investigador en los tópicos presentados. Se recomienda al lector intentar resolver cada uno de ellos para lograr un mayor aprovechamiento del curso.

La elaboración de este material y su forma final no hubiese sido posible sin la influencia directa o indirecta de algunas instituciones y personas, a las cuales el autor desea expresar su gratitud. Primeramente, a los Departamentos de Matemática de la Facultad Experimental de Ciencias de LUZ, en Venezuela, y de la Universidad Estatal de Louisiana, en Estados Unidos de Norteamérica, en vista de la formación académica recibida en dichos centros, la cual ha definido en mucho la inclinación matemática del autor y en particular sus intereses en el campo de la investigación. A mi compañera, la Profesora Zuleiny Moreno, por haber revisado el manuscrito y haber realizado correcciones y observaciones claves que realzaron en mucho la calidad del mismo. Finalmente, el autor desea expresar su agradecimiento al comité organizador del evento por brindarle tan placentera experiencia académica y permitirle presentar ante la comunidad matemática Venezolana, del Caribe y en general de América Latina, esta humilde amalgama de pensamientos de las diferentes escuelas que han impulsado el desarrollo de las inclusiones diferenciales durante las últimas ocho décadas.

Vinicio R. Ríos
Maracaibo, Mayo 2016

Índice general

Capítulo 1

Multifunciones

La esencia de la matemática reside en su libertad.

–George Cantor

1.1. Introducción

Dentro del contexto matemático, el vocablo *multifunción* invita a pensar en un objeto cuyas características reflejan la interacción simultánea de múltiples funciones, definidas por lo menos en el sentido univaluado estándar. Esta concepción, aunque carente de precisión, expresa aspectos certeramente vinculados con la estructura de una de las herramientas abstractas más versátiles, a nuestro parecer, del análisis moderno. Las multifunciones o *correspondencias*, proporcionan modelos capaces de emular la evolución de procesos cuyas fases abarcan zonas del espacio generalmente multivaluadas, lo cual las habilita con un potencial para las aplicaciones mayor que el ofrecido por la teoría de funciones univaluadas. Por supuesto, existen escenarios donde resulta impráctico el reemplazo de un modelo univaluado por uno multivaluado, aunque la teoría que gira en torno a este último paradigma contenga la del primero como caso particular. Sin embargo, la abundancia de los desafíos tecnológicos que han populado en las últimas décadas, ha revelado cuan impedidas resultan las estructuras univaluadas al momento de interpretar muchos de sus problemas fundamentales. Esta coyuntura ha impulsado el desarrollo de la teoría de multifunciones, dando frutos significativos que pueden evidenciarse en economía, específicamente en teoría de juegos; en la física, a través del estudio de superconductores y la plasticidad de sus materiales; en teoría de sistemas, como por ejemplo en ecuaciones diferenciales discontinuas; y en control óptimo, donde las dinámicas que definen la parte funcional de las restricciones de los problemas propuestos son parametrizables a través de inclusiones diferenciales.

Siendo motivados entonces por la notable pertinencia que posee la teoría de multifunciones dentro nuestros objetivos, presentamos un primer capítulo donde se ofrece una síntesis de algunas de las propiedades y resultados sobre dichos objetos, brindando especial atención al estudio de la continuidad, al concepto de selección y a la propiedad de aproximación de multifunciones; elementos con mayor influencia en el resto de los contenidos de este trabajo. El material consultado durante la escritura de este capítulo proviene en su mayoría de las fuentes [3, 4, 8, 12, 14, 29, 30, 33, 36, 37]. También se visitó el texto clásico de Tolstonogov [39] del cual fueron adaptadas algunas observaciones, en vista de su enfoque prominentemente medible.

Comencemos cumpliendo el rol subsidiario de introducir mucha de la notación que nos acompañará a lo largo del camino, así como también ciertas convenciones al respecto.

1.2. Notación

En toda la extensión de esta monografía, las letras X e Y representarán a los espacios euclidianos de dimensión finita $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente, siendo n y m un par de números naturales fijos. En general, para el caso de un espacio normado Z su norma asociada será denotada por $\|\cdot\|_Z$, y cuando la claridad del contexto lo permita, los subíndices en tales normas serán suprimidos y simplemente se escribirá $\|\cdot\|$. De forma semejante, se elige la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle_Z$ para el producto interno con el cual se haya dotado algún espacio Z a lo largo de nuestra discusión. La bola abierta de centro $z \in Z$ y radio $\varepsilon > 0$ en la topología generada por $\|\cdot\|_Z$ será denotada por $B_Z(z, \varepsilon)$. En particular, para la bola abierta unitaria $B_Z(0, 1)$ escribiremos B_Z. Aparte de X e Y, existen algunos espacios normados importantes a los cuales con frecuencia haremos alusión. Especificamente, dado $p = 1, 2$ y un intervalo I de la recta real, invocaremos al espacio $L_p(I, Z)$, el cual consta de todas las funciones $x(\cdot)$

con $\|x(\cdot)\|_Z^p$ integrable sobre I según Lebesgue, y el cual es de Banach con respecto a la norma

$$\|x(\cdot)\|_{L_p} := \left(\int_I \|x(t)\|_Z^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Adicionalmente, aunque de manera efímera, mencionaremos el espacio de Banach $L_\infty(I, Z)$ de todas las funciones $x(\cdot)$ medibles sobre I según Lebesgue, que son acotadas con la norma del supremo esencial

$$\|x(\cdot)\|_{L_\infty} := \sup \{M \geq 0 : \|x(t)\|_Z \leq M, \text{ para casi todo } t \in I\}.$$

Para el espacio $C(I, Z)$ de las funciones continuas definidas sobre un intervalo cerrado I y con imágenes en Z, se utilizará la norma del supremo

$$\|x(\cdot)\|_C := \sup \{\|x(t)\|_Z : t \in I\},$$

lo cual dota a $C(I, Z)$ con una estructura de espacio de Banach. Como es costumbre, la cápsula convexa de un conjunto A estará denotada y definida por

$$\operatorname{co} A := \left\{ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i : x_i \in A, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1, \text{ y } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

La clausura, la frontera, el interior y el complemento de un conjunto A, independientemente del espacio donde se apliquen tales operaciones, serán representados por $\overline{A}$, ∂A, $\operatorname{int}(A)$ y A^{c}, respectivamente. Sin embargo, por fines estéticos escribiremos

$$\overline{B}_Z(z, \varepsilon) \quad \text{y} \quad \overline{\operatorname{co}}\, A$$

cuando se tome la clausura en el conjunto $B_Z(z, \varepsilon)$ y en $\operatorname{co} A$. La convergencia de una sucesión de puntos x_i hacia algún elemento x, cuando $i \to \infty$, será denotada la mayor parte de las veces por $x_i \to x$. A menudo debemos recurrir al uso de combinaciones entre las operaciones de suma de conjuntos y multiplicación de un conjunto por un escalar. En tal sentido, para un par de conjuntos C, D y un escalar ε, la más típica de tales combinaciones a la que haremos referencia está dada por

$$C + \varepsilon D := \{c + \varepsilon d : c \in C, d \in D\}.$$

Finalmente, recordemos que para un espacio normado Z, la distancia desde un punto $x \in Z$ hasta un conjunto $C \subset Z$, está definida por

$$d_Z(x, C) := \inf\{\|x - y\|_Z : y \in C\}. \tag{1.1}$$

Inauguramos la lista de tareas para el lector solicitando la verificación de las siguientes propiedades para la función distancia.

EJERCICIO 1.2.1. Sean C y K subconjuntos de un espacio normado Z.
(a) Demuestre que si $C \subset K + \overline{B}_Z(0, \delta)$, entonces, para cada $x \in Z$ se tiene

$$d_Z(x, K) \leq d_Z(x, C) + \delta.$$

(b) Verifique que la función distancia (1.1) es Lipschitz de rango $\mathcal{L} = 1$.

1.3. Definiciones básicas

Iniciamos esta sección introduciendo el principal objeto de estudio de este capítulo y algunos elementos asociados a su estructura. Una *multifunción* o *correspondencia de X en Y*, es una aplicación F que asigna a cada punto $x \in X$ un único subconjunto $F(x) \subset Y$, el cual llamaremos *imagen de x a través de F*. De esta forma, para una multifunción F es costumbre escribir

$$F : X \to \mathcal{P}(Y),$$

siendo $\mathcal{P}(Y)$ el conjunto de las partes de Y. Al subconjunto de puntos de X donde una multifunción F es no trivial se le denomina *dominio de F*, y el mismo está determinado por

$$\mathrm{Dom}(F) := \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}. \tag{1.2}$$

Con la finalidad de imprimir cierto carácter práctico a nuestra exposición, asumiremos siempre que $\mathrm{Dom}(F) = X$, a menos que el contexto de turno establezca la respectiva excepción. Complementario a la noción anterior, definimos la *imagen* o *recorrido de F* como el conjunto

$$\mathrm{Im}(F) := \bigcup_{x \in X} F(x). \tag{1.3}$$

En particular, dado $A \subset X$, *su imagen a través de* F está dada por

$$F(A) := \bigcup_{x \in A} F(x). \tag{1.4}$$

Es claro que $F(A) = \{ y \in Y : \exists\, x \in A$ que satisface $y \in F(x)\}$, y de esta forma $F(X) = \mathrm{Im}(F)$. Más aún, *la mutifunción restricción de* F *sobre* A es el mapa $\widetilde{F} : A \to \mathcal{P}(Y)$ definido como $\widetilde{F}(x) := F(x)$, para todo $x \in A$. La *imagen inversa de* F es la multifunción $F^{-1} : Y \to \mathcal{P}(X)$ definida por

$$F^{-1}(y) := \{x \in X : y \in F(x)\}\,. \tag{1.5}$$

De forma más general, para cualquier conjunto $M \subseteq Y$, su *pre–imagen a través de* F viene dada por

$$F^{-1}(M) := \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \cap M \neq \emptyset\}. \tag{1.6}$$

A menudo resulta conveniente estudiar una multifunción F por medio de su *grafo*, siendo este el subconjunto de $X \times Y$ determinado por

$$\mathcal{G}(F) := \{(x, y) : x \in \mathrm{Dom}(F),\ y \in F(x)\}\,. \tag{1.7}$$

Ejemplo 1.3.1. A continuación ilustramos el concepto de multifunción en algunos contextos. Los primeros cuatro ejemplos muestran la adaptación de algunos problemas importantes dentro del formalismo de las multifunciones. Las dos ejemplos restantes proponen aplicaciones más puntuales.

(a) Cada función univaluada $f : X \to Y$ puede ser vista como una multifunción al considerar $F(x) := \{f(x)\}$, para cada $x \in X$. De esta manera, es posible abordar ciertos paradigmas que giran entorno al comportamiento estructural de f, desde la óptica de la teoría de multifunciones. Una muestra importante de tal situación la constituye la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, donde el estudio de ciertos modelos discontinuos es llevado a cabo de forma más adecuada por medio del uso de multifunciones (ver [3, 14, 24, 37]).

(b) Dada $f : X \to Y$ univaluada, el mapa $G : Y \to \mathcal{P}(X)$ definido por

$$G(y) := \{x \in X : f(x) = y\},\ \text{para todo } y \in Y,$$

es una multifunción, la cual coincide con el mapa preimagen f^{-1} de f. El estudio de G es importante en la interpretación de problemas vinculados a la resolución de la ecuación $f(x) = y$. Note que en particular G es multivaluada cuando f no es inyectiva.

(c) Sea $f : X \times U \to Y$ una función dada, con $U \subset Y$. La *multifunción asociada a f y parametrizada por U* se define como

$$F(x) := \{f(x, u) : u \in U\}.$$

Bajo hipótesis adecuadas sobre f y U, la multifunción F exhibe interesantes propiedades que la convierten en una herramienta clave dentro del estudio riguroso de los sistemas de control. La realización de F dentro del referido contexto será tema de estudio en el capítulo 3 de la presente monografía.

(d) Sean $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ continua y $C \subset X$ y $K \subset Y$ compactos. De gran utilidad en el estudio de problemas de optimización son las *multifunciones marginales* definidas por

$$F(x) := \left\{y \in K : f(x, y) = \min_{z \in K} f(x, z)\right\},$$
$$G(y) := \left\{x \in C : f(x, y) = \min_{w \in C} f(w, y)\right\}.$$

El establecimiento de condiciones estructurales sobre F y G es de gran ayuda a la hora de determinar la naturaleza del conjunto solución del problema estudiado (ver [3, 36]).

(e) El siguiente ejemplo, aunque algo sintético (*toy example*), cumple ciertos fines pedagógicos. Para cada $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in X$ la asignación

$$R(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) := \{\text{raices reales de } p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\}$$

define una multifunción $R : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Ya que cada n-upla real está asociada de manera biunívoca a un polinomio de grado $n - 1$, se tiene en particular que cualquier polinomio lineal está identificado con un elemento de $\mathrm{Dom}(R)$. De esta forma, $\mathrm{Dom}(R)$ contiene una copia de $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, con cierto abuso del lenguaje podemos afirmar que $x^2 + 1 \notin \mathrm{Dom}(R)$ pues $R(1, 0, 1, 0, 0, \dots, 0) = \emptyset$. Por otro lado, si $a \in \mathbb{R}$

es la única raíz de un polinomio de grado $i-1$, entonces dicho polinomio es necesariamente de la forma

$$\alpha(x-a)^{i-1} = \alpha \sum_{r=0}^{i-1} \binom{i-1}{r} x^r (-a)^{i-r-1},$$

para algún $\alpha \neq 0$. De esta manera, según la expansión anterior se tiene que para cada $a \in \mathbb{R}$

$$R^{-1}(\{a\}) = \bigcup_{\alpha \neq 0} \bigcup_{i=2}^{n} \{\alpha((-a)^{i-1}, (-a)^{i-2}(i-1), \ldots, (i-1)(-a), 1)\}.$$

Además, es claro que $\mathrm{Im}(R) = \mathbb{R}$.

(f) Dadas las funciones $m_j, M_j : [a,b] \to \mathbb{R}$, con $1 \leq j \leq n$, la multifunción

$$P(t) := \prod_{1 \leq j \leq n} [m_j(t), M_j(t)]\,,\ t \in [a,b]\,,$$

representa *la variación en el tiempo de un proceso determinado por n indicadores p_j*, siendo $m_j(t) \leq p_j(t) \leq M_j(t)$, para $a \leq t \leq b$. Por ejemplo, en ciencias de la economía la función p_j puede representar la tasa de cambio en el valor de la j-ésima acción en un determinado mercado. En este caso, m_j y M_j establecen las tasas mínimas y máximas de cambio, respectivamente, que la j-ésima acción puede experimentar en su valor a fin de evitar un desequilibrio en la bolsa. En ciencias de la salud, el indicador p_j registra la rapidez con la que varía el j-ésimo signo vital de un paciente que recibe un tratamiento contra una cierta enfermedad. Los valores m_j y M_j son prescritos medicamente, y entre ellos se desea mantener la variación del j-ésimo signo vital como indicación de una evolución positiva en la salud del paciente.

1.4. Continuidad en multifunciones

Esta sección está dedicada a la formulación y estudio del concepto de continuidad para multifunciones. Específicamente, nuestra exposición gira en torno al establecimiento de condiciones que permiten expresar la propiedad de continuidad en términos similares a los existentes en el caso univaluado. Al ejercitar el recurso de la generalización, nuestro sentido común demanda una correspondencia entre los elementos que definen a las teorías de funciones univaluadas y multivaluadas y la cronología de los mismos. De esta manera, resulta conveniente iniciar nuestra discusión con la siguiente consideración topológica.

Supongamos que $f : X \to Y$ es una función univaluada, donde X e Y han sido dotados con las topologías generadas por sus normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$, respectivamente. Es bien conocido que la propiedad de continuidad para f es equivalente a cada uno de los siguientes enunciados:

(a) Para cada conjunto cerrado $C \subset Y$ se tiene que $f^{-1}(C)$ es un conjunto cerrado de X.

(b) Para cada conjunto abierto $A \subset Y$ se tiene que $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto de X.

En el caso en que F es multivaluada, las propiedades (a) y (b) no son equivalentes bajo la operación de preimagen definida en (1.6), como se le propone al lector verificar a continuación.

EJERCICIO 1.4.1. Exhiba dos multifunciones $F, G : X \to \mathcal{P}(Y)$, con $n = m = 1$, tales que F satisfaga la propiedad (a), pero no la propiedad (b), y donde G satisfaga la propiedad (b) pero no la propiedad (a).

El ejercicio anterior pone en evidencia la necesidad de realizar la siguiente distinción a la hora de definir la propiedad de continuidad en una multifunción.

Definición 1.4.1. *Diremos que F es una multifunción semicontinua superiormente (SS), si para cada conjunto cerrado $C \subseteq Y$, su preimagen a través de F, $F^{-1}(C)$, es un conjunto cerrado en X. Complementariamente, F es semicontinua inferiormente (SI), si $F^{-1}(A)$ es abierto para cada abierto $A \subseteq Y$. Una multifunción F se dice continua si F satisface ambos requisitos de semicontinuidad, es decir, si F es simultáneamente SS y SI.*

Observe que F es SS si y solamente si, dado $x \in X$ y un abierto $A \subset Y$ tal $F(x) \subset A$, debe existir una vecindad $V(x)$ de x tal que $F(y) \subset A$, para todo $y \in V(x)$. En efecto, si la propiedad anterior no se satisface, es posible entonces seleccionar una sucesión de vecindades $V_i(x)$ con una sucesión de puntos asociados $x_i \in V_i(x)$, $x_i \to x$, tales que $x_i \in F^{-1}(A^{c})$.

Asumiendo la semicontinuidad superior de F, se tiene que $x \in F^{-1}(A^{c})$, es decir, $F(x) \cap A^{c} \neq \emptyset$, lo cual es contradictorio. El argumento para establecer la implicación recíproca es similar, por lo cual le pedimos al lector llenar sus detalles en el siguiente ejercicio, el cual incluye una formulación similar para la propiedad de semicontinuidad inferior de multifunciones.

EJERCICIO 1.4.2. Demostrar que para $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ se verifican las siguientes caracterizaciones:
(a) F es SS si y solamente si, para cada $x \in X$ y cada $A \subset Y$ abierto con $F(x) \subset A$, existe un entorno $V(x)$ tal que $F(y) \subset A$, para todo $y \in V(x)$.
(b) F es SI si y solamente si, para cada $x \in X$ y cada $A \subset Y$ abierto con $F(x) \cap A \neq \emptyset$, existe un entorno $V(x)$ tal que $F(y) \cap A \neq \emptyset$, para todo $y \in V(x)$.

Observación 1.4.1. En la práctica algunas veces resulta más sencillo verificar las propiedades de semicontinuidad de multifunciones en términos de sucesiones, tal como se ilustró en el párrafo que antecede al último ejercicio. Veamos de nuevo dicho argumento aplicado a la Definición 1.4.1. Supongamos que F es SS y sea $x \in X$. Consideremos una sucesión x_i en X tal que $x_i \to x$ y un conjunto cerrado $C \subseteq Y$ tal que $F(x_i) \cap C \neq \emptyset$, para i suficientemente grande. De acuerdo a la definición (1.6) se tiene que $x_i \in F^{-1}(C)$, a partir de i suficientemente grande. Ya que F es SS, el conjunto $F^{-1}(C)$ resulta cerrado en X y por lo tanto $x \in F^{-1}(C)$. Usando una vez más (1.6) obtenemos que $F(x) \cap C \neq \emptyset$. De esta forma, cuando F es SS el conjunto $F(x)$ debe ser por lo menos tan grande como un cierto límite de los conjuntos $F(x_i)$. Intuitivamente hablando, el hecho anterior indica que el grafo de una multifunción SS puede presentar saltos sólo hacia arriba con respecto a la inclusión. En este mismo orden de ideas, si F es una multifunción SI, $x \in X$, y $A \subseteq X$ es un abierto tal que $F(x) \cap A \neq \emptyset$, entonces cada sucesión x_i en X, con $x_i \to x$, satisface $F(x_i) \cap A \neq \emptyset$ para i suficientemente grande. De manera análoga al caso SS, se infiere que el grafo de una multifunción SI sólo puede experimentar saltos hacia abajo con respecto a la inclusión.

EJERCICIO 1.4.3. Sean $F, G : X \to \mathcal{P}(Y)$.
(a) Si F y G son SS, poseen imágenes cerradas, y $F(x) \cap G(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$, entonces la multifunción $(F \cap G)(x) := F(x) \cap G(x)$ es SS.

(b) Si F y G son SI, entonces la multifunción $(F \cup G)(x) = F(x) \cup G(x)$ es SI.
(c) Si F es SI, entonces la multifunción clausura $\overline{F}(x) := \overline{F(x)}$ es SI.

Auxiliados por la observación anterior, presentamos a continuación un par de proposiciones que caracterizan a las propiedades de semicontinuidad dentro del contexto clásico ε - δ cuando se dispone de la compacidad de las imágenes de la multifunción.

Proposición 1.4.1. *Supongamos que $F(x)$ es un conjunto compacto para cada $x \in X$. Entonces, F es SS si y solamente si, dado $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ tal que*

$$F(y) \subset F(x) + B_Y(0, \varepsilon), \text{ para todo } y \in B_X(x, \delta). \tag{1.8}$$

Demostración. Establezcamos primero la necesidad de la condición (1.8). En efecto, asumamos que F es SS y fijemos $x \in X$. Supongamos que existe un número $\varepsilon > 0$ con la propiedad de que para cualquier $\delta > 0$, se cumple

$$F(y) \not\subseteq F(x) + B_Y(0, \varepsilon), \text{ para algún } y \in B_X(x, \delta).$$

Entonces, aplicando la condición anterior sobre una sucesión de valores $\delta_i \to 0$, es posible hallar sucesiones y_i y z_i, con $y_i \in B_X(x, \delta_i)$ y $z_i \in F(y_i)$, tales que $z_i \notin F(x) + B_Y(0, \varepsilon)$, para $i = 1, 2 \ldots$ Observe que el conjunto $A := F(x) + B_Y(0, \varepsilon)$ es abierto en Y. Además, $F(y_i) \cap A^c \neq \emptyset$. Sin embargo, es claro que $F(x) \subset F(x) + B_Y(0, \varepsilon) = A$ y así $F(x) \cap A^c = \emptyset$, lo cual contradice lo establecido en la observación 1.4.1 sobre la propiedad de semicontinuidad superior en términos de sucesiones. Por lo tanto, dicho número $\varepsilon > 0$ no puede existir y así (1.8) se satisface.

Para probar la suficiencia, tomemos un conjunto cerrado $C \subset Y$ y consideremos una sucesión $y_i \to x$, tal que $y_i \in F^{-1}(C)$ para cada $i = 1, 2, \ldots$. Ya que $F(y_i) \cap C \neq \emptyset$, se tiene que existen $z_i \in F(y_i) \cap C$, con $i = 1, 2, \ldots$. De acuerdo a la condición (1.8), para cada uno de los valores $\varepsilon_i = 1/i$ existe un número $\delta_i > 0$ tal que

$$F(y) \subset F(x) + B_Y(0, \varepsilon_i), \text{ para todo } y \in B_X(x, \delta_i), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Ahora bien, consideremos la subsucesión $y_{j_i} \in B_X(x, \delta_i)$. Por lo tanto,

$$z_{j_i} \in F(y_{j_i}) \subset F(x) + B_Y(0, \varepsilon_i)$$

y así, $z_{j_i} = q_{j_i} + (1/i)r_{j_i}$, para algunos $q_{j_i} \in F(x)$ y $r_{j_i} \in B_Y(0, \varepsilon_i)$, para $i = 1, 2\dots$ Ya que $F(x)$ es compacto, podemos pasar a subsucesiones convergentes (si es necesario) y reetiquetar los subíndices de las mismas, para obtener que $z_{j_i} = q_{j_i} + (1/i)r_{j_i} \to q \in F(x)$, para algún $q \in Y$. Más aún, ya que $z_{j_i} \in C$ y el conjunto C es cerrado, se tiene que $q \in C$. Por lo tanto, $F(x) \cap C \neq \emptyset$, lo cual implica que $x \in F^{-1}(C)$. Este argumento demuestra que $F^{-1}(C)$ es cerrado y así F es SS. □

Proposición 1.4.2. *Asumamos que $F(x)$ compacto para cada $x \in X$. Entonces, F es SI si y solamente si, dado $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ tal que*

$$F(x) \subset F(y) + B_Y(0, \varepsilon), \ \textit{para todo}\ y \in B_X(x, \delta). \tag{1.9}$$

Demostración. Supongamos que F es SI y sea $x \in X$. Además, supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ es posible encontrar $y \in B_X(x, \delta)$ con la propiedad

$$F(x) \not\subseteq F(y) + B_Y(0, \varepsilon). \tag{1.10}$$

Escojamos una sucesión de números $\delta_i > 0$, con $\delta_i \to 0$. Entonces, para cada i la condición (1.10) garantiza la existencia de un $y_i \in B_X(x, \delta_i)$ tal que

$$F(x) \not\subseteq F(y_i) + B_Y(0, \varepsilon). \tag{1.11}$$

Es claro que $y_i \to x$. Además, de acuerdo a (1.11) para cada i existe $w_i \in F(x)$ tal que $w_i \notin F(y_i) + B_Y(0, \varepsilon)$. Así, $d_Y(w_i, F(y_i)) \geq \varepsilon$, para $i = 1, 2, \dots$. Ya que $F(x)$ es compacto, existe una subsucesión w_{i_j} tal que $w_{i_j} \to w$, para algún $w \in F(x)$. Consideremos la bola abierta $A := B_Y(w, \varepsilon/2)$. Ya que $y_{i_j} \to x$, $F(x) \cap A \neq \emptyset$, y F es SI, debe tenerse que $F(y_{i_j}) \cap A \neq \emptyset$, a partir de j suficientemente grande. Por lo tanto, a partir de tal j debe existir $v_{i_j} \in F(y_{i_j}) \cap A$, de lo cual $\|v_{i_j} - w\|_Y < \varepsilon/2$. Ahora bien, escogiendo a j suficientemente grande podemos escribir

$$\begin{aligned} d_Y(w_{i_j}, F(y_{i_j})) &\leq \|w_{i_j} - v_{i_j}\|_Y \\ &\leq \|w_{i_j} - w\|_Y + \|w - v_{i_j}\|_Y \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. De esta manera, un número ε con la propiedad (1.10) no puede existir y por ende la condición (1.9) se satisface.

Para verificar la suficiencia consideremos $A \subseteq Y$ abierto. Necesitamos demostrar que el conjunto $F^{-1}(A)$ es abierto en X. Para ello, supongamos que existe $x \in F^{-1}(A)$ para el cual no es posible hallar $\lambda > 0$ tal que $B_X(x, \lambda) \subset F^{-1}(A)$. Tomando entonces una sucesión $\lambda_i \to 0$, es posible seleccionar $y_i \to x$, con $F(y_i) \cap A = \emptyset$, i.e., $F(y_i) \subset A^{\mathrm{c}}$. Sea $\varepsilon > 0$. De acuerdo a la hipótesis y a la conclusión anterior, la siguiente sucesión de inclusiones debe satisfacerse a partir de i suficientemente grande:

$$F(x) \subset F(y_i) + B_Y(0, \varepsilon) \subset A^{\mathrm{c}} + B_Y(0, \varepsilon).$$

Ya que ε es arbitrario, se concluye que $F(x) \subseteq A^{\mathrm{c}}$. Por lo tanto, $F(x) \cap A = \emptyset$, lo cual es una contradicción. De esta manera, para cada $x \in F^{-1}(A)$ existe $\lambda > 0$ tal que $B_X(x, \lambda) \subset F^{-1}(A)$, lo cual implica que $F^{-1}(A)$ es abierto en X y así F resulta SI. $\square$

Una lectura a los dos resultados anteriores muestra como la hipótesis de compacidad en las imágenes de F sólo interviene cuando se establecen la suficiencia en la Proposición 1.4.1 y la necesidad en la Proposición 1.4.2. Resulta por lo tanto sensato proponer al lector la siguiente tarea.

EJERCICIO 1.4.4. Muestre que existen multifunciones $F, G : X \to \mathcal{P}(Y)$, con $n, m = 1$, tales que F satisface la condición (1.8) sin ser SS, mientras que G es SI, pero no satisface la condición dada en (1.9).

Anexamos un ejercicio que gira en torno a uno de los ejemplos importantes de multifunciones presentados al principio del capítulo.

EJERCICIO 1.4.5. Sea $f : X \times Y \to X$ y $U \subset Y$. Consideremos la multifunción $F : X \to \mathcal{P}(X)$ definida como

$$F(x) := \{f(x, u) : u \in U\}, \text{ para cada } x \in X.$$

Si la aplicación $x \mapsto f(x, u)$ es continua para cada $u \in U$, entonces:
(a) La multifunción F es SI.
(b) Si U es compacto, entonces F es SS y por ende continua.

A continuación presentamos una interpretación adicional para las propiedades de semicontinuidad en multifunciones. Los elementos necesarios para motivar tal enfoque, provienen de la teoría de semicontinuidad para funciones escalares $f : X \to \mathbb{R}$. En efecto, recordemos que *el límite superior de f en un punto $x \in X$* está definido como

$$\limsup_{y \to x} f(y) = \inf_{\delta > 0} \sup \{f(y) : y \in (x - \delta, x + \delta), y \neq x\}.$$

Análogamente, *el límite inferior de f en $x \in X$* viene dado por

$$\liminf_{y \to x} f(y) = \sup_{\delta > 0} \inf \{f(y) : y \in (x - \delta, x + \delta), y \neq x\}.$$

La función f se dice *semicontinua superiormente* si para cada $x \in X$ se satisface

$$\limsup_{y \to x} f(y) \leq f(x).$$

Complementariamente, f se dice *semicontinua inferiormente* si para cada $x \in X$ se cumple

$$f(x) \leq \liminf_{y \to x} f(y).$$

EJERCICIO 1.4.6. Para $F : X \to \mathcal{P}(Y)$, se verifican los siguientes hechos:
(a) F es SI si y solamente si, para cada $y \in Y$ la función

$$x \to d_Y(y, F(x)), \quad \text{con } x \in X,$$

es semicontinua superiormente.
(b) Si F admite imágenes compactas, entonces F es SS si y solamente si, para cada $y \in Y$ la función

$$x \to d_Y(y, F(x)), \quad \text{con } \in X,$$

es semicontinua inferiormente.
(c) Si F es continua, entonces la función

$$(x, y) \to d_Y(y, F(x)), \quad \text{con } (x, y) \in X \times Y,$$

es continua (**Sugerencia:** Considere el Ejercicio 1.2.1 para establecer la continuidad con respecto a la variable y).

Las estructuras que reemplazan de manera adecuada a los lim sup y lim inf anteriores dentro del contexto de semicontinuidad multivaluada están dadas por los siguientes *límites en el sentido de Painlevé-Kuratowski* (c.f. [4, 36]): Si C_i es una sucesión de conjuntos, su *límite superior* está dado por

$$\limsup_{i\to\infty} C_i := \bigcap_{i\geq 1} \overline{\left(\bigcup_{j\geq i} C_j\right)}. \tag{1.12}$$

Análogamente, el *límite inferior* de la sucesión C_i está definido por

$$\liminf_{i\to\infty} C_i := \bigcup_{i\geq 1} \overline{\left(\bigcap_{j\geq i} C_j\right)}. \tag{1.13}$$

Diremos que un conjunto C es *el límite de una sucesión de conjuntos* C_i si se cumple

$$C = \liminf_{i\to\infty} C_i = \limsup_{i\to\infty} C_i.$$

El lector podría estar familiarizado con las siguientes propiedades, las cuales le pedimos verificar directamente a partir de las definiciones (1.12) y (1.13).

EJERCICIO 1.4.7. Para una sucesión C_i de conjuntos se cumplen:
(a) Los límites (1.12) y (1.13) son conjuntos cerrados.
(b) $\liminf_{i\to\infty} C_i \subseteq \limsup_{i\to\infty} C_i$.
(c) El límite (1.12) coincide con el conjunto de puntos de acumulación de todas las sucesiones $x_i \in C_i$. Es decir, (1.12) consta de los puntos límites de todas las subsucesiones de $x_i \in C_i$.
(d) El límite (1.13) coincide con el conjunto de puntos límites de todas las sucesiones $x_i \in C_i$.
(e)

$$\limsup_{i\to\infty} C_i = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{i\geq 1} \bigcup_{j\geq i} \overline{(C_j + B(0,\varepsilon))}.$$

$$\liminf_{i\to\infty} C_i = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{i\geq 1} \bigcap_{j\geq i} \overline{(C_j + B(0,\varepsilon))},$$

Procedemos ahora a discutir las propiedades de semicontinuidad en multifunciones a través del uso de los límites (1.12) y (1.13). Comencemos con el siguiente resultado, el cual establece una condición necesaria para la semicontinuidad superior.

Proposición 1.4.3. *Supongamos que F es SS y posee imágenes cerradas. Entonces, para cada $x \in X$ y cada sucesión $x_i \in X$ con $x_i \to x$, se tiene*

$$\limsup_{i\to\infty} F(x_i) \subseteq F(x). \tag{1.14}$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in X$. Ya que F es SS, la Proposición 1.4.1 garantiza la existencia de un número $\delta := \delta(x,\varepsilon) > 0$ tal que $F(y) \subseteq F(x) + B_Y(0,\varepsilon)$, para todo $y \in B_X(x,\delta)$. Sea x_i una sucesión tal que $x_i \to x$. Entonces, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in B_X(x,\delta)$ para todo $i \geq k$. Por lo tanto, $F(x_i) \subseteq F(x) + B_Y(0,\varepsilon)$, $\forall\, i \geq k$. De esta forma, y en vista de ser $F(x)$ cerrado, se tiene que

$$\overline{\bigcup_{i\geq k} F(x_i)} \subseteq \overline{F(x) + B_Y(0,\varepsilon)} = F(x) + \overline{B}_Y(0,\varepsilon).$$

Pero obviamente

$$\bigcap_{i\geq 1} \overline{\bigcup_{j\geq i} F(x_j)} \subseteq \overline{\bigcup_{i\geq k} F(x_i)},$$

y por lo tanto

$$\limsup_{i\to\infty} F(x_i) = \bigcap_{i\geq 1} \overline{\bigcup_{j\geq i} F(x_j)} \subseteq F(x) + \overline{B}_Y(0,\varepsilon).$$

Ya que $\varepsilon > 0$ es arbitrario se verifica la inclusión (1.14). $\square$

El siguiente ejemplo es una ligera modificación de uno presentado en la página 6 de [14]. Su intención es la de ilustrar la no validez del recíproco de la Proposición anterior.

Ejemplo 1.4.1. Consideremos $F : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ definida por $F(x) := \{x\} \times [0,\infty)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. La multifunción F satisface la propiedad (1.14). En efecto, sea $x_i \to x$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i\geq 1} \overline{\bigcup_{j\geq i} F(x_j)} &= \bigcap_{i\geq 1} \overline{\bigcup_{j\geq i} (\{x_j\} \times [0,\infty))} \\
&= \left(\bigcap_{i\geq 1} \overline{\bigcup_{j\geq i} \{x_j\}} \right) \times [0,\infty) \\
&= \{x\} \times [0,\infty),
\end{aligned}$$

es decir, $F(x) = \limsup_{i\to\infty} F(x_i)$. Sin embargo, F no es SS. Para ver esto, sea $C = \{(y, 1/y) : y > 0\}$. No es difícil ver que C es cerrado en $\mathbb{R}^2$. Además,

$$\begin{aligned} F^{-1}(C) &= \{x \in \mathbb{R} : F(x) \cap C \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \{x\} \times [0, \infty) \cap \{(y, 1/y) : y > 0\} \neq \emptyset\} \\ &= (0, \infty), \end{aligned}$$

el cual no es cerrado en $\mathbb{R}$. Note que $F(x)$ si es cerrado para cada $x \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 1.4.8. Si $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ admite imágenes compactas, la propiedad (1.14) es suficiente para que F sea SS.

Motivados por la discusión anterior, presentamos a continuación la contraparte de la Proposición 1.4.3, la cual representa una caracterización de la propiedad de semicontinuidad inferior para multifunciones.

Proposición 1.4.4. *Supongamos que F posee imágenes compactas. Entonces F es SI si y solamente si, F satisface la condición*

$$F(x) \subseteq \liminf_{i\to\infty} F(x_i) \tag{1.15}$$

para cada $x \in X$ y cada sucesión $x_i \in X$ con $x_i \to x$.

Demostración. Verifiquemos primero que la propiedad (1.15) es suficiente para que F sea SI. Para ello, sea $A \subset Y$ abierto. Debemos comprobar que el conjunto $F^{-1}(A)$ es abierto en X. En efecto, supongamos que existe $x \in F^{-1}(A)$ para el cual no es posible ajustar una bola abierta $B_X(x, \delta)$ dentro de $F^{-1}(A)$. Entonces, para una sucesión de números $\delta_i > 0$, con $\delta_i \to 0$, es posible seleccionar una sucesión $x_i \in B_X(x, \delta_i)$ tal que $F(x_i) \subset A^c$, para $i = 1, 2, \ldots$. Es claro que $x_i \to x$ y al ser A^c cerrado, la sucesión de inclusiones anteriores implica $\overline{\bigcap_{j\geq i} F(x_j)} \subset A^c$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, en vista de (1.15) se tiene que

$$F(x) \subset \bigcup_{i\geq 1} \overline{\bigcap_{j\geq i} F(x_j)} \subset A^c,$$

de lo cual $x \notin F^{-1}(A)$, y esto es una contradicción.

