XXVIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA–VENEZUELA 2015

TEORÍA DE HIPERGRUPOS, PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE Y POLINOMIOS ORTOGONALES

Yamilet Quintana

MÉRIDA, VENEZUELA, 30 de agosto al 4 de septiembre de 2015

XXVIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

TEORÍA DE HIPERGRUPOS, PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE Y POLINOMIOS ORTOGONALES

Yamilet Quintana

Universidad Simón Bolívar. Venezuela

yquintana@usb.ve

MÉRIDA, VENEZUELA, 30 DE AGOSTO AL 04 DE SEPTIEMBRE DE 2015

XXVIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana. La XXVIII Escuela Venezolana de Matemáticas recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Banco Central de Venezuela, el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), la Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) y Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA).

2010 Mathematics Subject Classification: 42C05, 42C10, 33C45 (33C25, 30E05).

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
Rif: G-20004206-0

Teoría de hipergrupos, problemas de Sturm-Liouville y polinomios ortogonales
Yamilet Quintana

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas
Depósito legal lfi66020156202236
ISBN 978-980-261-164-5
Caracas, Venezuela
2015

Índice general

PREFACIO

La Teoría de hipergrupos fue introducida independientemente por Dunkl [21], Jewett [32] y Spector [62] en los años 70's. Esta teoría permitió generalizar los conceptos de grupos localmente compactos con el propósito de hacer un Análisis Armónico estándar. Más tarde, resultados de análisis armónico sobre hipergrupos pudieron ser utilizados en diferentes aplicaciones. Por ejemplo, un teorema de Bochner es usado esencialmente en el contexto de procesos débilmente estacionarios indexados por hipergrupos (cfr. [37] y las referencias allí sugeridas), la estructura de hipergrupo es también fuertemente usada en Probabilidad [6] y en Aproximación con respecto a sucesiones de polinomios ortogonales (ver [36, 37, 60]).

Este curso de carácter introductorio, está inspirado en una serie de charlas dictadas por A. L. Schwartz en 1.995 en ocasión de la realización del congreso *Harmonic Analysis and Hypergroups* [60], y, a través de él se pretende que el participante se familiarice con las conexiones existentes entre hipergrupos, problemas de Sturm-Liouville y polinomios ortogonales estándar y de Sobolev. Intentaremos hacer enfásis en las relaciones entre hipergrupos y polinomios ortogonales de Sobolev, incluyendo algunos resultados que, hasta donde la autora conoce, no están disponibles en la literatura.

El material está organizado de la siguiente manera: En el primer capítulo, se desarrollan las nociones básicas necesarias sobre ortogonalidad estándar y ortogonalidad Sobolev. El segundo capítulo comprende una ligera introdución de la teoría de hipergrupos y su conexión con Problemas de Sturm-Liouville, mientras que el tercer capítulo está dedicado a lass relaciones entre polinomios ortogonales e hipergrupos y algunos problemas abiertos en el contexto de ortogonalidad Sobolev.

Cada uno de los capítulos de esta monografía se divide en secciones. La numeración de cada resultado (lema, proposición, teorema o corolario) esta en concordancia con la sección respectiva. Además, la numeración de las fórmulas está en correspondencia con el capítulo donde se encuentran. Al final de cada capítulo, se presenta un grupo de ejercicios relacionados con sus contenidos. La conclusión de cada demostración se indica mediante el símbolo $\blacksquare$.

Finalmente, quiero agradecer a la Profesora Ajit Iqbal Singh del Indian Statistical Institute de New Delhi, por su generosidad y por haberme motivado a estudiar estos temas, y al comité organizador del XXVIII Escuela Venezolana de Matemáticas por la oportunidad de dictar este curso, espero que este material, sirva de guía, estímulo y referencia, a todas aquellas personas que tengan la oportunidad de leerlo.

Yamilet Quintana.

NOTACIÓN

NOTACIÓN

ϕ_n	caracteres de un hipergrupo.
$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	números enteros, enteros no negativos, reales y complejos, respectivamente.
$\mathbb{I}$	subconjunto no finito de $\mathbb{R}$.
$\mathbb{T}$	circunferencia unidad.
$\mathbb{P}$	espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes reales.
$\mathbb{P}_n$	subespacio vectorial de todos los polinomios de grado a lo sumo n.
X	espacio localmente compacto.
$M(X)$	medidas regulares de Borel a valores complejos sobre X.
$M^+(X)$	medidas regulares de Borel a valores complejos, no negativas sobre X.
$M_c(X)$	medidas regulares de Borel a valores complejos con soporte compacto sobre X.
$M_c^+(X)$	medidas regulares de Borel a valores complejos, no negativas y con soporte compacto sobre X.
$C(X)$	espacio de las funciones continuas sobre X.
$C_c(X)$	espacio de las funciones continuas sobre X a soporte compacto.
$C_c^*(X)$	espacio dual de $C_c(X)$.
$(X, *)$	hipergrupo con operación $*$ y espacio base X.
μ	medida de Borel o medida regular de Borel.
$\mathrm{supp}(\mu)$	soporte de la medida μ.
M_x, M_z	operador multiplicación por la variable x, o por la variable z, respectivamente.