Pasamos ahora a probar la necesidad de (1.15). Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Ya que F es SI y posee imágenes compactas, la Proposición 1.4.2 garantiza la existencia de un número $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ tal que

$$F(x) \subset F(y) + B_Y(0, \varepsilon), \quad \text{para todo } y \in B_X(x, \delta).$$

Dada una sucesión $x_j \to x$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_j \in B_X(x, \delta)$, para $j \geq i$. Por lo tanto, se debe tener

$$F(x) \subset \bigcap_{j \geq i} (F(x_j) + B_Y(0, \varepsilon)),$$

de lo cual es claro que

$$F(x) \subset \bigcup_{i \geq 1} \bigcap_{j \geq i} (F(x_j) + B_Y(0, \varepsilon)).$$

La inclusión anterior es independiente de la escogencia de $\varepsilon > 0$. Invocando por lo tanto la parte (e) del Ejercicio 1.4.7 obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} F(x) &\subset \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{i \geq 1} \bigcap_{j \geq i} (F(x_j) + B_Y(0, \varepsilon)) \\ &= \liminf_{i \to \infty} F(x_i). \end{aligned}$$

$\square$

El siguiente ejercicio proporciona algunos aspectos complementarios sobre la semicontinnuidad en multifunciones.

EJERCICIO 1.4.9. Sea $F : X \to \mathcal{P}(Y)$.
(a) Demuestre que F satisface (1.14) si y solamente si, F^{-1} satisface (1.14), si y solamente si, $\mathcal{G}(F)$ es cerrado.
(b) Encuentre una multifunción F que no satisfaga la propiedad (1.15), pero que sea SI. Observe que dicha F no debe poseer imágenes compactas.

El grafo de una multifunción es una herramienta alternativa a la hora de caracterizar la propiedad de semicontinuidad superior, como lo expresa el resultado que presentamos a continuación.

Teorema 1.4.1. *Sea $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunción con imágenes cerradas. Supongamos que para cada $x \in \mathrm{Dom}(F)$ el conjunto*

$$\mathcal{M} := \overline{\bigcup_{y \in B(x,\delta)} F(y)}$$

es compacto, para algún $\delta > 0$. Entonces, F es SS si y solamente si, $\mathcal{G}(F)$ es cerrado.

Demostración. Sea (x_i, v_i) una sucesión en $\mathcal{G}(F)$ tal que $(x_i, v_i) \to (x, v)$ y supongamos que $v \notin F(x)$. Dado que $F(x)$ es cerrado, debe existir $\varepsilon > 0$ tal que $v \notin F(x) + \overline{B}_Y(0, \varepsilon)$. Ya que F es SS, para tal $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $F(y) \subset F(x) + B_Y(0, \varepsilon)$, para todo $y \in B_X(x, \delta)$. En particular, para i suficientemente grande se tiene que $x_i \in B_X(x, \delta)$ y así

$$v_i \in F(x_i) \subset F(x) + B_Y(0, \varepsilon),$$

de donde resulta $v \in F(x) + \overline{B}_Y(0, \varepsilon)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $v \in F(x)$, es decir, $(x, v) \in \mathcal{G}(F)$. Esto verifica que $\mathcal{G}(F)$ es cerrado.

Consideremos ahora un conjunto $C \subset Y$ cerrado y una sucesión $x_i \to x$ tal que $x_i \in F^{-1}(C)$, es decir, para cada i existe $v_i \in F(x_i) \cap C$. En virtud de la convergencia, $x_i \in B_X(x, \delta)$ a partir de i suficientemente grande. Por lo tanto, $v_i \in \mathcal{M}$ a partir de i suficientemente grande. Ya que $\mathcal{M}$ es compacto, existe una subsucesión v_{i_j} convergente a algún $v \in \mathcal{M}$. Como consecuencia del argumento anterior, hemos obtenido la sucesión $(x_{i_j}, v_{i_j}) \in \mathcal{G}(F)$, tal que $(x_{i_j}, v_{i_j}) \to (x, v)$. Ya que $\mathcal{G}(F)$ y C son cerrados en sus respectivos espacios, necesariamente se tiene que $(x, v) \in \mathcal{G}(F)$ y $v \in C$. Por lo tanto, $F(x) \cap C \neq \emptyset$, es decir, $x \in F^{-1}(C)$, con lo cual hemos verificado que $F^{-1}(C)$ es cerrado en X. □

El siguiente resultado es una consecuencia del Teorema anterior. El mismo establece la compacidad como una propiedad topológica para multifunciones semicontinuas superiormente. En este aspecto, su enunciado guarda similitud con el celebrado Teorema de Weierstrass en el caso univaluado. Cabe destacar que la hipótesis de compacidad sobre el conjunto $\mathcal{M}$ no es necesaria, como en efecto no lo fue al momento de establecer la implicación directa del Teorema 1.4.1.

Teorema 1.4.2. *Supongamos que $F : X \to Y$ es SS y admite imágenes compactas. Si $K \subset X$ es compacto, entonces $F(K)$ es compacto.*

Demostración. Consideremos una sucesión arbitraria $v_i \in F(K)$. Entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $x_i \in K$ tal que $v_i \in F(x_i)$. Ya que K es compacto, debe existir una subsucesión x_{i_j} tal que $x_{i_j} \to x \in K$. Es claro que $(x_{i_j}, v_{i_j}) \in \mathcal{G}(F)$. Sea $\varepsilon > 0$. Ya que F es SS con imágenes compactas, de acuerdo a la Proposición 1.4.1 debe existir $\delta > 0$ tal que

$$\mathcal{M} = \overline{\bigcup_{y \in B(x,\delta)} F(y)} \subset F(x) + \overline{B}_Y(0, \varepsilon),$$

con lo cual $\mathcal{M}$ resulta claramente compacto. Además, se debe tener que $v_{i_j} \in F(x_{i_j}) \subset F(x) + B_Y(0, \varepsilon)$, a partir de cierto $j \in \mathbb{N}$. Pasando de nuevo a una subsucesión convergente y reetiquetando dicha subsucesión, tenemos que $v_{i_j} \to v$, para algún $v \in F(x) + \overline{B}_Y(0, \varepsilon)$. Invocando el Teorema anterior, obtenemos que $(x, v) \in \mathcal{G}(F)$, es decir, $v \in F(x)$. Hemos demostrado que para cada sucesión $v_i \in F(K)$, existe una subsucesión $v_{i_j} \to v \in F(K)$ y esto se traduce en la compacidad de $F(K)$. □

EJERCICIO 1.4.10. Demuestre el resultado anterior utilizando cubrimientos abiertos para $F(K)$.

Finalizamos esta sección reseñando otra propiedad topológica de las multifunciones SS, de la cual tendremos oportunidad de beneficiarnos en el siguiente capítulo.

Teorema 1.4.3. *Supongamos que $F : X \to Y$ es SS y admite imágenes conexas. Entonces, $F(K)$ es conexo para cada $K \subset X$ conexo.*

Demostración. Supongamos que bajo las hipótesis del enunciado se tiene un conjunto $K \subset X$ conexo cuya imagen $F(K)$ admite una desconexión. Entonces, existen $A, B \subset Y$ no vacios tales que $F(K) = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, y con A y B abiertos en $F(K)$. Ya que F es SS, los conjuntos

$$\widetilde{A} = \{x \in K : F(x) \subset A\}, \quad \widetilde{B} = \{x \in K : F(x) \subset B\}$$

resultan abiertos en K. Si $x \in K$ la conexidad de $F(x)$ implica que $F(x) \subset A$ o $F(x) \subset B$. Por lo tanto, $K = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$. Además, es claro que $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \emptyset$. Ya que K es conexo, se tiene que $\widetilde{A} = \emptyset$ o $\widetilde{B} = \emptyset$. Si $\widetilde{A} = \emptyset$ entonces $F(K) = B$ y así $A = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Igual conclusión se obtiene asumiendo $\widetilde{B} = \emptyset$. De esta forma, $F(K)$ resulta conexo necesariamente. □

1.5. Selecciones

En la teoría de multifunciones, el concepto de selección es de fundamental importancia en vista del "bypass" que dicho objeto proporciona para poder interpretar estructuras multivaluadas a través de objetos univaluados. Un ejemplo importante de tal situación, el cual es abordado en detalle en el próximo capítulo, pertenece a la teoría de inclusiones diferenciales. En el mismo, las selecciones juegan un papel central a la hora de garantizar existencia de soluciones para ciertos problemas de Cauchy multivaluados.

En esta sección consideramos algunos resultados clásicos sobre selecciones y hacemos énfasis en ciertos aspectos relacionados a la regularidad de estos objetos.

Definición 1.5.1. *Dada una multifunción $F : X \to \mathcal{P}(Y)$, una selección para F es una función $f : X \to Y$ tal que $f(x) \in F(x)$, para cada $x \in X$.*

A menos que se indique lo contrario y en virtud de lo acordado para $\mathrm{Dom}(F)$ al comienzo de esta monografía, en la definición anterior se asume que $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(F)$. No obstante, independientemente de la naturaleza del dominio de la multifunción, la existencia de selecciones es consecuencia directa del *axioma de elección*, el cual recordamos a continuación en una versión adecuada para nuestro contexto (ver [29]):

Sea I un conjunto arbitrario de índices. Para cada colección de conjuntos $\mathcal{F} := \{F_\alpha : \alpha \in I\}$, existe una función

$$f : \mathcal{F} \to \bigcup_{F_\alpha \in \mathcal{F}} F_\alpha$$

tal que $f(F_\alpha)$ es un elemento de F_α, para cada $F_\alpha \in \mathcal{F}$.

Nos preparamos a discutir el primer resultado sobre selecciones, en el cual se asumirá la propiedad de continuidad para la multifunción considerada. Para abordar su prueba con claridad, dedicaremos cierta atención preliminar a un concepto que será de utilidad tanto en la referida prueba como en futuras secciones.

Sea $x \in X$ y $C \subset X$. Definimos *la proyección de x sobre C* a través de

$$\pi_C(x) := \{y \in C : \|y - x\| = d(x, C)\}. \tag{1.16}$$

Es bien conocido que en el caso de ser C cerrado, el conjunto $\pi_C(x)$ es necesariamente no vacio. Más aún, si C es convexo, el conjunto $\pi_C(x)$ consiste en un único elemento (ver [5]). En el caso particular en que $x = 0$ convenimos en hacer la identificación $m(C) = \pi_C(0)$, y para cada $x \in m(C)$ diremos que x es un *elemento mínimo del conjunto* C. Algunas propiedades importantes sobre $\pi_C(x)$ son discutidas en el siguiente lema.

Lema 1.5.1. *Sea $C \subset X$ cerrado y no vacio. Entonces, si $x \in X$ tenemos:*
(i) $\langle x - p, y - p\rangle \leq \frac{1}{2} \|y - p\|^2$, para cada $y \in C$ y cada $p \in \pi_C(x)$.
(ii) Si C es convexo, $\langle x - p, y - p\rangle \leq 0$, para cada $y \in C$ y cada $p \in \pi_C(x)$. En particular, $\|\pi_C(y) - \pi_C(x)\| \leq \|y - x\|$, para cada par $x, y \in X$.

Demostración. Si $y \in C$ y $p \in \pi_C(x)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|x - p\|^2 &= d^2(x, C) \\
&\leq \|x - y\|^2 \\
&= \|(x - p) + (p - y)\|^2 \\
&= \|x - p\|^2 + 2\langle x - p, p - y\rangle + \|y - p\|^2,
\end{aligned}$$

de lo cual $2\langle x - p, p - y\rangle + \|y - p\|^2 \geq 0$, que es equivalente a la desigualdad propuesta en (i). Para verificar (ii), notemos que al ser C convexo $\overline{y} = \lambda y + (1 - \lambda)\pi_C(x) \in C$ para todo $\lambda \in (0, 1)$ y todo $y \in C$. Por lo tanto, aplicando (i) para dicho $\overline{y}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\lambda\langle x - \pi_C(x), y - \pi_C(x)\rangle &= \langle x - \pi_C(x), \lambda y + (1 - \lambda)\pi_C(x) - \pi_C(x)\rangle \\
&\leq \frac{1}{2}\|\lambda y + (1 - \lambda)\pi_C(x) - \pi_C(x)\|^2 \\
&= \frac{\lambda^2}{2}\|y - \pi_C(x)\|^2.
\end{aligned}$$

Cancelando λ en ambos lados de la relación anterior y haciendo tender λ a 0, se obtiene

$$\langle x - \pi_C(x), y - \pi_C(x)\rangle \leq 0. \tag{1.17}$$

Para concluir la prueba, primero sustituimos el elemento $\overline{y} = \pi_C(y) \in C$ en (1.17), lo cual produce

$$\langle x - \pi_C(x), \pi_C(y) - \pi_C(x)\rangle \leq 0. \tag{1.18}$$

Ahora, intercambiando los roles de x e y en la desigualdad anterior vemos que

$$\langle \pi_C(y) - y, \pi_C(y) - \pi_C(x) \rangle \leq 0. \tag{1.19}$$

Luego, sumando (1.18) y (1.19) se deduce

$$\langle (\pi_C(y) - \pi_C(x)) + x - y, \pi_C(y) - \pi_C(x) \rangle \leq 0.$$

Finalmente aplicamos la desigualdad de Schwarz, lo que conlleva a

$$\begin{aligned} \|\pi_C(y) - \pi_C(x)\|^2 - \|y - x\| \, \|\pi_C(y) - \pi_C(x)\| &\leq \|\pi_C(y) - \pi_C(x)\|^2 \\ &\quad + \langle x - y, \pi_C(y) - \pi_C(x) \rangle \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Dividiendo por $\|\pi_C(y) - \pi_C(x)\|$ en la desigualdad anterior obtenemos (ii). □

Teorema 1.5.1. (*Selección mínima*) *Sea $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ continua y con imágenes cerradas y convexas. Entonces, la función definida como $f(x) := m(F(x))$, para cada $x \in X$, es una selección continua para F.*

Demostración. Ya que $F(x)$ es cerrado y convexo, $f(x) := m(F(x))$ está bien definida como función y además es claro que $f(x) \in F(x)$ para cada $x \in X$, es decir, f es una selección para F. Veamos que f es continua. Fijemos $x \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. Ya que F es en particular SI, al invocar la parte (a) del Ejercicio 1.4.6, se tiene que debe existir $\delta > 0$ tal que $d_Y(0, F(z)) \leq d_Y(0, F(x)) + \varepsilon$, para cada $z \in B_X(x, \delta)$. Ahora bien, si $0 \in F(x)$ se tiene que $f(x) = 0$ y así $\|f(z) - f(x)\| < \varepsilon$ para cada $z \in B_X(x, \delta)$, lo cual implica la continuidad de f en x. Supongamos por lo tanto que $0 \notin F(x)$, es decir, $f(x) \neq 0$ y así $\|f(x)\| > 0$. Ya que F es SS, la propiedad (1.8) garantiza la existencia de $\delta_1 > 0$ tal que para cada $z \in B_X(x, \delta_1)$ existe $v \in F(x)$ que satisface $\|f(z) - v\| < (\varepsilon^2/3\,\|f(x)\|)$. De esta forma, utilizando la desigualdad de Schwarz podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(z) \rangle &= \langle f(x), v \rangle + \langle f(x), f(z) - v \rangle \\ &\geq \langle f(x), v \rangle - \|f(x)\| \, \|f(z) - v\| \\ &> \langle f(x), v \rangle - \frac{\varepsilon^2}{3}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Por otro lado, al ser $f(x) = \pi_{F(x)}(0)$, se tiene que

$$\langle f(x), f(x) - w \rangle \leq 0, \quad \text{para cada } w \in F(x),$$

y así (1.20) implica

$$\langle f(x), f(z) - f(x) \rangle > -\frac{\varepsilon^2}{3}. \tag{1.21}$$

Además, para cada $z \in X$

$$\|f(z)\|^2 = \|f(x)\|^2 + 2\langle f(x), f(z) - f(x) \rangle + \|f(z) - f(x)\|^2 .$$

De la última igualdad y (1.21) tenemos que

$$\begin{aligned} \|f(z) - f(x)\|^2 &= \|f(z)\|^2 - \|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), f(z) - f(x) \rangle \\ &< \|f(z)\|^2 - \|f(x)\|^2 + \frac{2\varepsilon^2}{3}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Invocando una vez más la parte (a) del Ejercicio 1.4.6 podemos garantizar la existencia de $\delta_2 > 0$ tal que, para cada $z \in B_X(x, \delta_2)$,

$$\|f(z)\|^2 = d_Y^2(0, F(z)) \leq d_Y^2(0, F(x)) + \frac{\varepsilon^2}{3} = \|f(x)\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{3}.$$

Finalmente, tomando $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ vemos según (1.22) y la última desigualdad que

$$\|f(z) - f(x)\|^2 < \varepsilon^2, \quad \text{para cada } z \in B_X(x, \delta),$$

lo cual completa la prueba. □

EJERCICIO 1.5.1. Sea $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ continua con imágenes cerradas y convexas. Si la función $g : X \to Y$ es continua, entonces también lo es la función $f(x) := \pi_{F(x)}(g(x))$.

1.5.1. El teorema de selección de Michael

Uno de los resultados más celebrados de la teoría de multifunciones es el *Teorema de Selección de Michael* [28], el cual propone un esquema de construcción de selecciones continuas bajo un debilitamiento importante en la regularidad de la multifución. Adicionalmente, el Teorema muestra de manera muy sencilla como puede escogerse una de tales selecciones por cada punto en el grafo de la multifunción. Quizás el concepto más instrumental dentro del argumento utilizado en su demostración es el de partición de la unidad, el cual brevemente recordamos a continuación junto algunos de sus elementos asociados.

Sea $\Omega \subset X$ y sea $\{V_j\}_{j\in J}$ un cubrimiento abierto para Ω, es decir, $\Omega \subset \bigcup_{j\in J} V_j$, siendo cada V_j abierto. Diremos que una colección de conjuntos $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ en X es un *refinamiento para* $\{V_j\}_{j\in J}$, si para cada $i \in I$ existe $j_i \in J$ tal que $\Omega_i \subset V_{j_i}$. La colección $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ se dice *localmente finita*, si para cada $i \in I$ el conjunto $\{r \in I : \Omega_r \cap \Omega_i \neq \emptyset\}$ es finito. Una familia de funciones $\{p_i(\cdot)\}_{i\in I}$ definidas sobre Ω recibe el nombre de *partición de la unidad subordinada a* $\{\Omega_i\}_{i\in I}$, si se satisfacen las siguientes propiedades:

(a) $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto localmente finito para Ω.
(b) $p_i(\cdot)$ es localmente Lipschitz, para cada $i \in I$.
(c) $p_i(x) > 0$ si $x \in \Omega_i \cap \Omega$ y $p_i(x) = 0$ si $x \in \Omega \setminus \Omega_i$.
(d) Para cada $x \in \Omega$, $\sum_{i\in I} p_i(x) = 1$.

Ya que para una partición de la unidad su cubrimiento correspondiente es localmente finito, la suma que aparece en la condición (d) contiene sólo un número finito de términos y por consiguiente está bien definida.

La existencia de particiones de la unidad sobre espacios metrizables está garantizada gracias a la combinación de los Teoremas de H. Stone (ver por ejemplo página 257 de [29]) y el Teorema 41.7 de [29]. En el caso particular de nuestro espacio euclidiano X, una prueba sencilla del Teorema de Stone puede consultarse en el Ejemplo 1 de la página 253 de [29]. Además, la construcción de tales particiones de la unidad puede apreciarse de forma bastante clara en el Teorema 2, página 10, de la referencia [3].

Disponiendo de toda la información necesaria, procedemos por lo tanto a abordar los detalles de la prueba del Teorema.

Teorema 1.5.2. (*Michael*) *Supongamos que* $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ *es SI y posee imágenes cerradas y convexas. Entonces, para cada* $(x, v) \in \mathcal{G}(F)$ *existe una selección continua* f *para* F, *tal que* $f(x) = v$.

Demostración. La prueba será desarrollada en tres pasos. En el paso inicial, se construirá una función continua que será un selección aproximada para F. Luego, en el segundo paso se obtendrá la selección anhelada por medio de un proceso inductivo aplicado a una familia de selecciones aproximadas generadas según el argumento del primer paso. Finalmente, obtenemos para cada punto del grafo de F la selección que pasa a través del mismo aplicando el resultado del paso 2 a una multifunción auxiliar que es univaluada en el punto de estudio.

Paso 1. Fijemos $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in X$ seleccionemos $v_x \in F(x)$. Es claro que $F(x) \cap B_Y(v_x, \varepsilon) \neq \emptyset$. De acuerdo a la parte (b) del Ejercicio (1.4.2) debe existir $\delta_x > 0$ tal que $F(y) \cap B_Y(v_x, \varepsilon) \neq \emptyset$, para todo $y \in B_X(x, \delta_x)$. Ya que claramente $\{B_X(x, \delta_x)\}_{x \in X}$ es un cubrimiento abierto para X, existe un refinamiento localmente finito $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ de $\{B_X(x, \delta_x)\}_{x \in X}$ y una partición de la unidad $\{p_i(\cdot)\}_{i \in I}$ subordinada a él. Definamos la función $f_\varepsilon : X \to Y$ por medio de

$$f_\varepsilon(z) := \sum_{i \in I} p_i(z) v_{x_i}, \tag{1.23}$$

la cual es continua en vista de ser una suma finita de funciones localmente continuas. Observe que $f_\varepsilon(z) > 0$ si y solamente si, $z \in \Omega_i \subset B_X(x_i, \delta_{x_i})$. Por lo tanto, $F(z) \cap B_Y(v_{x_i}, \varepsilon) \neq \emptyset$, de lo cual se desprende que $v_{x_i} \in F(z) + B_Y(0, \varepsilon)$. El último conjunto es convexo y así, la suma dada en (1.23) está necesariamente contenida en él, i.e. $f_\varepsilon(z) \in F(z) + B_Y(0, \varepsilon)$. De esta forma, f_ε es una selección aproximada para F. Observe que hasta los momentos no se ha requerido el hecho de que las imágenes de F sean cerradas .

Paso 2. A continuación construimos una sucesión de funciones $\{f_n\}$, con $f_n : X \to Y$, las cuales satisfacen las siguientes propiedades:

(i) $d_Y(f_n(z), F(z)) \leq \frac{1}{2^n}$, para cada $z \in X$ y cada $n = 1, 2, \ldots$.
(ii) $\|f_n(z) - f_{n-1}(z)\| \leq \frac{1}{2^{n-2}}$, para cada $z \in X$ y cada $n = 2, 3, \ldots$.

En efecto, para $n = 1$ es suficiente escoger $\varepsilon = 1/2$ en el Paso 1 de la demostración. Asumamos por lo tanto que hemos definido funciones f_n que satisfacen (i) hasta $n = k$. Consideremos la multifunción

$$G(z) := \left(\{f_k(z)\} + B_Y\left(0, \frac{1}{2^k}\right)\right) \bigcap F(z), \text{ para cada } z \in X.$$

Es claro que G posee imágenes convexas y que $\mathrm{Dom}(G) = \mathrm{Dom}(F)$. Además, G es SI según el Ejercicio 1.5.2. De acuerdo al Paso 1 debe existir una función continua $g : X \to Y$ tal que $d_Y(g(z), G(z)) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$. Definamos $f_{k+1}(z) := g(z)$. Ya que $G(z) \subset F(z)$, resulta claro que $d_Y(f_{k+1}(z), F(z)) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$, lo cual garantiza la propiedad (i). Además,

$$f_{k+1}(z) = g(z) \in G(z) + B_Y\left(0, \frac{1}{2^{k+1}}\right) \subset f_k(z) + B_Y\left(0, \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\right),$$

de lo cual $\|f_{k+1}(z) - f_k(z)\| \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, que es precisamente la desigualdad dada en (ii) para $n = k+1$, con lo que concluye la inducción. En virtud de ser la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ convergente, la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy y por ende converge uniformemente a una función continua f sobre X. De la propiedad (i) tenemos que para cada $z \in X$

$$d_Y(f(z), F(z)) = \lim_{n\to\infty} d_F(f_n(z), F(z)) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

y al ser $F(z)$ cerrado se obtiene $f(z) \in F(z)$ para cada $z \in X$, es decir, f es una selección para F.

Paso 3. Finalmente, para cada $(x, v) \in \mathcal{G}(F)$ definimos la multifunción

$$F_{(x,v)}(z) := \begin{cases} F(z) & \text{si} \quad z \neq x, \\ \{v\} & \text{si} \quad z = x. \end{cases}$$

No es difícil ver que $F_{(x,v)}$ satisface las mismas hipótesis que F (ver Ejercicio 1.5.2 a continuación). Obviamente, la selección $f_{(x,v)}$ para $F_{(x,v)}$ provista en el Paso 2 satisface todos los requerimientos del teorema. $\square$

EJERCICIO 1.5.2. Consideremos una multifunción $F : X \to \mathcal{P}(Y)$, la cual es SI y posee imágenes cerradas y convexas. Demuestre que:
(a) Si $f : X \to Y$ es continua y $\varepsilon > 0$, la multifunción

$$G(z) := (\{f(z)\} + B_Y(0, \varepsilon)) \cap F(z), \; z \in X,$$

es SI y admite imágenes cerradas y convexas.
(b) Para cada $(x, v) \in \mathcal{G}(F)$ la multifunción

$$F_{(x,v)}(z) := \begin{cases} F(z) & \text{si} \quad z \neq x, \\ \{v\} & \text{si} \quad z = x, \end{cases}$$

es SI y posee imágenes cerradas y convexas.

1.5.2. Selecciones locales

Un concepto que en ocasiones resulta alternativo ante la potencial ausencia de selecciones continuas es el de multifunción localmente seleccionable. Diremos que $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ es *localmente seleccionable en* $x \in X$ si para cada $v \in F(x)$ existe una vecindad V de x y una función continua $f : V \to Y$ tal que $f(x) = v$ y $f(z) \in F(z)$ para todo $z \in V$. La multifunción F se dice *localmente seleccionable* si es localmente seleccionable en cada $x \in X$.

Las multifunciones localmente seleccionables disfrutan de cierta regularidad, tal como lo expresa el siguiente resultado.

Teorema 1.5.3. *Cualquier multifunción localmente seleccionable es SI.*

Demostración. Sea $x \in X$ y consideremos un conjunto abierto $A \subset Y$ tal que $F(x) \cap A \neq \emptyset$. Tomemos $v \in F(x) \cap A$ y una vecindad W de v tal que $W \subset A$. Ya que F es localmente seleccionable, existe una vecindad V de x y una selección continua local $f : V \to Y$ para F tal que $f(x) = v$. Por la continuidad de f, debe existir una vecindad U de x, con $U \subset V$, tal que $f(z) \in W$ para todo $z \in U$. Pero en particular $f(z) \in F(z)$ para $z \in U$, y así $F(z) \cap W \neq \emptyset$, lo cual garantiza que $F(z) \cap A \neq \emptyset$ para cada $z \in U$. Según la parte (b) del Ejercicio 1.4.2 la multifunción F resulta SI. $\square$

A la luz del Teorema anterior, el siguiente resultado contrasta con el Teorema de Selección de Michael al proponer el intercambio de las hipótesis de semicontinuidad inferior y clausura en las imágenes de una multifunción F con la hipótesis de seleccionabilidad local. Adicionalmente, su demostración ilustra como construir selecciones continuas definidas sobre todo el dominio de F a partir de sus selecciones locales. Una vez más el concepto de partición de la unidad desempeña un papel importante al respecto.

Teorema 1.5.4. *Si $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ es localmente seleccionable y posee imágenes convexas, entonces existe una selección continua para F.*

Demostración. Para cada $z \in X$ y $v \in F(z)$ existe una selección local continua $f_z : V(z) \to Y$, con $f_z(z) = v$ y $f_z(x) \in F(x)$, para todo $x \in V(y)$. Consideremos una partición de la unidad $\{p_i(\cdot)\}_{i\in I}$ subordinada al refinamiento localmente finito $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ del cubrimiento $\{V(z)\}_{z\in X}$.

Entonces, para cada $i \in I$ existe $z_i \in X$ tal que $\Omega_i \subset V(z_i)$. Definamos la función

$$f(x) := \sum_{i \in I(x)} p_i(x) f_{z_i}(x), \text{ para cada } x \in X,$$

donde $I(x) := \{i \in I : p_i(x) > 0\}$. Es claro que $I(x)$ es finito. Además, f es continua en X por ser una suma finita de productos de funciones localmente continuas. Veamos que f es una selección para F. En efecto, para cada $i \in I(x)$ se tiene $p_i(x) > 0$, lo cual es cierto si $x \in \Omega_i \subset V(z_i)$. Por lo tanto, $f_{z_i}(x) \in F(x)$. Ya que la suma que define a $f(x)$ es una combinación convexa de elementos en $F(x)$ y este último conjunto es convexo, se debe tener que $f(x) \in F(x)$, para todo $x \in X$. $\square$

EJERCICIO 1.5.3. Demuestre que si $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ es tal que $F^{-1}(\{y\})$ es abierto para cada $y \in Y$, entonces F es localmente seleccionable.

Hasta los momentos el Teorema 1.5.1 es el único resultado que hemos presentado sobre existencia de selecciones continuas, el cual involucra de alguna manera la propiedad de semicontinuidad superior. Sin embargo, dicha propiedad es uno de los dos ingredientes que comprenden la hipótesis de continuidad para la multifunción en el Teorema 1.5.1 (ver Definición 1.4.1). Por lo tanto, resulta natural indagar sobre la disponibilidad de algún resultado sobre existencia de selecciones continuas asumiendo meramente semicontinuidad superior. El siguiente ejercicio invita al lector a despejar tal incógnita, incluyendo algunas hipótesis adicionales intuitivas que van en sintonía con las del Teorema 1.5.2.

EJERCICIO 1.5.4. Encuentre una multifunción F semicontinua superiormente, inclusive con imágenes compactas y convexas, tal que F no posea selecciones continuas.

A pesar de la deficiencia estructural indicada en el ejercicio anterior, es posible diseñar selecciones aproximadas para multifunciones SS siguiendo un esquema similar al descrito en el Paso 1 de la prueba del Teorema de Selección de Michael. El próximo Teorema certifica esta afirmación.

Teorema 1.5.5. (*Selección aproximada*) *Sea $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunción SS con imágenes convexas. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $f_\varepsilon : X \to Y$ localmente Lipschitz tal que*

$$\mathcal{G}(f_\varepsilon) \subset \mathcal{G}(F) + B_{X \times Y}((0,0), \varepsilon).$$

Demostración. Para comenzar, fijemos $\varepsilon > 0$. Ya que F es SS, para cada $x \in X$ debe existir $\delta(x) > 0$, con $\delta(x) < \varepsilon/2$, tal que $F(y) \subset F(x) + B_Y(0, \varepsilon/2)$, para todo $y \in B_X(x, \delta(x))$. Es claro que la familia $\{B_X(x, \delta(x)/4)\}_{x \in X}$ constituye un cubrimiento abierto del espacio métrico X. Sea por lo tanto $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ un refinamiento localmente finito asociado a tal cubrimiento y $\{p_i(\cdot)\}_{i \in I}$ una partición de la unidad subordinada al mismo. Para cada $i \in I$ seleccionemos un elemento $y_i \in \Omega_i$. Gracias a esta colección de elementos podemos considerar

$$f_\varepsilon(x) := \sum_{i \in I} p_i(x) m(F(y_i)), \text{ para cada } x \in X.$$

Es claro que f_ε está bien definida. Además, es fácil verificar que f_ε es localmente Lipschitz y que su imagen está contenida en la cápsula convexa de la imagen de F. Para $x \in X$ fijo, sea $I(x) := \{i \in I : p_i(x) > 0\}$, el cual es finito. En vista de la definición de refinamiento, para cada $i \in I(x)$ existe $x_i \in X$ tal que

$$\Omega_i \subset B_X(x_i, \delta(x_i)/4). \tag{1.24}$$

Con la finalidad de relajar la notación, sea $\delta_i = \delta(x_i)$ y seleccionemos $j \in I(x)$ tal que $\delta_j = \max\{\delta_i : i \in I(x)\}$. Recordemos que precisamente $x \in \Omega_i \subset B_X(x_i, \delta_i/4)$, para cada $i \in I(x)$. De esta forma, para cualquier $i \in I(x)$ tenemos

$$\begin{aligned} \|x_i - x_j\| &\leq \|x_i - x\| + \|x - x_j\| \\ &< \frac{\delta_i}{4} + \frac{\delta_j}{4} \\ &< \frac{\delta_j}{2}, \end{aligned}$$

es decir, $x_i \in B_X(x_j, \delta_j/2)$. Por lo tanto, invocando (1.24) y utilizando una vez más la desigualdad triangular, obtenemos $\Omega_i \subset B_X(x_j, \delta_j)$. Ya que para cada $i \in I(x)$ se verifica $m(F(y_i)) \in F(y_i) \subset F(\Omega_i)$, entonces

$$m(F(y_i)) \in F(B_X(x_j, \delta_j)) \subset F(x_j) + B_Y(0, \varepsilon/2).$$

Dado que el último conjunto es convexo, la definición de f_ε implica que $f_\varepsilon(x) \in F(x_j) + B_Y(0, \varepsilon/2)$. Así, debe existir $v_j \in F(x_j)$ tal que $\|f_\varepsilon(x) - v_j\| < \varepsilon/2$. De esta forma,

$$\|(x, f_\varepsilon(x)) - (x_j, v_j)\| \leq \|x - x_j\| + \|f_\varepsilon(x) - v_j\| < \varepsilon.$$

En vista de que $(x_j, v_j) \in \mathcal{G}(F)$, la desigualdad anterior implica

$$(x, f_\varepsilon(x)) \in \mathcal{G}(F) + B_{X\times Y}((0,0),\varepsilon).$$

$\square$

1.6. Multifunciones Lipschitz

Es bien conocido el rol central que ha desempeñado la propiedad Lipschitz en la obtención de varios resultados fundamentales del análisis moderno y sus aplicaciones. Quizás uno de los más populares de tales resultados lo constituye el Teorema de Picard-Lindelöf (circa 1890-1893), también conocido como *Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias*. El referido Teorema ejemplifica como la estructura particular de los mapas Lipschitz resulta instrumental en los procesos de estabilización de ciertas sucesiones, las cuales intervienen en el diseño de las soluciones de los problemas estudiados. En la presente sección introducimos la noción de regularidad Lipschitz dentro del contexto multivaluado y discutimos la propiedad de aproximación dual que poseen estas multifunciones con respecto a las multifunciones SS. El resultado que expresa tal propiedad de aproximación tendrá una repercusión importante en el próximo capítulo a la hora de establecer soluciones para ciertos tipos de inclusiones diferenciales.

Definición 1.6.1. *Diremos que una multifunción $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ es localmente Lipschitz si para cada $x_0 \in X$, existen $\varepsilon = \varepsilon(x_0) > 0$ y $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_0) > 0$ tales que*

$$F(y) \subset F(x) + \overline{B}_Y(0, \mathcal{L}\,\|y-x\|_X), \text{ para todo } x, y \in B_X(x_0,\varepsilon). \quad (1.25)$$

Si la condición (1.25) *se satisface para todo $x, y \in X$, con $\mathcal{L} > 0$ independiente de $x_0 \in X$, se dice que F es Lipschitz de rango $\mathcal{L}$.*

Las siguientes propiedades son consecuencias de la Definición 1.6.1. Le pedimos al lector ocuparse de los detalles de su verificación.

EJERCICIO 1.6.1. Sea $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ localmente Lipschitz. Entonces:
(a) F satisface (1.8). Más aún, si F admite imágenes compactas entonces F es SS.

(b) F satisface (1.9). En particular, F es SI.
(c) Si $C \subset X$ es acotado, entonces existe una constante $\mathcal{L}_C > 0$ tal que F es Lipschitz de rango $\mathcal{L}_C > 0$ sobre C.
(d) Si $v \in X$ es fijo, entonces la función $f(x) := \pi_{F(x)}(v)$ es una selección continua de F.

El resultado que presentamos a continuación permite aproximar multifunciones SS utilizando multifunciones Lipschitz de dos maneras distintas.

Teorema 1.6.1. *Sea $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunción SS que admite imágenes cerradas y convexas. Adicionalmente, supongamos que F es acotada. Es decir, existe una constante $M > 0$ tal que $\mathrm{Im}(F) \subset B_Y(0, M)$. Entonces, existe una sucesión de multifunciones localmente Lipschitz $F_k : X \to \mathcal{P}(Y)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ que satisfacen las siguientes condiciones de aproximación:*
(i) $F(x) \subset \cdots \subset F_{k+1}(x) \subset F_k(x) \subset \ldots F_0(x) \subset \overline{B}_Y(0, M)$, para todo $x \in X$.
(ii) Dados $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe un entero $k(\varepsilon, x) > 0$ tal que $F_k(x) \subset F(x) + B_Y(0, \varepsilon)$, para $k > k(\varepsilon, x)$.