Capítulo 1

ORTOGONALIDAD ESTÁNDAR Y ORTOGONALIDAD SOBOLEV

Las nociones que presentaremos sobre ortogonalidad estándar y ortogonalidad Sobolev son las que ciertamente encontraremos en libros como [10, 24, 40, 44, 63]. Aunque por cuestiones metodológicas, nuestra exposición a lo largo de este capítulo será muy similar a la hecha en [44, 54].

1.1. Ortogonalidad estándar

Sea $\mathbb{P}$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}$ el subespacio de los polinomios de grado a lo sumo n. Denotaremos por $M_x : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ al operador multiplicación por la variable independiente x, es decir,

$$M_x(p) = xp, \text{ para todo } p \in \mathbb{P}. \tag{1.1}$$

DEFINICIÓN 1.1. *Sea* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to [0, \infty)$ *un producto interno sobre* $\mathbb{P}$. *Una sucesión de polinomios* $\{p_n\}_{n \geq 0}$ *se llamará sucesión de polinomios ortogonales con respecto al producto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *si satisface*

1. *Para todo* $n \in \mathbb{Z}_+$ *se cumple que* $\operatorname{grad}(p_n) = n$.

2. $\langle p_n, p_m \rangle = 0$ *si* $n \neq m$, *y* $\langle p_n, p_n \rangle \neq 0$

Definición 1.2. *Sea* $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{P}\times\mathbb{P}\to[0,\infty)$ *un producto interno sobre* $\mathbb{P}$*. Diremos que* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *es un producto interno estándar sobre* $\mathbb{P}$*, si el operador* M_x *es autoadjunto, es decir,*

$$\langle M_x(p),q\rangle = \langle xp,q\rangle = \langle p,xq\rangle = \langle p,M_x(q)\rangle,\ \ \textit{para todo } p,q\in\mathbb{P}. \quad (1.2)$$

Definición 1.3. *Diremos que una sucesión de polinomios ortogonales* $\{p_n\}_{n\geq 0}$ *es estándar si es ortogonal con respecto a un producto interno estándar sobre* $\mathbb{P}$*.*

Ejemplo 1.1.1.

1. *Sea* μ *una medida de Borel positiva cuyo soporte es un subconjunto* $\mathbb{I}$*, no finito, de la recta real y tal que*

   $$\int_{\mathbb{I}} |x|^n d\mu(x) < \infty,$$

   para todo $n\in\mathbb{Z}_+$*.*

   No es difícil ver que el producto interno $\langle p,q\rangle_\mu = \int_{\mathbb{I}} p(x)q(x)d\mu(x)$ *es un producto interno estándar sobre* $\mathbb{P}$*, que permite definir de manera unívoca una sucesión de polinomios ortogonales mónicos* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *tal que*

   $$\langle P_n,x^k\rangle_\mu = \int_{\mathbb{I}} P_n(x)x^k d\mu(x) = 0,\ \ \textit{para } k=0,1,\ldots,n-1. \quad (1.3)$$

   La sucesión $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *se denomina* **sucesión estándar de polinomios ortogonales mónicos respecto a la medida** μ*.*

2. *Podemos definir sobre* $\mathbb{P}_n$ *un producto interno no estándar de la manera siguiente: Sean* $p,q\in\mathbb{P}_n$*,*

   $$p(x)=\sum_{i=0}^{k} a_i x^i \qquad y \qquad q(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j,$$

   donde a_i*,* $b_j\in\mathbb{R}$*,* $(0\leq i\leq k)$*,* $(0\leq j\leq m)$*,* $(0\leq k,m\leq n)$*, y* $a_k b_m\neq 0$*.*
   Si $\langle p,q\rangle=\sum_{i=0}^{min(k,m)} a_i b_i$*, entonces se verifica que* $\langle xp,q\rangle=\sum_{i=0}^{min(k+1,m)} a_i b_{i+1}$*, mientras que* $\langle p,xq\rangle=\sum_{i=0}^{min(k,m+1)} a_{i+1} b_i$*, y estas dos sumas, en general, no son iguales.*

Algunos ejemplos de sistemas ortogonales de funciones son los siguientes.

Ejemplo 1.1.2.

a) La sucesión $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots\right\}$ *es una sucesión ortonormal con respecto al producto interno*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

(Verifíquelo).

b) El conjunto $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \operatorname{sen} x, \ldots, \cos(N-1)x, \operatorname{sen}(N-1)x\right\}$ *es ortogonal con respecto a*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{2N} f(x_j)g(x_j), \qquad \text{donde } x_j = \frac{j\pi}{N}.$$

(Verifíquelo).

c) La sucesión de polinomios de Tchebycheff de 1er. tipo $\{T_n\}_{n\geq 0}$*, definida mediante la fórmula de Rodrigues por*

$$T_n(x) \quad := \quad (1-x^2)\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right\}, \quad x \in [-1,1],$$

es ortogonal con respecto al producto interno

$$\langle f, g\rangle_w = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)dx, \qquad \text{donde } w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(Verifíquelo haciendo el cambio de variable $x = \cos\theta$*).*

d) Para $\alpha, \beta > -1$*, la sucesión de polinomios de Jacobi* $\left\{P_n^{(\alpha,\beta)}\right\}_{n\geq 0}$*, definida mediante la fórmula de Rodrigues por*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \quad := \quad (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right\},$$

para $x \in (-1,1)$.

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) \;:=\; \binom{n+\alpha}{n}, \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) := (-1)^n \binom{n+\beta}{n},$$

es ortogonal con respecto al producto interno

$$\langle f, g\rangle_{w^{(\alpha,\beta)}} = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)dx, \quad \textit{donde } w^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta.$$

e) La sucesión de polinomios de Hermite $\{H_n\}_{n\geq 0}$*, definida mediante la fórmula de tipo Rodrigues por*

$$H_n(x) \;:=\; (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

es ortogonal con respecto al producto interno

$$\langle f, g\rangle_w = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)w(x)dx, \quad \textit{donde } w(x) = e^{-x^2}.$$

(Verifíquelo).

f) Para $\alpha > -1$*, la sucesión de polinomios de Laguerre* $\left\{L_n^{(\alpha)}\right\}_{n\geq 0}$*, definida mediante la fórmula de Rodrigues por*

$$L_n^{(\alpha)}(x) \;:=\; \frac{x^\alpha e^{-x}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^{n+\alpha}e^{-x}\right\}, \quad x \in [0,\infty),$$

es ortogonal con respecto al producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{\infty} f(x)g(x)w(x)dx, \quad \textit{donde } w(x) = x^\alpha e^{-x}.$$

(Verifíquelo).

En este ejemplo, los items del c) al f) del ejemplo 1.1.2 representan sucesiones estándar de polinomios ortogonales.

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno estándar sobre $\mathbb{P}$ y denotamos por μ_n al momento de orden n asociado a este producto interno, es decir,

$$\mu_n = \langle 1, x^n\rangle, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Entonces es posible obtener una expresión explícita, como cociente de determinantes, para el n-ésimo polinomio ortogonal mónico $\hat{P}_n$ asociado a este producto interno.

Proposición 1.1.1. *Sea* $\{\hat{P}_n\}_{n\geq 0}$ *la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a un producto interno estándar. Entonces, para cada* $n \in \mathbb{Z}_+$*, el polinomio* $\hat{P}_n$ *viene dado por*

$$\begin{aligned}\hat{P}_0(x) &= 1,\\ \hat{P}_n(x) &= \frac{1}{H_{n-1}}\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix},\end{aligned}$$

donde H_n *es el determinante de Hankel de orden* $n+1$ *asociado a los* $2n+1$ *primeros momentos, es decir,*

$$H_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}.$$

Demostración. Consulte, por ejemplo [10, 24, 63].

■

Una de las propiedades fundamentales, de indudable interés numérico, de los polinomios ortogonales estándar, es que se pueden generar de forma recurrente.

Teorema 1.1. *(Fórmula de recurrencia a tres términos).*
Sea $\{\hat{P}_n\}_{n\geq 0}$ *la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a un producto interno estándar. Entonces se verifica la siguiente relación de recurrencia a tres términos*

$$\hat{P}_{n+1}(x) = (x-\lambda_n)\,\hat{P}_n(x) - \gamma_n \hat{P}_{n-1}(x), \tag{1.4}$$

siempre que $n \geq 0$, $\hat{P}_{-1} = 0$, $\gamma_0 \in \mathbb{R}$*, y además,*

$$\lambda_n = \frac{\langle x\hat{P}_n, \hat{P}_n\rangle}{\|\hat{P}_n\|^2}, \;\; para \;\; n \geq 0 \;\; y$$

$$\gamma_n = \frac{\|\hat{P}_n\|^2}{\|\hat{P}_{n-1}\|^2}, \;\; para \;\; n \geq 1.$$

Demostración. (Cfr. [10]).
Expresando xP_n en términos de la base ortogonal $\{P_0, \dots, P_n\}$, tenemos

$$x\hat{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{n,k}\hat{P}_k(x), \quad c_{n,k} = \frac{\langle x\hat{P}_n, \hat{P}_k\rangle}{\|\hat{P}_k\|^2}.$$

Como el producto interno es estándar:

$$\langle x\hat{P}_n, \hat{P}_k\rangle = \langle \hat{P}_n, x\hat{P}_k\rangle,$$

y por ortogonalidad: $c_{n,k} = 0$, para $0 \leq k < n-1$.

Por otro lado, $x\hat{P}_n$ es mónico $\Rightarrow c_{n,n+1} = 1$. Luego:

$$x\hat{P}_n(x) = \hat{P}_{n+1}(x) + c_{n,n}\hat{P}_n(x) + c_{n,n-1}\hat{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

de donde se deduce (1.4).

■

Recíprocamente, cualquier sucesión de polinomios mónicos en $\mathbb{P}$ que satisfaga (1.4) con γ_n real positivo y λ_n real, es una sucesión estándar de polinomios ortogonales mónicos respecto a alguna medida μ (no necesariamente única)*.

Es sencillo verificar que el Teorema 1.1 toma la siguiente forma cuando se enuncia para la sucesión estándar de polinomios ortonormales con respecto a una medida μ.