Demostración. Mostraremos un argumento inductivo a través del cual se construirá la sucesión de multifunciones F_k que satisface las condiciones del Teorema. En efecto, comencemos tomando una base ortonormal de X, digamos $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Fijemos un número $\rho_0 > 0$ y consideremos los puntos de la forma

$$x_m^0 := \rho_0 m_1 e_1 + \cdots + \rho_0 m_n e_n, \text{ con } m_i \in \mathbb{Z}, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Además, usemos la identificación $m = (m_1, \ldots, m_n)$ y definamos

$$Q^0 := \{x \in X : x = q_1 e_1 + \cdots + q_n e_n,\ q^i \in (-\rho_0, \rho_0),\ i = 1, 2, \ldots\},$$

es decir, Q^0 es un hipercubo abierto en X. El lector puede verificar que la familia $\{x_m^0 + Q^0\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ constituye un cubrimiento abierto localmente finito de X (ver Ejercicio 1.6.2 debajo). Por lo tanto, existe una partición de la unidad $\{p_m^0(\cdot)\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ subordinada a dicho cubrimiento. Para cada $m \in \mathbb{Z}^n$ el conjunto

$$C_m^0 := \overline{\mathrm{co}}\, F(x_m^0 + 2Q^0)$$

es por construcción cerrado y convexo. Por lo tanto, la multifunción

$$F_0(x) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} p_m^0(x) C_m^0,$$

posee imágenes convexas y cerradas. Más aún, dado que cada p_m^0 es localmente Lipschitz, F_0 es también localmente Lipschitz en el sentido multivaluado. Notemos que si $v \in F_0(x)$, deben existir $v_m^0 \in C_m^0$ tales que $v = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} p_m^0(x) v_m^0$, y así

$$\|v\| \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} p_m^0(x) \left\|v_m^0\right\| \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} p_m^0(x) M = M,$$

es decir, $v \in \overline{B}_Y(0, M)$. Por lo tanto, $F_0(x) \subset \overline{B}_Y(0, M)$ para todo $x \in X$.

Para construir la multifunción F_1, seleccionamos $\rho_1 = \rho_0/3$ y repetimos el procedimiento descrito anteriormente usando ρ_1 en vez de ρ_0. Como resultado, obtenemos un cubrimiento localmente finito $\{x_m^1 + Q^1\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$, siendo

$$Q^1 := \{x \in X : x = q^1 e_1 + \cdots + q^n e_n,\ q^i \in (-\rho_1, \rho_1),\ i = 1, 2, \ldots\}.$$

De manera análoga al caso de C_m^0, sea

$$C_m^1 := \overline{\mathrm{co}}\, F(x_m^1 + 2Q^1),$$

y definamos la multifunción

$$F_1(x) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} p_m^1(x) C_m^1.$$

No es difícil comprobar que F_1 posee las mismas propiedades que F_0. Verifiquemos a continuación que $F_1(x) \subset F_0(x)$ para todo $x \in X$. Para ello, sea $x \in X$ y consideremos los conjuntos

$$I_0(x) := \{m \in \mathbb{Z}^n : x \in x_m^0 + Q^0\},$$

$$I_1(x) := \{m \in \mathbb{Z}^n : x \in x_m^1 + Q^1\}.$$

Si $m_0 \in I_0(x)$ y $m_1 \in I_1(x)$, entonces $x = x_m^0 + q^0 = x_m^1 + q^1$ para algunos $q^0 \in Q^0$ y $q^1 \in Q^1$. Por lo tanto, $x_m^1 = x_m^0 + (q^0 - q^1)$. Note que si $\overline{q}^1$ es cualquier punto en Q^1, las definiciones de Q^0 y Q^1 implican $(q^0 - q^1) + 2\overline{q}^1 \in 2Q^0$. Como consecuencia, $x_m^1 + 2\overline{q}^1 \in x_m^0 + 2Q^0$, es decir, $x_m^1 + 2Q^1 \subset x_m^0 + 2Q^0$. Además, en vista de ser la inclusión de conjuntos preservada bajo la aplicación de la multifunción $\overline{\text{co}}\, F$, se deduce que $C_{m_1}^1 \subset C_{m_0}^0$. La convexidad de $C_{m_0}^0$ y $C_{m_1}^1$, y las propiedades (c) y (d) de las particiones de la unidad, garantizan la inclusión

$$C_m^1 = \sum_{m \in I_0(x)} p_m^0(x) C_m^1 \subset \sum_{m \in I_0(x)} p_m^0(x) C_m^0,$$

de lo cual

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} p_m^1(x) C_m^1 \\ &= \sum_{m \in I_1(x)} p_m^1(x) C_m^1 \\ &\subset \sum_{m \in I_1(x)} p_m^1(x) \sum_{m' \in I_0(x)} p_{m'}^0(x) C_{m'}^0 \\ &= \sum_{m \in I_1(x)} p_m^1(x) \sum_{m' \in \mathbb{Z}^n} p_{m'}^0(x) C_{m'}^0 \\ &= F_0(x). \end{aligned}$$

Adicionalmente, $F(x) \subset F_0(x)$. En efecto, para cada $m \in I_0(x)$ se sabe que $x \in x_m^0 + Q^0 \subset x_m^0 + 2Q^0$, y por ende

$$F(x) \subset F(x_m^0 + 2Q^0) \subset \overline{\text{co}}\, F(x_m^0 + 2Q^0) = C_m^0.$$

Los conjuntos C_m^0 son convexos y así

$$F(x) \subset \sum_{m \in I_0(x)} p_m^0(x) C_m^0 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} p_m^0(x) C_m^0 = F_0(x).$$

Tomando $\rho_{k+1} = \rho_k/3$, para $k = 0, 1, \ldots,$ y siguiendo el procedimiento descrito anteriormente, podemos construir una sucesión de multifunciones $F_k : X \to \mathcal{P}(Y)$ que satisfacen la condición (i) del Teorema. Ahora procedemos a verificar que F_k satisface el resto de las propiedades anunciadas. Fijemos $x \in X$ y sea $\varepsilon > 0$. Ya que F es SS, existe $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ tal que $F(y) \subset F(x) + B_Y(0, \varepsilon/2)$, para todo $y \in B_X(x, \delta)$.

Gracias a la ortonormalidad de $\{e_1, \ldots, e_n\}$, al tomar $K \in \mathbb{N}$ tal que $\rho/3^{K-1} < \delta/\sqrt{n}$, es fácil ver que $Q^{k-1} \subset B_X(0,\delta)$ para todo $k \geq K$. De esta forma, $F(y) \subset F(x) + B_Y(0,\varepsilon/2)$ para todo $y \in x + Q^{k-1}$ y para todo $k \geq K$. Sea $I_k(x) = \{m \in \mathbb{Z}^n : x \in x_m^k + Q^k\}$. Entonces, para $m \in I_k(x)$, al proceder como antes verificamos que $x_m^k + 2Q^k \subset x + 3Q^k$. Ya que $3Q^k \subset Q^{k-1}$, entonces $x_m^k + 2Q^k \subset x + Q^{k-1}$. De esta manera, para $y \in x_m^k + 2Q^k$ y $k \geq K$ se tiene $F(y) \subset F(x) + B_Y(0,\varepsilon/2)$, siempre que $m \in I_k(x)$. El conjunto $F(x) + \overline{B}_Y(0,\varepsilon/2)$ es convexo y cerrado, lo cual garantiza la inclusión

$$C_m^k = \overline{\text{co}}\, F(x_m^k + 2Q^k) \subset F(x) + \overline{B}_Y(0,\varepsilon/2),$$

para todo $m \in I_k(x)$. Finalmente, para $k > K$

$$F_k(x) := \sum_{m \in I_k(x)} p_m^k(x) C_m^k \subset F(x) + \overline{B}_Y(0,\varepsilon/2) \subset F(x) + B_Y(0,\varepsilon),$$

verificándose así el requisito restante exigido en el enunciado del Teorema. □

EJERCICIO 1.6.2. En el mismo espíritu de la prueba del Teorema 1.6.1, sean $\rho > 0$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal de X y

$$Q^k := \left\{ x \in X : x = \sum_{i=1}^{n} q_i e_i,\ q_i \in (-\rho/3^k, \rho/3^k) \right\}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Dado $m \in \mathbb{Z}^n$, definimos $x_m^k = (\rho/3^k) \sum_{i=1}^n m_i e_i$. Demuestre que la familia $\{x_m^k + Q^k\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ constituye un cubrimiento abierto localmente finito de X.

1.6.1. El teorema de punto fijo de Kakutani

En 1941 el Japonés Shizuo Kakutani introdujo al escenario matemático un resultado que generaliza el celebrado Teorema de punto fijo de Brouwer [29], describiendo condiciones estructurales bajo las cuales una multifunción definida sobre un subconjunto compacto y convexo del espacio Euclidiano posee un punto fijo (ver [22]). Las aplicaciones del referido Teorema en economía y en teoría de juegos han sido remarcables, especialmente en la demostración de la existencia de equilibrios en estrategias mixtas no coperativas, lo cual le valió un Premio Nobel al Matemático John Nash Jr. en el año 2004 [30]. Con la finalidad de ilustrar una de las aplicaciones del Teorema 1.5.5, presentamos a continuación la prueba del resultado de Kakutani contenida en [3] donde se muestra que es posible obtener un equilibrio para el sistema estudiado a través del límite de una sucesión de puntos fijos asociados a ciertas funciones continuas, cuyos grafos aproximan el grafo de la multifunción considerada. Una prueba alternativa del Teorema de Kakutani que invoca el Teorema de aproximación 1.6.1 puede consultarse en la fuente [37].

Teorema 1.6.2. (*Kakutani*) *Supongamos que* $F : X \to \mathcal{P}(X)$ *es SS con imágenes compactas y convexas. Si* $A \subset X$ *es compacto, convexo y* $F(A) \subset A$*, entonces* F *tiene un punto fijo en* A*.*

Demostración. Ante todo, observemos que la multifunción restricción de F sobre A

$$\widetilde{F} : A \to \mathcal{P}(A),$$

hereda todas las propiedades con las cuales F ha sido dotada. Aplicando entonces el Teorema 1.5.5 a $\widetilde{F}$ y a una sucesión $\varepsilon_k \to 0$, vemos que existen funciones continuas $f_k : A \to A$ tales que

$$\mathcal{G}(f_k) \subset \mathcal{G}(\widetilde{F}) + B_{X\times X}((0,0), \varepsilon_k). \tag{1.26}$$

Por otro lado, el Teorema de Brouwer garantiza la existencia de un punto fijo $x_k \in A$ para f_k, de tal forma que $x_k = f_k(x_k)$. Gracias a (1.26) deben existir $(y_k, v_k) \in \mathcal{G}(\widetilde{F})$ y $(r_k, s_k) \in B_{X\times X}(0, \varepsilon_k)$ tales que $(x_k, f_k(x_k)) = (y_k, v_k) + (r_k, s_k)$. Por lo tanto,

$$d((x_k, f_k(x_k)), \mathcal{G}(\widetilde{F})) \leq \|(x_k, f_k(x_k)) - (y_k, v_k)\| < \varepsilon_k.$$

Ya que A es compacto, existe una subsucesión convergente de x_k, digamos $x_{k_j} \to x \in A$. En virtud de la continuidad de la función distancia tenemos

$$d((x,x), \mathcal{G}(\widetilde{F})) = \lim_{j\to\infty} d((x_{k_j}, f_{k_j}(x_{k_j})), \mathcal{G}(\widetilde{F})) \leq \lim_{j\to\infty} \varepsilon_{k_j} = 0.$$

Gracias al Teorema 1.4.1 el conjunto $\mathcal{G}(\widetilde{F})$ resulta cerrado, y así $(x,x) \in \mathcal{G}(\widetilde{F})$, es decir, $x \in \tilde{F}(x) = F(x)$. $\square$

Cerramos esta sección con la siguiente asignación para el lector, cuyo objetivo es reforzar su conocimiento sobre el teorema anterior.

EJERCICIO 1.6.3. Sean $F, G : X \to \mathcal{P}(X)$.
(a) Supongamos que F es SS con imágenes compactas y convexas. Adicionalmente, asumamos que G es SI con imágenes cerradas y convexas. Demuestre que si $F + G$ es acotada, entonces posee algún punto fijo. En particular, cualquier multifunción G acotada y SI con imágenes cerradas y convexas posee un punto fijo.
(b) Supongamos que F y G son ambas SS, con imágenes cerradas y convexas. Además, sea $\alpha > 0$ tal que $F(x), G(x) \subseteq \overline{B}(0, \alpha)$ para todo $x \in X$. Demuestre que si $F(x) \cap (G(x) + B(0, \varepsilon)) \neq \emptyset$, para todo $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$, entonces $F(x) \cap G(x)$ posee un punto fijo.
(c) Determine las propiedades topológicas, geométricas y/o de regularidad que posee la multifunción $F(x) := \left[x^3 - 1, x^3 + 1\right]$. ¿Es posible caracterizar todos los puntos fijos de F?

1.7. Multifunciones disipativas

Una categoría de multifunciones con utilidad significativa en algunas aplicaciones de la física y la ingeniería, es la de las multifunciones disipativas. La noción de disipatividad expresa una propiedad de decrecimiento que experimentan ciertas cantidades asociadas a diversos fenómenos estudiados en la ciencia, y que permite su estudio e interpretación desde un punto de vista cualitativo y cuantitativo. Un ejemplo interesante de fenómenos disipativos puede apreciarse en los sistemas dinámicos que exhiben fuerzas de fricción, donde la ley de Coulomb modela la relación entre las variables de estado y las velocidades presentes en el sistema (ver [15, 24]). Desde el punto de vista matemático, tal relación puede expresarse a través del producto interno canónico, generalizando la condición que satisfacen las funciones decrecientes con dominio en la recta real.

Dedicaremos esta sección a un estudio breve de la propiedad de disipatividad en multifunciones, haciendo énfasis en algunos resultados con influencia notable en la teoría de existencia de soluciones para un tipo particular de inclusiones diferenciales. Nuestro punto de partida es naturalmente la siguiente noción.

Definición 1.7.1. *Diremos que una multifunción $F : X \to \mathcal{P}(X)$ es disipativa si satisface la siguiente propiedad:*

$$\langle w - v, y - x\rangle \leq 0, \text{ para todo } (x, v), (y, w) \in \mathcal{G}(F). \tag{1.27}$$

Complementariamente, la multifunción F se denomina monótona, si $-F$ es disipativa. Más aún, F se dice disipativa maximal si no existe otra multifunción disipativa cuyo grafo contenga estrictamente al grafo de F. De manera análoga, F es monótona maximal si $-F$ es disipativa maximal.

Resulta sencillo verificar que F es disipativa (respectivamente disipativa maximal) si y solamente si, F^{-1} es disipativa (respectivamente disipativa maximal). Es claro que por simetría en las definiciones, una caracterización similar se satisface para las multifunciones monótonas (respectivamente monótonas maximales). Además, por el Lema de Zorn el grafo de cualquier multifuncion disipativa está contenido en el grafo de una multifunción disipativa maximal, pues la unión de una familia creciente de grafos de multifunciones disipativas es claramente el grafo de una multifunción disipativa. En base a esta observación tenemos la siguiente caracterización para multifunciones disipativas maximales.

EJERCICIO 1.7.1. Una multifunción $F : X \to \mathcal{P}(X)$ es disipativa maximal si y solamente si, los siguientes enunciados son equivalentes:
(a) Para cada $(y, w) \in \mathcal{G}(F)$ se tiene $\langle w - v, y - x\rangle \leq 0$.
(b) $v \in F(x)$.

Algunas de las siguientes propiedades de las multifunciones disipativas maximales son de utilidad a la hora de manejar su estructura para fines particulares.

Proposición 1.7.1. *Sea $F : X \to \mathcal{G}(X)$ disipativa maximal. Entonces,*
(i) F admite imágenes cerradas y convexas.
(ii) Si $x_k \to x$ y la sucesión $v_k \in F(x_k)$ converge débilmente a v, entonces $v \in F(x)$. En particular, $\mathcal{G}(F)$ es cerrado.

Demostración. A la luz del Ejercicio 1.7.1, para cada $x \in X$ se verifica

$$F(x) = \bigcap_{(y,w)\in\mathcal{G}(F)} \{v \in X : \langle w - v, y - x\rangle \leq 0\}.$$

De la representación anterior para F y la continuidad del producto interno, es fácil ver que $F(x)$ es cerrado. Además, la linealidad del producto interno garantiza la convexidad de $F(x)$. Estas propiedades justifican el apartado (i). Supongamos ahora que $v_k \in F(x_k)$ converge débilmente a v cuando $x_k \to x$. Dado cualquier $(y, w) \in \mathcal{G}(F)$, se debe tener $\langle w - v_k, y - x_k \rangle \leq 0$. Tomando límite cuando $k \to \infty$ en la desigualdad anterior, se concluye $\langle w - v, y - x \rangle \leq 0$, lo cual implica que $v \in F(x)$ una vez más según Ejercicio 1.7.1. Esto comprueba (ii). $\square$

1.7.1. La aproximación de Yosida

Al combinar la Proposición anterior y el Teorema 1.4.1, se deduce que toda multifunción maximal disipativa acotada es necesariamente SS. Por lo tanto, la propiedad de aproximación que fue establecida en el Teorema 1.6.1 se encuentra disponible para multifunciones disipativas maximales. Sin embargo, existe un tipo de aproximación adicional asociada a la disipatividad maximal, la cual revela aspectos más intrínsecos de la naturaleza de dicha propiedad y que no son escudriñados en el Teorema 1.6.1. Los objetos que aproximan a F en este caso no sólo resultan Lipschitz, sino además univaluados y disipativos maximales. Dedicamos el resto de este capítulo a la discusión de esta propiedad complementaria de aproximación.

Recordemos que para cada $x \in X$, $m(F(x))$ representa al elemento de $F(x)$ que posee norma mínima. Definamos además los siguientes mapas auxiliares:

$$R_\lambda := (I - \lambda F)^{-1}, \quad F_\lambda := \frac{1}{\lambda}(R_\lambda - I),\ \lambda > 0. \tag{1.28}$$

Los mapas R_λ y F_λ reciben el nombre de *λ-ésima resolvente y λ-ésima aproximación de Yosida para F*, respectivamente.

Teorema 1.7.1. *Sea $F : X \to \mathcal{P}(X)$ disipativa maximal. Entonces, para cada $\lambda > 0$ se satisfacen las siguientes propiedades:*
(i) El mapa R_λ es Lipschitz y univaluado.
(ii) El mapa F_λ es Lipschitz, univaluado, disipativo maximal y satisface $F_\lambda(v) \in F(R_\lambda(v))$ para cada $v \in X$.
(iii) $\|F_\lambda(x) - m(F(x))\|^2 \leq \|m(F(x))\|^2 - \|F_\lambda(x)\|^2$, para todo $x \in X$.
(iv) $R_\lambda(x)$ converge a x.
(v) $F_\lambda(x)$ converge a $m(F(x))$.

Demostración. Sean $\lambda > 0$ y $v_1, v_2 \in \mathrm{Dom}(R_\lambda)$. Entonces, para cualquier $x_1 \in R_\lambda(v_1)$ y $x_2 \in R_\lambda(v_2)$ se tiene que $v_1 \in x_1 - \lambda F(x_1)$ y $v_2 \in x_2 - \lambda F(x_2)$. De esta forma,

$$\frac{1}{\lambda}(x_1 - v_1) \in F(x_1) \ \text{ y } \ \frac{1}{\lambda}(x_2 - v_2) \in F(x_2). \tag{1.29}$$

Ya que F es disipativo maximal,

$$\frac{1}{\lambda}\left\langle x_1 - x_2, (x_1 - x_2) - (v_2 - v_1)\right\rangle \leq 0.$$

Distribuyendo en el producto interno anterior y aplicando la desigualdad de Schwarz se deduce que

$$\frac{1}{\lambda}\left\| x_1 - x_2 \right\|^2 \leq \frac{1}{\lambda}\left\| x_1 - x_2 \right\| \left\| v_1 - x_2 \right\|.$$

Cancelando $\frac{1}{\lambda}\left\| x_1 - x_2 \right\|$ a ambos lados en la última desigualdad, concluimos

$$\left\| x_1 - x_2 \right\| \leq \left\| v_1 - v_2 \right\|,$$

lo cual dice que R_λ es Lipschitz de rango 1. Observe que tomando $v_1 = v_2$ en la desigualdad anterior, se comprueba que $x_1 = x_2$, es decir, el conjunto imagen de v_1 a través de R_λ consiste exactamente de un elemento x_1 y por ende R_λ es univaluada. Esto comprueba el apartado (i). En vista de (1.28) el mapa F_λ resulta también univaluado por ser combinación de R_λ y la identidad. Además, F_λ es Lipschitz al ser combinación algebraica de los mapas Lipschitz $\frac{1}{\lambda}R_\lambda$ y $\frac{1}{\lambda}I$. En particular, gracias a la desigualdad triangular podemos tomar como rango Lipschitz para F_λ a la constante $\frac{2}{\lambda}$. Sin embargo, veamos que dicho rango puede ser mejorado, lo cual es conveniente para futuras estimaciones. En efecto, tomemos $y_i \in F(x_i)$ en (1.29) tal que $x_i = v_i + \lambda y_i$, con $i = 1, 2$. En base a esto y al final de la parte (i) tenemos

$$x_i = R_\lambda(v_i),$$

de lo cual

$$y_i = \frac{1}{\lambda}(x_i - v_i) = \frac{1}{\lambda}(R_\lambda(v_i) - v_i) = F_\lambda(v_i)$$

y por ende

$$F_\lambda(v_i) = y_i \in F(x_i) = F(R_\lambda(v_i)). \tag{1.30}$$

Además, $\langle x_1 - x_2, y_2 - y_1 \rangle \geq 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lambda^2 \|y_1 - y_2\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 &\leq \lambda^2 \|y_1 - y_2\|^2 \\ &\quad + 2\lambda \langle x_1 - x_2, y_2 - y_1 \rangle + \|x_1 - x_2\|^2 \\ &= \|(x_1 - \lambda y_1) - (x_2 - \lambda y_2)\|^2 \\ &= \|v_1 - v_2\|^2\end{aligned}$$

y así $\|y_1 - y_2\|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} \|v_1 - v_2\|^2$. Ya que $F_\lambda(v_i) = y_i$, la desigualdad anterior confirma que F_λ es Lipschitz de rango $\frac{1}{\lambda}$. Finalmente, ya que $v_i = x_i - \lambda y_i = R_\lambda(v_i) - \lambda F_\lambda(v_i)$ podemos escribir

$$\begin{aligned}\langle F_\lambda(v_1) - F_\lambda(v_2), v_1 - v_2 \rangle &= \langle F_\lambda(v_1) - F_\lambda(v_2), R_\lambda(v_1) - R_\lambda(v_2) \rangle \\ &\quad - \lambda \|F_\lambda(v_1) - F_\lambda(v_2)\|^2 \\ &\leq 0,\end{aligned}$$

lo que significa que F_λ es disipativo. Solicitamos al lector llenar los detalles sobre la maximalidad de F_λ como mapa disipativo, la cual se desprende del hecho de ser F_λ univaluado y continuo. Esto concluye la prueba de (ii). Fijemos ahora $x \in X$. Entonces, para cada $v \in F(x)$ tenemos

$$\begin{aligned}\|F_\lambda(x) - v\|^2 &= \|F_\lambda(x)\|^2 + \|v\|^2 - 2 \langle F_\lambda(x), v \rangle \\ &= - \|F_\lambda(x)\|^2 + \|v\|^2 \\ &\quad - 2 \langle F_\lambda(x), v - F_\lambda(x) \rangle . \end{aligned} \tag{1.31}$$

De la parte (i) se sabe que $F_\lambda(x) \in F(R_\lambda(x))$. Además, ya que $v \in F(x)$ y $F_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}(R_\lambda(x) - x)$, la disipatividad de F implica la desigualdad

$$\langle F_\lambda(x), v - F_\lambda(x) \rangle = -\frac{1}{\lambda} \langle R_\lambda(x) - x, F_\lambda(x) - v \rangle \geq 0.$$

De esta forma, regresando a (1.31) se tiene

$$\|F_\lambda(x) - v\|^2 \leq \|v\|^2 - \|F_\lambda(x)\|^2 .$$

El apartado (iii) se obtiene de la desigualdad anterior seleccionando $v = m(F(x))$. Por otro lado, (1.28) y la desigualdad anterior implican

$$\|R_\lambda(x) - x\| = \lambda \|F_\lambda(x)\| \leq \lambda \|m(F(x))\| , \tag{1.32}$$

de lo cual $R_\lambda(x) \to x$. La última parte de la prueba se concentrará en verificar la convergencia de $F_\lambda(x)$ a x cuando $\lambda \to 0$. Para lograr esto, veamos primero que $F_{\lambda+\mu} = (F_\lambda)_\mu$. En efecto, recordemos de la parte (i) que $F_\lambda(x) \in F(R_\lambda(x)) = F(x + \lambda F_\lambda(x))$ y así $y = F_\lambda(x)$ es solución de la ecuación $y \in F(x + \lambda y)$. Además, $y = F_\lambda(x)$ es la única solución de tal inclusión; para verlo, supongamos que z satisface $z \in F(x + \lambda z)$. Entonces, la disipatividad de F garantiza que

$$\langle z - y, (x + \lambda z) - (x + \lambda y)\rangle \leq 0,$$

es decir,

$$0 \leq \lambda \left\| z - y \right\|^2 = \langle z - y, \lambda(z - y)\rangle \leq 0.$$

Por lo tanto, $z = y$. En base a esto, $y = F_{\mu+\lambda}(x)$ es la única solución de la inclusión $y \in F(x + (\mu + \lambda)y)$. Pero, F_μ es disipativo maximal según la parte (i) y entonces $z = (F_\mu)_\lambda(x)$ es la única solución para $z = F_\mu(x + \lambda z)$. Pero de nuevo la parte (i) implica

$$\begin{aligned} F_\mu(x + \lambda z) &\in F(R_\mu(x + \lambda z)) \\ &= F(x + \lambda z + \mu F_\mu(x + \lambda z)) \\ &= F(x + (\lambda + \mu) F_\mu(x + \lambda z)) \end{aligned}$$

y por la unicidad de las soluciones tenemos $(F_\mu)_\lambda(x) = z = F_{\mu+\lambda}(x)$. De esta manera hemos verificado que

$$(F_\mu)_\lambda = F_{\mu+\lambda}.$$

Si aplicamos (iii) a F_μ y consideramos el hecho de que $m(F_\mu(x)) = F_\mu(x)$, entonces

$$\left\| F_{\mu+\lambda}(x) - F_\mu(x)) \right\|^2 \leq \left\| F_\mu(x) \right\|^2 - \left\| F_{\lambda+\mu}(x) \right\|^2.$$

En consecuencia $\left\| F_{\lambda+\mu}(x) \right\|^2 \leq \left\| F_\mu(x) \right\|^2$, i.e. la sucesión $\left\| F_\mu(x) \right\|^2$ es decreciente y acotada inferiormente por 0, y por ende convergente hacia algún número real α. Por lo tanto,

$$\lim_{\mu,\lambda \to 0} \left\| F_{\mu+\lambda}(x) - F_\mu(x)) \right\|^2 \leq \alpha - \alpha = 0.$$

Por lo tanto, $F_\lambda(x)$ es una sucesión de Cauchy que converge a algún elemento $v \in X$. Veamos que $v = m(F(x))$. Para ello, observemos que según la última conclusión y la parte (iv) se tiene $(R_\lambda(x), F_\lambda(x)) \to (x, v)$. Además, $F_\lambda(x) \in F(R_\lambda(x))$, lo cual significa que $(R_\lambda(x), F_\lambda(x)) \in \mathcal{G}(F)$. En vista de que F posee grafo cerrado, se concluye que $v \in F(x)$. Ahora bien, de la parte (iii) se deduce claramente que $\|F_\lambda(x)\| \leq \|m(F(x))\|$. Por lo tanto,

$$\|v\| = \lim_{\lambda \to 0} \|F_\lambda(x)\| \leq \|m(F(x))\| .$$

Por hipótesis $F(x)$ es cerrado y convexo y así la proyección del origen sobre $F(x)$ es única. De esta forma, necesariamente $v = m(F(x))$ y así $F_\lambda(x)$ converge a $m(F(x))$. □

Observación 1.7.1. El resultado anterior implica un tipo de estimación puntual para los elementos del grafo de F_λ, la cual contrasta con la provista en el Teorema 1.5.5. Precisamente, al considerar la descomposición $(x, F_\lambda(x)) = (R_\lambda(x), F_\lambda(x)) + (x - R_\lambda(x), 0)$, se obtiene claramente la inclusión $(x, F_\lambda(x)) \in \mathcal{G}(F) + (x - R_\lambda(x), 0)$. Pero en vista de (1.32) vemos que $(x - R_\lambda(x), 0) \in \overline{B}((0,0), \lambda \|m(F(x))\|)$. Por lo tanto,

$$(x, F_\lambda(x)) \in \mathcal{G}(F) + \overline{B}((0,0), \lambda \|m(F(x))\|), \ \forall x \in X. \tag{1.33}$$

En virtud de (1.33) y del apartado (v) del Teorema 1.7.1, el mapa F_λ representa en particular una aproximación puntual y regular (Lipschitz) de la selección $m(F(\cdot))$ de F.

EJERCICIO 1.7.2. Sea $F : X \to \mathcal{P}(X)$ disipativo. Demuestre los siguientes enunciados:
(a) Si F es continuo y univaluado, entonces F es disipativo maximal (**Sugerencia:** Considere la caracterización provista por el Ejercicio 1.7.1. Luego, en la desigualdad $\langle F(y) - v, y - x\rangle \leq 0$ escriba $y = x - \lambda(z - x)$, siendo $z \in X$ y $\lambda \in (0,1)$).
(b) Si F es SI, entonces F es univaluado (**Sugerencia:** Estudiar la referencia [14]).

EJERCICIO 1.7.3. Considere las multifunciones

$$F(x) := \begin{cases} \{1\}, & \text{si} \quad x < 0, \\ [-1, 1]\,, & \text{si} \quad x = 0, \\ \{-1\}, & \text{si} \quad x > 0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad G(x) := \{-x^3\}.$$

(a) Demuestre que F y G son disipativas maximales.

(b) Verifique que F es SS pero no localmente Lipschitz.
(c) Verifique que G es localmente Lipschitz.
(d) Determine las λ-ésimas resolventes y aproximaciones de Yosida para F y G.

Dedicamos las lineas finales de este capítulo a un ejercicio adicional que gira en torno a una generalización del concepto de disipatividad, sobre la cual se ha mostrado recientemente cierto interés en investigación (c.f. [1, 10, 16, 17, 33, 34, 35]).

EJERCICIO 1.7.4. Una multifunción $F : X \to \mathcal{P}(X)$ se dice *localmente Lipschitz disipativa* (LLD) si para cada $x_0 \in X$, existen $\varepsilon = \varepsilon(x_0) > 0$ y $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x_0) \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que si $x, y \in B(x_0, \varepsilon)$ y $v \in F(x)$, existe $w \in F(y)$ tal que

$$\langle v - w, x - y \rangle \leq \mathcal{K} \|x - y\|^2 . \tag{1.34}$$

Si la condición (1.34) se satisface para todo $x, y \in X$, con $\mathcal{K}$ independiente de $x_0 \in X$, se dice que F es *Lipschitz disipativa* (LD).

(a) Demuestre que si F es disipativa y G es localmente Lipschitz, entonces $F + G$ es LLD.
(b) Supongamos que F es LD y que $v(t) \in F(x(t))$, donde $x(\cdot)$ y $v(\cdot)$ son funciones continuas sobre I. Definamos la multifunción $G : I \times X \to \mathcal{P}(X)$ como

$$G(t, x) := \{w \in F(x) : \langle w - v(t), x - x(t) \rangle \leq \mathcal{K} \|x - x(t)\|^2\}.$$

Demuestre que $G(t, x) \neq \emptyset$ para cada $(t, x) \in I \times X$ y que si F admite imágenes convexas y compactas, también lo hace G. Más aún, si F es SS entonces G también es SS.

Capítulo 2

Inclusiones Diferenciales

Preciso es encontrar lo infinitamente grande en lo infinitamente pequeño, para sentir la presencia de Dios.

–**Pitágoras**

2.1. Introducción

El presente capítulo ofrece un breve estudio sobre el problema de existencia de soluciones y algunas de sus propiedades para la *inclusion diferencial autónoma*

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)),\ t \in I, \tag{2.1}$$

cuando I es un intervalo cerrado prefijado de la recta real y $F : X \to \mathcal{P}(X)$ es una multifunción que satisface cierta combinación de hipótesis básicas. Como su nombre y estructura lo sugieren, la principal fuente de motivación en la investigación del paradigma (2.1) proviene de la teoría estándar de las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in I \tag{2.2}$$

y de algunos de sus problemas derivados. En tal sentido, aunque un buen número de resultados clásicos sobre el modelo (2.2) han sido extendidos al contexto (2.1) gracias al recurso de la generalización, instancias más recientes tales como el desarrollo de la teoría de control y de las ecuaciones diferenciales discontinuas, han necesitado de la inserción de nuevas técnicas y conceptos para poder ser analizadas adecuadamente a través del modelo (2.1). Dentro de sus objetivos, el presente capítulo ilustra la aplicación de varias de estas herramientas en combinación con la maquinaria introducida en el capítulo anterior. Siendo central en la definición de esta monografía, prestaremos especial atención al estudio del problema de existencia de soluciones para (2.1) en los casos en que F exhibe alguna de las propiedades de semicontinuidad y cuando F es disipativa maximal. Adicionalmente, se analizan algunas de las propiedades topológicas más importantes del conjunto de soluciones de (2.1) bajo las diferentes hipótesis estructurales con las cuales F es dotada. La lista de textos y artículos consultados durante la escritura de este capítulo es extensa en realidad. Una compilación de la misma, aunque de ninguna manera exhaustiva, es la siguiente: [2, 3, 7, 8, 12, 14, 15, 18, 24, 33, 37, 39, 41, 42].

2.2. Ejemplos

Iniciemos nuestra discusión del capítulo ilustrando algunos escenarios que son comúnmente interpretados a través del paradigma (2.1). Las tres primeras situaciones que presentamos a continuación están relacionadas con la estructura de la multifunción F que define (2.1).

(a) Como fue comentado al comienzo, cualquier sistema dinámico modelado a través de una ecuación diferencial ordinaria de la forma $\dot{x}(t) = f(x(t))$ encaja dentro del contexto de una inclusión diferencial al considerar $F(x) := \{f(x)\}$. En el caso de la ecuación diferencial implicita $f(x(t), \dot{x}(t)) = 0$, la multifunción que define su inclusión diferencial asociada viene dada por $F(x) := \{v \in X : f(x, v) = 0\}$. En los dos casos anteriores resulta claro que los conjuntos de soluciones para (2.1) y (2.2) coinciden, independientemente de su naturaleza. Ahora bien, si el lado derecho de (2.2) es impreciso, digamos, definido como una perturbación de radio $\varepsilon > 0$ de un campo f, entonces cualquier solución de (2.2) es una solución de la inclusión diferencial

$$\dot{x}(t) \in B(f(x(t)), \varepsilon),\ t \in I.$$

(b) Sean $f^i, g^i : X \to X$ funciones dadas, con $i = 1, 2, \ldots, n$. Cualquier sistema de desigualdades diferenciales

$$f^i(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \leq \dot{x}_i(t) \leq g^i(x_1(t),\ldots,x_n(t)),\ t \in I,\ i = 1,2,\ldots,n,$$

puede ser considerado como una inclusión diferencial (2.1) definiendo

$$F(x) := \prod_{1 \leq i \leq n} \left[f^i(x), g^i(x) \right],\ x \in X,$$

y entendiendo a la solución $x(\cdot)$ como un vector de funciones componentes $x_1(\cdot), x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)$.

(c) Gran ímpetu experimentó la teoría de inclusiones diferenciales gracias al desarrollo de la teoría de controles; un cuerpo sistemático de conceptos y resultados que giran en torno a una ecuación diferencial de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ u(t) \in U,\ t \in I, \tag{2.3}$$

donde $u(t)$ es un parámetro de control ejercitado dentro del conjunto restricción $U \subset Y$ para lograr un objetivo de naturaleza posicional u optimal. Los sistemas de control poseen una identificación natural con su inclusión diferencial asociada a través de la multifunción

$$F(x) := \{f(x,u) : u \in U\},\ x \in X.$$

De esta forma, las soluciones de (2.3) son soluciones de la inclusión diferencial (2.1), en donde las funciones de control $u(\cdot)$ no figuran explícitamente. Unos de los objetivos del próximo capítulo consiste en comprobar que, bajo ciertas condiciones estructurales sobre f y U, los conjuntos de soluciones de (2.1) y (2.3) coinciden.

Los siguientes dos apartados giran en torno a la naturaleza de las soluciones de (2.1).