Teorema 1.2. *(FR3T para polinomios ortonormales con respecto a una medida μ).*
Sea $\{p_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión estándar de polinomios ortonormales respecto a una medida μ. Entonces se verifica la siguiente relación de recurrencia a tres términos

$$xp_{n+1}(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_np_n(x) + a_np_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{1.5}$$

donde $p_{-1} = 0$, $p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}$, con $\mu_0 = \int d\mu(x)$, $a_0 \in \mathbb{R}$ y

$$a_n = \int xp_n(x)p_{n-1}(x)d\mu(x), \quad b_n = \int xp_n^2(x)d\mu(x).$$

*Este resultado es conocido como Teorema de Favard. Apareció en J. Favard, *Sur les polynômes de Tchebysheff*, C. R. Acad. Sci. Paris **200** (1935), 2052–2055. Consulte, por ejemplo [40] y las referencias allí sugeridas

En términos matriciales, la relación (1.4) viene dada por

$$x\begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \end{pmatrix} = J_n \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \end{pmatrix} + P_n(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

donde J_n es una matriz tridiagonal

$$J_n = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_1 & \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \lambda_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{n-1} & \lambda_{n-1} \end{pmatrix},$$

conocida con el nombre de matriz mónica de Jacobi de orden n.

Una consecuencia inmediata de la relación (1.6) es la siguiente

Proposición 1.1.2. *Si x_0 es un cero de P_n , entonces es un autovalor de J_n.*

Obsérvese que la matriz infinita J_∞ dada por

$$J_\infty = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_1 & \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \gamma_2 & \lambda_2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

satisface la relación

$$x\begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = J_\infty \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

J_∞ es conocida en la literatura con el nombre de matriz de Jacobi. A partir de esta matriz podemos introducir un operador $\mathbf{J} : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ de la forma siguiente: Dada $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$, definimos $\mathbf{J}(\alpha) = \{\beta_i\}_{i\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ como la sucesión cuyos términos vienen dados por

$$\mathbf{J}(\alpha) = J_\infty \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0\alpha_0 + \alpha_1 \\ \gamma_1\alpha_0 + \lambda_1\alpha_1 + \alpha_2 \\ \gamma_2\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \alpha_3 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1}\alpha_{n-2} + \lambda_{n-1}\alpha_{n-1} + \alpha_n \\ \vdots \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

es decir, $\beta_i = \sum_{j=0}^{\infty} u_{ij}\alpha_j$, donde u_{ij} representa la entrada (i, j) de la matriz J_∞.

El operador $\mathbf{J}$ es un operador autoadjunto con respecto al producto interno usual sobre $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ y tiene un vector cíclico: $e_0 = \{1, 0, 0, \ldots\}$. Entonces, por el teorema espectral $\mathbf{J}$ es unitariamente equivalente al operador multiplicación por x, M_x en $L^2(\mu)$, es decir, el operador unitario $U : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \mathbb{P}$ dado por

$$U(e_n) = \frac{P_n}{\|P_n\|}, \quad e_n = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$$

puede ser extendido a un operador unitario $\mathbf{U} : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to L^2(\mu)$, tal que

$$\mathbf{J} = \mathbf{U}^{-1} M_x \mathbf{U}.$$

En este contexto, la medida μ se denomina medida espectral asociada a $\mathbf{J}$.

1.2. Ortogonalidad Sobolev

Como cabría esperar, en esta sección describiremos un tipo de ortogonalidad no perteneciente al caso estándar, intensamente estudiada desde la década de los años ochenta del siglo pasado.

Un *producto interno de Sobolev* sobre el espacio $\mathbb{P}$ o sobre el espacio $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ es, esencialmente, un producto interno que involucra a las derivadas de los polinomios hasta un cierto orden.

A modo de ejemplo, un tal producto interno puede ser definido de la siguiente manera:

Sea $(\mu_0, \ldots, \mu_m)$ un vector de $m+1$ medidas positivas de Borel soportadas en $\mathbb{C}$ tales que

$$\int_{\mathbb{C}} |z|^{2n} d\mu_k(z) < \infty, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad k = 0, \ldots, m,$$

es decir, cada elemento de la sucesión $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una función de cuadrado integrable para cada μ_k, $(k = 0, \ldots, m)$, o, equivalentemente,

$$\{z^n\}_{n=0}^{\infty} \subset L^2(\mu_k), \quad (k = 0, \ldots, m).$$

Supondremos, adicionalmente, que el soporte de μ_0 contiene, al menos, un número infinito de puntos, y que μ_m no es la medida nula. Así pues, llamaremos producto interno de Sobolev sobre $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ asociado al vector de medidas $(\mu_0, \ldots, \mu_m)$, al definido por

$$\langle p, q \rangle_S = \sum_{k=0}^{m} \int p^{(k)}(z) \overline{q^{(k)}(z)} d\mu_k(z) = \sum_{k=0}^{m} \langle p^{(k)}, q^{(k)} \rangle_{L^2(\mu_k)}, \tag{1.9}$$

para todo $p, q \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$, donde $q^{(k)}$ denota la derivada k-ésima del polinomio q.