(d) Un gran número de problemas en ingeniería mecánica y eléctrica pueden ser expresados a través de la ecuación diferencial (2.2), siendo f un campo discontinuo debido a que las leyes físicas que los regulan son modeladas por medio de funciones discontinuas. Un ejemplo importante de tal situación lo constituye los sistemas con fricción seca donde interviene la ley de Coulomb. En el caso unidimensional, la forma general de tales sistemas está dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t),\\ \dot{x}_2(t) &= -f(x_2(t)) - kx_1(t) + u(t),\end{aligned}$$

donde

$$f(z) := \begin{cases} \alpha, & \text{si} \quad z > 0,\\ -\alpha, & \text{si} \quad z < 0,\end{cases} \tag{2.4}$$

modela la fuerza de fricción, $kx_1(t)$ es una fuerza elástica y $u(t)$ es una fuerza externa. Si $x_2(t) = 0$, la fuerza de fricción toma un valor dentro del intervalo $[-\alpha, \alpha]$, lo cual coloca a las otras fuerzas en equilibrio. El valor de la fuerza de fricción depende sólo del signo de la velocidad, ya que siempre se opone a esta y no depende de su valor. De esta forma, si para cada par $z_1, z_2 \in X$ escribimos $\widetilde{z} = (z_1, z_2)^T$ y $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, entonces el sistema anterior puede identificarse por medio de la inclusión diferencial

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) + G(x(t)) + U(t),$$

donde

$$F(\widetilde{z}) = \{0\} \times \widetilde{f}(z_2), \quad \widetilde{f}(z_2) := \begin{cases} \{-\alpha\}, & \text{si} \quad z_2 > 0,\\ [-\alpha, \alpha], & \text{si} \quad z_2 = 0,\\ \{\alpha\}, & \text{si} \quad z_2 < 0,\end{cases}$$

y

$$G(\widetilde{z}) = \left\{ \begin{bmatrix} z_2 \\ -kz_1 \end{bmatrix} \right\}, \quad U(t) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix} \right\}.$$

Si la fuerza de restauración $-kx_1(t)$ y la fuerza externa $u(t)$ son descartadas del sistema, la segunda componente de la trayectoria $x(t)$ puede estudiarse fácilmente a través de la inclusión diferencial $\dot{x}_2(t) \in \widetilde{f}(x_2(t))$. En efecto, fijemos por ejemplo $\alpha > 1$. Observe que para la condición inicial $x_2(0) = 0$ la única solución es $x_2(t) \equiv 0$, la cual, aunque poco interesante, es de clase C^1. Pero si consideramos $x_2(0) = 1$, la única solución en $[0, 2]$ está dada por

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 - \alpha t, & \text{si} \quad t \in [0, 1/\alpha],\\ 0, & \text{si} \quad t \in (1/\alpha, 2],\end{cases} \tag{2.5}$$

la cual no es de clase C^1. Sin embargo, observe que en este caso el único punto $t \in [0,2]$ donde $\dot{x}(t)$ no existe es $t = 0$.

(e) El ejemplo anterior ilustra una situación en la que un problema de Cauchy para una inclusión diferencial puede carecer de soluciones en el sentido usual. Más aún, para el tipo de solución encontrada pueden existir valores en su intervalo de definición donde la derivada de dicha solución no exista. Esta observación motiva a considerar el problema de existencia de soluciones de (2.1) dentro de una clase más amplia de funciones. Por supuesto, los resultados obtenidos dentro de esta clase deben ser compatibles con aquellos disponibles en la teoría de soluciones para (2.2) cuando f es continua. En particular, cuando $F = f$ cualquier problema de Cauchy para (2.1) debe poseer soluciones, las mismas deben ser de clase C^1, y la familia constituida por tales soluciones debe ser compacta dentro de su correspondiente espacio de funciones. Una alternativa que garantiza la satisfacción de los requisitos anteriores es la de considerar *la regularización de f*. Específicamente, dicha regularización está definida como la multifución SS más pequeña para la cual f es una selección. Es decir,

$$F(x) := \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\text{co}}\, f(\overline{B}(x,\varepsilon)), \ x \in X. \tag{2.6}$$

Si f es localmente acotada (no necesariamente continua), la multifunción F satisface:

(i) $f(x) \in F(x)$, para todo $x \in X$.
(ii) Cualquier solución de (2.2) es solución de (2.1).
(iii) F es SS y admite valores compactos y convexos.
(iv) Si f es continua en x, entonces $F(x) = \{f(x)\}$.

Bajo el contexto definido por la multifunción (2.6), diremos que una función $x(\cdot)$ es una *solución de Filippov* para (2.2) si $x(\cdot)$ es una solución para la inclusión diferencial correspondiente. Por ejemplo, la solución (2.5) resulta ser una solución de Filippov para (2.2) cuando f está dada por (2.4) (ver el siguiente ejercicio).

EJERCICIO 2.2.1. Sean $f : X \to X$ localmente acotada y $F : X \to \mathcal{P}(X)$ definida por (2.6). Demuestre que:
(a) F es SS y admite valores compactos y convexos.

(b) Si f es continua en x, entonces $F(x) = \{f(x)\}$.
(c) Si f está dada por (2.4), entonces

$$F(z) := \begin{cases} \{-\alpha\}, & \text{si} \quad z > 0, \\ [-\alpha, \alpha]\,, & \text{si} \quad z = 0, \\ \{\alpha\}, & \text{si} \quad z < 0. \end{cases}$$

2.3. Funciones absolutamente continuas

Esta pequeña sección abre un espacio para introducir la clase adecuada de funciones a la cual pertenecen las soluciones del problema (2.1) bajo un esquema natural de hipótesis estructurales asociadas a F (ver la siguiente sección). De acuerdo a Hawkins en [20], este tipo de función llamó la atención de Axel Harnack (1851-1888) alrededor de 1880, así como también la de otros matemáticos a finales del siglo dieciocho. Sin embargo, su nombre fue propuesto en 1905 por Giuseppe Vitali (1875-1932) [41].

Una función $x : [a, b] \to X$ se dice *absolutamente continua*, la cual en circunstancias abreviaremos como a.c., si dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para cualquier colección numerable de subintervalos disjuntos $[\alpha_k, \beta_k]$ de $[a, b]$ con la propiedad

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (\beta_k - \alpha_k) < \delta,$$

se tiene

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|x(\beta_k) - x(\alpha_k)\| < \varepsilon.$$

De su definición resulta claro que cualquier función absolutamente continua $x(\cdot)$ es uniformemente continua y acotada, pero la afirmación recíproca es falsa (ver el comentario sobre el contraejemplo en el próximo párrafo). Además, cualquier función Lipschitz es absolutamente continua. Las funciones absolutamente continuas poseen derivada finita en casi todas partes (ver por ejemplo [21, 31]). Más aún, la función $\dot{x}(\cdot)$ es una función integrable según Lebesgue y $x(\cdot)$ satisface el siguiente Teorema Fundamental del Cálculo, conocido como *fórmula de Newton-Leibniz* [31]:

$$x(t) - x(s) = \int_s^t \dot{x}(r)\, dr, \quad \text{para cada par } s, t \in [a, b]. \tag{2.7}$$

Por lo tanto, cualquier función absolutamente continua puede ser representada a través de la expresión

$$x(t) = x(a) + \int_a^t \dot{x}(r)\, dr, \quad \text{para todo } t \in [a, b]. \tag{2.8}$$

La fórmula anterior no necesita satisfacerse para ciertas funciones continuas que poseen derivada finita excepto en un conjunto de medida cero. En efecto, el conjunto excepcional donde la derivada podría no existir no posee ninguna influencia sobre la integral en el lado derecho de (2.8) dado que el mismo posee medida cero. Sin embargo, la conducta de $\dot{x}(\cdot)$ (por ende la de $x(\cdot)$) en tal conjunto de medida cero si puede tener impacto en el lado izquierdo de (2.8), ya que al no ocurrir esto último, la función $x(\cdot)$ enviaría subconjuntos de $[a, b]$ de medida cero en subconjuntos de X de medida cero. La celebrada *función de Cantor-Vitali*, o *escalera del Diablo*, es un contraejemplo para la última afirmación (ver [38, 41]). Las observaciones anteriores hacen plausible la siguiente caracterización cuya prueba puede consultarse en [31, 21]. Observe que (2.7) es consecuencia directa de la misma caracterización.

Teorema 2.3.1. *Una función continua f es la integral de su derivada si y solamente si f es absolutamente continua.* □

Denotaremos por $AC([a, b], X)$ al espacio de todas las funciones absolutamente continuas $x : [a, b] \to X$ dotado con la norma

$$\|x(\cdot)\|_{AC} := \|x(a)\| + \int_a^b \|\dot{x}(t)\|\, dt.$$

2.3.1. Desigualdad de Gronwall

Al igual que en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, el siguiente resultado provee una herramienta muy útil a la hora de estimar el crecimiento de las soluciones de (2.1) en función de sus condiciones iniciales. La prueba del mismo que presentamos a continuación sigue las líneas de la referencia [12].

Proposición 2.3.1. *Sea $x : [a, b] \to X$ una función a.c. la cual satisface*

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \alpha \|x(t)\| + \beta(t), \quad \textit{para casi todo } t \in [a, b],$$

siendo $\alpha \geq 0$ *y* $\beta(\cdot) \in L_1([a,b],\mathbb{R})$*. Entonces, para todo* $t \in [a,b]$ *se tiene*

$$\|x(t) - x(a)\| \leq (e^{\alpha(t-a)} - 1)\,\|x(a)\| + \int_a^t e^{\alpha(t-s)}\beta(s)\,ds.$$

Si $\beta(\cdot)$ *es constante y* $\alpha > 0$*, la desigualdad anterior se simplifica a*

$$\|x(t) - x(a)\| \leq (e^{\alpha(t-a)} - 1)(\|x(a)\| + \beta/\alpha).$$

Demostración. Sea $r(t) := \|x(t) - x(a)\|$. Por ser $r(\cdot)$ una composición de una función Lipschitz y una función absolutamente continua, $r(\cdot)$ resulta a.c. Sea por lo tanto $t \in [a,b]$ fuera del conjunto excepcional de medida cero donde $\dot{r}(t)$ y $\dot{x}(t)$ no existen. Si $x(t) \neq x(a)$, entonces

$$\dot{r}(t) = \frac{\langle \dot{x}(t), x(t) - x(a)\rangle}{\|x(t) - x(a)\|}.$$

Si $x(t) = x(a)$, entonces $\dot{r}(t) = 0$ ya que $r(\cdot)$ alcanza su mínimo en t. De esta forma, gracias a la desigualdad de Schwarz para casi todo $t \in [a,b]$ se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{r}(t) \leq \|\dot{x}(t)\| &\leq \alpha\,\|x(t)\| + \beta(t) \\
&\leq \alpha\,\|x(t) - x(a)\| + \alpha\,\|x(a)\| + \beta(t) \\
&= \alpha r(t) + \alpha\,\|x(a)\| + \beta(t),
\end{aligned}$$

de lo cual

$$\dot{r}(t) - \alpha r(t) \leq \alpha\,\|x(a)\| + \beta(t).$$

Al multiplicar la desigualdad anterior por el factor integrante $e^{-\alpha t}$ observamos que la expresión del lado izquierdo de la desigualdad resultante es $\frac{d}{dt}(r(t)e^{-\alpha t})$. Por lo tanto, al integrar a ambos lados se tiene

$$\begin{aligned}
r(t)e^{-\alpha t} - r(a)e^{-\alpha a} &= \int_a^t \frac{d}{ds}(r(s)e^{-\alpha s})\,ds \\
&\leq \alpha\,\|x(a)\| \int_a^t e^{-\alpha s}\,ds + \int_a^t e^{-\alpha s}\beta(s)\,ds \\
&= \|x(a)\|\,(e^{-\alpha a} - e^{-\alpha t}) + \int_a^t e^{-\alpha s}\beta(s)\,ds.
\end{aligned}$$

En vista de que $r(a) = 0$, multiplicando la desigualdad anterior por $e^{\alpha t}$ obtenemos

$$r(t) \leq (e^{\alpha(t-a)} - 1)\,\|x(a)\| + \int_a^t e^{\alpha(t-s)}\beta(s)\,ds.$$

Si $\beta(\cdot)$ es constante, entonces $\int_a^t e^{\alpha(t-s)}\beta(s)\,ds = \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-a)} - 1)$. Sustituyendo este resultado en la última desigualdad, se obtiene la estimación final del enunciado. $\square$

Concluimos esta sección con una lista de quehaceres para el lector.

EJERCICIO 2.3.1. Verifique los siguientes hechos:
(a) Si $x(\cdot) \in AC([a,b],X)$, entonces $x(\cdot)$ es uniformemente continua y acotada en $[a,b]$.
(b) Si $x(\cdot)$ es Lipschitz en $[a,b]$, entonces $x(\cdot) \in AC([a,b],X)$.
(c) Si $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ pertenecen a $AC([a,b],X)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces las funciones $cx(\cdot)$, $\|x(\cdot)\|$ y $x(\cdot) \pm y(\cdot)$ son absolutamente continuas sobre $[a,b]$.
(d) Sean $x(\cdot) \in AC([a,b],\mathbb{R})$ y $f(\cdot) \in AC([c,d],X)$, con $x([a,b]) \subset [c,d]$.
  (i) Si f es Lipschitz, entonces $f(x(\cdot)) \in AC([a,b],X)$.
  (ii) Si $x(\cdot)$ es monótona en $[a,b]$, entonces $f(x(\cdot)) \in AC([a,b],X)$.
(e) El espacio $AC([a,b],X)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|x(\cdot)\|_{AC} := \|x(a)\| + \int_a^b \|\dot{x}(t)\|\,dt.$$

(**Sugerencia:** Establezca un isomorfismo isométrico entre $AC([a,b],X)$ y $X \times L_1([a,b],X)$).
(f) Si $x(t) := \sqrt{t}$ para $t \in [a,b]$, con $a \geq 0$, entonces $x(\cdot) \in AC([a,b],\mathbb{R})$.
(g) Si $x(t) := t^\alpha$ para $t \in [0,1]$, con $\alpha > 0$, entonces $x(\cdot) \in AC([0,1],\mathbb{R})$.

2.4. Existencia de soluciones y sus propiedades

El estudio sobre la existencia de soluciones para una inclusión diferencial generalmente es abordado considerando combinaciones de hipótesis de dos naturalezas:

(a) Regularidad de la multifunción F que define a (2.1).
(b) Características topológicas y/o geométricas que satisfacen las imágenes de F.

Por supuesto, el diseño de tales hipótesis no proviene de una mera generalización de las propiedades satisfechas por los elementos que conforman la data del problema (2.2), sino más bien de un balance existente entre los indicios proporcionados por los resultados más emblemáticos de la teoría que giran en torno a (2.2) y las estructuras de los modelos multivaluados provistos en las aplicaciones. En tal sentido, es de esperarse que la obtención de resultados importantes bajo las hipótesis más generales de las categorías (a) y (b) constituya una tarea muy ardua y hasta impráctica, en virtud de los objetivos perseguidos en esta monografía. Por otro lado, la selección de las hipótesis más fuertes en (a) y (b) permitirían establecer resultados de una manera muy directa, pero con un espectro de aplicaciones bastante reducido. De esta manera, el operar con hipótesis de niveles intermedios en (a) y (b) luce como una opción razonable al momento de establecer resultados interesantes con un buen rango de aplicaciones.

Con base a las observaciones anteriores, se propone el siguiente esquema de trabajo sobre el problema de existencia de soluciones para el paradigma (2.1). En efecto, sea $F : X \to \mathcal{P}(X)$.

Caso 1. F satisface la propiedad Lipschitz. En este caso asumiremos imágenes cerradas y convexas para F.

Caso 2. F es semicontinua superiormente. Adicionalmente, F admite imágenes cerradas y convexas.

Caso 3. F es semicontinua inferiormente. Además, F posee imágenes cerradas y convexas.

Caso 4. F es disipativa maximal.

Los siguientes conceptos, a los cuales haremos referencia con frecuencia, son de gran utilidad dentro del esquema de trabajo anterior. Con ellos concluimos esta antesala. Sea $I = [0, 1]$. Para cada $x_0 \in X$, denotamos por $S(F, x_0)$ al *conjunto de soluciones para* (2.1) *con condición inicial* x_0. Es decir,

$$S(F, x_0) := \{x(\cdot) \in AC(I, X) : x(\cdot) \text{ satisface } (2.1) \text{ y } x(0) = x_0\}. \quad (2.9)$$

Si $C \subset X$, definimos

$$S(F,C) := \bigcup_{x_0 \in C} S(F,x_0), \tag{2.10}$$

y en el caso particular en que $C = X$, escribiremos $S(F)$ en vez de $S(F,X)$.

Íntimamente relacionado a la interpretación cualitativa de $S(F,x_0)$ se considera al *conjunto alcanzable de F desde x_0 en el tiempo $t \in I$*, definido por

$$\mathcal{R}_F(t,x_0) := \{x(t) : x(\cdot) \in S(F,x_0)\}. \tag{2.11}$$

2.4.1. La propiedad de crecimiento lineal

Adicionalmente a las hipótesis mencionadas anteriormente, se acostumbra a dotar la multifunción F con la siguiente *propiedad de crecimiento lineal:* existe constante $\alpha > 0$ tal que

$$\sup\{\|v\| : v \in F(x)\} \leq \alpha(\|x\| + 1), \quad \text{para cada } x \in X. \tag{2.12}$$

El rol que posee (2.12) en la teoría de inclusiones diferenciales es similar al desempeñado por la misma propiedad a la hora de estimar cotas para las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin embargo, existen ocasiones donde la manipulación de los elementos que definen la data de (2.1) requiere de cierto tecnicismo y la estructura que define a (2.12) le imprime un incremento al mismo. Por lo tanto, con la finalidad de relajar tales manipulaciones técnicas y poder hacer mejor uso de las herramientas críticas desarrolladas en el Capítulo 1, veremos que es posible asumir, sin pérdida de generalidad, que la multifunción F sobre la cual se realiza el estudio de existencia de soluciones para (2.1), satisface la siguiente *propiedad de acotación uniforme*:

$$\sup\{\|v\| : v \in F(x)\} \leq 1. \tag{2.13}$$

En efecto, comencemos recordando una de las ventajas que posee (2.1) como sistema dinámico autónomo. Supongamos inicialmente que el dominio de las soluciones de (2.1) es un intervalo de la forma $[a,b]$. Entonces este intervalo puede reemplazarse por el intervalo $I = [0,1]$. Para entender esto, supongamos que $x(\cdot)$ es una solución de (2.1) sobre $[a,b]$.

Entonces, definiendo $y(t) := x((b-a)t+a)$ para $t \in [0,1]$, se tiene que $y(\cdot) \in AC([0,1], X)$ y además

$$\dot{y}(t) = (b-a)\dot{x}((b-a)t+a) \in (b-a)F(x((b-a)t+a)) =: \widetilde{F}(y(t)),$$

para casi todo $t \in [0,1]$. Recíprocamente y bajo el mismo argumento, si $y(\cdot)$ es solución de (2.1) sobre I, con $\widetilde{F}$ en el rol de F, entonces $x(t) := y(\frac{1}{b-a}(t-a))$ resulta una solución para (2.1) sobre $[a,b]$. Es claro que la multifunción $\widetilde{F}$ preserva cualquier hipótesis tanto de regularidad como topológica y/o geométrica que F pueda satisfacer.

Ahora consideremos la reducción de la condición (2.12) a la condición (2.13). Sea $x(\cdot)$ una solución de (2.1) que satisface la condición inicial $x(0) = x_0$. En vista de que $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ en casi todas partes de I, la propiedad (2.12) implica $\|\dot{x}(t)\| \leq \alpha(\|x(t)\| + 1)$. Aplicando la desigualdad de Gronwall (Proposición 2.3.1) obtenemos para cada $t \in I$

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq \|x(t) - x(0)\| + \|x(0)\| \\
&\leq (e^{\alpha} - 1)(\|x(0)\| + 1) + \|x(0)\| \\
&\leq e^{\alpha}(\|x(0)\| + 1).
\end{aligned}$$

Si $M := e^{\alpha}(\|x(0)\| + 1) + 1$, entonces $\|x(t)\| \leq M - 1$, para todo $t \in I$. Definamos $G(x) := \frac{1}{\alpha M}F(x)$, para $x \in \overline{B}(0, M-1)$. Es claro que G hereda todas las propiedades de F sobre $\overline{B}(0, M-1)$ y en particular si $v \in G(x)$, entonces $\|v\| = \frac{1}{\alpha M}\|w\|$ para algún $w \in F(x)$. Así,

$$\|v\| \leq \frac{1}{\alpha M}\alpha(\|x\| + 1) \leq \frac{1}{\alpha M}\alpha M = 1.$$

De esta forma, la multifunción G satisface (2.13). Con un razonamiento similar al utilizado en el párrafo posterior a (2.13), se verifica que las multifunciones F y G generan las mismas soluciones para la inclusión diferencial (2.1). Con base a lo anterior, es posible ahondar la discusión sobre las soluciones de (2.1) en el intervalo $I = [0,1]$ y bajo la condición de acotabilidad uniforme (2.13) cada vez que F satisfaga la condición (2.12).

2.4.2. Caso 1: F es Lipschitz

A lo largo de este apartado asumiremos que $F : X \to \mathcal{P}(X)$ satisface las siguientes propiedades:

(a) F es Lipschitz de rango $\mathcal{L} > 0$.
(b) $F(x)$ es cerrado y convexo para todo $x \in X$.

Comencemos con el siguiente Lema técnico.

Lema 2.4.1. *Supongamos que las sucesiones $x_i(\cdot)$ e $y_i(\cdot)$ convergen en $L_1(I, X)$ a las funciones $x_0(\cdot)$ e $y_0(\cdot)$, respectivamente. Adicionalmente, sean $w_i(t) := \pi_{F(x_i(t))}(y_i(t)) - y_i(t)$ y $b(\cdot) \in L_1(I, \mathbb{R})$ tal que $\|w_i(t)\| \leq b(t)$, para $t \in [0, 1]$, con $i = 1, 2, \ldots$ Entonces, la sucesión $w_i(\cdot)$ converge a la función $w_0(\cdot) := \pi_{F(x_0(\cdot))}(y_0(\cdot))) - y_0(\cdot)$ en la norma de $L_1(I, X)$.*

Demostración. Supongamos que la conclusión del lema no se cumple. Entonces, existen subsucesiones $x_{i_k}(\cdot)$ e $y_{i_k}(\cdot)$ y un número $\varepsilon > 0$ tales que $\|w_{i_k}(\cdot) - w_0(\cdot)\|_{L_1} \geq \varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que las sucesiones $x_{i_k}(\cdot)$ e $y_{i_k}(\cdot)$ convergen casi en todas partes. El mapa $(x, y) \to \pi_{F(x)}(y)$ es continuo, según Ejercicio 1.5.1. Por lo tanto, $w_{i_k}(\cdot)$ converge a $w_0(\cdot)$ casi en todas partes. Ya que $\|w_i(t)\| \leq b(t)$, el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (ver página 123 de [6], o página 44 de [7]) implica $\|w_{i_k}(\cdot) - w_0(\cdot)\|_{L_1} \to 0$ cuando $k \to \infty$, lo cual es una contradicción. $\square$

Ahora procedemos a establecer uno de los resultados más importantes dentro del estudio de la inclusiones diferenciales. Dicho resultado permite interpretar la proyección del espacio de funciones absolutamente continuas sobre el conjunto de soluciones de (2.1). Su versión original, debida a Filippov en [18], hace énfasis en los estimados para la distancia entre elementos de una cierta familia de funciones absolutamente continuas y las soluciones de (2.1). La versión proporcionada a continuación ha sido tomada de [37]. Siendo algo más elaborada que su génesis, nuestra prueba muestra los aspectos intríncados de las estimaciones realizadas en [18] y por lo tanto es algo extensa.

Teorema 2.4.1. *Sean $\delta \geq 0$, $\rho(\cdot) \in L_1(I, \mathbb{R})$ y $\mathcal{F} \subset AC(I, X)$. Consideremos una función $r_0 : X \to Y$ continua tal que $\|r_0(x) - x\| \leq \delta$, para todo $x \in X$. Asumamos que cada $x(\cdot) \in \mathcal{F}$ satisface*

$$d(\dot{x}(t), F(x(t))) \leq \rho(t), \text{ para casi todo } t \in I.$$

Entonces, existe una función $r : \mathcal{F} \to S(F)$, la cual satisface las siguientes propiedades:

(i) $r(\cdot)$ *es continua en la norma del espacio* $AC(I,X)$.
(ii) $r(x(\cdot))(0) = r_0(x(0))$, *para toda* $x(\cdot) \in \mathcal{F}$.
(iii) Si $x(\cdot) \in \mathcal{F} \cap S(F)$ *y* $r_0(x(0)) = x(0)$, *entonces* $r(x(\cdot)) = x(\cdot)$.
(iv) Si definimos

$$\zeta(t) := \delta e^{\mathcal{L}t} + \left| \int_0^t e^{\mathcal{L}(t-s)} \rho(s)\, ds \right|,$$

entonces se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\|x(t) - r(x(\cdot))(t)\| \leq \zeta(t),\ t \in I, \tag{2.14}$$

$$\left\| \dot{x}(t) - \frac{d}{dt} r(x(\cdot))(t) \right\| \leq \mathcal{L}\zeta(t) + \rho(t),\ t \in I. \tag{2.15}$$

Demostración. Comencemos definiendo $w : AC(I,X) \to L_1(I,X)$ a través de

$$w(x(\cdot))(t) := \pi_{F(x(t))}(\dot{x}(t)),\ t \in I.$$

Veamos que en efecto tal aplicación está bien definida. Para ello notemos que

$$\begin{aligned} \|w(x(\cdot))(t)\| &\leq \|\dot{x}(t)\| + \|w(x(\cdot))(t) - \dot{x}(t)\| \\ &= \|\dot{x}(t)\| + d(\dot{x}(t), F(x(t))). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Además, F es Lipschitz con rango $\mathcal{L}$ y así

$$F(x(0)) \subset F(x(t)) + \overline{B}(0, \mathcal{L}\, \|x(t) - x(0)\|).$$

Invocando por lo tanto la parte (a) del Ejercicio 1.2.1, se tiene

$$d(0, F(x(t))) \leq d(0, F(x(0))) + \mathcal{L}\, \|x(t) - x(0)\|\,.$$

Por otro lado, la parte (b) del mismo Ejercicio 1.2.1 garantiza que

$$d(\dot{x}(t), F(x(t))) - d(0, F(x(t))) \leq \|\dot{x}(t)\|\,.$$

De esta forma, al regresar a (2.16) y utilizar los estimados anteriores podemos escribir

$$\begin{aligned} \|w(x(\cdot))(t)\| &\leq \|\dot{x}(t)\| + d(\dot{x}(t), F(x(t))) \\ &\leq 2\,\|\dot{x}(t)\| + d(0, F(x(t))) \\ &\leq 2\,\|\dot{x}(t)\| + d(0, F(x(0))) + \mathcal{L}\, \|x(t) - x(0)\|\,. \end{aligned}$$

Ya que los tres sumandos en el lado derecho del la estimación anterior son integrables, se tiene que $w(\cdot) \in L_1(I, X)$. Por lo tanto, es posible definir los operadores

$$J(x(\cdot))(t) := r_0(x(0)) + \int_0^t w(x(\cdot))(s)\, ds,\ t \in I,$$

y

$$I(x(\cdot))(t) := x(0) + \int_0^t w(x(\cdot))(s)\, ds,\ t \in I.$$

Sea $x_0(\cdot) \in \mathcal{F}$. Definamos la sucesión de funciones $x_k(\cdot) \in AC(I, X)$ a través de

$$x_1(\cdot) = J(x_0(\cdot)),\ x_k(\cdot) = I^{k-1}(x_1(\cdot)),\ k = 2, 3, \ldots$$

De acuerdo a las definiciones de $w(x_0(\cdot))(t)$ y del operador J tenemos

$$\dot{x}_1(t) = \frac{d}{dt} J(x_0(\cdot)) = w(x_0(\cdot))(t) = \pi_{F(x_0(t))}(\dot{x}_0(t)),$$

y por ende

$$\|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_0(t)\| = d(\dot{x}_0(t), F(x_0(t))) \leq \rho(t). \tag{2.17}$$

Al integrar esta desigualdad, la fórmula de Newton-Leibniz (2.7) implica

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_0(t)\| &\leq \|x_1(0) - x_0(0)\| + \int_0^t \rho(s)\, ds \\ &\leq \delta + \int_0^t \rho(s)\, ds,\ t \in I. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Una vez más utilizando la condición Lipschitz sobre F y la parte (a) del Ejercicio 1.1 es fácil ver que las siguientes relaciones se satisfacen:

$$\begin{aligned} \|\dot{x}_{k+1}(t) - \dot{x}_k(t)\| &= \|w(x_k(\cdot))(t) - w(x_{k-1}(\cdot))(t)\| \\ &= d(\dot{x}_k(t), F(x_k(t))) \\ &\leq d(\dot{x}_k(t), F(x_{k-1}(t))) + \mathcal{L}\,\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \\ &= \mathcal{L}\,\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\|. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Por otro lado, observemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\|x_k(t)-x_{k-1}(t)\right\| &= \frac{\langle x_k(t)-x_{k-1}(t), \dot{x}_k(t)-\dot{x}_{k-1}(t)\rangle}{\|x_k(t)-x_{k-1}(t)\|}\\ &\leq \left\|\dot{x}_k(t)-\dot{x}_{k-1}(t)\right\|, \text{ para casi todo } t\in I.\end{aligned}$$

Usando inducción es fácil verificar que $x_k(0) = r_0(x_0(0)) = x_{k-1}(0)$ para $k = 2, 3, \ldots$ Al integrar la última relación, según la fórmula de Newton-Leibniz (2.7) obtenemos

$$\begin{aligned}\|x_k(t)-x_{k-1}(t)\| &= \|x_k(0)-x_{k-1}(0)\| + \int_0^t \frac{d}{ds}\left\|x_k(s)-x_{k-1}(s)\right\| ds\\ &= \int_0^t \frac{d}{ds}\left\|x_k(s)-x_{k-1}(s)\right\| ds\\ &\leq \int_0^t \left\|\dot{x}_k(s)-\dot{x}_{k-1}(s)\right\| ds. \end{aligned}\tag{2.20}$$

Integrando (2.19) y haciendo uso de (2.20) resulta

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t \left\|\dot{x}_{k+1}(s)-\dot{x}_k(s)\right\| ds\right| &\leq \left|\int_0^t \mathcal{L}\left\|x_k(s)-x_{k-1}(s)\right\| ds\right| \qquad (2.21)\\ &\leq \left|\int_0^t \mathcal{L}\int_0^s \left\|\dot{x}_k(q)-\dot{x}_{k-1}(q)\right\| dqds\right|.\end{aligned}$$

A continuación verificaremos que para $k \geq 0$ la siguiente desigualdad se satisface:

$$\|x_{k+1}(t)-x_k(t)\| \leq \delta\frac{(\mathcal{L}t)^k}{k!} + \left|\int_0^t \frac{(\mathcal{L}(t-s))^k}{k!}\rho(s)\,ds\right|. \tag{2.22}$$

En efecto, establezcamos dicha desigualdad por inducción. El caso $k=0$ ya fue comprobado en (2.18). Supongamos que el resultado es cierto para $k-1$ con $k>1$. Primero colocamos $k+1$ en vez de k en (2.20) y conectamos la desigualdad resultante con (2.21), para así aplicar la hipótesis inductiva y obtener

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}(t)-x_k(t)\| &\le \left|\int_0^t \mathcal{L}\,\|x_k(s)-x_{k-1}(s)\|\,ds\right| \\
&\le \left|\int_0^t \mathcal{L}\left(\delta\frac{(\mathcal{L}s)^{k-1}}{(k-1)!}+\left|\int_0^s \frac{(\mathcal{L}(s-q))^{k-1}}{(k-1)!}\rho(q)\,dq\right|\right)ds\right| \\
&= \left|\int_0^t \frac{d}{ds}\left(\delta\frac{(\mathcal{L}s)^{k}}{k!}+\left|\int_0^s \frac{(\mathcal{L}(s-q))^{k}}{k!}\rho(q)\,dq\right|\right)\right| \\
&= \delta\frac{(\mathcal{L}t)^k}{k!}+\left|\int_0^t \frac{(\mathcal{L}(t-s))^{k}}{k!}\rho(s)\,ds\right|,
\end{aligned}$$

lo cual completa la inducción. En virtud de (2.19) y (2.22) obtenemos el siguiente estimado:

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_{k+1}(t)-\dot{x}_k(t)\| \le \mathcal{L}\delta\frac{(\mathcal{L}t)^{k-1}}{(k-1)!} \\
+\mathcal{L}\left|\int_0^t \frac{(\mathcal{L}(t-s))^{k-1}}{(k-1)!}\rho(s)\,ds\right|.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Si $s,t\in I$, entonces $t^{k-1}\le 1$ y $(t-s)^{k-1}\le 1$. Además, recordemos que

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{z^k}{k!}\le e^z,\ z\ge 0. \tag{2.24}$$

Incluyendo estas cotas en (2.23), integrando y usando (2.24), podemos escribir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \|\dot{x}_{k+1}(t)-\dot{x}_k(t)\|\,dt &\le \int_0^1 \mathcal{L}\delta\frac{(\mathcal{L}t)^{k-1}}{(k-1)!}\,dt \\
&\quad+\int_0^1 \mathcal{L}\left|\int_0^t \frac{(\mathcal{L}(t-s))^{k-1}}{(k-1)!}\rho(s)\,ds\right|dt \\
&\le \frac{\mathcal{L}^2\delta}{k-1}\frac{\mathcal{L}^{k-2}}{(k-2)!}\int_0^1 dt \\
&\quad+\frac{\mathcal{L}^2}{k-1}\frac{\mathcal{L}^{k-2}}{(k-2)!}\int_0^1\int_0^t |\rho(s)|\,ds\,dt \\
&\le \frac{\mathcal{L}^2\delta}{k-1}e^{\mathcal{L}}+\frac{\mathcal{L}^2}{k-1}e^{\mathcal{L}}\,\|\rho(\cdot)\|_{L_1} \\
&= \frac{\mathcal{L}^2e^{\mathcal{L}}}{k-1}(\delta+\|\rho(\cdot)\|_{L_1}).
\end{aligned}$$

De las últimas desigualdades se deduce que la sucesión $\dot{x}_k(\cdot)$ es de Cauchy en $L_1(I, X)$. Por lo tanto, dicha sucesión converge a una función $v_0(\cdot) \in L_1(I, X)$. Más aún, (2.23) garantiza que $\dot{x}(t)$ converge a v_0 casi en todas partes. Ahora definamos

$$r(x_0(\cdot))(t) := r_0(x_0(0)) + \int_0^t v_0(s)\, ds,\ t \in I. \tag{2.25}$$

Si sumamos las desigualdades dadas en (2.22) tenemos

$$\begin{aligned}
\|x_k(t) - x_0(t)\| &\leq \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| + \cdots + \|x_1(t) - x_0(t)\| \\
&\leq \delta \frac{(\mathcal{L}t)^{k-1}}{(k-1)!} + \left| \int_0^t \frac{(\mathcal{L}(t-s))^{k-1}}{(k-1)!} \rho(s)\, ds \right| \\
&+ \cdots + \delta + \left| \int_0^t \rho(s)\, ds \right| \\
&= \delta \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\mathcal{L}t)^{i-1}}{(i-1)!} + \sum_{i=1}^{k-1} \left| \int_0^t \frac{(\mathcal{L}(t-s))^{i-1}}{(i-1)!} \rho(s)\, ds \right| \\
&\leq \delta e^{\mathcal{L}t} + \left| \int_0^t e^{\mathcal{L}(t-s)} \rho(s)\, ds \right| \\
&= \zeta(t).
\end{aligned}$$

Utilizando (2.17) y (2.23), y procediendo de manera análoga como en la desigualdad anterior, se obtiene

$$\|\dot{x}_k(t) - \dot{x}_0(t)\| \leq \mathcal{L}\zeta(t) + \rho(t).$$

Tomando límite en las desigualdades

$$\begin{aligned}
\|x_0(t) - r(x_0(\cdot))\| &\leq \|x_0(t) - x_k(\cdot)\| + \|x_k(t) - r(x_0(\cdot))\| \\
&\leq \zeta(t) + \|x_k(t) - r(x_0(\cdot))\|
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left\| \dot{x}_0(t) - \frac{d}{dt} r(x_0(\cdot))(t) \right\| &\leq \|\dot{x}_0(t) - \dot{x}_k(t)\| + \left\| \dot{x}_k(t) - \frac{d}{dt} r(x_0(\cdot))(t) \right\| \\
&\leq \mathcal{L}\zeta(t) + \rho(t) + \left\| \dot{x}_k(t) - \frac{d}{dt} r(x_0(\cdot))(t) \right\|,
\end{aligned}$$

y observando que según (2.25) se tiene $\frac{d}{dt}r(x_0(\cdot))(t) = v_0(t)$, obtenemos las desigualdades (2.14) y (2.15). Además, si $x_0(\cdot) \in \mathcal{F} \cap S(F)$ entonces $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ y así $w(x_0(\cdot))(t) = \dot{x}(t)$. De esta forma, si $r_0(x_0(0)) = x_0(0)$ la fórmula de Newton-Leibniz conlleva a

$$x_1(t) = J(x_0(\cdot))(t) = x_0(0) + \int_0^t \dot{x}(s)\,ds = x_0(t).$$

Inductivamente se tiene que $x_k(\cdot) = I^{k-1}(x_1(\cdot)) = x_0(\cdot)$. Por lo tanto, (2.25) implica $r(x_0(\cdot)) = x_0(\cdot)$ y en particular, $r(x_0(\cdot))(0) = x_0(0) = r_0(x_0(0))$.

Veamos que la composición $I^k \circ J$ es continua con la norma de $AC(I, X)$. En efecto, sea $y_i(\cdot) \in \mathcal{F}$ tal que $y_i(\cdot)$ converge a $y(\cdot) \in \mathcal{F}$. Como tarea para el lector, proponemos verificar que $y_i(\cdot)$ converge a $y(\cdot)$ uniformemente y en particular en $L_1(I, X)$. Por otro lado, sea $\widetilde{w}_i(t) := w(y_i(\cdot))(t)$, siendo $w(y_i(\cdot))$ definida al comienzo de la prueba de este Teorema. Al igual que antes, se verifica que

$$\|\widetilde{w}_i(t)\| - \|\dot{y}_i(t)\| \leq d(\dot{y}_i(t), F(y_i(t)) \leq \rho(t)$$

y $\rho(\cdot) \in L_1(I, X)$. Aplicando el Lema 2.4.1 se tiene que $w_i(\cdot) := \widetilde{w}_i(\cdot) - y_i(\cdot)$ converge a $w(\cdot) := w(y(\cdot)) - y(\cdot)$ en $L_1(I, X)$ y por ende, $w(y_i(\cdot))$ converge a $w(y(\cdot))$ en $L_1(I, X)$. De esta forma, la continuidad de $r_0(\cdot)$ nos garantiza que

$$r_0(y_i(0)) + \int_0^s w(y_i(\cdot))(r)\,dr \;\to\; r_0(y(0)) + \int_0^s w(y(\cdot))(r)\,dr,\ s \in I.$$

Observe que los mapas $s \mapsto r_0(y_i(0)) + \int_0^s w(y_i(\cdot))(r)\,dr$ definen una sucesión de funciones continuas sobre I que converge uniformemente a $s \mapsto r_0(y(0)) + \int_0^s w(y(\cdot))(r)\,dr$. Ya que I posee medida finita, la sucesión de funciones $s \mapsto r_0(y_i(0)) + \int_0^s w(y_i(\cdot))(r)\,dr$ resulta convergente en $L_1(I, X)$ y su límite en dicho espacio es claramente el mapa $s \mapsto r_0(y(0)) + \int_0^s w(y(\cdot))(r)\,dr$. Más aún, notando que

$$w(y_i(\cdot))(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t w(y_i(\cdot))(s)\,ds,$$

resulta inmediato que la convergencia discutida anteriormente también se verifica con la norma de $AC(I, X)$.

En virtud del argumento anterior, el mapa J resulta continuo con la norma de $AC(I,X)$. De manera análoga se verifica que el operador I es continuo con la misma norma. Por lo tanto, la composición $I^k \circ J$ resulta continua con la norma de $AC(I,X)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Recordando que $x_k(\cdot) = (I^{k-1} \circ J)(x_0(\cdot))$, utilizando la fórmula de Newton-Leibniz, y tomando límite, vemos que para cada $x_0(\cdot) \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} (I^k \circ J)(x_0(\cdot)) &= \lim_{k\to\infty} x_{k+1}(\cdot) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(x_{k+1}(0) + \int_0^{(\cdot)} \dot{x}_{k+1}(s)\, ds \right) \\
&= r_0(x_0(\cdot)) + \int_0^{(\cdot)} v_0(s)\, ds \\
&= r(x_0(\cdot)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el mapa $r(\cdot)$ resulta ser un límite uniforme de una sucesión de mapas continuos sobre $AC(I,X)$ y así necesariamente es continuo sobre $AC(I,X)$. Para finalizar, tomemos una subsucesión $x_{k_j}(\cdot)$ tal que $\dot{x}_{k_j}(\cdot)$ converja casi en todas partes a $v_0(\cdot)$. Entonces,

$$r(x_0(\cdot)) = \lim_{k\to\infty} x_{k_j}(\cdot).$$

Según (2.20) y la convergencia de $\dot{x}_k(\cdot)$ en $L_1(I,X)$, se concluye que $x_k(\cdot)$ es uniformemente de Cauchy en I. Aplicando el Ejercicio 1.4.6 en su parte (c) y la desigualdad (2.19) tenemos

$$\begin{aligned}
d(v_0(t), F(r(x_0(t)))) &= \lim_{k\to\infty} d(\dot{x}_{k_j}(t), F(x_{k_j}(t))) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \mathcal{L} \left\| x_{k_j}(t) - x_{k_{j+1}}(t) \right\| \\
&= 0,
\end{aligned}$$

es decir, $\frac{d}{dt} r(x_0(t)) = v_0(t) \in F(r(x_0(t)))$, lo cual significa que $r(x_0(\cdot)) \in S(F)$. Con esto concluye la prueba del Teorema. $\square$

EJERCICIO 2.4.1. Demuestre que si la sucesión $y_i(\cdot) \in AC(I,X)$ converge a alguna función $y(\cdot) \in AC(I,X)$, entonces $y_i(\cdot)$ converge uniformemente a $y(\cdot)$ sobre I.

El objetivo principal de la aplicación del Teorema anterior está relacionado con la construcción de una familia de soluciones de (2.1) con ciertas propiedades específicas. Para lograr esto, primero se construye una familia $\mathcal{F}$ de funciones que esten suficientemente cercas de $S(F)$ y que posean las propiedades deseadas. Luego, se debe proyectar la familia $\mathcal{F}$ sobre $S(F)$ con la ayuda del Teorema 2.4.1. A partir de las desigualdades (2.14) y (2.15) se concluye que los conjuntos $\mathcal{F}$ y $S(F)$ están suficientemente cerca el uno del otro. Tales estimados junto a la continuidad de $r(\cdot)$ permiten concluir que $r(\mathcal{F})$ es el conjunto de soluciones con las propiedades buscadas.

A continuación presentamos algunas implicaciones importantes del Teorema 2.4.1. La primera de ellas establece la existencia de soluciones de (2.1).

Teorema 2.4.2. (*Existencia de soluciones*) *Para cada $x_0 \in X$ la inclusión diferencial* (2.1) *posee alguna solución $x(\cdot)$, la cual satisface $x(0) = x_0$.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$, escojamos $\mathcal{F} = \{0\}$ y definamos $r_0(x) := x_0 + x$, para todo $x \in X$. Si tomamos $\rho(t) := d(0, F(0))$ para todo $t \in I$, según el Teorema 2.4.1 existe una función $r : \mathcal{F} \to S(F)$ la cual, entre otras propiedades, satisface $r(y(\cdot))(0) = r_0(y(0))$ para todo $y(\cdot) \in \mathcal{F}$. Ya que el único elemento de $\mathcal{F}$ es la función $y(t) := 0$, se tiene que $x(\cdot) := r(y(\cdot)) \in S(F)$ y además $x(0) = r(y(\cdot))(0) = r_0(0) = x_0$, es decir, $x(\cdot)$ es una solución para (2.1) que satisface $x(0) = x_0$. Más aún, si $x_0 \neq 0$ tomando $\delta = \|x_0\| > 0$ según (2.14) se tiene

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| e^{\mathcal{L}t} + \left| \int_0^t e^{\mathcal{L}(t-s)} d(0, F(0))\, ds \right|, \ t \in I.$$

Cuando $x_0 = 0$, basta tomar cualquier $\delta > 0$ para obtener

$$\|x(t)\| \leq \delta e^{\mathcal{L}t} + \left| \int_0^t e^{\mathcal{L}(t-s)} d(0, F(0))\, ds \right|, \ t \in I,$$

de lo cual haciendo $\delta \to 0$ obtenemos el estimado

$$\|x(t)\| \leq \frac{1}{\mathcal{L}}(e^{\mathcal{L}t} - 1) d(0, F(0)), \ t \in I.$$

$\square$

Otra interesante aplicación del Teorema 2.4.1 es el siguiente resultado, el cual establece una importante propiedad topológica del conjunto solución de (2.1).

Corolario 2.4.1. *Para cada $x_0 \in X$ el conjunto $S(F, x_0)$ es arco-conexo.*

Demostración. Sean $x_0(\cdot), x_1(\cdot) \in S(F, x_0)$ y consideremos la familia $\mathcal{F} = \{x(\cdot) \in AC(I, X) : x(\cdot) = (1-\lambda)x_0(\cdot) + \lambda x_1(\cdot),\ \lambda \in I\}$. Ya que F es Lipschitz de rango $\mathcal{L}$ se tiene

$$F(x_0(t)) \subset F((1-\lambda)x_0(t) + \lambda x_1(t)) + \overline{B}(0, \mathcal{L}\lambda \|x_1(t) - x_0(t)\|). \quad (2.26)$$

Además, la función distancia es Lipschitz de rango 1 y $\dot{x}_0(t) \in F(x_0(t))$. Así,

$$\begin{aligned} &d((1-\lambda)\dot{x}_0(t) + \lambda\dot{x}_1(t), F(x_0(t))) \\ &\qquad \le d(\dot{x}_0(t), F(x_0(t))) + \|(1-\lambda)\dot{x}_0(t) + \lambda\dot{x}_1(t) - \dot{x}_0(t)\| \\ &\qquad = d(\dot{x}_0(t), F(x_0(t))) + \lambda \|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_0(t)\| \\ &\qquad \le d(\dot{x}_0(t), F(x_0(t))) + \|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_0(t)\| \\ &\qquad = \|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_0(t)\|. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Aplicando la parte (a) del Ejercicio 1.2.1 a la inclusión (2.26) obtenemos

$$\begin{aligned} &d((1-\lambda)\dot{x}_0(t) + \lambda\dot{x}_1(t), F((1-\lambda)x_0(t) + \lambda x_1(t))) \\ &\quad \le d((1-\lambda)\dot{x}_0(t) + \lambda\dot{x}_1(t), F(x_0(t))) + \mathcal{L}\lambda \|x_1(t) - x_0(t)\| \\ &\quad \le d((1-\lambda)\dot{x}_0(t) + \lambda\dot{x}_1(t), F(x_0(t))) + \mathcal{L} \|x_1(t) - x_0(t)\|. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Concatenando (2.27) y (2.28) obtenemos

$$\begin{aligned} &d((1-\lambda)\dot{x}_0(t) + \lambda\dot{x}_1(t), F((1-\lambda)x_0(t) + \lambda x_1(t))) \\ &\qquad \le \|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_0(t)\| + \mathcal{L} \|x_1(t) - x_0(t)\|. \end{aligned}$$

Sea $\rho(t) := \|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_0(t)\| + \mathcal{L} \|x_1(t) - x_0(t)\|$. Resulta claro que $\rho(\cdot) \in L_1(I, \mathbb{R})$. Escojamos $r_0(x) := x$ y tomemos cualquier $\delta > 0$. De acuerdo al Teorema 2.4.1 existe una función continua $r : \mathcal{F} \to S(F, x_0)$ que según la parte (c) del mismo resultado satisface $r(x_0(\cdot)) = x_0(\cdot)$ y $r(x_1(\cdot)) = x_1(\cdot)$. Definamos $\phi(\lambda) := r((1-\lambda)x_0(\cdot) + \lambda x_1(\cdot))$ para $\lambda \in I$. Claramente

$\phi(\cdot)$ es continua y por definición $\phi(\lambda) \in S(F, x_0)$ para todo $\lambda \in I$, $\phi(0) = x_0(\cdot)$ y $\phi(1) = x_1(\cdot)$, con lo cual se verifica el enunciado. □

El siguiente resultado es importante dentro del estudio de la sensitividad que presentan las soluciones de (2.1) con respecto a sus condiciones iniciales. Su misión es traer a la luz la dependencia tipo Lipschitz que poseen las trayectorias del sistema (2.1) con respecto a sus puntos de origen en el sentido provisto por la norma en $AC(I, X)$. Un estimado similar se deduce fácilmente para la norma del supremo, así como también el comportamiento Lipschitz de la multifunción $\mathcal{R}_F(t, \cdot)$ con respecto a la norma euclidiana (ver Ejercicio 2.4.2 y comparar con el resultado en [12]).

Corolario 2.4.2. (*Dependencia de condiciones iniciales*) *La aplicación* $S(F, \cdot) : X \to \mathcal{P}(AC(I, X))$ *es una multifunción Lipschitz.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in X$ y $x_1(\cdot) \in S(F, x_1)$. Apliquemos el Teorema 2.4.1 a la familia $\mathcal{F} := \{x_1(\cdot)\}$, a las funciones $r_0(x) := x + x_2 - x_1$, $\rho(t) := 0$ y a $\delta = \|x_1 - x_2\|$ para obtener $x_2(\cdot) \in S(F, x_2)$ tal que

$$\|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| \mathcal{L}e^{\mathcal{L}}.$$

Por lo tanto, usando la definición de la norma en $AC(I, X)$ tenemos

$$\begin{aligned} \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{AC} &= \|x_1(0) - x_2(0)\| + \int_0^1 \|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\| \, dt \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + \|x_1 - x_2\| \mathcal{L}e^{\mathcal{L}} \\ &= (1 + \mathcal{L}e^{\mathcal{L}}) \|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

lo cual se traduce en una condición Lipschitz para $S(F, \cdot)$ de rango $1 + \mathcal{L}e^{\mathcal{L}}$. □

Cerramos esta sección con otro resultado sobre el conjunto alcanzable (2.11), el cual expresa que si una solución $x(\cdot)$ de (2.1) alcanza la frontera de $\mathcal{R}_F(T, x_0)$ en tiempo T, entonces el recorrido previo de tal trayectoria posee la misma propiedad.

Corolario 2.4.3. *Sea* $0 \leq T \leq 1$. *Si* $x^* \in \partial\mathcal{R}_F(T, x_0)$, *con* $x^* = x(T)$ *para alguna* $x(\cdot) \in S(F, x_0)$, *entonces* $x(t) \in \partial\mathcal{R}_F(t, x_0)$ *para todo* $0 \leq t \leq T$.

Demostración. Supongamos que $0 \leq t < T$ y $\varepsilon > 0$ son tales que $B(x(t), \varepsilon) \subset \mathcal{R}_F(t, x_0)$. Debe entonces existir $y \notin \mathcal{R}_F(T, x_0)$ tal que $\|y - x^*\| < \varepsilon e^{-\mathcal{L}(T-t)}$ (en caso contrario se podría construir una sucesión de puntos $y_i \notin \mathcal{R}_F(T, x_0)$ tales que $y_i \to x^*$ con $\|y_i - x^*\| \geq \varepsilon e^{-\mathcal{L}(T-t)}$, de lo cual $\varepsilon = 0$). Sea $\mathcal{F} := \{x(\cdot)\}$ y $r_0(x) := x - x^* + y$. El hecho de que $d(\dot{x}(s), F(x(s))) = 0$ nos motiva a escoger $\rho(s) := 0$. Si tomamos $0 < \delta < e^{-\mathcal{L}t} \|y - x^*\|$ y aplicamos el Teorema 2.4.1, vemos que existe una función continua $r : \mathcal{F} \to S(F)$ tal que $y(\cdot) := r(x(\cdot)) \in S(F)$, con la propiedad de que $y(0) = r(x(\cdot))(0) = r_0(x(0)) = x_0 - x^* + y$. Por otro lado, según (2.14) se tiene (al ser $t < T$)

$$\begin{aligned} \|y(t) - x(t)\| &\leq \delta e^{\mathcal{L}T} \\ &< e^{\mathcal{L}(T-t)} \|y - x^*\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

De esta forma $y(t) \in B(x(t), \varepsilon)$ y así $y(t) \in \mathcal{R}_F(t, x_0)$. En particular, $y(0) = x_0$. Ya que por la definición de $r_0(\cdot)$ también se tiene que $y(0) = r_0(x(0)) = x_0 - x^* + y$, entonces $x^* = y$, es decir, $r_0(x) = x$, para todo $x \in X$. Por lo tanto, la condición (iii) del Teorema 2.4.1 implica $y(T) = r(x(T)) = x(T) = x^* = y$, de lo cual $y \in \mathcal{R}_F(T, x_0)$ y esto es una contradicción. $\square$

EJERCICIO 2.4.2. Demuestre que la multifunción $S(F, \cdot)$ es Lipschitz con respecto a la norma del supremo. En particular, la multifunción $\mathcal{R}_F(t, \cdot)$ es Lipschitz, para cada $t \in I$.

2.4.3. Caso 2: F es semicontinua superiormente

Siguiendo con nuestra planificación, en esta parte consideramos la inclusión diferencial (2.1) cuando su multifunción F satisface las siguientes hipótesis:

(a) F es SS.
(b) F admite imágenes cerradas y convexas.
(c) F cumple con la propiedad de acotación uniforme (2.13).

La estrategia que presentamos para establecer la existencia de soluciones en el contexto de las hipótesis anteriores está basada en la aproximación de F por medio de multifunciones Lipschitz F_k, $k = 1, 2, \ldots$, para luego aplicar el Teorema 2.4.1 a las inclusiones diferenciales asociadas a las multifunciones F_k. Como consecuencia se obtiene que los conjuntos de soluciones $S(F_k)$ aproximan en cierto sentido a $S(F)$.

Comencemos estableciendo dos Lemas preliminares.

Lema 2.4.2. *Sea $C \subset X$ compacto y convexo, y supongamos que $v(\cdot) \in L_1(I, X)$ es tal que $v(t) \in C$ para casi todo $t \in I$. Entonces,*

$$\int_0^1 v(s)\, ds \in C.$$

Demostración. Ya que $v(\cdot)$ es integrable según Lebesgue, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una partición $\{I_j^k\}_{j=1}^{j_k}$ del intervalo I y una función simple $v_k(\cdot)$, los cuales satisfacen las siguientes propiedades:
(i) $v_k(t) = v_j^k$, si $t \in I_j^k$,
(ii) $\|v(t) - v_k(t)\| \leq 1/k$,
(iii)

$$\int_0^1 v(t)\, dt = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j^k) v_j^k,$$

donde $\lambda(\cdot)$ denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Es claro que podemos tomar $v_j^k \in C$. Ya que $\sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j^k) = 1$ y C es convexo, necesariamente se tiene

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j^k) v_j^k \in C.$$

Finalmente, el hecho de ser C cerrado implica

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j^k) v_j^k \in C.$$

$\square$

Lema 2.4.3. *Sea $C \subset X$ compacto y convexo. Asumamos que la sucesión $x_k(\cdot) \in AC(I, X)$ es tal que $x_k(t) \to x(t)$ para todo $t \in I$ y además $\dot{x}_k(t) \in C$, para casi todo $t \in I$. Entonces, $x(\cdot) \in AC(I, X)$ y $\dot{x}(t) \in C$, para casi todo $t \in I$.*

Demostración. Por ser C acotado, existe una constante $M > 0$ tal que $\|v\| \leq M$, para todo $v \in C$. Por lo tanto, $\|\dot{x}_k(t)\| \leq M$, para $k = 1, 2, \ldots$ y casi todo $t \in I$. Si $t_1, t_2 \in I$ con $t_1 < t_2$, la fórmula de Newton-Leibniz garantiza

$$\|x_k(t_2) - x_k(t_1)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{x}_k(t)\| \, dt \leq M \|t_2 - t_1\| .$$

Tomando límite cuando $k \to \infty$ en la desigualdad anterior, obtenemos

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \leq M \|t_2 - t_1\| ,$$

es decir, $x(\cdot)$ es Lipschitz de rango M y por ende pertenece a $AC(I, X)$ (ver Ejercicio 2.3.1 en su parte (b)). Sea $h > 0$ y $t \in I$ tal que $\dot{x}(t)$ exista. En virtud del Lema 2.4.2 una segúnda aplicación de la fórmula de Newton-Leibniz implica

$$\frac{x_k(t+h) - x_k(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \dot{x}_k(s) \, ds \in C, \ t \in I.$$

Ya que C es cerrado, tomando el límite cuando $k \to \infty$, obtenemos

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \in C.$$

Siendo C compacto, podemos pasar a una sucesión $h_i > 0$, con $h_i \to 0$, tal que

$$\dot{x}(t) = \lim_{i \to \infty} \frac{x(t+h_i) - x(t_i)}{h_i} \in C,$$

y así concluye la prueba. □

Una herramienta evocada frecuentemente dentro del estudio de las soluciones de una inclusión diferencial, es el siguiente criterio clásico de compacidad para subconjuntos de $C(I, X)$. Invitamos al lector a revisitar su demostración en la página 897 de [38].

Teorema 2.4.3. (*Arzelà-Ascoli*) *Una familia cerrada de funciones $\mathcal{F} \subset C(I, X)$ es compacta si y solamente si, $\mathcal{F}$ es equicontinua y uniformemente acotada.*

Estando en posición de estudiar las características del conjunto $S(F)$ para una inclusión diferencial con multifunción SS, presentamos a continuación varios resultados que resumen las más importantes de las mismas. Comenzamos con el resultado sobre existencia de soluciones.

Teorema 2.4.4. (*Existencia de soluciones*) *Para cualquier $x_0 \in X$ la inclusión diferencial* (2.1) *posee alguna solución $x(\cdot)$, la cual satisface $x(0) = x_0$.*

Demostración. Dado el conjunto de hipótesis convenido al comienzo de esta sección, podemos invocar el Teorema 1.6.1 para disponer de una sucesión de multifunciones localmente Lipschitz $F_k : X \to \mathcal{P}(X)$ que aproximan a F y que además satisfacen $F(x) \subset F_k(x) \subset \overline{B}$, $k = 1, 2, \ldots$ De acuerdo al Teorema 2.4.2, existen $x_k(\cdot) \in S(F_k, x_0)$. Resulta claro que $\dot{x}_k(t) \in \overline{B}$, es decir, $\|\dot{x}_k(t)\| \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y para casi todo $t \in I$. De esta forma, al aplicar la fórmula de Newton-Leibniz resulta inmediato que $x_k(\cdot)$ es Lipschitz de rango 1 y por ende la familia $\mathcal{F} := \{x_k(\cdot) : k \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua. Más aún, aplicando la desigualdad de Gronwall al mismo estimado sobre la derivada de $x_k(\cdot)$, se obtiene $\sup\{\|x_k(t)\| : t \in I\} \leq \|x_0\| + 1$, es decir, la familia $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada. Aplicando el Teorema de Arzelà-Ascoli vemos que existe una subsucesión $x_{k_j}(\cdot)$ uniformemente convergente, digamos, a una función continua $x(\cdot)$. Para dicha función $x(\cdot)$ se cumple

$$x(0) = \lim_{j\to\infty} x_{k_j}(0) = \lim_{j\to\infty} x_0 = x_0.$$

Más aún, $x(\cdot) \in AC(I, X)$ según el Lema 2.4.3. Para culminar la prueba, debemos mostrar que $x(\cdot)$ es en realidad una solución de (2.1). En efecto, sea $t_0 \in I$ tal que $\dot{x}(t_0)$ existe y sea $\varepsilon > 0$. El apartado (*ii*) del Teorema 1.6.1 garantiza la existencia de un número natural $k_0 = k_0(\varepsilon, t_0)$ tal que

$$F_{k_0}(x(t_0)) \subset F(x(t_0)) + B(0, \varepsilon/2). \tag{2.29}$$

Ahora bien, la parte (a) del Ejercicio 1.6.1 garantiza que F_{k_0} es SS. De esta forma, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x(t_0), 2\delta)$, entonces

$$F_{k_0}(x) \subset F_{k_0}(x(t_0)) + B(0, \varepsilon/2). \tag{2.30}$$

Por la continuidad de $x(\cdot)$ existe $0 < \gamma < \delta$ tal que

$$\|x(t) - x(t_0)\| < \delta, \quad \text{cuando } t \in (t_0 - \gamma, t_0 + \gamma) \cap I. \tag{2.31}$$

Adicionalmente, la convergencia uniforme de $x_k(\cdot)$ hacia $x(\cdot)$ implica la existencia de $k_1 > k_0$ tal que

$$\|x_k(t) - x(t)\| < \delta, \quad \text{para } k \geq k_1 \text{ y } t \in (t_0 - \gamma, t_0 + \gamma) \cap I. \tag{2.32}$$

Relacionando los estimados (2.29)-(2.32) podemos ensamblar la siguiente cadena de inclusiones

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) \in F_k(x_k(t)) &\subset F_{k_0}(x_k(t)) \\ &\subset F_{k_0}(x(t_0)) + B(0, \varepsilon/2) \\ &\subset F(x(t_0)) + B(0, \varepsilon), \end{aligned}$$

siempre que $k > k_1$ y $t \in (t_0 - \gamma, t_0 + \gamma) \cap I$. Aplicando el Lema 2.4.3 obtenemos $\dot{x}(t) \in F(x(t_0)) + B(0, \varepsilon)$, para casi todo $t \in (t_0 - \gamma, t_0 + \gamma) \cap I$. En particular, $\dot{x}(t_0) \in F(x(t_0)) + B(0, \varepsilon)$. Dado que el número $\varepsilon > 0$ ha sido tomado de manera arbitraria y $F(x(t_0))$ es cerrado, concluimos que $\dot{x}(t_0) \in F(x(t_0))$. Esto finaliza la prueba del Teorema. □

Corolario 2.4.4. (*Compacidad del conjunto solución*) *Sea $C \subset X$ compacto. Para cada sucesión $x_k(\cdot)$ en $S(F, C)$ existe una subsucesión $x_{k_j}(\cdot)$, la cual converge uniformemente a alguna función $x(\cdot) \in S(F, C)$.*

Demostración. Consideremos una sucesión $x_k(\cdot)$ en $S(F, C)$. Ya que C es compacto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_k(0)$ converge a algún $x_0 \in C$. En vista de que $\dot{x}_k(t) \in F(x_k(t))$, procediendo como en la prueba del Teorema anterior obtenemos que la familia constituida por los términos de la sucesión $x_k(\cdot)$ es equicontinua y uniformemente acotada. Invocando de nuevo el Teorema de Arzelà-Ascoli podemos obtener una subsucesión $x_{k_j}(\cdot)$ uniformemente convergente hacia una función continua $x(\cdot)$. Resulta claro que $x(0) = x_0$. El Teorema 1.6.1 garantiza la existencia de una sucesión de multifunciones localmente Lipschitz F_{k_j} tales que $\dot{x}_{k_j}(t) \in F(x_{k_j}(t)) \subset F_{k_j}(t)$, casi en todas partes $t \in I$. A partir de este punto, el resto de la prueba procede exactamente igual como en el teorema anterior, utilizando las sucesiones F_{k_j} y $x_{k_j}(\cdot)$. Se dejan los detalles al lector. □

Observación 2.4.1. Si la multifunción F no posee necesariamente imágenes convexas, su conjunto solución $S(F, C)$ no posee en general la propiedad de compacidad. Para ver esto, consideremos la multifunción

$F : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definida por $F(x) := \{-1, 1\}$. Aunque F posee imágenes compactas, es claro $F(x)$ no es convexo en ningún caso. Consideremos para cada $k \in \mathbb{N}$ la k-ésima partición de I: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots < t_{k-1} < t_k = 1$, con $t_i = i/2^k$, para $i = 0, 1, \ldots, 2^k$. Sea $I_k^i = [i/2^k, (i+1)/2^k]$. Definamos la sucesión de funciones

$$x_k(t) := \begin{cases} t - \frac{i}{2^k}, & \text{si} \quad t \in I_k^i,\ i = 0, 2, 4, \ldots, 2^k - 2, \\ \frac{i}{2^k} - t, & \text{si} \quad t \in I_k^i,\ i = 1, 3, 5, \ldots, 2^k - 1. \end{cases}$$

Resulta obvio que $\dot{x}_k(t) \in \{-1, 1\}$ para todo $t \in I$ y es muy fácil verificar que $x_k(\cdot)$ converge uniformemente a la función $x(t) \equiv 0$ en I. Sin embargo, la función $x(\cdot)$ no es solución de la inclusión diferencial. Por ende, $S(F, [-1, 1])$ no es cerrado y así tampoco compacto.

La propiedad de conexidad es una de las caracterśticas más resaltantes de $S(F, x_0)$. Verifiquemos a continuación este hecho.

Corolario 2.4.5. (*Conexidad del conjunto solución*) *El conjunto solución $S(F, x_0) \subset C(I, X)$ es conexo.*

Demostración. Sea $S = S(F, x_0)$. Supongamos que $S = S_1 \cup S_2$, siendo $S_1 \subset C(I, X)$, $S_2 \subset C(I, X)$ cerrados y tales que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Ya que de acuerdo al Corolario 2.4.4 el conjunto S es compacto, se tiene que S_1 y S_2 son también compactos. Sea

$$\delta := \inf\{\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_C : x_1(\cdot) \in S_1,\ x_2(\cdot) \in S_2\}.$$

Si $\delta = 0$, deben existir sucesiones $x_1^k(\cdot) \in S_1$ y $x_2^k(\cdot) \in S_2$ tales que $\left\|x_1^k(\cdot) - x_2^k(\cdot)\right\|_C \to 0$. Por la compacidad de S_1 y S_2 en $C(I, X)$ se puede pasar a subsucesiones convergentes

$$x_1^{k_j}(\cdot) \in S_1 \ \text{ y } \ x_2^{k_j}(\cdot) \in S_2,$$

tales que $x_1^{k_j}(\cdot) \to x_1(\cdot) \in S_1$ y $x_2^{k_j}(\cdot) \to x_2(\cdot) \in S_2$, cuando $j \to \infty$. Por lo tanto,

$$\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_C = \lim_{j\to\infty} \left\|x_1^{k_j}(\cdot) - x_2^{k_j}(\cdot)\right\|_C = 0,$$

es decir, $x_1(\cdot) = x_2(\cdot)$, lo cual es imposible en vista de la disjunción existente entre S_1 y S_2. Por lo tanto, $\delta > 0$. Consideremos ahora la función $\theta : C(I,X) \to \mathbb{R}$ definida por $\theta(x(\cdot)) = d(x(\cdot), S_1) - \delta/2$. De la definición de $d(\cdot, S_1)$ y la estimación hecha anteriormente, vemos que $\theta(x_1(\cdot)) = -\delta/2$ para todo $x_1(\cdot) \in S_1$ y $\theta(x_2(\cdot)) \geq \delta/2$ para todo $x_2(\cdot) \in S_2$. Fijemos $x_1(\cdot) \in S_1$ y $x_2(\cdot) \in S_2$. Ahora invocamos el Teorema 1.6.1 para disponer de una sucesión de multifunciones localmente Lipschitz F_k que aproximan a F y que además satisfacen $F_k(x) \subset \overline{B}(0,1)$. En vista de la aproximación superior que realizan las multifunciones F_k, se tiene que $S(F, x_0) \subset S(F_k, x_0)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Utilizando el Corolario 2.4.1 vemos que existe una función continua $\phi_k : [0,1] \to S(F_k, x_0)$ tal que $\phi_k(0) = x_1(\cdot)$ y $\phi_k(1) = x_2(\cdot)$. Ya que la función composición $\theta \circ \phi_k$ es continua, $\theta(\phi_k(0)) < 0$, y $\theta(\phi_k(1)) > 0$, el Teorema del Valor Intermedio garantiza la existencia de un número $\lambda_k \in (0,1)$ tal que $\theta(\phi_k(\lambda_k)) = 0$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$ Recordando que $F_k(x) \subset \overline{B}(0,1)$ podemos aplicar el Teorema de Arzelà-Ascoli para obtener una subsucesión de $\phi_k(\lambda_k)(\cdot) \in S(F_k, x_0)$, digamos $\phi_{k_j}(\lambda_{k_j})(\cdot)$, la cual es convergente a una función $x(\cdot)$. En este punto nos podemos auxiliar del argumento utilizado en la prueba del Teorema 2.4.4 para concluir que $x(\cdot) \in S(F, x_0)$. Por otro lado, la continuidad de $\theta(\cdot)$ permite calcular

$$\theta(x(\cdot)) = \lim_{j\to\infty} \theta(\phi_{k_j}(\lambda_{k_j})(\cdot)) = 0,$$

es decir, $x(\cdot) \notin S_1 \cup S_2 = S$ y esto es una contradicción. □

Al igual que en el caso de las multifunciones Lipschitz, es de esperarse algún resultado que exprese la manera en que las soluciones de (2.1) reaccionan ante cambios en sus condiciones iniciales cuando F es SS. La prueba de dicho resultado aunque posee un argumento sencillo (el cual inclusive hemos ya visitado en instancias anteriores) requiere la satisfacción del Teorema 1.4.1 en espacios de dimensión infinita. Por esta razón preferimos omitirla. Sin embargo, estamos en completa capacidad de presentar un resultado de naturaleza similar para la multifunción $\mathcal{R}_F(t,\cdot)$, el cual sólo necesita nuestra versión disponible del referido Teorema 1.4.1.

Corolario 2.4.6. (*Dependencia de condiciones iniciales*) *Para cada $t \in I$ la multifunción $\mathcal{R}_F(t,\cdot) : X \to \mathcal{P}(X)$ es SS.*

Demostración. Sea $(x_k, x_k(t)) \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_F(t,\cdot))$ una sucesión tal que

$$(x_k, x_k(t)) \to (x, y), \text{ cuando } k \to \infty.$$

Utilizando la compacidad de $S(F,C)$, donde C es una bola cerrada que contiene los términos de la sucesión x_k, vemos que debe existir una subsucesión $x_{k_j}(\cdot)$ convergente uniformemente, digamos, a $z(\cdot) \in S(F,C)$. En particular, $x_{k_j} = x_{k_j}(0) \to z(0)$ y $x_{k_j}(t) \to z(t)$. Por la unicidad del límite se tiene que $z(0) = x$ y $z(t) = y$, i.e., $(x,y) \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_F(t,\cdot))$. Por lo tanto, $\mathcal{G}(\mathcal{R}_F(t,\cdot))$ es cerrado. Por otro lado, sea $\delta > 0$ y fijemos $x_0 \in X$. Si $x(t) \in \mathcal{R}_F(t,y)$ con $y \in B(x_0,\delta)$, entonces $x(t) - y = \int_0^t \dot{x}(s)ds$. De esta forma,

$$\|x(t) - x_0\| \leq \|x(t) - y\| + \|y - x_0\| < t + \delta,$$

y así $\mathcal{R}_F(t,y) \subset B(x_0, t+\delta)$. Por lo tanto,

$$\overline{\bigcup_{y \in B(x_0,\delta)} \mathcal{R}_F(t,y)} \subset \overline{B}(x_0, t+\delta).$$

De esta manera, el conjunto

$$\overline{\bigcup_{y \in B(x_0,\delta)} \mathcal{R}_F(t,y)}$$

resulta compacto. Aplicando el Teorema 1.4.1 concluimos que la multifunción $\mathcal{R}_F(t,\cdot)$ es SS. $\square$

Corolario 2.4.7. *Sea $x^* \in \partial\mathcal{R}_F(T,x_0)$. Entonces, existe $x(\cdot) \in S(F,x_0)$ tal que $x(T) = x^*$, con $x(t) \in \partial\mathcal{R}_F(t,x_0)$ para todo $t \in [0,T]$.*

Demostración. De acuerdo al Ejercicio 2.4.3 propuesto al final de este corolario, el conjunto $\mathcal{R}_F(T,x_0)$ es en particular cerrado y así $x^* \in \partial\mathcal{R}_F(T,x_0) \subset \mathcal{R}_F(T,x_0)$. Según la definición de $\mathcal{R}_F(T,x_0)$ debe existir $x(\cdot) \in S(F,x_0)$ tal que $x^* = x(T)$. Debemos probar que $x(t) \in \partial\mathcal{R}_F(t,x_0)$ para todo $t \in [0,T)$. En efecto, supongamos que tal condición no se satisface, es decir, que existe al menos un $t \in [0,T)$ para el cual $x(t) \notin \partial\mathcal{R}_F(t,x_0)$. Gracias a la descomposición

$$\mathcal{R}_F(t,x_0) = \partial\mathcal{R}_F(t,x_0) \cup \operatorname{int}(\mathcal{R}_F(t,x_0)),$$

se tiene que $x(t) \in \operatorname{int}(\mathcal{R}_F(t,x_0))$. Sea por lo tanto $\varepsilon > 0$ tal que $B(x(t),\varepsilon) \subset \mathcal{R}_F(t,x_0)$ y veamos que existe $\delta > 0$ tal que $B(x(s),\delta) \subset \mathcal{R}_F(s,x_0)$, para todo $s \in [t,t+\delta]$. De no ser cierta la última condición, al escoger una sucesión de números $\delta_i > 0$, con $\delta_i \to 0$, deben existir $s_i \in [t, t+\delta_i]$ y $v_i \in B(x(s_i), \delta_i)$ tales que $v_i \in \mathcal{R}_F(s_i, x_0)^{\mathrm{c}}$. Observe que para i suficientemente grande se tiene

$$\|v_i - x(t)\| < \varepsilon/2, \quad |s_i - t| < \varepsilon/2. \tag{2.33}$$

Ahora bien, si $y_i(\cdot)$ es una solución de (2.1) tal que $y_i(s_i) = v_i$, entonces $y_i(t) \notin \mathcal{R}_F(t, x_0)$ (de lo contrario se podrían pegar las secciones de la trayectoria $y_i(\cdot)$ correspondientes a los intervalos $[0, t]$ y $[t, s_i]$ para obtener $v_i = y_i(s_i) \in \mathcal{R}_F(s_i, x_0)$, lo cual es imposible). De esta forma, se tiene en particular que $y_i(t) \notin B(x(t), \varepsilon)$, y por ende $\|x(t) - y_i(t)\| \geq \varepsilon$. Por otro lado, $y_i(\cdot)$ es Lipschitz de rango 1. Este hecho y las desigualdades dadas en (2.33) implican

$$\begin{aligned} \|x(t) - y_i(t)\| &\leq \|x(t) - y_i(s_i)\| + \|y_i(s_i) - y_i(t)\| \\ &\leq \|x(t) - y_i(s_i)\| + |s_i - t| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

y esto es una contradicción. Hemos comprobado que para algún $\delta > 0$ y para todo $s \in [t, t+\delta]$ se tiene $B(x(s), \delta) \subset \mathcal{R}_F(s, x_0)$. Consideremos entonces el intervalo maximal de la forma $[t, t+\overline{\delta}]$ sobre el cual la inclusión anterior se satisface. Si $t+\overline{\delta} < T$, podemos repetir el argumento previo para extender por la derecha a dicho intervalo, preservando la inclusión que lo caracteriza, pero violando la maximalidad del mismo. En consecuencia $t+\overline{\delta} = T$, es decir, $x^* = x(T) \in \mathrm{int}(\mathcal{R}_F(T, x_0))$, lo cual contradice la hipótesis sobre x^*. $\square$

EJERCICIO 2.4.3. Demuestre que si F es una multifunción SS que admite imágenes compactas y convexas y $C \subset X$ es compacto, entonces $\mathcal{R}_F(t, C)$ es compacto para cada $t \in I$.