La norma asociada a (1.9) se llama *norma de Sobolev* y, como es usual, se define mediante

$$\|q\|_S = \langle q, q \rangle_S^{1/2} = \left(\sum_{k=0}^{m} \|q^{(k)}\|^2_{L^2(\mu_k)} \right)^{1/2}.$$

De manera análoga a la ortogonalidad estándar, diremos que una sucesión de polinomios $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal con respecto al producto interno (1.9), si para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ se tiene que $grad(Q_n) = n$ y

$$\langle Q_n, Q_m \rangle_S \begin{cases} \neq 0, & n = m \\ = 0, & n \neq m \end{cases}$$

En este caso Q_n es el n-ésimo *polinomio ortogonal de Sobolev* asociado al producto interno dado en (1.9).

Nuevamente si $\langle Q_n, Q_n\rangle_S = 1,\ \forall\ n \in \mathbb{Z}_+,$ se dice que la sucesión es ortonormal. El n-ésimo *polinomio ortogonal mónico de Sobolev* es aquel polinomio $\tilde{Q}_n(z)$ que satisface

$$\langle \tilde{Q}_n, \tilde{Q}_m\rangle_S \begin{cases} \neq 0, & n = m \\ = 0, & n \neq m \end{cases}$$

y su coeficiente principal (coeficiente líder) es igual a 1.

Así, la sucesión $\{\tilde{Q}_n\}_{n\geq 0}$ queda definida unívocamente por las condiciones:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_n(z) &= z^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_{i,n} z^i,\ (c_{i,n} \in \mathbb{C}) \\ \langle \tilde{Q}_n\,,\, z^k\rangle_S &= 0\,,\ \ k = 0\,, 1, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Si $q_n(z)$ es el polinomio ortonormal de grado n correspondiente al producto (1.9) , entonces

$$q_n(z) = \frac{1}{\|Q_n\|_S} Q_n(z)\ ,\ \ n = 0\,, 1, 2, \ldots\ .$$

Desde su inicio, el estudio de los polinomios ortogonales de Sobolev puso al descubierto que existen marcadas diferencias entre éstos y los polinomios ortogonales estándar con respecto a una medida μ. En efecto, se sabe que en el caso estándar los ceros de la sucesión de polinomios ortogonales se encuentran en el interior de la cápsula convexa del soporte de la medida de ortogonalidad. Sin embargo, en 1962 Althammer [1] consideró el siguiente ejemplo de producto interno de Sobolev

$$\langle p, q\rangle_S = \int p(x)q(x)d\mu_0(x) + \int p'(x)q'(x)d\mu_1(x). \tag{1.11}$$

donde $\mathrm{supp}(\mu_0) = \mathrm{supp}(\mu_1) = [-1\,,\,1]$,

$$d\mu_0(x) = dx\ ,\quad d\mu_1(x) = \begin{cases} 10dx\,, & -1 \leq x < 0 \\ dx\,, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

para el cual el polinomio ortogonal mónico de segundo grado,

$$\tilde{Q}_2(x) = x^2 + \frac{27}{35}x - \frac{1}{3},$$

tiene un cero en $x = -1,08 \notin [-1\,,\,1]$. Como se observó posteriormente, la existencia de un cero fuera del soporte de la medida de ortogonalidad es un hecho muy frecuente en los polinomios ortogonales de Sobolev (ver [52]). Incluso puede ocurrir que muchos de estos ceros sean complejos.

Otra distinción importante a destacar en relación con los productos de Sobolev es la siguiente:

Supongamos en (1.9) que $\mathbb{I}_k = \operatorname{supp}(\mu_k) \subset \mathbb{R}$, $k = 0\,,\ldots,m$, donde I_k es un intervalo y $p, q \in \mathbb{P}$, entonces

$$\langle p, q\rangle_S = \sum_{k=0}^{m} \int_{\mathbb{I}_k} p^{(k)}(x)\, q^{(k)}(x) d\mu_k(x). \tag{1.12}$$

Si en (1.12) $m \geq 1$, consideramos el operador de multiplicación por x, M_x sobre el espacio $\mathbb{P}$ es claro que M_x no es autoadjunto con respecto a (1.12). Como ya hemos dicho la simetría de este operador con respecto al producto interno es decisiva en la búsqueda de una fórmula de recurrencia a tres términos.

En [22] se prueba que si en (1.12) μ_k , $k = 1\,,\ldots,m$, son medidas atómicas con soporte formado por un número finito de puntos, es decir, es una combinación lineal finita de deltas de Dirac, entonces la sucesión de polinomios ortogonales (única salvo una constante multiplicativa no nula) con respecto al producto (1.12), satisface una relación de recurrencia con un número finito de términos que no depende del grado del polinomio.

También en [1], Althammer consideró el producto interno de Sobolev

$$\langle p, q\rangle_S = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx + \lambda \int_{-1}^{1} p'(x)q'(x)dx, \tag{1.13}$$

donde $\lambda > 0$. Este producto recibe el nombre de producto interno de Legendre-Sobolev y sus polinomios ortogonales asociados pueden verse como generalizaciones de los polinomios clásicos de Legendre.