EJERCICIO 2.4.4. Supongamos que F satisface las hipótesis dadas al comienzo de la sección y que $x(\cdot)$ es una solución de (2.1) definida sobre $[0, T]$, con $T < 1$. Entonces, es posible extender $x(\cdot)$ a una solución $\overline{x}(\cdot)$ de (2.1) definida sobre todo el intervalo $[0, 1]$. Más aún, es posible demostrar que $\overline{x}(\cdot)$ puede extenderse como solución de (2.1) sobre todo el intervalo $[0, \infty)$.

2.4.4. Caso 3: F es semicontinua inferiormente

Ahora es el turno de discutir el problema de la existencia de soluciones para (2.1) cuando F satisface la propiedad de semicontinuidad inferior. Es importante destacar que a la luz del Teorema de Selección de Michael 1.5.2, deducir existencia de soluciones resulta inmediato si se admiten imágenes cerradas y convexas para la multifunción que define el sistema. En efecto, el celebrado Teorema de Peano [9] permite abordar preguntas sobre el paradigma (2.1) asumiendo $F(\cdot) = \{f(\cdot)\}$, estableciendo así una conexión natural entre el mismo problema (2.1) y la Teoría clásica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Formalizamos esta reflexión en el siguiente enunciado para el cual asumimos las siguientes hipótesis, las cuales además adoptamos para el resto de este apartado:

(a) F es SI.
(b) F admite imágenes cerradas y convexas.

Teorema 2.4.5. (*Existencia de soluciones*) *Para cada* $(x_0, v_0) \in \mathcal{G}(F)$, *el problema* (2.1) *posee alguna solución* $x(\cdot)$ *tal que* $x(0) = x_0$ *y que además satisface* $\dot{x}(0) = v_0$.

Demostración. De acuerdo al Teorema de Michael 1.5.2 existe una selección continua f de F tal que $f(x_0) = v_0$. Adicionalmente, el Teorema de Peano garantiza la existencia de una solución $x(\cdot)$ de clase C^1 sobre un intervalo maximal J, con $0 \in J$, tal que $x(0) = x_0$. Además, $\dot{x}(0) = f(x(0)) = f(x_0) = v_0$. $\square$

Siguiendo el esquema de trabajo presentado en los casos anteriores, resulta natural indagar sobre la compacidad y conexidad del conjunto solución cuando F es SI. En tal sentido, el siguiente ejemplo despeja la interrogante sobre la primera propiedad mostrando que $S(F, C)$ no necesita ser cerrado.

Ejemplo 2.4.1. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definida por

$$F(x) := \begin{cases} [0,1], & \text{si} \quad x \neq 0, \\ \{1/2\}, & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

y consideremos $x_k(t) := \varepsilon_k t$ definida sobre $[0, 1]$, donde $\varepsilon_k > 0$, y $\varepsilon_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Resulta claro que $x_k(\cdot)$ es solución de (2.1) con condición inicial $x_0 = 0$. Además, $x_k(\cdot)$ converge uniformemente a $x(t) \equiv 0$.

Sin embargo, $x(\cdot)$ no pertenece a $S(F, x_0)$. De esta forma, $S(F, x_0)$ no es compacto. Observe que F es SI con imágenes convexas, e inclusive compactas.

Para compensar la situación anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.4.6. (*Compacidad relativa del conjunto solución*) *Sea $C \subset X$ compacto y supongamos que F satisface adicionalmente la propiedad* (2.13)*. Entonces, $S(F, C)$ es relativamente compacto.*

Demostración. Dada $x(\cdot) \in \overline{S(F, C)}$ existe una sucesión $x_k(\cdot) \in S(F, C)$ tal que $x_k(\cdot)$ converge uniformemente a $x(\cdot)$. Ya que C es compacto, podemos seleccionar una subsucesión convergente de $x_{k_j}(0)$ tal que $x_{k_j}(0) \to x_0 \in C$. Si $M > 0$ es tal que $C \subset \overline{B}(0, M)$ y $t \in I$, la fórmula de Newton-Leibniz implica

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq \lim_{j\to\infty} \left(\left\|x_{k_j}(t) - x_{k_j}(0)\right\| + \left\|x_{k_j}(0)\right\|\right) \\
&\leq \lim_{j\to\infty} \left(\int_0^t \left\|\dot{x}_{k_j}(s)\right\| \, ds + \left\|x_{k_j}(0)\right\|\right) \\
&\leq 1 + \|x(0)\| \\
&\leq 1 + M.
\end{aligned}$$

De esta forma $\overline{S(F, C)}$ resulta acotado. Además, la aplicación una vez más de la fórmula de Newton-Leibniz revela que $x(\cdot)$ es Lipschitz de rango 1. Por lo tanto, $\overline{S(F, C)}$ constituye una colección de funciones equicontinuas. Invocando el Teorema de Arzelà-Ascoli se obtiene que $\overline{S(F, C)}$ resulta compacta. $\square$

El estudio de la propiedad de conexidad para el conjunto $S(F, x_0)$ requiere el uso de multifunciones no autónomas que exhiben cierta propiedad de medibilidad en la componente asociada al tiempo (ver página 84 de [14]). En vista de los objetivos perseguidos en esta monografía y con la finalidad de mostrar las ideas principales que giran en torno al establecimiento de la conexidad de $S(F, x_0)$, concentraremos nuestra atención en el caso en que las soluciones de (2.1) son de clase C^1. Es decir, consideraremos la conexidad del conjunto $S(F, x_0) \cap C^1(I, X)$.

Teorema 2.4.7. (*Conexidad*) *Asumiendo que F satisface la propiedad* (2.13)*, el conjunto $S(F, x_0) \cap C^1(I, X)$ es conexo.*

Demostración. Sean $x_1(\cdot), x_2(\cdot) \in S(F, x_0) \cap C^1(I, X)$ y consideremos las multifunciones auxiliares con dominio aumentado $F^i : I \times X \to \mathcal{P}(X)$, con $i = 1, 2$, definidas a través de

$$F^i(t,x) := \begin{cases} \{\dot{x}_i(t)\}, & \text{si} \quad x = x_i(t), \\ F(t,x), & \text{si} \quad x \neq x_i(t), \end{cases}$$

Se puede verificar que las multifunciones F^i son SI. Además, resulta claro que dichas multifunciones poseen imágenes cerradas y convexas. Invocando el Teorema de Selección de Michael disponemos de selecciones continuas f^i para F^i, $i = 1, 2$. Para cada $\lambda \in I$ sea

$$f_\lambda(t,x) := \begin{cases} f^1(t,x), & \text{si} \quad t \in [0, \lambda), \\ f^2(t,x), & \text{si} \quad t \in [\lambda, 1]. \end{cases}$$

Resulta que f_λ es una selección para F la cual es continua sobre el cono

$$\mathcal{K}_\alpha = \{(t,x) : \|x\| \leq \alpha t\}, \ \alpha \geq 1.$$

Sea $S_\lambda := S(f_\lambda, x_0)$ el conjunto solución del problema a valores iniciales

$$\dot{x}(t) = f_\lambda(t, x(t)), \ x(0) = x_0.$$

Es claro que $S_\lambda \subset S(F, x_0)$. Además, según los Corolarios 2.4.4 y 2.4.5 el conjunto S_λ resulta compacto y conexo, respectivamente. Por otro lado, si $\lambda \leq \overline{\lambda}$ se tiene

$$\left\| f_\lambda(t,x) - f_{\overline{\lambda}}(t,x) \right\| \leq \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t \in [0, \lambda] \cup [\overline{\lambda}, 1], \\ 2, & \text{si} \quad t \in (\lambda, \overline{\lambda}), \end{cases}$$

de lo cual resulta claro que la multifunción $\lambda \to S_\lambda$ es SS. Por lo tanto, la compacidad y conexidad de $[0,1]$ y los Teoremas 1.4.2 y 2.4.5 implican que el conjunto $\bigcup_{\lambda \in [0,1]} S_\lambda$ es compacto y conexo. Observemos que

$$x_1(\cdot), x_2(\cdot) \in \bigcup_{\lambda \in [0,1]} S_\lambda$$

pues

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t)) \quad \text{y} \quad \dot{x}_2(t) = f_0(t, x_2(t)).$$

Además, $\bigcup_{\lambda \in [0,1]} S_\lambda \subset S(F, x_0)$. Hemos demostrado que para cada par de elementos de $S(F, x_0)$ es posible encontrar un subconjunto conexo de $S(F, x_0)$ que contiene a tales elementos, lo cual imposibilita una desconexión para $S(F, x_0)$. $\square$

EJERCICIO 2.4.5. Demuestre que bajo las hipótesis del Teorema 2.4.6 y asumiendo la conexidad de $S(F, x_0)$, el conjunto $\mathcal{R}_F(t, x_0)$ es relativamente compacto y conexo para cada $t \in I$.

2.4.5. Caso 4: F es disipativa maximal

Finalizamos este capítulo estudiando el problema de existencia de soluciones para (2.1) bajo la clase particular de multifunciones disipativas maximales. Recordemos que según la Proposición 1.7.1 los mapas disipativos maximales admiten imágenes cerradas y convexas, y además su grafo es cerrado.

Sin mucho preámbulo, pero teniendo en cuenta las propiedades anteriores, procedemos a establecer el resultado principal de este apartado, el cual revela algunas de las características más importantes que poseen las soluciones de (2.1) en el presente contexto.

Teorema 2.4.8. (*Existencia de soluciones*) *Sea F disipativo maximal. Entonces, para cada $x_0 \in X$ el problema* (2.1) *posee una única solución $x(\cdot)$, tal que $x(0) = x_0$. Dicha solución existe sobre todo el intervalo $[0, \infty)$.*

Demostración. Comencemos estableciendo algunas propiedades básicas relacionadas a las hipotéticas soluciones de (2.1). Con tal objetivo en mente, supongamos por el momento que dichas soluciones existen, y consideremos dos cualesquiera de ellas, digamos $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ con condiciones iniciales $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$. Ya que $(x(t), \dot{x}(t))$ e $(y(t), \dot{y}(t))$ son elementos en $\mathcal{G}(F)$, el hecho de ser F disipativo implica

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|x(t) - y(t)\right\|^2 = \langle \dot{x}(t) - \dot{y}(t), x(t) - y(t)\rangle \leq 0.$$

Descartando el factor $1/2$ e integrando desde 0 hasta t la relación anterior, obtenemos

$$\left\|x(t) - y(t)\right\| \leq \left\|x_0 - y_0\right\|, \text{ para } t \geq 0. \tag{2.34}$$

Observe que el estimado anterior revela, entre otras cosas, que para cada condición inicial la solución de (2.1) es única. Consideremos la función $y(t) := x(t + h)$, con $h > 0$, tal que $x(\cdot)$ es una solución de (2.1) con

$x(0) = x_0$. Es claro que $\dot{y}(t) \in F(y(t))$, con $y(0) = x(h)$. Por lo tanto, (2.34) implica

$$\|x(t+h) - x(t)\| \le \|x(h) - x(0)\| .$$

Sea $t > 0$ tal que $\dot{x}(t)$ existe. Asumamos también que la derivada de $x(\cdot)$ por la derecha existe en $t = 0$. Dividiendo por $h > 0$ la última desigualdad y tomando límite cuando $h \to 0$, se deduce

$$\|\dot{x}(t)\| \le \|\dot{x}(0)\| . \tag{2.35}$$

A continuación abordamos la prueba de la existencia. En vista de la propiedad de aproximación que poseen los mapas de Yosida F_λ con respecto a F, resulta tentador proceder con el diseño de las soluciones para (2.1) utilizando soluciones aproximadas asociadas a las inclusiones diferenciales definidas por F_λ. Procedemos a sucumbir ante tal tentación.

Consideremos el problema a valor inicial

$$\dot{x}_\lambda(t) = F_\lambda(x_\lambda(t)),\ x_\lambda(0) = x_0, \tag{2.36}$$

donde F_λ es la λ-ésima aproximación de Yosida para F. En virtud de la parte (*ii*) del Teorema 1.7.1, la ecuación (2.36) posee una única solución $x_\lambda(\cdot)$ de clase C^1 definida sobre todo el intervalo $[0, \infty)$. Más aún, el mismo apartado del referido Teorema establece que F_λ es disipativa y por ende, al repetir el argumento utilizado en la obtención de (2.35) y aplicar (*iii*) del Teorema 1.7.1 podemos escribir

$$\|F_\lambda(x_\lambda(t))\| = \|\dot{x}_\lambda(t)\| \le \|\dot{x}_\lambda(0)\| = \|F_\lambda(x_0)\| \le \|m(F(x_0))\| . \tag{2.37}$$

Sean $\lambda, \mu > 0$. Ya que $x_\lambda(0) = x_\mu(0) = x_0$, se tiene

$$\begin{aligned}\|x_\lambda(t) - x_\mu(t)\|^2 &= \int_0^t \frac{d}{ds} \|x_\lambda(s) - x_\mu(s)\|^2 \, ds \\ &= 2\int_0^t \langle F_\lambda(x_\lambda(s)) - F_\mu(x_\mu(s)), x_\lambda(s) - x_\mu(s)\rangle \, ds.\end{aligned}$$

Definamos $a(t) := \frac{1}{2}\left\|x_\lambda(t) - x_\mu(t)\right\|^2$. Recordemos que según (1.28) se tiene la descomposición $I = R_\lambda - \lambda F_\lambda$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a(t) = &\int_0^t \langle F_\lambda(x_\lambda(s)) - F_\mu(x_\mu(s)), R_\lambda(x_\lambda(s)) - R_\mu(x_\mu(s))\rangle \, ds \\ &- \int_0^t \langle F_\lambda(x_\lambda(s)) - F_\mu(x_\mu(s)), \lambda F_\lambda(x_\lambda(s)) - \mu F_\mu(x_\mu(s))\rangle \, ds. \end{aligned}$$

Además, la parte (*ii*) del Teorema 1.7.1 establece que $F_\lambda(x) \in F(R_\lambda(x))$. Este hecho junto a la última igualdad obtenida para $a(t)$ y la disipatividad de F implican la siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} a(t) &\leq - \int_0^t \langle F_\lambda(x_\lambda(s)) - F_\mu(x_\mu(s)), \lambda F_\lambda(x_\lambda(s)) - \mu F_\mu(x_\mu(s))\rangle \, ds \\ &= -\lambda \int_0^t \left\|F_\lambda(x_\lambda(s))\right\|^2 \, ds + \mu \int_0^t \langle F_\lambda(x_\lambda(s)), F_\mu(x_\mu(s))\rangle \, ds \\ &+ \lambda \int_0^t \langle F_\lambda(x_\lambda(s)), F_\mu(x_\mu(s))\rangle \, ds - \mu \int_0^t \left\|F_\mu(x_\mu(s))\right\|^2 \, ds. \quad (2.38) \end{aligned}$$

Por otro lado, ya que

$$\left(\sqrt{\lambda}\left\|F_\lambda(x_\lambda(s))\right\| - \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\left\|F_\mu(x_\mu(s))\right\|\right)^2 \geq 0,$$

la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica

$$\begin{aligned} \lambda \langle F_\lambda(x_\lambda(s)), F_\mu(x_\mu(s))\rangle &\leq \lambda \left\|F_\lambda(x_\lambda(s))\right\| \left\|F_\mu(x_\mu(s))\right\| \\ &\leq \lambda \left\|F_\lambda(x_\lambda(s))\right\|^2 + \frac{\lambda}{4}\left\|F_\mu(x_\mu(s))\right\|^2. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\mu \langle F_\lambda(x_\lambda(s)), F_\mu(x_\mu(s))\rangle \leq \mu \left\|F_\mu(x_\mu(s))\right\|^2 + \frac{\mu}{4}\left\|F_\lambda(x_\lambda(s))\right\|^2.$$

Al insertar los últimos dos estimados en (2.38) y utilizar (2.37) podemos calcular

$$\begin{aligned}
a(t) &\leq -\lambda \int_0^t \|F_\lambda(x_\lambda(s))\|^2 \, ds - \mu \int_0^t \|F_\mu(x_\mu(s))\|^2 \, ds \\
&+ \mu \int_0^t \|F_\mu(x_\mu(s))\|^2 \, ds + \frac{\mu}{4} \int_0^t \|F_\lambda(x_\lambda(s))\|^2 \, ds \\
&+ \lambda \int_0^t \|F_\lambda(x_\lambda(s))\|^2 \, ds + \frac{\lambda}{4} \int_0^t \|F_\mu(x_\mu(s))\|^2 \, ds \\
&= \frac{(\lambda+\mu)}{4} \int_0^t (\|F_\lambda(x_\lambda(s))\|^2 + \|F_\mu(x_\mu(s))\|^2) \, ds \\
&\leq \frac{(\lambda+\mu)}{2} t \, \|m(F(x_0))\|^2 .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, sobre un intervalo compacto fijo $[0,T]$ se tiene que la sucesión $x_\lambda(\cdot)$ es de Cauchy y por ende converge uniformemente a una función continua $x(\cdot)$. Complementariamente, la desigualdad

$$\|R_\lambda(x_\lambda(t)) - x_\lambda(t)\| = \lambda \|F_\lambda(x_\lambda(t))\| \leq \lambda \|m(F(x_0))\|$$

implica la convergencia uniforme de $R_\lambda(x_\lambda(t))$ hacia $x(\cdot)$ en $[0,T]$. De acuerdo a (2.37) la sucesión $\dot{x}_\lambda(\cdot)$ está acotada en $L_\infty([0,\infty), X)$ y de esta forma existe una subsucesión $\dot{x}_{\lambda_k}(\cdot)$ que converge débilmente a alguna función, la cual coincide casi en todas partes con $\dot{x}(\cdot)$. De esta forma, para cualquier $T > 0$ la sucesión $\dot{x}_{\lambda_k}(\cdot)$ converge débilmente a $\dot{x}(\cdot)$ en $L_2([0,T], X)$ y $x_{\lambda_k}(\cdot)$ converge fuertemente a $x(\cdot)$ en $L_2([0,T], X)$. Verificaremos a continuación que $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ para casi todo $t \in [0,T]$. En efecto, sean $y(\cdot)$ y $v(\cdot)$ funciones en $L_2([0,T], X)$ tales que $v(t) \in F(y(t))$, para casi todo $t \in [0,T]$. Ya que F es disipativo se tiene $\langle \dot{x}_{\lambda_k}(t) - v(t), R_{\lambda_k}(t) - y(t) \rangle \leq 0$, c.t.p. $t \in [0,T]$. Integrando desde 0 a T obtenemos

$$\int_0^T \langle \dot{x}_{\lambda_k}(s) - v(s), R_{\lambda_k}(x_{\lambda_k}(s)) - y(s) \rangle \, ds \leq 0.$$

Tomando límite cuando $k \to \infty$ en la desigualdad anterior, se tiene que

$$\int_0^T \langle \dot{x}(s) - v(s), x(s) - y(s) \rangle \, ds \leq 0. \tag{2.39}$$

Por otro lado, según la parte (i) del Teorema 1.7.1 la resolvente $R_1 = (I - F)^{-1}$ es Lipschitz univaluada y así, para cada $v(\cdot) \in L_2([0,T], X)$

la función $y(t) := R_1(v(t))$ es claramente medible. Además, la condición Lipschitz de R_1 implica $\|y(t) - R_1(0)\| \le \|v(t)\|$, de lo cual se deduce que $y(\cdot) \in L_2([0,T],X)$. Obviamente $v(t) \in (I - F)(y(t))$. De esta forma la multifunción $I - G$ es sobreyectiva, siendo $G : L_2([0,T],X) \to \mathcal{P}(L_2([0,T],X))$ definida por $G(y(\cdot))(t) := F(y(t))$. En virtud de lo anterior, podemos escoger $y_0(\cdot) \in L_2([0,T],X)$ tal que para la función $w_0(\cdot) := x(\cdot) - \dot{x}(\cdot)$ se cumpla

$$w_0(\cdot) \in y_0(\cdot) - G(y_0(\cdot)) = (I - G)(y_0(\cdot)).$$

Entonces, existe $v_0(t) \in F(y_0(t))$ tal que $x(t) - \dot{x}(t) = y_0(t) - v_0(t)$. Sustituyendo esta información en (2.39), podemos escribir

$$\begin{aligned} \|x(\cdot) - y_0(\cdot)\|_{L_2}^2 &= \int_0^T \langle x(s) - y_0(s), x(s) - y_0(s)\rangle \, ds \\ &= \int_0^T \langle \dot{x}(s) - v_0(s), x(s) - y_0(s)\rangle \, ds \\ &\le 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x(\cdot) = y_0(\cdot)$ como funciones en $L_2([0,T],X)$ y en particular $\dot{x}(t) = v_0(t) \in F(y_0(t)) = F(x(t))$, c.t.p. $t \in [0,T]$. Es claro que el razonamiento anterior puede aplicarse en cada intervalo de la forma $[iT,(i+1)T]$, para $i = 1,2,\ldots$ de tal forma que la solución $x(\cdot)$ puede extenderse sobre toda la semirrecta positiva $[0,\infty)$. $\square$

Los Corolarios que presentamos a continuación revelan algunas de las propiedades más importantes de las soluciones de (2.1) cuando la multifunción F es disipativa maximal. Sus pruebas invocan mucha de la sustancia contenida en el Teorema anterior.

Corolario 2.4.8. (*Dependencia de condiciones iniciales*) *La multifunción $x_0 \to S(F,x_0)$ es Lipschitz con respecto tanto a la norma del supremo en $C([0,\infty),X)$, como a la norma en $L_2([0,T],X)$, para cada $T > 0$.*

Demostración. La prueba es inmediata en virtud de la desigualdad (2.34) sobre la cual puede tomarse el supremo sobre $t \in [0,\infty)$ o integrar desde 0 hasta T los cuadrados de los factores que la definen. $\square$

La siguiente observación pone de manifiesto el carácter mínimo que poseen la magnitudes de las velocidades del sistema (2.1). Motivados por esta característica, las soluciones de un sistema disipativo maximal reciben el nombre de *soluciones lentas.*

Corolario 2.4.9. *Siendo F disipativa maximal, cada solución $x(\cdot)$ de* (2.1) *satisface $\dot{x}(t) = m(F(x(t)))$. Además, $\dot{x}(\cdot)$ es continua por la derecha.*

Demostración. Verifiquemos primero que la función $t \to m(F(x(t)))$ es continua por la derecha. Primero recordemos que según (2.37) para cada $t \geq 0$ se dispone del estimado $\|F_\lambda(x_\lambda(t))\| \leq \|m(F(x(t_0)))\|$. De esta forma, dado $t \geq 0$ existe una subsucesión $F_{\lambda_k}(x_{\lambda_k}(t))$ que converge en X a algún $v(t)$. Pero $F_{\lambda_k}(x_{\lambda_k}(t)) \in F(R_{\lambda_k}(x_{\lambda_k}(t)))$ y $R_{\lambda_k}(x_{\lambda_k}(t)) \to x(t)$. Entonces, la parte (*ii*) de la Proposición 1.7.1 garantiza que $v(t) \in F(x(t))$. Fijemos $t_0 \geq 0$ y sea $t > t_0$. Una vez más, ya que

$$\|\dot{x}_\lambda(t)\| = \|F_\lambda(x_\lambda(t))\| \leq \|m(F(x(t_0)))\|$$

se deduce por la fórmula de Newton-Leibniz que las soluciones $x_\lambda(t)$ son Lipschitz, todas de rango $\|m(F(x_0))\|$. Obviamente esta propiedad se preserva para su función límite $x(\cdot)$, la cual resulta en particular absolutamente continua. Adicionalmente,

$$\|v(t)\| = \lim_{k\to\infty} \|\dot{x}_{\lambda_k}(t)\| \leq \|m(F(x(t_0)))\|\,. \tag{2.40}$$

Es claro que $\|m(F(x(t)))\| \leq \|v(t)\|$. Por lo tanto, $\|m(F(x(t)))\| \leq \|m(F(x(t_0)))\|$, es decir, la función $t \to \|m(F(x(t)))\|$ es decreciente. Sea ahora $t_k > t_0$ tal que $t_k \to t_0$. Por la continuidad de $x(\cdot)$ se tiene que $x(t_k) \to x(t_0)$. También, $\|m(F(x(t_k)))\| \leq \|m(F(x(t_0)))\|$. Pasando a una subsucesión convergente, denotada de nuevo como $m(F(x(t_k)))$, podemos suponer que $m(F(x(t_k))) \to y$, para algún $y \in X$. Aplicando de nuevo la Proposición 1.7.1 tenemos que $y \in F(x(t_0))$. En vista de que

$$\|y\| = \lim_{k\to\infty} \|m(F(x(t_k)))\| \leq \|m(F(x(t_0)))\|\,,$$

necesariamente se tiene que $y = m(F(x(t_0))) = \lim_{k\to\infty} m(F(x(t_k)))$. Por lo tanto, la función $m(F(x(\cdot)))$ resulta continua por la derecha.

Sea finalmente $\mathcal{N} \subset [0,\infty)$ el conjunto de medida nula tal que si $t \notin \mathcal{N}$, entonces $\dot{x}(t)$ existe y $\dot{x}(t) \in F(x(t))$. Para $h > 0$ y $t_0 \notin \mathcal{N}$ la fórmula de Newton-Leibniz implica

$$\|x(t_0+h)-x(t_0)\| \leq \int_{t_0}^{t_0+h} \|\dot{x}(s)\|\, ds \leq h\, \|m(F(x(t_0)))\|\,,$$

de lo cual

$$\|\dot{x}(t_0)\| = \lim_{h\to 0^+} \left\| \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} \right\| \leq \|m(F(x(t_0)))\|\,.$$

Ya que $\dot{x}(t_0) \in F(x(t_0))$, se deduce que $\dot{x}(t) = m(F(x(t_0)))$, i.e., $x(\cdot)$ es una solución lenta para (2.1). En particular, $\dot{x}(\cdot)$ es continua por la derecha al serlo también la función $m(F(x(\cdot)))$. Como última observación notemos que ahora

$$\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} m(F(x(s)))\, ds$$

y al tomar límite cuando $h \to 0^+$, la continuidad por la derecha de $m(F(x(\cdot)))$ implica la fórmula lateral

$$\dot{x}(t_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}.$$

$\square$

EJERCICIO 2.4.6. Supongamos que F satisface la propiedad LD descrita en el Ejercicio 1.7.4 y que $x(\cdot)$ es una solución de clase C^1 para (2.1) sobre I, la cual satisface $x(0) = x_0$. Sea $G : I \times X \to \mathcal{P}(X)$ la multifunción definida por

$$G(t,x) := \{v \in F(x) : \langle v - \dot{x}(t), x - x(t)\rangle \leq \mathcal{K}\, \|x - x(t)\|^2\}.$$

Demuestre que si $y(\cdot)$ es solución del problema (2.1), con condición inicial $y(0) = x_0$ y con G en el rol de F, entonces necesariamente $y(\cdot) = x(\cdot)$.

Capítulo 3

Optimalidad y Estabilidad

Somos guiados por la belleza de nuestras armas.

–Leonard Cohen

3.1. Introducción

No cabe duda que dentro de los objetivos perseguidos por la teoría de sistemas dinámicos deterministas, resalta el interés por el estudio de las propiedades de optimalidad y estabilidad inherentes a las trayectorias de dichos sistemas. Por lo menos así lo han demostrado las últimas siete décadas de investigación desarrollada en torno a problemas de las ciencias e ingeniería, cuyo horizonte ha sido el diseño de mecanismos que imprimen influencia sobre la evolución de los sistemas considerados. Es por ello quizás que en el denominador común de las fuentes bibliográficas dedicadas al estudio de los sistemas dinámicos deterministas, está presente un espacio para la discusión de aspectos asociados a la teoría de optimalidad y estabilidad. Esta humilde monografía no es la excepción a esta regla, como lo demuestra el presente capítulo en el cual, aunque de manera breve, se tratan algunos de sus tópicos más emblemáticos dentro del contexto de las inclusiones diferenciales.

La distribución de los temas que serán abordados en el presente capítulo es la siguiente: Iniciamos nuestra exposición con el celebrado Lema de Filippov, donde se aborda la equivalencia entre los modelos provistos por la teoría de controles matemáticos via ecuaciones diferenciales ordinarias y el paradigma definido por (2.1). Luego, estudiamos el problema de control óptimo de Mayer, para el cual establecemos condiciones estructurales suficientes que garantizan la existencia de sus soluciones. Como caso particular, dedicamos nuestra atención al interesante y clásico problema de tiempo mínimo. Los tópicos cubiertos hasta este punto siguen la referencia [37]. Inmediatamente, y como antesala a los conceptos de estabilidad, presentamos algunos criterios de invarianza débil y fuerte; herramientas que han tenido gran impacto en el desarrollo de las teorías de juegos diferenciales y de las soluciones generalizadas para la ecuación de Hamilton-Jacobi (ver [2, 12, 16, 17, 19, 33, 35, 43]). Finalmente, pero sin menoscabar su importancia, introducimos los conceptos básicos de estabilidad y establecemos condiciones suficientes que garantizan dicha propiedad por medio del conocido método directo de Lyapunov, para lo cual consultaremos una más la fuente [37].

3.2. Lema de Filippov

En este espacio inicial recreamos la prueba de un resultado muy importante para la teoría de controles matemáticos modernos. Dicho resultado permite abordar el estudio de los sistemas de control definidos a través de la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ u(t) \in U,\ t \in I,$$

por medio de la inclusión diferencial

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)),\ t \in I,$$

donde $I = [0, 1]$ y $F(x) := f(x, U) = \{f(x, u) : u \in U\}$. Obviamente, una de las principales ventajas al considerar los problemas de control a través de inclusiones diferenciales es la ausencia del parámetro de control u en el modelo, ya que este recurso brinda simplicidad al estudio y permite la utilización de los resultados existentes en la teoría asociada al modelo (2.1).

La demostración del Lema de Filippov requiere el uso reiterado de otro heraldo de la matemática rusa conocido como *Teorema de Luzin*, el cual establece que las funciones medibles son, en cierto aspecto, continuas en casi todo su dominio. Mientras que el trabajo original de Luzin fue publicado en [25], varias versiones del mismo pueden consultarse en diferentes textos de análisis y sus aplicaciones (c.f. [6, 23, 31]). La versión que incluimos a continuación se enlaza de manera más directa con los objetivos aquí planteados (ver [37]).

Teorema 3.2.1. (*Luzin*) *Sea $C \subset X$ compacto y denotemos por μ a la medida de Borel sobre X. Una función $f : C \to Y$ es μ-medible si y solamente si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto compacto $C_\varepsilon \subset C$, con $\mu(C \setminus C_\varepsilon) \leq \varepsilon$, tal que la función restricción de f sobre C_ε es continua.*

Con el Teorema de Luzin a nuestra disposición, podemos dedicarnos al establecimiento del resultado anunciado.

Lema 3.2.1. (*Filippov*) *Sea $f : X \times Y \to X$ continua y sea $v : X \to X$ medible. Asumamos que $U \subset Y$ es compacto y tal que $v(x) \in f(x, U)$ para casi todo $x \in X$. Entonces, existe una función medible $u : X \to U$ que satisface $v(x) = f(x, u(x))$, para casi todo $x \in X$.*

Demostración. Consideremos la multifunción $\mathcal{U} : X \to \mathcal{P}(Y)$ definida por

$$\mathcal{U}(x) := \{u \in U : v(x) = f(x, u)\}.$$

De las hipótesis se deduce que $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$ para casi todo $x \in X$. Además, la compacidad de U y la continuidad de f implican que $\mathcal{U}$ posee imágenes compactas. Fijemos $x \in X$ y seleccionemos $u(x) = (u^1(x), \dots, u^m(x)) \in \mathcal{U}(x)$ con la componente $u^1(x)$ más pequeña. De existir más de un elemento $u(x) \in \mathcal{U}(x)$ con tal propiedad, seleccionamos dentro de ellos aquel con la componente $u^2(x)$ más pequeña. Así procedemos de manera recursiva hasta considerar todas las componentes que definen un único vector $u(x) \in \mathcal{U}(x)$.

A continuación verificamos que la aplicación $x \mapsto u(x)$ es medible sobre cualquier compacto $C \subset X$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. De acuerdo al Teorema de Luzin 3.2.1 existe un conjunto compacto $C_{\varepsilon/2} \subset C$ tal que $\mu(C \setminus C_{\varepsilon/2}) \leq \varepsilon/2$, y $v(\cdot)$ es continua sobre $C_{\varepsilon/2}$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Afirmamos que el conjunto

$$C_{\varepsilon/2,\alpha} := \{x \in C_{\varepsilon/2} : u^1(x) \leq \alpha\}$$

es cerrado. Para ver esto, procedamos por reducción al absurdo asumiendo que $C_{\varepsilon/2,\alpha}$ no es cerrado. Entonces, existe una sucesión $x_k \in$

$C_{\varepsilon/2,\alpha}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_k = \overline{x}$, con $u^1(\overline{x}) > \alpha$. Ya que U es compacto, la sucesión $u(x_k)$ posee una subsucesión convergente, la cual al renombrar como la sucesión original, nos permite suponer que $u(x_k) \to \overline{u}$, para algún $\overline{u} \in U$. Ya que $\overline{x} \in C_{\varepsilon/2}$, la continuidad de $v(\cdot)$ garantiza

$$\lim_{k\to\infty} v(x_k) = v(\overline{x}).$$

Además, resulta claro que

$$\lim_{k\to\infty} u^1(x_k) = \overline{u}^1.$$

Por otro lado, la continuidad de f implica

$$v(\overline{x}) = \lim_{k\to\infty} v(x_k) = \lim_{k\to\infty} f(x_k, u(x_k)) = f(\overline{x}, \overline{u}).$$

Pero $\overline{u}^1 = \lim_{k\to\infty} u^1(x_k) \leq \alpha < u^1(\overline{x})$, y esto contradice la selección de $u^1(\overline{x})$. Por lo tanto, $C_{\varepsilon/2,\alpha}$ es cerrado. Este hecho garantiza que $u^1(\cdot)$ es medible en $C_{\varepsilon/2}$. Al invocar de nuevo el Teorema de Luzin, podemos disponer de un compacto $C_\varepsilon \subset C_{\varepsilon/2}$ tal que $\mu(C_{\varepsilon/2} \setminus C_\varepsilon) \leq \varepsilon/2$ con $u^1(\cdot)$ continua sobre C_ε. Es claro que $\mu(C \setminus C_{\varepsilon/2}) \leq \varepsilon$, y en vista de ser ε arbitrario podemos concluir utilizando por tercera vez el Teorema de Luzin que $u^1(\cdot)$ es medible sobre C. El argumento anterior es aplicable a cada una de las componentes $u^j(\cdot)$ de $u(\cdot)$. Por lo tanto, $u(\cdot)$ es medible en C. Siendo C un compacto arbitrario, concluimos que $u(\cdot)$ es medible en X y así se satisfacen los requerimientos del Lema. □

Observación 3.2.1. En la pueba del Lema de Filippov puede tomarse $u(x) = (u^1(x), \ldots, u^m(x)) \in \mathcal{U}(x)$ tal que $u^1(x)$ sea la primera componente más grande y luego se procede de manera similar considerando el conjunto

$$C_{\varepsilon/2,\alpha} = \{x \in C_{\varepsilon/2} : u^1(x) \geq \alpha\},$$

sin alterar en lo absoluto la conclusión del Lema.

3.3. El problema de Mayer

Esta sección gira en torno al establecimiento de condiciones suficientes bajo las cuales el siguiente problema de optimización dinámica, conocido como *problema de Mayer*, posee solución:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \Lambda(x(1)) \\ \text{Sujeto a} \quad & \dot{x}(t) \in F(x(t)),\ t \in I, \\ & x(0) \in C_0,\ x(1) \in C_1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Asumiremos que los elementos que conforman la data del problema (3.1) satisfacen las siguientes hipótesis:

(a) La función $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ es continua.
(b) La multifunción F es SS y admite imágenes cerradas y convexas.
(c) La multifunción F satisface la propiedad de acotación uniforme (2.13).
(d) Los conjuntos C_0 y C_1 son compacto y cerrado en X, respectivamente.

Bajo las hipótesis anteriores podemos invocar las propiedades topológicas del conjunto alcanzable que fueron estudiadas en la Sección 2.4.3 para deducir de manera inmediata el siguiente resultado sobre existencia de soluciones para (3.1).

Teorema 3.3.1. *Supongamos que existe una solución $x(\cdot)$ de* (2.1) *tal que $x(\cdot)$ satisface las condiciones de frontera $x(0) \in C_0$ y $x(1) \in C_1$. Entonces, el problema* (3.1) *posee solución.*

Demostración. Bajo las hipótesis de esta sección se tiene que $\mathcal{R}_F(1, C_0)$ es no vacio y compacto (ver Ejercicio 2.4.3). Por lo tanto, $\mathcal{R}_F(1, C_0) \cap C_1$ es compacto. Ya que $\Lambda(\cdot)$ es continua, el Teorema de Weierstrass [38] garantiza que $\Lambda(\cdot)$ posee un mínimo en $\mathcal{R}_F(1, C_0) \cap C_1$, digamos $x(1)$, siendo $x(\cdot)$ alguna solución de (2.1). □

3.4. El problema de tiempo óptimo

Uno de los subparadigmas de la teoría de optimización que ha recibido especial atención en vista de su importancia dentro de las aplicaciones en la ciencia e ingeniería, consiste en hallar trayectorias cuyos recorridos entre dos puntos prefijados del espacio se desarrolle en el menor tiempo posible. Especificamente, la descripción del *problema de tiempo óptimo* o *tiempo mínimo* es la siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & T \\ \text{Sujeto a} & \dot{x}(t) \in F(x(t)),\ t \in [0,T], \\ & x(0) \in C_0,\ x(T) \in C_1, \end{array} \tag{3.2}$$

donde $T \leq 1$. En otras palabras, en el problema (3.2) se intenta encontrar un tiempo $\overline{T} \leq 1$ y una solución $x(\cdot)$ de (2.1) definida sobre $[0,\overline{T}]$, la cual satisface las condiciones de frontera $x(0) \in C_0$, $x(\overline{T}) \in C_1$ y con la propiedad de que $x(t) \notin C_1$, para cualquier $x(\cdot) \in S(F, C_0)$ y cualquier $t \in [0,\overline{T})$.

Asumiendo las mismas hipótesis de la Sección 3.3, podemos establecer el siguiente resultado práctico sobre la existencia de soluciones para (3.2).

Teorema 3.4.1. *Supongamos que existe $T \leq 1$ y una trayectoria $x(\cdot)$ para* (2.1) *definida sobre $[0,T]$ tal que $x(0) \in C_0$ y $x(T) \in C_1$. Entonces, existe una solución óptima para el problema* (3.2)*.*

Demostración. Consideremos los conjuntos

$$K_1 := \{(T,x) : T \in [0,1],\ x \in \mathcal{R}_F(T, C_0)\},$$

y

$$K_2 := \{(T,x) : T \in [0,1],\ x \in C_1\}.$$

Por hipótesis se tiene que $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Además, $K_1 \cap K_2$ es compacto. En efecto, supongamos que $(T_k, x_k) \in K_1 \cap K_2$. Entonces, $T_k \in [0,1]$ y $x_k = x_k(T_k) \in \mathcal{R}_F(T_k, C_0) \cap C_1$. En virtud del Ejercicio 2.4.4 podemos asumir que $x_k(\cdot) \in S(F, C_1)$ y este último conjunto es compacto de acuerdo al Corolario 2.4.4. Por lo tanto, pasando a una subsucesión uniformemente convergente $x_{k_j}(\cdot)$, podemos suponer que $x_{k_j}(\cdot) \to x(\cdot)$ y $T_{k_j} \to \overline{T}$, para alguna función $x(\cdot)$ continua sobre $[0,\overline{T}]$, con $\overline{T} \leq 1$. Si aplicamos el Teorema 1.6.1, tendremos que $x_{k_j}(\cdot) \in S(F_{k_j}, C_0)$, donde F_{k_j} es una sucesión de multifunciones localmente Lipschitz que aproximan a F de manera puntual por debajo y de manera uniforme por encima. Utilizando la propiedad de acotación uniforme, la fórmula de Newton-Leibniz, el Teorema de Arzelà-Ascoli y el argumento utilizado en la prueba del Teorema 2.4.4, se deduce que $x(\cdot) \in S(F, C_0)$. Resulta claro además que $x(\overline{T}) = \lim_{j\to\infty} x_{k_j}(T_{k_j}) \in C_1$. Por lo tanto, $(\overline{T}, x(\overline{T})) \in K_1 \cap K_2$. Dado que la función $\Lambda(t,x) := t$ es claramente continua sobre $I\times X$, el Teorema de Weierstrass implica la existencia de un mínimo $(T^*,x^*) \in K_1 \cap K_2$ para Λ, es decir, existe una solución óptima $x^*(\cdot)$ para (3.2), con tiempo mínimo asociado igual a T^*. □

3.5. Problemas de control óptimo

En la práctica, muchos modelos asociados a sistemas dinámicos con inherencia en las ciencias y en la ingeniería, requieren de la inserción de parámetros que conllevan a una mejor utilización de los mismos. Algunas veces la presencia de estos parámetros representa un mecanismo de influencia sobre el comportamiento de las trayectorias de dichos sistemas. Un ejemplo importante de tal instancia está dado por el uso de funciones de control, las cuales son ejercitadas con un propósito de naturaleza posicional u optimal. En general, la teoría determinística de control tiene como interés el estudio de procesos cuyos estados $x(\cdot)$ evolucionan de acuerdo a una ecuación diferencial de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ u(t) \in U,\ t \in I,$$

donde $u(\cdot)$ es una función de control cuyas imágenes yacen en el conjunto U, el cual usualmente es asumido compacto, dadas las limitaciones que el mundo físico impone a los recursos y/o medios de los cuales se dispone. La función $f : X \times Y \to X$ modela el campo de velocidades del sistema y generalmente se asume continua. La configuración e hipótesis estándar que satisfacen los elementos que definen la data en los problemas abordados por la teoría moderna de control óptimo son en esencia las siguientes:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar}\quad & \Lambda(T, x(T)) \\
\text{Sujeto a}\quad & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ t \in [0,T], && (3.3)\\
& u(t) \in U, && (3.4)\\
& x(0) \in C_0,\ x(T) \in C_1, && (3.5)\\
& 0 \le T \le 1.
\end{aligned}$$

Los conjuntos C_0 y U son compactos, el conjunto C_1 es cerrado y la función objetivo $\Lambda : I \times X \to \mathbb{R}$ es continua. Diremos que la terna

$(T^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ es un *triple óptimo* si sus componentes satisfacen las siguientes condiciones:

(a) Las funciones $x^*(\cdot)$ y $u^*(\cdot)$ satisfacen la ecuación diferencial (3.3), la restricción (3.4) y las condiciones de frontera (3.5) sobre I.
(b) $\Lambda(T^*, x^*(T^*)) \leq \Lambda(T, x(T))$, para cualquier terna $(T, x(\cdot), u(\cdot))$ que satisface las restricciones (3.3)-(3.5) sobre I.

La equivalencia entre el sistema de control dado por (3.3) y la inclusión diferencial (2.1) está garantizada por el Lema de Filippov. De esta forma, el problema de control óptimo anterior resulta equivalente al siguiente *problema de optimización dinámica*:

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & \Lambda(T, x(T)) \\ \text{Sujeto a} & \dot{x}(t) \in F(x(t)),\ t \in [0, T],\ 0 \leq T \leq 1, \\ & x(0) \in C_0,\ x(T) \in C_1, \end{array} \tag{3.6}$$

donde $F(x) := \{f(x, u) : u \in U\}$. Observemos que cuando $\Lambda(\cdot, \cdot)$ no depende de t y el parámetro T es fijo, se obtiene el problema de Mayer (3.1). En caso de ser $\Lambda(t, x) = t$, obtenemos el problema de tiempo mínimo (3.2).

La reproducción de la prueba del Teorema 3.4.1 y el Lema de Filippov, nos permite asegurar el siguiente resultado, el cual establece condiciones suficientes para la existencia de soluciones para el problema de control óptimo.

Teorema 3.5.1. *Asumamos las hipótesis convenidas para la data del problema de control óptimo y supongamos además que* $\{f(x, u) : u \in U\}$ *es convexo para cada* $x \in X$. *Si existe una terna* $(T, x(\cdot), u(\cdot))$ *que satisface* (3.3)-(3.5) *sobre* I, *entonces existe un triple óptimo para el problema de control óptimo.*

Demostración. Observe que $F(x) := \{f(x, u) : u \in U\}$ es no vacio, cerrado y convexo para cada $x \in X$. Además, la continuidad de f garantiza la semicontinuidad superior de F en virtud del Ejercicio 1.4.5. Una réplica de la prueba del Teorema 3.4.1 garantiza entonces el resultado. □

EJERCICIO 3.5.1. Consideremos el siguiente problema de control óptimo, donde la dinámica incluida en sus restricciones representa al sistema modelado por la ley de Coulomb que fue presentado al inicio del segúndo capítulo:

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & \displaystyle\int_0^T \left(\lambda_1 + \lambda_2 \left|x_2(t)\right|^2\right) dt \\ \text{Sujeto a} & \dot{x}_1(t) \in \{x_2(t)\}, \\ & \dot{x}_2(t) \in -\widetilde{f}(x_2(t)) + \{-kx_1(t) + u(t)\}, \\ & u(t) \in [-1,1], \\ & (x_1(0), x_2(0)) \in C_0, \ (x_1(T), x_2(T)) \in C_1, \\ & 0 \leq T \leq 2, \end{array}$$

siendo $C_0 = \{(0,1)\}$, $C_1 = \{(0,0)\}$, $k > 0$, y para $\alpha > 1$

$$\widetilde{f}(z_2) := \begin{cases} \{-\alpha\}, & \text{si} \quad z_2 > 0, \\ [-\alpha, \alpha], & \text{si} \quad z_2 = 0, \\ \{\alpha\}, & \text{si} \quad z_2 < 0. \end{cases}$$

El funcional de costo $\Lambda(T, x(T)) := \int_0^T \left(\lambda_1 + \lambda_2 \left|x_2(t)\right|^2\right) dt$ evalúa el desempeño del sistema en dos aspectos: el tiempo consumido, representado por la integral $\int_0^T \lambda_1 \, dt$ y la energía cinética permitida, calculada a través de $\int_0^T \lambda_2 \left|x_2(t)\right|^2 \, dt$. Las constantes λ_1 y λ_2 son positivas.

(a) Exprese el problema anterior como un problema de optimización dinámica, identificando la multifunción F.
(b) Determine las propiedades satisfechas por el funcional Λ y la multifunción F.
(c) Demuestre que el problema planteado posee solución.
(d) Si $(T^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ es un triple óptimo para el problema, encuentre una cota superior para $\Lambda(T^*, x^*(T^*))$.

3.6. Invarianza

Dentro de la teoría clásica de los sistemas dinámicos la noción de *invarianza* ha desempeñado un rol central en el análisis de los juegos diferenciales y en la interpretación de las propiedades de las soluciones generalizadas para la ecuación de Hamilton-Jacobi [2, 12, 13, 19, 32, 33, 35, 43].

Cuando la dinámica del sistema se encuentra modelada por una ecuación diferencial ordinaria de la forma $\dot{x}(t) = f(x(t))$, cuyo campo f es localmente Lipschitz y $S \subset X$ es cerrado, la invarianza del flujo para el par (S, f) se define como la propiedad según la cual para cada estado $x_0 \in S$, la única trayectoria $x(\cdot)$ del sistema que se origina en $x(0) = x_0$ está definida sobre $[0, \infty)$ y satisface $x(t) \in S$, para todo $t \geq 0$. Esta sección está dedicada al estudio de la generalización de este concepto a situaciones donde la ecuación diferencial es reemplazada por la inclusión diferencial (2.1), siendo F una multifunción que satisface las siguientes hipótesis básicas (HB):

(H1) F es SS.
(H2) F admite imágenes cerradas y convexas.
(H3) F satisface la propiedad de acotación uniforme.

Dado que una inclusión diferencial puede poseer más de una solución por cada condición inicial x_0, la formulación de la noción de invarianza en el contexto de (2.1) debe considerar los siguientes posibles escenarios:

(i) Alguna trayectoria del sistema que parte desde x_0 queda totalmente atrapada en S.
(ii) Todas las trayectorias del sistema que parten desde x_0 quedan totalmente atrapadas en S.

Comencemos formalizando la propiedad (i) en la antesala a su caracterización. Sean $F : X \to \mathcal{P}(X)$ y $S \subset X$.

Definición 3.6.1. *El par* (S, F) *se dice débilmente invariante o viable, si para cada punto* $x_0 \in S$ *existe una solución* $x(\cdot)$ *de* (2.1) *definida sobre* $[0, \infty)$*, tal que* $x(0) = x_0$*, y que además cumple* $x(t) \in S$ *para todo* $t \geq 0$.

La propiedad anterior expresa una condición que involucra tanto al conjunto S como a la multifunción F, no solamente a uno de estos objetos.

El estudio de los conceptos de invarianza se ha visto beneficiado considerablemente gracias a la introducción de algunos elementos de la teoría del análisis no diferencial (ver [2, 12, 16, 36]). Dentro de estos elementos destacan las funciones Hamiltonianas, las cuales se definen para todo par $(x,\zeta) \in X \times X$:

$$h_F(x,\zeta) := \inf_{v \in F(x)} \langle v, \zeta \rangle, \quad (\textit{Hamiltoniano inferior de } F) \tag{3.7}$$

$$H_F(x,\zeta) := \sup_{v \in F(x)} \langle v, \zeta \rangle. \quad (\textit{Hamiltoniano superior de } F) \tag{3.8}$$

Algunas propiedades básicas sobre las funciones h_F y H_F son reseñadas en el siguiente ejercicio, la mayoría de las cuales encuentran utilidad en diversos contextos.

EJERCICIO 3.6.1. Supongamos que F satisface HB.
(a) Demuestre que h_F es semicontinua inferiormente en (x,ζ), concava y continua en ζ.
(b) Verifique que h_F es super aditiva en ζ, lo cual significa que para cada x, ζ y η en X se cumple

$$h_F(x,\zeta+\eta) \geq h(x,\zeta) + h(x,\eta), \quad h_F(x,0) = 0.$$

(c) Enuncie y demuestre las contrapartes de (a) y (b) para el Hamiltoniano H_F.

En vista de lo esencial que resulta su intervención en nuestro estudio, la segunda construcción del análisis no diferencial que necesitamos invocar es de naturaleza geométrica y representa una generalización del concepto de dirección perpendicular a la frontera de un conjunto. Dado $s \in S$, diremos que el vector $\zeta \in X$ es una *dirección normal proximal al conjunto S en s* si existen $x \in X$ y $\alpha \geq 0$ tales que $s \in \pi_S(x)$ y $\zeta = \alpha(x - s)$. Definimos el *cono normal proximal de S en s* como el conjunto $N_S^P(s)$ de todas las direcciones normales proximales para S en s, es decir,

$$N_S^P(s) := \{\zeta = \alpha(x-s) : \alpha \geq 0,\ s \in \pi_S(x),\ \text{para algún } x \in X\}. \tag{3.9}$$

Existen situaciones donde resulta conveniente el manejo de formulaciones alternativas para la definición anterior. A continuación resumimos algunas de ellas, las cuales asignamos como tarea al lector.

EJERCICIO 3.6.2. Sea $S \subset X$ cerrado. Demuestre que para cada $s \in S$:
(a) $N_S^P(s) = \{\zeta : \exists\, t > 0 \text{ tal que } d(s + t\zeta, S) = t\,\|\zeta\|\}$.
(b) $N_S^P(s) = \Big\{\zeta : \exists\, \alpha \geq 0 \text{ tal que } \langle \zeta, s' - s\rangle \leq \alpha\,\|s' - s\|^2\ \forall s' \in S\Big\}$.

Adicionalmente, calcule $N_S^P(s)$ en los siguientes casos:
(c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -|x|\}$, $s = (0, 0)$.
(d) $S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -|x|^{3/2}\right\}$, $s = (0, 0)$.
(e) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$, $s = (0, -1)$.

3.6.1. Curvas de Euler

Como su formulación lo indica, el problema de invarianza está íntimamente vinculado a la existencia de trayectorias y al comportamiento cualitativo de las mismas con respecto a un conjunto prefijado de condiciones iniciales. Por esta razón, y motivados por el caso de las multifunciones SI, el concepto de selección luce una vez más como una herramienta natural para abordar el problema del diseño de tales trayectorias y el análisis de sus propiedades. Por supuesto, la falta de continuidad en las selecciones de las multifunciones SS impide el uso del Teorema de Peano, lo cual aparentemente evita el acceso a las soluciones de (2.1) por medio de esta vía. No obstante, la efectividad del uso de selecciones en la presente instancia está garantizada gracias a un esquema iterativo predicado en la teoría clásica de ecuaciones diferenciales ordinarias conocido como *método de Euler*, el cual rescatamos a continuación.

Consideremos el siguiente *problema de Cauchy* con condición inicial

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \tag{3.10}$$

donde $f : I \times X \to X$ es una función dada (una potencial selección de F). Comencemos discretizando el tiempo por medio de una partición no necesariamente uniforme del intervalo I

$$\pi := \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{N-1}, \tau_N\},$$

siendo $\tau_0 = 0$ y $\tau_N = 1$. Supongamos que una “trayectoria aproximada” $x_{j-1}(\cdot)$ ha sido precisada sobre $[\tau_{j-1}, \tau_j]$. Definimos la sección contigua $x_j(\cdot)$ de tal trayectoria de la siguiente manera: primero se especifica el j-ésimo nodo de la trayectoria aproximada como $x_j = x_{j-1}(\tau_j)$ y luego hacemos

$$\begin{aligned} x_j(t) :&= x_j + \int_{\tau_j}^{t} f(\tau_j, x_j)\, dr \\ &= x_j + f(\tau_j, x_j)(t - \tau_j) \end{aligned} \tag{3.11}$$

para todo $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$. Bajo el esquema anterior obtenemos el siguiente *arco poligonal de Euler* $x_\pi(\cdot)$ definido por partes sobre I: $x_\pi(t) := x_j(t)$ si $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$. Designemos al número

$$\mathcal{D}(\pi) := \max\{\tau_j - \tau_{j-1} : 1 \leq j \leq N\}$$

como diámetro de la partición π. Una *curva de Euler* para el problema de Cauchy (3.10) es cualquier función absolutamente continua que puede obtenerse como límite uniforme de arcos poligonales de Euler $x_{\pi_i}(\cdot)$, los cuales corresponden a alguna sucesión de particiones π_i con la propiedad $\mathcal{D}(\pi_i) \to 0$ cuando $i \to \infty$.

Supongamos que estamos ahora interesados en estudiar la dinámica del problema (3.10) y queremos determinar cuando una de sus curvas de Euler $x(\cdot)$ aproxima un conjunto cerrado dado $S \subset X$. Una manera sensata de comprobar este hecho, es escogiendo para cada $t \in I$ un punto $s \in \text{proj}_S(x(t))$ y luego verificando que el producto $\langle f(t, x(t)), x(t) - s\rangle$ sea negativo. Si la última condición se satisface, el vector $\dot{x}(t)$ "apuntará hacia S". La técnica aquí reseñada es conocida como *apuntaje proximal* y ha demostrado ser muy útil a la hora de establecer criterios Hamiltonianos para las propiedades de invarianza de (2.1).

El próximo resultado confirma la observación heurística anterior dentro de un contexto compatible con la hipótesis H3.

Proposición 3.6.1. *Sean $S \subset X$ cerrado y $\Omega \subset X$ abierto. Supongamos que $f : I \times X \to X$ satisface*

$$\|f(t, x)\| \leq 1, \text{ para todo } x \in X, \text{ y casi todo } t \in I.$$

Sean además $\theta : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua con la propiedad de que para cada $(t, z) \in I \times \Omega$, existe $s \in \pi_S(z)$ tal que

$$\langle f(t, z), z - s\rangle \leq \theta(t, z) d(z, S).$$

Entonces, cada curva de Euler $x(\cdot)$ para el problema (3.10)*, la cual está definida sobre el intervalo I y cuyo rango está contenido en Ω, satisface la desigualdad*

$$\frac{d}{dt} d(x(t), S) \leq \theta(t, x(t)),$$

en casi todas partes de cualquier subintervalo de I sobre el cual se cumple alguna de las desigualdades

$$d(x(t), S) > 0, \quad \theta(t, x(t)) \geq 0.$$

Demostración. Sea $x_\pi(\cdot)$ un elemento en la sucesión de arcos poligonales para f que convergen uniformemente a $x(\cdot)$ sobre I. Sea $t \in [0, 1)$; entonces existe i, con $0 \leq i < N_\pi$, tal que $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$. Definamos $\overline{x}_\pi(\cdot)$ como la restricción de $x_\pi(\cdot)$ sobre $[t, 1]$. Notemos que la partición asociada a $\overline{x}_\pi(\cdot)$ está definida por la colección de intervalos

$$[t, \tau_{i+1}], [\tau_{i+1}, \tau_{i+2}], \ldots, [\tau_{N_\pi - 1}, \tau_{N_\pi}].$$

Además, ya que $x(r) \in \Omega$ para todo $r \in I$, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\overline{x}_\pi(r) \in \Omega$ para todo $r \in [t, 1]$ en vista de la convergencia uniforme de $x_\pi(\cdot)$ hacia $x(\cdot)$. Según la hipótesis, para los nodos $x_i = \overline{x}_\pi(t)$ y $x_j = \overline{x}_\pi(\tau_j)$, con $i < j \leq N_\pi$, existen $s_j \in \mathrm{pro}_S(x_j)$ tales que

$$\langle f(\tau_j, x_j), x_j - s_j \rangle \leq \theta(\tau_j, x_j)\, d(x_j, S), \text{ para todo } i \leq j \leq N_\pi.$$

Ya que la derivada a lo largo de cualquier porción lineal de $x_\pi(\cdot)$ está determinada por los valores de f en los nodos, resulta claro que $\|\dot{x}_\pi(\cdot)\|_\infty \leq 1$. Gracias a esta cota uniforme es posible realizar la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
d^2(x_{i+1}, S) &\leq \|x_{i+1} - s_i\|^2 \\
&= \|x_{i+1} - x_i\|^2 + \|x_i - s_i\|^2 + 2\langle x_{i+1} - x_i, x_i - s_i \rangle \\
&\leq (\tau_{i+1} - t)^2 + d^2(x_i, S) + 2\left\langle \int_t^{\tau_{i+1}} \dot{\overline{x}}_\pi(r)\, dr, x_i - s_i \right\rangle \\
&= (\tau_{i+1} - t)^2 + d^2(x_i, S) + 2\int_t^{\tau_{i+1}} \langle \dot{\overline{x}}_\pi(r), x_i - s_i \rangle\, dr \\
&= (\tau_{i+1} - t)^2 + d^2(x_i, S) + 2\int_t^{\tau_{i+1}} \langle f(t, \overline{x}_\pi(t)), x_i - s_i \rangle\, dr \\
&\leq (\tau_{i+1} - t)^2 + d^2(x_i, S) + 2\int_t^{\tau_{i+1}} \theta(t, \overline{x}_\pi(t)) d(\overline{x}_\pi(t), S)\, dr,
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la linealidad del producto interno, la definición de $\overline{x}_\pi(\cdot)$, y las hipótesis sobre Ω y f respectivamente. Procediendo de manera análoga en cada uno de los nodos restantes, se deduce

$$\begin{aligned} d^2(x_j,S) &\leq (\tau_j-\tau_{j-1})^2 + d^2(x_{j-1},S) \\ &\qquad + 2\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \theta(\tau_{j-1},\overline{x}_\pi(\tau_{j-1}))d(\overline{x}_\pi(\tau_{j-1}),S)\,dr, \end{aligned}$$

para $i \leqslant j \leqslant N_\pi$. El conjunto de desigualdades anteriores conlleva a

$$\begin{aligned} d^2(x_j,S) &\leq (\tau_j-\tau_{j-1})^2 + (\tau_{j-1}-\tau_{j-2})^2 + d^2(x_{j-2},S) \\ &\qquad + 2\int_{\tau_{j-2}}^{\tau_{j-1}} \theta(\tau_{j-2},\overline{x}_\pi(\tau_{j-2}))d(\overline{x}_\pi(\tau_{j-2}),S)\,dr \\ &\qquad + 2\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \theta(\tau_{j-1},\overline{x}_\pi(\tau_{j-1}))d(\overline{x}_\pi(\tau_{j-1}),S)\,dr. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Continuando de manera recursiva el desarrollo anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} d^2(x_j,S) &\leq \sum_{l=1}^{j-1}(\tau_{l+1}-\tau_l)^2 + d^2(x_i,S) \\ &\qquad + 2\sum_{l=1}^{j-1}\int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \theta(\tau_l,\overline{x}_\pi(\tau_l))d(\overline{x}_\pi(\tau_l),S)\,dr \\ &\leq \mathcal{D}(\pi)\sum_{l=1}^{j-1}(\tau_{l+1}-\tau_l) + d^2(x_i,S) \\ &\qquad + 2\sum_{l=1}^{j-1}\int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \theta(\tau_l,\overline{x}_\pi(\tau_l))d(\overline{x}_\pi(\tau_l),S)\,dr \\ &= \mathcal{D}(\pi)(b-t) + d^2(x_i,S) \\ &\qquad + 2\sum_{l=1}^{j-1}\int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \theta(\tau_l,\overline{x}_\pi(\tau_l))d(\overline{x}_\pi(\tau_l),S)\,dr \end{aligned} \tag{3.13}$$

para $i \leq j \leq N_\pi$. Consideremos ahora la sucesión $\overline{x}_{\pi_i}(\cdot)$ de arcos poligonales que son restricción de la sucesión original $x_{\pi_i}(\cdot)$ sobre $[t,1]$. Note que $\overline{x}_{\pi_i}(\cdot)$ converge uniformemente a $x(\cdot)$ sobre $[t,1]$ y $\mathcal{D}(\pi_i)\to 0$ cuando $i\to\infty$. Además, (3.13) se satisface para cada nodo y $d(\cdot,S)$ es una función continua. Tomando el límite cuando $j\to\infty$ en (3.13), tenemos que para cada τ, con $0\leq t<\tau$, se obtiene finalmente la desigualdad

$$d^2(x(\tau),S) \leq d^2(x(t),S) + 2\int_t^\tau \theta(r,x(r))d(x(r),S)dr. \tag{3.14}$$

Para verificar las afirmaciones finales del enunciado, definimos

$$g(\tau) := \int_t^\tau \theta(r, x(r))d(x(r), S)dr$$

sobre $[t, 1]$. Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo a esta función obtenemos

$$\frac{d}{d\tau}g(\tau) = \theta(\tau, x(\tau))d(x(\tau), S), \quad \text{para todo } \tau \in [t, 1]. \tag{3.15}$$

Por otro lado, si colocamos τ y $\tau + h$ como límites de integración en (3.14) podemos entonces escribir

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}g(\tau) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h}\theta(r, x(r))d(x(r), S)dr \\
&\geq \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{d^2(x(\tau+h), S) - d^2(x(\tau), S)}{h} \\
&= d(x(\tau), S)\frac{d}{d\tau}d(x(\tau), S), \quad \text{c.t.p. } \tau \in [t, 1]. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Comparando (3.15) con (3.16) se deduce

$$\theta(\tau, x(\tau))d(x(\tau), S) \geq d(x(\tau), S)\frac{d}{d\tau}d(x(\tau), S), \tag{3.17}$$

en casi todas partes de $[t, 1]$. Ya que t fue tomado arbitrariamente en $[0, 1)$, se tiene que la última desigualdad se satisface casi en todas partes en I. Si J es un subintervalo de I en el cual $d(x(\tau), S) > 0$, entonces en J este factor puede cancelarse a ambos lados de (3.17). Por lo tanto,

$$\frac{d}{d\tau}d(x(\tau), S) \leq \theta(\tau, x(\tau)), \quad \text{para casi todo } \tau \in J.$$

Si $\theta(\tau, x(\tau)) \geq 0$ y $d(x(\tau), S) = 0$, entonces

$$\frac{d}{d\tau}d(x(\tau), S) = 0 \leq \theta(\tau, x(\tau)),$$

lo cual completa la prueba. □

A continuación presentamos una caracterización analítica para la propiedad de invarianza débil cuya utilidad resalta dentro de las disponibles en la literatura sobre el tema. Otro criterio de invarianza débil, aparentemente no tan práctico, involucra al cono de direcciones tangentes generalizadas o *cono de Bouligand* (ver [2, 12, 16, 17, 32]); una construcción cuya naturaleza es dual con respecto a (3.9). El criterio presentado aquí establece que el par (S, F) es débilmente invariante siempre y cuando, en cada punto x de la zona de captura S de las trayectorias del sistema, el ángulo entre alguna de las velocidades modeladas por F y las direcciones normales a dicha zona S es obtuso. Su demostración requiere el uso del Teorema 3.6.1 que enunciamos de inmediato, y el cual certifica el vínculo existente entre las trayectorias de (2.1) y las curvas de Euler asociadas a las selecciones de F.

Teorema 3.6.1. *Sea f cualquier selección de F y $x(\cdot)$ una curva de Euler para* (3.10). *Entonces $x(\cdot)$ es una solución de* (2.1) *sobre I.*

Invitamos a visitar la página 186 de [12] para una lectura de la demostración del requisito anterior. Asumiendo la veracidad de tal resultado, presentamos el esperado criterio Hamiltoniano de invarianza débil.

Teorema 3.6.2. *Supongamos que F satisface HB y $S \subset X$ es cerrado. El par (S, F) es débilmente invariante si y sólo si,*

$$h_F(x, \zeta) \leq 0, \text{ para todo } x \in S \text{ y todo } \zeta \in N_S^P(x). \tag{3.18}$$

Demostración. Verifiquemos primero que la condición (3.18) es necesaria para la invarianza débil del sistema. Para tal fin, sea $x_0 \in S$. Como el sistema (S, F) es débilmente invariante, existe una trayectoria $x(\cdot)$ para (2.1) tal que $x(0) = x_0$ y la cual satisface $x(t) \in S$ para todo $t \geq 0$. Para cada $\varepsilon > 0$ definimos $C_\varepsilon := F(x_0) + \overline{B}(0, \varepsilon)$. La semicontinuidad superior de F garantiza la existencia de un $\eta > 0$ tal que

$$F(z) \subset C_\varepsilon, \text{ para todo } z \in B(x_0, \eta).$$

Para tal η, la continuidad de $x(\cdot)$ permite encontrar $\theta > 0$ con la propiedad de que si $|s| < \theta$, entonces

$$\|x(s) - x_0\| < \eta.$$

La última condición implica

$$\dot{x}(s) \in F(x(s)) \subset C_\varepsilon, \text{ para casi todo } s \in [0, \theta).$$

Seleccionemos una sucesión de números reales positivos σ_i tal que $\sigma_i \to 0$. Ya que C_ε es compacto y convexo, el Lema 2.4.2 y la fórmula de Newton-Leibniz conllevan a

$$\frac{x(\sigma_i) - x_0}{\sigma_i} = \frac{1}{\sigma_i} \int_0^{\sigma_i} \dot{x}(s)\, ds \in C_\varepsilon, \text{ para cada } \sigma_i < \theta.$$

Ahora podemos utilizar la compacidad de C_ε para pasar, de ser necesario, a una subsucesión convergente (renombrada como la original), la cual produce un vector

$$v_\varepsilon := \lim_{i\to\infty} \frac{x(\sigma_i) - x_0}{\sigma_i} \in C_\varepsilon. \tag{3.19}$$

Observe que $x(\sigma_i) \in S$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Además, la continuidad de $x(\cdot)$ implica $x(\sigma_i) \to x_0$, cuando $i \to \infty$. Consideremos un elemento $\zeta \in N_S^P(x_0)$. De acuerdo a (3.19) y a la parte (b) del Ejercicio 3.6.2, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \langle v_\varepsilon, \zeta\rangle &= \lim_{i\to\infty} \left\langle \frac{x(\sigma_i) - x_0}{\sigma_i}, \zeta \right\rangle \\ &\le \alpha \lim_{i\to\infty} \left\| \frac{x(\sigma_i) - x_0}{\sigma_i} \right\| \|x(\sigma_i) - x_0\| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para cada $\varepsilon > 0$, sea $w_\varepsilon := \pi_{F(x_0)}(v_\varepsilon)$. Por la compacidad de $F(x_0)$, es posible seleccionar una subsucesión w_{ε_j} convergente a algún $v \in F(x_0)$, la cual además satisface

$$\begin{aligned} \left\|v_{\varepsilon_j} - v\right\| &\le \left\|v_{\varepsilon_j} - w_{\varepsilon_j}\right\| + \left\|w_{\varepsilon_j} - v\right\| \\ &\le \varepsilon_j + \left\|w_{\varepsilon_j} - v\right\|. \end{aligned} \tag{3.20}$$

El lado derecho de (3.20) tiende a cero cuando $j \to \infty$ y por ende también lo hace $\left\|v_{\varepsilon_j} - v\right\|$. Por lo tanto,

$$h_F(x_0, \zeta) \le \langle v, \zeta\rangle = \lim_{i\to\infty} \left\langle v_{\varepsilon_j}, \zeta \right\rangle \le 0.$$

Para la prueba de la suficiencia consideremos la sucesión F_k de multifunciones localmente Lipschitz provista por el Teorema 1.6.1 y sea $x_0 \in S$. Observemos que si $x_k(\cdot)$ es una solución de (2.1) con F_k en el rol de F

y $x_k(0) = x_0$, entonces de la fórmula de Newton-Leibniz se desprende claramente que $x_k(t) \in \overline{B}(x_0, 1)$, para cada $t \in I$ y cada $k \in \mathbb{N}$. Denotemos por $\mathcal{L}_k$ el rango Lipschitz de F_k sobre $\overline{B}(x_0, 2)$ (ver parte (b) del Ejercicio 1.6.1). Para cada $x \in X$ y $s = \pi_S(x)$, seleccionemos $v_k \in F_k(s)$ tal que $\langle v_k, x - s\rangle \leq 0$. Dicho vector v_k existe en vista de la condición (3.18), del hecho de que $h_{F_k}(s, x-s) \leq h_F(s, x-s)$ y de las propiedades de $F_k(s)$. Definamos $f_k(x) := \pi_{F_k(x)}(v_k)$. Resulta claro que f_k es una selección de F_k. Para $x \in \overline{B}(x_0, 1)$ y $s = \pi_S(x)$ se tiene

$$\|s - x_0\| \leq \|s - x\| + \|x - x_0\| \leq 2\,\|x - x_0\|,$$

de tal manera que $s \in \overline{B}(x_0, 2)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\langle f_k(x), x - s\rangle &= \langle f_k(x) - v_k, x - s\rangle + \langle v_k, x - s\rangle \\
&\leq \langle f_k(x) - v_k, x - s\rangle \\
&\leq \|f_k(x) - v_k\|\,\|x - s\| \\
&\leq \mathcal{L}_k\,\|x - s\|^2 .
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Demostramos a continuación que es posible construir curvas de Euler asociadas a las selecciones f_k. Cabe destacar que la construcción que realizaremos es independiente de la propiedad (3.21) y por ende es aplicable a cada selección de F_k, e inclusive de F. En efecto, sea

$$\pi := \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{N-1}, \tau_N\}$$

una partición del intervalo I, con $\tau_0 = 0$, $\tau_N = 1$, y sea $x_\pi(\cdot)$ un arco poligonal para f_k correspondiente a tal partición, cuyos nodos son denotados por $x_0, x_1, \ldots, x_N$. Ya que sobre el intervalo (t_i, t_{i+1}) se cumple $\dot{x}_\pi(t) = f_k(t_i, x_i)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|x_{i+1} - x_0\| &\leq \|x_{i+1} - x_i\| + \|x_i - x_0\| \\
&\leq (t_{i+1} - t_i) + \|x_i - x_0\| .
\end{aligned}$$

Es fácil ver por inducción que $\|x_i - x_0\| \leq 1$, para $i = 1, 2, \ldots, N$ (ver Ejercicio al final de la demostración). De esta forma todos los nodos de $x_\pi(\cdot)$ yacen dentro de la bola $\overline{B}(x_0, 1)$; por convexidad de la misma se tiene que $x_\pi(t) \in \overline{B}(x_0, 1)$ para todo $t \in I$. Más aún, $\|\dot{x}_\pi(\cdot)\|_C \leq 1$. La fórmula de Newton-Leibniz interviene una vez más para garantizar que $x_\pi(\cdot)$ es Lipschitz de rango 1 sobre I.