Históricamente, el trabajo de P. Althammer fue el primero en considerar como materia de estudio los polinomios ortogonales de Sobolev. La motivación para la consideración de estos sistemas de polinomios fue *el problema de la mejor aproximación polinomial por mínimos cuadrados* en la métrica inducida por el producto interno (1.13).

Como sabemos, la solución de este problema es

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \langle f\,,\, q_k \rangle_S \, q_k \ ,$$

donde $\{q_n\}$ es la sucesión de polinomios ortonormales de Sobolev con respecto al producto (1.13).

Al igual que en [1], trabajos posteriores de W. Gröbner [29], J. Brenner [5], F. W. Schäfke [57] y, finalmente, E. A. Cohen [11], consideraron casos particulares del producto (1.12) al tomar como μ_0 y μ_1 medidas absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue soportadas sobre un cierto intervalo de la recta real y definidas por pesos clásicos.

Después del trabajo de E. A. Cohen en el año 1.975, no se reportaron estudios sobre esta temática hasta finales de la década de los ochenta. Por tal motivo, podemos considerar los años comprendidos entre 1.962, en que aparece el trabajo de Althammer, y 1.975, como la primera etapa de desarrollo de la teoría de los polinomios de Sobolev. Una característica común a todos los trabajos de esta etapa, es el empleo de la integración por partes como herramienta fundamental de trabajo.

La segunda etapa en el estudio de los polinomios de Sobolev, que comenzó a finales de la década de los 80 y se prolonga hasta nuestros días, se ha enfocado desde puntos de vista formalmente diferentes, según el tipo de producto interno de Sobolev involucrado [49]:

(a) El llamado *caso no diagonal* estudia polinomios ortogonales respecto a productos internos de la forma

$$\langle f, g \rangle_S = \int_{\mathbb{I}} F(x) A G^t(x) d\mu(x) \,,$$

donde $\mathbb{I}$ es un intervalo real (acotado o no), μ es una medida de Borel absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{I}$, los vectores F y G vienen dados por

$$F(x) = (f(x), f'(x), \ldots, f^{(m)}(x)), \quad G(x) = (g(x), g'(x), \ldots, g^{(m)}(x)),$$

y A es una matriz simétrica semidefinida positiva de orden $(m+1) \times (m+1)$, [42]. Este caso ha sido ampliamente estudiado cuando A es una matriz diagonal.

Asímismo se han estudiado polinomios ortogonales respecto a productos internos de la forma

$$\langle f, g \rangle_S = \int F(z) A \overline{G^t(z)} d\mu z\,,$$

donde μ es una medida de Borel compleja, positiva y finita (i. e. $z^n \in L^1(\mu)$ para todo $n \geq 0$), cuyo soporte contiene una cantidad infinita de puntos, los vectores F y G vienen dados por

$$F(z) = (f(z), f'(z), \ldots, f^{(m)}(z)), \quad G(z) = (g(z), g'(z), \ldots, g^{(m)}(z)),$$

y A es una matriz hermitiana definida positiva de orden $(m+1) \times (m+1)$.

(b) El *caso diagonal* ** corresponde al estudio de polinomios ortogonales respecto al producto interno de Sobolev definido en (1.9).

(c) El *caso discreto*, donde los soportes de cada una de las medidas $\mu_k, \quad k = 1, \ldots, m,$ de (1.9) poseen un número finito de puntos. Por ejemplo,

$$\langle p, q \rangle_S = \int f(x) g(x) d\mu_0(x) + \lambda f'(\xi) g'(\xi),$$

corresponde a (1.9) con $m = 1$ y $d\mu_1 = \lambda \delta_\xi$, donde δ_ξ es la delta de Dirac en ξ.

** Llamado también caso continuo, cuando las medidas involucradas satisfacen $d\mu_k(x) = w_k(x)dx$, con w_k algún peso clásico.

(d) Por último, la forma introducida por K. H. Kwon considera productos de Sobolev donde la primera medida de ortogonalidad es discreta
$$\langle f, g\rangle_S = f(c)g(c) + \int_I f'(x)g'(x)d\mu(x),$$
ha demostrado tener utilidad para el estudio de polinomios ortogonales generalizados de Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$ cuando $\alpha = -1$ y $c = 0$.

La escuela española desarrollada alrededor de F. Marcellán, G. López Lagomasino y A. Martínez Finkelshtein ha estado particularmente activa en el desarrollo de la teoría de familias de polinomios ortogonales en cada uno de los primeros tres casos (cfr. [44] y las referencias allí sugeridas).

1.2.1. Comportamiento asintótico

El estudio de las propiedades asintóticas de sucesiones de polinomios ortogonales de Sobolev $\{Q_n\}$ cuando $n \to \infty$, puede clasificarse según las siguientes direcciones:

- Asintótica del cociente.
- Asintótica fuerte.
- Asintótica de la raíz enésima.

El primer resultado correspondiente al caso discreto se obtuvo por F. Marcellán y W. Van Assche en [46]. En este trabajo se considera el producto interno
$$\langle p, q\rangle_S = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)d\mu(x) + \lambda p'(c)q'(c)\ , \tag{1.14}$$
donde $\lambda > 0$, $c \in \mathbb{R}$ y $\mu \in M(0, 1)$. $M(0, 1)$ es la clase de Nevai constituida por todas las medidas μ positivas de Borel para las que la sucesión de polinomios ortonormales correspondiente $\{p_n\}_{n\geq 0}$ satisface una relación de recurrencia a tres términos
$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x)$$

cuyos coeficientes cumplen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \ , \ \ \lim_{n\to\infty} b_n = 0\,.$$

El objetivo, en este caso, fue comparar los polinomios de Sobolev asociados a (1.14) con los polinomios ortogonales estándar con respecto a μ, y, de esta manera, investigar cómo influye en la sucesión $\{p_n\}_{n\geq 0}$ la adición de derivadas, esto es, cuán cercanos están los polinomios de Sobolev a los $\{p_n\}_{n\geq 0}$. Con esta finalidad, asumiendo que μ es una medida para la que se conoce el comportamiento asintótico de los polinomios $\{p_n\}_{n\geq 0}\$$ y suponiendo que $\mu \in M(0\,,\,1)$, se estudia el comportamiento asintótico relativo de los polinomios ortogonales de Sobolev con respecto a la sucesión $\{p_n\}_{n\geq 0}$ en los casos en que $c \in \operatorname{supp}(\mu)$ y $c \in \mathbb{R}\setminus\operatorname{supp}(\mu)$. Este trabajo puso al descubierto la similitud existente entre el comportamiento asintótico de los polinomios de Sobolev en el caso discreto y los polinomios ortogonales estándar con respecto a medidas modificadas por la adición de masas puntuales.

Con respecto al comportamiento asintótico fuerte de polinomios de Sobolev en el caso continuo, el primer resultado fue dado en [51] para los polinomios de Gegenbauer-Sobolev. En él se establece la asintótica relativa de estos polinomios con respecto a los de Gegenbauer. Dado que el comportamiento asintótico de estos últimos es conocido, se tiene entonces el comportamiento asintótico fuerte de los polinomios de Gegenbauer-Sobolev. También se obtiene el comportamiento asintótico de las normas y los ceros de dichos polinomios.

Otra noción introducida por diversos autores con el fin de estudiar el comportamiento asintótico de sucesiones de polinomios ortogonales de Sobolev en el caso no discreto fue la de *coherencia de medidas*. El primer resultado más o menos general sobre comportamiento asintótico de sucesiones de polinomios ortogonales de Sobolev para casos no discretos fue obtenido por medio de una técnica muy simple pero exitosa: establecer una relación algebraica (con un número finito de términos) entre la sucesión de polinomios ortogonales de Sobolev y una sucesión de polinomios ortogonales estándar, y luego estudiar el comportamiento asintótico de los parámetros involucrados en la relación algebraica para obtener una asintótica comparativa, [50].

Finalmente, en la línea de considerar productos internos de Sobolev con respecto a clases generales de medidas, se pueden ubicar también los trabajos caracterizados por el empleo de métodos de la teoría de potencial logarítmico, para estudiar el comportamiento asintótico de los ceros y puntos críticos de los polinomios de Sobolev, ver por ejemplo [43].

1.3. Ejercicios

1. Pares coherentes de medidas: Sean (μ_1, μ_2) un vector de medidas positivas, y $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{T_n\}_{n\geqslant 0}$ las respectivas sucesiones estándar de polinomios ortogonales mónicos. El vector (μ_1, μ_2) se dice par coherente de medidas si existe una sucesión de constantes no nulas $\sigma_1, \sigma_n, \ldots$, tales que

$$T_n(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} - \sigma_n \frac{P'_n(x)}{n}, \quad n \geq 1.$$

Muestre que

(a) El vector de medidas (μ_1, μ_2), donde $d\mu_1(x) = d\mu_2(x) = x^\alpha e^{-x}dx$, para $x \in (0, \infty)$ y $\alpha > -1$, es un par coherente de medidas. *Sugerencia: utilice el hecho de que los polinomios ortogonales mónicos de Laguerre $L_n^{(\alpha)}$, satisfacen la relación $L_n^{(\alpha)}(x) = L_{n+1}^{(\alpha+1)}(x) + nL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$.*

(b) El vector de medidas (μ_1, μ_2), donde $d\mu_1(x) = |x - \xi|(1 - x)^{\alpha-1}(1 + x)^{\beta-1}$, $d\mu_2(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$, $x \in (-1, 1)$, $|\xi| > 1$ y $\alpha, \beta > 0$, es un par coherente de medidas.

2. Dado $\lambda \geq 0$, considérese el producto interno de Laguerre-Sobolev

$$\langle p, q\rangle_S = \int_0^\infty p(x)q(x)d\mu_0(x) + \lambda \int_0^\infty p'(x)q'(x)d\mu_1(x),$$

donde $d\mu_0(x) = d\mu_1(x) = x^\alpha e^{-x}dx, \quad \alpha > -1.$

(a) Muestre que los polinomios mónicos $\left\{Q_n^{(\alpha)}\right\}_{n\geqslant 0}$, ortogonales con respecto al producto anterior, se pueden expresar mediante $Q_0^{(\alpha)}(x) \equiv 1$,