Sea ahora π_j una sucesión de particiones tal que $\mathcal{D}(\pi_j) \to 0$ cuando $j \to \infty$. Note que necesariamente $N_j \to \infty$. Además, los arcos poligonales correspondientes satisfacen

$$x_{\pi_j}(0) = x_0, \quad \left\|x_{\pi_j}(\cdot) - x_0\right\|_C \leq 1, \quad \left\|\dot{x}_{\pi_j}(\cdot)\right\|_C \leq 1.$$

De las relaciones anteriores se deduce que la familia $\{x_{\pi_j}(\cdot)\}$ es equicontinua y uniformemente acotada. Podemos aplicar el Teorema de Arzelà-Ascoli para garantizar que alguna subsucesión de tal famila converge uniformemente a una función continua $x(\cdot)$. Esta función límite hereda claramente el rango Lipschitz de los miembros de la familia que la generan sobre el intervalo I; como consecuencia $x(\cdot)$ resulta absolutamente continua. Por lo tanto, $x(\cdot)$ es una curva de Euler para el problema (3.10) con f_k en el rol de f. Al aplicar la Proposición 3.6.1 con $\theta(\cdot,\cdot) := d(\cdot, S)$ y $\Omega := X$, se deduce

$$\frac{d}{dt}d(x_k(t), S) \leq \mathcal{L}_k d(x_k(t), S), \text{ para casi todo } t \in I.$$

El uso de la desigualdad de Gronwall implica

$$d(x_k(t), S) \leq d(x_0, S)e^{\mathcal{L}_k} = 0,$$

ya que $x_k(0) = x_0 \in S$. Por lo tanto, $x_k(t) \in S$, para $0 \leq t \leq 1$. Basta aplicar entonces el Teorema 3.6.1 para concluir que $x_k(\cdot)$ es una trayectoria invariante para F_k.

El argumento anterior permite escoger para cada $k \in \mathbb{N}$ una trayectoria invariante $x_k(\cdot)$ asociada a F_k, la cual nace en x_0 y permanece en S sobre I. Una replica del argumento descrito en la prueba del Teorema 2.4.4 produce una subsucesión convergente de $x_k(\cdot)$, cuyo límite uniforme $x(\cdot)$ es una trayectoria para F sobre I. Al ser S cerrado, dicha trayectoria permanece en S. Repitiendo el procedimiento anterior sobre los intervalos $[1, 2], [2, 3], \ldots$, y pegando las trayectorias asociadas a los mismos, se obtiene finalmente una trayectoria invariante para F definida sobre todo $[0, \infty)$. □

EJERCICIO 3.6.3. Sea π una partición de I y $x_\pi(\cdot)$ un arco poligonal para el problema (3.10), donde $f : I \times X \to X$ satisface $\|f(t, x)\| \leq 1$ para todo $(t, x) \in I \times X$. Si x_i denota el i-ésimo nodo de $x_\pi(\cdot)$, demuestre que $\|x_i - x_0\| \leq 1$, para todo i. (**Sugerencia:** Use inducción).

Completamos nuestra discusión estudiando la contraparte fuerte de la propiedad de invarianza débil, la cual fue reseñada en (ii) al principio de esta sección.

Definición 3.6.2. *El par* (S, F) *se dice fuertemente invariante si para cada punto* $x_0 \in S$*, cualquier solución* $x(\cdot)$ *de* (2.1) *definida sobre* $[0, \infty)$ *con condición inicial* $x(0) = x_0$*, satisface* $x(t) \in S$*, para todo* $t \geq 0$*.*

Cumpliendo con las expectativas, el criterio de invarianza fuerte que estudiamos a continuación preserva la estética del Teorema 3.6.2, con la función H_F reemplazada por h_F en la respectiva condición infinitesimal. Con la finalidad de presentar una prueba más concisa y lograr en particular una mayor claridad en la exposición de las ideas, restringimos nuestros planteamientos al caso en que las trayectorias son de clase C^1. La participación de trayectorias absolutamente continuas requiere el uso de multifunciones no autónomas donde la variable temporal exhibe propiedades de medibilidad cuya discusión no está vinculada a los objetivos de esta monografía (c.f. [2, 3, 12, 14, 16, 17, 19, 32, 40]).

Teorema 3.6.3. *Supongamos que* F *es localmente Lipschitz y satisface las hipótesis básicas H2 y H3. Entonces, el par* (S, F) *es fuertemente invariante si y solamente si,*

$$H_F(x, \zeta) \leq 0, \text{ para todo } x \in S \text{ y todo } \zeta \in N_S^P(x). \tag{3.22}$$

Demostración. Establezcamos primero la necesidad de (3.22), en la cual no interviene directamente la naturaleza de las trayectorias del sistema. Sea $x_0 \in S$ y $v \in F(x_0)$. Ya que F es localmente Lipschitz, F es en particular SI. Más aún, F posee valores cerrados y convexos según la hipótesis. De esta forma podemos invocar el Teorema de Michael para garantizar la existencia de una selección continua f de F, tal que $f(x_0) = v$. Ya que (S, F) es fuertemente invariante, resulta que el par (S, f) es en particular débilmente invariante. Por lo tanto, al aplicar el Teorema 3.6.2 tenemos que $\langle v, \zeta \rangle = h_f(x_0, \zeta) \leq 0$, para todo $\zeta \in N_S^P(x_0)$. El vector v ha sido tomado de manera arbitraria en $F(x_0)$, lo cual implica que

$$H_F(x_0, \zeta) := \sup_{v \in F(x_0)} \langle v, \zeta \rangle \leq 0.$$

Por otro lado, supongamos que la condición Hamiltoniana (3.22) se satisface y consideremos una solución $x(\cdot)$ de (2.1) de clase C^1 definida sobre

$[0, \infty)$, la cual satisface la condición inicial $x(0) = x_0 \in S$. Definamos la multifunción $G : [0, \infty) \times X \to \mathcal{P}(X)$ a través de

$$G(t, x) := \{v \in F(x) : \|v - \dot{x}(t)\| \leq \mathcal{L} \|x - x(t)\|\}. \tag{3.23}$$

Proponemos como ejercicio al lector verificar que G satisface HB. Ya que $G(t, x) \subset F(x)$ para cada $(t, x) \in [0, \infty) \times X$, en virtud de (3.22) resulta claro que

$$h_G((t, x), \zeta) \leq H_G((t, x), \zeta) \leq H_F(x, \zeta) \leq 0,$$

para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times X$ y todo $\zeta \in N_S^P(x)$. Por lo tanto, el par (S, G) resulta débilmente invariante según la versión no autónoma del Teorema 3.6.2 (el lector puede verificar dicha versión agregando consistentemente la variable t a lo largo de la demostración del Teorema 3.6.2). De esta forma debe existir una solución $y(\cdot)$ de (2.1) definida sobre $[0, \infty)$, tal que $y(0) = x_0$ y con la propiedad de que $y(t) \in S$ para todo $t \geq 0$. Puesto que $\dot{y}(t) \in G(t, y(t))$, la definición de G implica

$$\|\dot{y}(t) - \dot{x}(t)\| \leq \mathcal{L} \|y(t) - x(t)\|,$$

de lo cual para cada $T > 0$, al aplicar la desigualdad de Gronwall obtenemos

$$\|y(t) - x(t)\| \leq (e^{\mathcal{L}T} - 1) \|x(0) - y(0)\|,$$

es decir, $y(t) = x(t)$, para todo $t \in [0, T]$. Como $T > 0$ es arbitrario, concluimos que $x(t) = y(t) \in S$ para todo $t \geq 0$. Esto comprueba la invarianza fuerte de (S, F). □

EJERCICIO 3.6.4. Demuestre que la multifunción G definida en (3.23) satisface HB.

Observación 3.6.1. En virtud del papel desempeñado por el Teorema de selección de Michael a la hora de establecer la necesidad de la condición (3.8), es posible preservar tal implicación bajo un relajamiento de las hipótesis en el enunciado, el cual consiste en asumir solamente la semicontinuidad inferior de F junto a las hipótesis básicas H2 y H3. Por otro lado, en la prueba de la suficiencia de (3.8) la propiedad Lipschitz sobre F puede ser reemplazada por la propiedad LD introducida en el Ejercicio 1.7.4 junto a la semicontinuidad superior. En efecto, observe que la multifunción G del Ejercicio 2.4.6 está definida intrínsecamente a través de la propiedad LD y dicha multifunción constituye un reemplazo natural para la multifunción G definida en (3.23).

EJERCICIO 3.6.5. Supongamos que F es LD, continua y satisface H2 y H3. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(a) El par (S, F) es fuertemente invariante con respecto a trayectorias de clase C^1.
(b) Para todo $x \in S$ y todo $\zeta \in N_S^P(x)$ se tiene

$$H_F(x, \zeta) \leq 0.$$

(c) El par (S, G) es débilmente invariante para cada multifunción

$$G : [0, \infty) \times X \to \mathcal{P}(X)$$

dotada con HB y con la inclusión $G(t, x) \subset F(x)$, para cada par (t, x) en $[0, \infty) \times X$.

3.7. Estabilidad

Las páginas finales de esta monografía están dedicadas a una breve exploración de los conceptos clásicos de estabilidad dentro del contexto de la inclusión diferencial (2.1). Como muestra de las herramientas disponibles para el estudio de tales conceptos, presentamos el método directo de Lyapunov, el cual proporciona condiciones suficientes para las diferentes versiones de estabilidad consideradas. En nuestra exposición seguiremos las ideas y el estilo presentado en [37].

Comencemos con una multifunción $F : X \to \mathcal{P}(X)$ tal que $0 \in F(0)$, es decir, el origen $x = 0$ es una *posición de equilibrio* para la inclusión diferencial asociada (2.1). Bajo este convenimiento presentamos las siguientes nociones básicas.

Definición 3.7.1. *El punto de equilibrio $x = 0$ se dice estable (débilmente estable) para la inclusión diferencial (2.1) si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x_0 \in B(0, \delta)$, cada (al menos una) solución $x(\cdot)$ de (2.1) con $x(0) = x_0$ satisface $\|x(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$. El punto de equilibrio $x = 0$ se dice asintóticamente estable (débilmente asintóticamente estable) si adicionalmente a ser estable (débilmente estable) se cumple*

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0.$$

Si el punto de equilibrio $x = 0$ no es débilmente estable, diremos que es inestable.

La motivación para el estudio de los conceptos de estabilidad a través de la inclusión diferencial (2.1) proviene principalmente de dos fuentes. En la práctica, existen muchos sistemas dinámicos modelados por una ecuación diferencial de la forma $\dot{x}(t) = f(x(t))$, donde el origen $x = 0$ puede pensarse como un estado en el que dicho sistema se encuentra en equilibrio. Debido a posibles perturbaciones que impactan la evolución del sistema, resulta más conveniente modelar al mismo a través de una inclusión diferencial de la forma $\dot{x}(t) \in B(f(x(t)), p(t))$, donde $p(\cdot)$ es una función estimadora del radio de la perturbación que experimenta el campo f. La propiedad de estabilidad garantiza que en la evolución futura del sistema, los estados cercanos al origen no están lejos del estado deseado. La estabilidad asintótica implica que la amplitud de las perturbaciones iniciales decrecen y eventualmente desaparecen.

Por otro lado, las propiedades de estabilidad débil y estabilidad asintótica débil poseen una interpretación y utilidad más natural dentro del contexto de los sistemas de control

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ u(t) \in U,$$

que satisfacen $f(0, u_0) = 0$ para algún $u_0 \in U$. Para dichos sistemas se desea determinar si es posible mantener el estado en la vecindad del equilibrio, o poder conducirlo hasta el equilibrio desde cualquier posición inicial en la vecindad del origen. Este problema guarda relación íntima con el problema de controlabilidad, razón por la cual a la propiedad de estabilidad asintótica débil se le conoce también como *controlabilidad asintótica.*

El siguiente par de definiciones es fundamental para el resto de nuestra discusión.

Consideremos una función $V : X \to \mathbb{R}$ tal que $V(0) = 0$. Diremos que V es *positiva definida* (*negativa definida*) si $V(x) > 0$ ($V(x) < 0$) para todo $x \in X \setminus \{0\}$. La función V se dice *semidefinida positiva* (*semidefinida negativa*) si $V(x) \geq 0$ ($V(x) \leq 0$) para todo $x \in X$.

Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *La derivada superior de Dini de f en x en la dirección del vector v* está dada por

$$D_v^+ f(x) := \limsup_{\delta \downarrow 0, w \to v} \frac{f(x + \delta w) - f(x)}{\delta}.$$

Analogamente, *la derivada inferior de Dini de f en x en la dirección del vector v* se obtiene al reemplazar lim sup en la expresión anterior por lim inf.

El resto de nuestra discusión amerita cierto manejo de las derivadas de Dini. La verificación de las siguientes propiedades por parte del lector constituye una ayuda al respecto.

EJERCICIO 3.7.1. Supongamos que $f : X \to \mathbb{R}$ es Lipschitz de rango $\mathcal{L}$.
(a) Demuestre que para cada x y v se verifica

$$D_v^+ f(x) = \limsup_{\delta \downarrow 0} \frac{f(x + \delta v) - f(x)}{\delta}.$$

Además, $D_0^+ f(x) = 0$ y la función $v \to D_v^+ f(x)$ es Lipschitz de rango $\mathcal{L}$.
(b) $D_{\lambda v}^+ f(x) = \lambda D_v^+ f(x)$ para cualquier $\lambda > 0$.
(c) Escriba y pruebe las fórmulas anteriores correspondientes a $D_v^- f(x)$.

Como requisito técnico para abordar los resultados sobre estabilidad, presentamos el siguiente estimado, el cual emula a la fórmula de Newton-Leibniz dentro del contexto de las derivadas de Dini.

Lema 3.7.1. *Sean $g, j : [0, T] \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Supongamos que $D_1^+ g(t) \leq j(t)$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces,*

$$g(T) - g(0) \leq \int_0^T j(t)\, dt.$$

Demostración. Sean $t_0 = 0$ y $\varepsilon > 0$. Ya que $D_1^+ g(t) \leq j(t)$, debe existir $\delta_0 > 0$ tal que

$$g(t_0 + \delta_0) \leq g(t_0) + \delta_0 j(t_0) + \delta_0 \varepsilon.$$

De manera inductiva definimos $t_{i+1} = t_i + \delta_i$, para $i = 0, 1, \ldots$, donde el número $\delta_i > 0$ satisface

$$g(t_i + \delta_i) \leq g(t_i) + \delta_i j(t_i) + \delta_i \varepsilon, \tag{3.24}$$

para cada i. Sea $\hat{t} := \sup\{t_i : i = 0, 1, \ldots\}$ y veamos que $\hat{t} = T$. En efecto, supongamos que $\hat{t} < T$. Si $\delta > 0$, el hecho de ser t_i creciente y acotada por $\hat{t}$ garantiza que $t_i+\delta > \hat{t}$ para i suficientemente grande. Por lo tanto,

$$g(t_i+\delta) > g(t_i) + \delta j(t_i) + \delta\varepsilon,$$

para i suficientemente grande. Por la continuidad de g y j al tomar el límite cuando $i \to \infty$, tenemos

$$g(\hat{t}+\delta) \geq g(\hat{t}) + \delta j(\hat{t}) + \delta\varepsilon,$$

para todo $\delta > 0$, o equivalentemente

$$\frac{g(\hat{t}+\delta) - g(\hat{t})}{\delta} \geq j(\hat{t}) + \varepsilon.$$

Tomando ahora límite cuando $\delta \downarrow 0$ se deduce que $D_1^+ g(\hat{t}) > j(\hat{t})$, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, $\hat{t} = T$. Tomando suma en (3.24) se verifica que

$$g(T) - g(0) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i j(t_i) + T\varepsilon.$$

Es claro que si los números $\delta_i > 0$ son suficientemente pequeños, el siguiente estimado se satisface:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i j(t_i) \leq \int_0^T j(t)\,dt + \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$g(T) - g(0) \leq \int_0^T j(t)\,dt + (T+1)\varepsilon$$

Ya que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos el estimado anunciado. $\square$

3.7.1. Método directo de Lyapunov

A partir de este punto presentamos varias condiciones suficientes asociadas a los conceptos de estabilidad formulados anteriormente. En los mismos asumiremos que F satisface las hipótesis básicas de la sección 3.6. Cabe destacar que se han corregidos algunos errores presentes en las pruebas de los resultados provistos en [37]. En particular, se ha incluido la hipótesis sine qua non de continuidad sobre las funciones V y W que participan activamente en el establecimiento de tales resultados.

Teorema 3.7.1. *Supongamos que existe un número $\eta > 0$ y funciones continuas $V : X \to \mathbb{R}$, $W : X \to \mathbb{R}$ tales que V es definida positiva, W es semidefinda negativa y*

$$D_v^+ V(x) \leq W(x),$$

para todo $v \in F(x)$ cuando $\|x\| \leq \eta$. Entonces, el equilibrio $x = 0$ es estable para el sistema (2.1).

Demostración. Sea $\varepsilon \in (0, \eta)$ y consideremos el conjunto $\Omega := \{x \in X : \|x\| = \varepsilon\}$. Tomemos ω como el valor mínimo de V sobre Ω, el cual existe en virtud de la compacidad de Ω y la continuidad de V. Es claro que $\omega > 0$. Seleccionemos $\alpha > 0$ tal que $V(x) < \omega$ para todo $\|x\| < \alpha$ y consideremos una solución $x(\cdot)$ de (2.1) tal que $\|x(0)\| < \alpha$. Resulta claro que $\alpha \leq \varepsilon$. De acuerdo al Ejercicio 2.4.4 la solución $x(\cdot)$ existe sobre todo el intervalo $[0, \infty)$. Además, dado $\gamma = \alpha - \|x_0\| > 0$, por la continuidad de $x(\cdot)$ debe existir $\delta > 0$ tal que si $t \in [0, \delta)$, entonces

$$\|x(t)\| \leq \|x(t) - x_0\| + \|x_0\| < \gamma + \|x_0\| = \alpha \leq \varepsilon. \tag{3.25}$$

Observemos que para cada $t \in [0, \infty)$ y cada par $\tau, \theta > 0$ podemos escribir

$$V(x(t + \tau(1 + \theta))) = V\left(x(t) + \tau\left(\frac{x(t + \tau(1 + \theta)) - x(t)}{\tau}\right)\right). \tag{3.26}$$

Seleccionemos sucesiones $\tau_i \downarrow 0$ y $\theta_i \to 0$ tales

$$D_1^+(V \circ x)(t) = \limsup_{i\to\infty} \frac{V(x(t + \tau_i(1 + \theta_i))) - V(x(t))}{\tau_i}. \tag{3.27}$$

Utilizando la fórmula de Newton-Leibniz, la semicontinuidad superior de F en $x(t)$, y procediendo de manera análoga al Teorema 3.6.2, vemos que

$$\frac{x(t + \tau_i(1 + \theta_i)) - x(t)}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_i}\int_t^{t+\tau_i(1+\theta_i)} \dot{x}(s)\, ds \in F(x(t)) + \overline{B}(0, \varepsilon)$$

para i suficientemente grande. Ya que $F(x(t)) + \overline{B}(0, \varepsilon)$ es compacto y $\varepsilon > 0$ es arbitrario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\frac{x(t + \tau_i(1 + \theta_i)) - x(t)}{\tau_i} \to v,$$

para algún $v \in F(x(t))$. Por lo tanto, aplicando (3.26) en (3.27) obtenemos

$$\begin{aligned} D_1^+(V \circ x)(t) &= \limsup_{i\to\infty} \frac{V\left(x(t) + \tau_i \left(\frac{x(t+\tau_i(1+\theta_i))-x(t)}{\tau_i}\right)\right) - V(x(t))}{\tau_i} \\ &\leq \limsup_{\tau\downarrow 0, w\to v} \frac{V(x(t)+\tau w) - V(x(t))}{\tau} \\ &= D_v^+ V(x(t)). \end{aligned}$$

Según (3.25) y la hipótesis se tiene $D_v^+V(x(t)) \leq W(x(t))$ para todo $t \in [0,\delta)$. Del Lema 3.7.1 deducimos entonces

$$V(x(t)) - V(x(0)) \leq \int_0^t W(x(s))\,ds \leq 0, \text{ para todo } t \in [0,\delta),$$

es decir, $V(x(t)) \leq V(x(0)) < \omega$ para todo $t \in [0,\delta)$. Por la continuidad de $(V \circ x)(\cdot)$ es fácil ver que también $V(x(\delta)) \leq V(x(0)) < \omega$. Si $\|x(\delta)\| = \varepsilon$, entonces

$$w \leq V(x(\delta)) = \lim_{t\to\delta^-} V(x(t)) \leq V(x(0)) < \omega, \tag{3.28}$$

lo cual es imposible. La opción $\|x(\delta)\| > \varepsilon$ está también descartada en vista de la continuidad de la función $\|x(\cdot)\|$. Por lo tanto, $\|x(\delta)\| < \varepsilon$. El argumento anterior permite considerar el intervalo maximal $J = [0,T)$, con $[0,\delta] \subset J$, tal que $\|x(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \in J$. Para este intervalo maximal debe cumplirse que $T = \infty$. En efecto, supongamos que por el contrario $T < \infty$. Invocando de nuevo la continuidad de $(V \circ x)(\cdot)$ y asistiéndonos del mismo razonamiento que conlleva a (3.28), podemos concluir que $\|x(T)\| < \varepsilon$. De esta forma, al tomar a $x_0 = x(T)$ y $\overline{\gamma} = \varepsilon - \|x(T)\| > 0$, vemos que existe $\overline{\delta} > 0$ tal que

$$\|x(t)\| \leq \|x(t) - x(T)\| + \|x(T)\| < \overline{\gamma} + \|x(T)\| = \varepsilon,$$

para todo $t \in [T, \overline{\delta})$ y esto contradice la maximalidad de J. De esta forma $J = [0,\infty)$, lo cual implica que el origen $x = 0$ es estable. □

Corolario 3.7.1. *Supongamos que existe un número $\eta > 0$ y funciones continuas $V : X \to \mathbb{R}$, $W : X \to \mathbb{R}$ tales que V es definida positiva, W es definida negativa y*

$$D_v^+V(x) \leq W(x)$$

para todo $v \in F(x)$ cuando $\|x\| \leq \eta$. Entonces, el equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable para el sistema (2.1).

Demostración. El Teorema anterior establece la existencia de un número $\alpha > 0$ tal que, cualquier solución $x(\cdot)$ de (2.1), con $\|x(0)\| < \alpha$, está definida sobre $[0, \infty)$ y satisface $\|x(0)\| < \eta$ para todo $t \geq 0$. Falta verificar el comportamiento asintótico de $x(\cdot)$, es decir, $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Para ello, supongamos que dicha condición no se cumple. Entonces, debe existir $l \in \mathbb{R}$ tal que $V(x(t)) \geq l > 0$, para todo $t \geq 0$. En virtud de la continuidad de V en el origen, debe existir $\delta > 0$ tal que $V(x) < l$ cuando $\|x\| < \delta$. De las desigualdades anteriores se deduce que $\|x(t)\| \geq \delta$ para todo $t \geq 0$. Definamos $\mu := -\max\{W(x) : \delta \leq \|x\| \leq \eta\}$, el cual existe dada la continuidad de W y la compacidad del anillo $\{x : \delta \leq \|x\| \leq \eta\}$. Resulta claro que $W(x(t)) \leq -\mu$ para todo $t \geq 0$. Argumentando de manera similar al Teorema anterior y aplicando el Lema 3.7.1, vemos que

$$V(x(t)) - V(x(0)) \leq \int_0^t \mu s\, ds,$$

es decir, $V(x(t)) \leq V(x(0)) - \mu t$, para $t \geq 0$. Si t es suficientemente grande se deduce que $V(x(t)) < 0$, lo cual contradice la positividad de V. De esta manera, la función $V(x(t))$ admite valores tan pequeños como se quiera a medida que t aumenta. Ya que $V(x(t))$ es no creciente, tenemos $V(x(t)) \to 0$ cuando $t \to \infty$, y como consecuencia $\|x(t)\| \to 0$ cuando $t \to \infty$. $\square$

Dentro de la terminología anterior, el siguiente resultado proporciona requerimientos suficientes para la inestabilidad del origen.

Teorema 3.7.2. *Supongamos que existen $\eta > 0$ y funciones continuas $V : X \to \mathbb{R}$ y $W : X \to \mathbb{R}$ tales que $V(0) = 0$, y W es definida negativa, con*

$$D_v^+ V(x) \leq W(x)$$

para todo $v \in F(x)$ cuando $\|x\| < \eta$. Supongamos adicionalmente que para cada $\delta > 0$ existe al menos un $x \in X$, con $\|x\| < \delta$, tal que $V(x) < 0$. Entonces, el origen es inestable para (2.1).

Demostración. Sea $\alpha > 0$ tal que $\alpha < \eta$. Según la hipótesis es posible seleccionar x_0 con $\|x_0\| < \alpha$ y $V(x_0) < 0$. Consideremos una solución

$x(\cdot)$ de (2.1) tal que $x(0) = x_0$. Se sabe que dicha solución existe sobre todo $[0, \infty)$. Gracias a la continuidad de V y al hecho de que $V(0) = 0$, es fácil verificar que existe $\delta > 0$ tal que

$$V(x_0) < V(x), \text{ cuando } \|x\| < \delta. \tag{3.29}$$

Una vez más la continuidad de $x(\cdot)$ garantiza la existencia de un $\beta > 0$ tal que

$$\|x(t)\| < \eta, \text{ para todo } t \in [0, \beta). \tag{3.30}$$

Procediendo de manera similar al Teorema 3.7.1 y por aplicación del Lema 3.7.1, se deduce que

$$V(x(t)) \leq V(x_0) + \int_0^t W(x(s)), ds \leq V(x_0), \text{ cuando } t \in [0, \beta). \tag{3.31}$$

Según (3.29) y (3.31) es imposible tener $\|x(t)\| < \delta$ para algún $0 < t < \beta$. Consideremos de nuevo $\mu := -\max\{W(x) : \delta \leq \|x\| \leq \eta\}$. Regresando a (3.31) vemos que

$$V(x(t)) \leq V(x_0) - \mu t < -\mu t, \text{ para todo } t \in [0, \beta). \tag{3.32}$$

Afirmamos que debe existir un número $T > 0$ tal que $\|x(T)\| = \eta$. En efecto; si $\|x(\beta)\| = \eta$, entonces $T = \beta$ satisface tal requisito. Si $\|x(\beta)\| < \eta$, podemos tomar el límite cuando $t \to \beta^-$ en (3.32) para obtener $V(x(\beta)) < -\mu\beta$. Por esta razón, tiene sentido expandir el intervalo $[0, \beta)$ hasta obtener el intervalo maximal $[0, \hat{\beta})$ sobre el cual las condiciones (3.30) y (3.32) se satisfacen simultáneamente. Si $\hat{\beta} = \infty$, el hecho de estar el rango de $x(\cdot)$ contenido en el compacto $\{x : \delta \leq \|x\| \leq \eta\}$ y de ser V continua, implicaría la existencia de $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq V(x(t)) < -\mu t$, para todo $t \geq 0$, lo cual es imposible. Por lo tanto, $\hat{\beta} < \infty$ y así $\left\|x(\hat{\beta})\right\| = \eta$ (en caso contrario la desigualdad $\left\|x(\hat{\beta})\right\| < \eta$ contradice la maximalidad de $[0, \hat{\beta})$). Hemos demostrado que para cualquier $\alpha > 0$, por muy pequeño que este sea, es posible encontrar una trayectoria $x(\cdot)$ de (2.1) con $\|x(0)\| < \alpha$, tal que $\|x(T)\| = \eta$ para algún $T > 0$ suficientemente grande. Esta condición indica la inestabilidad del origen $x = 0$. $\square$

Culminamos la sección reseñando un conjunto de condiciones suficientes para la estabilidad débil y la estabilidad asintótica débil del sistema (2.1).

Teorema 3.7.3. *Supongamos que existe un número $\eta > 0$ y un par de funciones continuas $V : X \to \mathbb{R}$ y $W : X \to \mathbb{R}$ tales que V es definida positiva, W es semidefinida (definida) negativa y para cada solución $x(\cdot)$ de (2.1), con $\|x(0)\| \leq \eta$, se cumple*

$$V(x(t)) - V(x(0)) \leq \int_0^t W(x(s))\,ds, \quad \textit{para todo } t \geq 0.$$

Entonces, el equilibrio $x = 0$ es débilmente estable (asintóticamente estable).

Demostración. Sea $\varepsilon \in (0, \eta)$. Consideremos la esfera $\Omega := \{x : \|x\| = \varepsilon\}$ y sea $\omega := \min \{V(x) : x \in \Omega\}$. Ya que V es definida positiva, tenemos que $\omega > 0$. Definamos además $C := \{x \in \overline{B}(0, \varepsilon) : V(x) \leq \omega\}$. Una vez más la continuidad de V garantiza la existencia de $\alpha > 0$ tal que $V(x) < \omega$ cuando $\|x\| < \alpha$. Para cada $x_0 \in B(0, \alpha)$ podemos seleccionar una solución de (2.1) tal que $x(0) = x_0$, la cual existe sobre todo $[0, \infty)$, y que según la hipótesis satisface

$$V(x(t)) - V(x(0)) \leq \int_0^t W(x(s))\,ds, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

El resto de la prueba consiste en reproducir las ideas contenidas en las demostraciones del Teorema 3.7.1 y su Corolario 3.7.1. □

EJERCICIO 3.7.2. Supongamos que F satisface HB y que además $0 \in F(0)$. Entonces, el origen $x = 0$ es estable si y solamente si, existe una función $V : X \to \mathbb{R}$ definida positiva tal que:
(a) V es continua en $x_0 = 0$.
(b) $V(x(\cdot))$ es decreciente en $[0, \infty)$, para cada solución $x(\cdot)$ de (2.1).
(c) Existe $r > 0$ y una función $f : [0, r) \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:
  (*i*) f es estrictamente creciente,
  (*ii*) $f(t) > 0$, para todo $0 \leq t < r$,
  (*iii*) $V(x) \geq f(\|x\|)$, para todo $x \in B(0, r)$.

EJERCICIO 3.7.3. Supongamos que F satisface H1 y H2, pero existe $\alpha > 0$ tal que la hipótesis H3 es reemplazada por

$$\sup \{\|v\| : v \in F(x)\} \leq \alpha \|x\|, \text{ para todo } x \in X.$$

Sea además $0 \in F(0)$ y A una matriz cuadrada $n \times n$ con entradas reales tal que el origen $x = 0$ es asintóticamente estable para el sistema lineal $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Demuestre que si α es suficientemente pequeño, el origen $x = 0$ es asintóticamente estable para el sistema lineal perturbado

$$\dot{x}(t) \in Ax(t) + F(x(t)).$$

Índice Alfabético

Bibliografía

[1] M. Abbaszadeh, H. J. Marquez, *Nonlinear observer design for one-sided Lipschitz systems*, Proc. American Control Conf. Baltimore, USA. (2010), 5284 - 5289.

[2] J.-P. Aubin, *Viability theory*, Birkhäuser, Boston, 1991.

[3] J.-P. Aubin, A. Cellina, *Differential inclusions*, Springer, Berlin, 1984.

[4] J.-P. Aubin, H. Frankowska, *Set-valued analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.

[5] G. Bachman, L. Narici, *Functional analysis*, Dover, New York, 2000.

[6] R. Bartle, *A modern theory of integration*, Graduate Studies in Mathematics, Providence, Rodhe Island, **32**, 2001.

[7] R. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue measure*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.

[8] D. Bothe, *Multivalued differential equations on graphs and applications*, Ph.D. Thesis, Paderborn, 1992.

[9] D. S. Bridges, *Foundations of real and abstract analysis*, Springer, New York, 1998.

[10] X. Cai, Y. Lin, S. Hong, *Stabilisation for one-sided Lipschitz nonlinear differential inclusions*, IET Control Theory A. **7** (2013), 2172 - 2177, doi: 10.1049/iet-cta.2013.0136

[11] F. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Centre de recherches mathématiques, Montreal, 1989.

[12] F. Clarke, Yu. Ledyaev, R. Stern, P. Wolenski, *Nonsmooth analysis and control theory*, Springer, New York, 1998.

[13] M. G. Crandall, P.-L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 1 - 42.

[14] K. Deimling, *Multivalued differential equations*, De Gruyter, Berlin, 1992.

[15] K. Deimling, P. Szilágyi, *Periodic solutions of dry friction problems*, Z. Angew. Math. Phys. **45** (1994), 53 - 60.

[16] T. Donchev, V. Ríos, P. Wolenski, *A characterization of strong invariance for perturbed dissipative systems*, Optimal Control, Stabilization, and Nonsmooth Analysis, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Springer-Verlag, Heidelberg. **301** (2004), 343–349.

[17] T. Donchev, V. Ríos, P. Wolenski, *Strong invariance and one-sided Lipschitz multifunctions*, Nonlinear Anal. Theor. **60** (2005), 849-862.

[18] A. Filippov, *Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side*, SIAM J. Control. **5** (1997), 609 - 621.

[19] H. Frankowska, *Lower semicontinuous solutions of the Hamilton-Jacobi equation*, SIAM J. Control Optim. **31** (1993), 257 - 272.

[20] T. Hawkins, *Lebesgue's theory of integration, its origins and developments*, University of Wisconsin Press, Madison, 1970. Reprinted by Amer. Math. Soc. Chelsea Ser., 1998.

[21] E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer, New York, 1965.

[22] S. Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J. **8** (1941), 457 - 459.

[23] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Dover, New York, 1975.

[24] M. Kunze, *Non-smooth dynamical systems*, Springer, Berling, 2000.

[25] N. Lusin, *Sur les propriétés des fonctions mesurables*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. **154** (1912), 1688 - 1690.

[26] A. Marchaud, *Sur le champs de demi-cones et equations differentielles du premier ordre*, Bull. Soc. Math. France. **62** (1934), 1 - 38.

[27] A. Marchaud, *Sur le champs continus de demi-cones convexes et leur integrales*, Compositio Math. **3** (1936), 89 - 127.

[28] E. Michael, *Continuous Selections. I*, Ann. of Math. 2nd Ser. **63** (1956), 361 - 382.

[29] J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, New Jersey, 2000.

[30] J. F. Nash, *Equilibrium Points in N-Person Games*, Proc. Nat. Acad. Sci. **36** (1950), 48 - 49.

[31] I. K. Rana, *An introduction to measure and integration*, Second Edition, Graduate Studies in Mathematics, Providence, Rodhe Island, **45**, 2002.

[32] A. E. Rapaport, R. B. Vinter, *Invariance properties of time measurable differential inclusions and dynamic programming*, J. Dyn. Control Syst. **2** (1996), 423 - 448.

[33] V. Ríos, *Dissipative Lipschitz dynamics*, ProQuest Information and Learning Company, UMI 3167150, Louisiana State University and Agricultural & Mechanical College, 2005, AAT 3167150.

[34] V. Ríos, P. Wolenski, *A characterization of strongly invariant systems for a class of non-Lipschitz multifunctions*, Proc. 42nd IEEE CDC, Maui, Hawaii, USA. (2003), 2593 - 2594.

[35] V. Ríos, P. Wolenski, *Proximal characterization of the reachable set for a discontinuous differential inclusion*, Ser. Adv. Math. App. Sci. Worldscientific. **76** (2008), 270–279.

[36] R.-T. Rockafellar, R. Wets, *Variational Analysis*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[37] G. Smirnov, *Introduction to the theory of differential inclusions*, Graduate Studies in Mathematics, Providence, Rhode Island, **41**, 2002.

[38] B. Thomson, J. Bruckner, A. Bruckner, *Elementary real analysis*, Prentice Hall, New Jersey, 2008.

[39] A. Tolstonogov, *Differential inclusions in a Banach space*, Kluwer, Dordrecht, 2000.

[40] A. Tolstonogov, *On the Scorza-Dragoni theorem for multi-valued mappings with a variable domain of definition*, Mat. Zametki. **48** (1990), 109 - 120.

[41] A. Vitali, *Sulle funzioni integrali*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **40** (1905), 1021 - 1034.

[42] P. Wolenski, *A uniqueness theorem for differential inclusions*, J. Differ. Equations. **84** (1990), 165 - 182.

[43] P. Wolenski and Y. Zhuang, *Proximal analysis and the minimal time function*, SIAM J. Control Optim. **36** (1998), 1048 - 1072.

[44] S. C. Zaremba, *Sur une extension de la notion d' equation diferentielle*, C. R. Acad. Sci. Paris. **199** (1934), A545 - A548.

[45] S. C. Zaremba, *Sur les equations an paratingent*, Bull. Sci. Math. **60** (1936), 139 - 160.

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela.

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela

IVIC