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{1,0} & \cdots & c_{n,0} \\ c_{0,1} & c_{1,1} & \cdots & c_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0,n-1} & c_{1,n-1} & \cdots & c_{n,n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{1,0} & \cdots & c_{n-1,0} \\ c_{0,1} & c_{1,1} & \cdots & c_{n-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0,n-1} & c_{1,n-1} & \cdots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix}}, \quad n \geq 1$$

donde $c_{i,j} = \langle x^i, x^j \rangle_S = \langle x^i, x^j \rangle_{\mu_0} + ij\lambda \langle x^{i-1}, x^{j-1} \rangle_{\mu_1}$. Observe que cada coeficiente (distinto del coeficiente líder) de $Q_n^{(\alpha)}$ es una función racional en λ cuyo numerador y denominador tienen grado $n-1$. Esta propiedad nos permite pensar en el polinomio $Q_n^{(\alpha)}(x)$ como una función en dos variables $Q_n^{(\alpha)}(x, \lambda)$.

(b) Defina

$$\begin{aligned} R_0^{\infty}(x) &= Q_0^{(\alpha)}(x) = 1, \\ R_1^{\infty}(x) &= Q_1^{(\alpha)}(x) = L_1^{(\alpha)}(x), \\ R_n^{\infty}(x) &= \lim_{\lambda \to \infty} Q_n^{(\alpha)}(x, \lambda), \text{ para } n \geq 2. \end{aligned}$$

El polinomio mónico R_n^{∞} se conoce como *polinomio límite asociado*, es un polinomio de grado exactamente n e independiente de λ. Demuestre que

(i) $\int_0^{\infty} R_n^{\infty}(x) x^{\alpha} e^{-x} dx = 0$, para todo $n \geq 1$.

(ii) $\int_0^{\infty} x^m \left(R_n^{\infty}(x)\right)' x^{\alpha} e^{-x} dx = 0$, para todo $n \geq 2$, $0 \leq m \leq n-2$. En consecuencia,

$$\left(R_n^{\infty}(x)\right)' = n L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 2.$$

(c) Use la parte (b) y el ejercicio **3.**(a) para deducir

$$R_n^{\infty}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - \sigma_{n-1} \frac{n}{n-1} L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 2.$$

(d) Relación entre $L_n^{(\alpha)}$ y $Q_n^{(\alpha)}$: demuestre que se verifica la siguiente relación:

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \sigma_n \frac{n+1}{n} L_n^{(\alpha)}(x) = Q_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \alpha_n(\lambda) Q_n^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1,$$

donde

$$\alpha_n(\lambda) = \sigma_n \frac{n+1}{n} \frac{\|L_n^{(\alpha)}\|_{\mu_0}^2}{\|Q_n^{(\alpha)}\|_S^2} \neq 0, \quad n \geq 1.$$

Sugerencia: exprese R_{n+1}^{∞} en términos de la base ortogonal $\{Q_0^{(\alpha)}, Q_1^{(\alpha)}, \ldots, Q_{n+1}^{(\alpha)}\}$ y utilice la parte (c) para determinar la constante $\alpha_n(\lambda)$.

3. Dado $\lambda \geq 0$, considérese el producto interno de Sobolev

$$\langle p, q\rangle_S = \int_a^b p(x)q(x)d\mu_1(x) + \lambda \int_a^b p'(x)q'(x)d\mu_2(x).$$

Si las medidas μ_k, $k = 1, 2$ son simétricas, la noción de pares coherentes de medidas no puede ser usada como en el ejercicio anterior. Sin embargo, se puede introducir una definición similar. Pares simétricamente coherentes de medidas: Dados (μ_1, μ_2) un vector de medidas positivas, y $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{T_n\}_{n\geqslant 0}$ las respectivas sucesiones estándar de polinomios ortogonales mónicos. El vector (μ_1, μ_2) se dice par simétricamente coherente de medidas, si existe una sucesión de constantes no nulas $A_1, A_n, \ldots$, $B_1, B_n, \ldots$, tales que

$$T_n(x) = A_n P'_{n+1}(x) + B_n P'_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

(a) El vector de medidas (μ_1, μ_2), donde $d\mu_1(x) = d\mu_2(x) = (1-x^2)^{\alpha-1/2}dx$, para $x \in (-1, 1)$ y $\alpha > -\frac{1}{2}$, es un par simétricamente coherente de medidas. *Sugerencia: utilice el hecho de que los polinomios ortogonales de Gegenbauer $G_n^{(\alpha)}$, satisfacen la relación $2(n+\alpha)G_n^{(\alpha)}(x) = \frac{d}{dx}G_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \frac{d}{dx}G_{n-1}^{(\alpha)}(x)$.*

(b) Dado $\lambda \geq 0$, considérese el producto interno de Gegenbauer-Sobolev

$$\langle p, q\rangle_S = \int_{-1}^1 p(x)q(x)d\mu_0(x) + \lambda \int_{-1}^1 p'(x)q'(x)d\mu_1(x),$$

donde $d\mu_0(x) = d\mu_1(x) = (1-x^2)^{\alpha-1/2}dx, \quad \alpha > -\frac{1}{2}$.
Estudie la sucesión de polinomios ortogonales de Gegenbauer-Sobolev, según el esquema presentado en el ejercicio **2.**

Capítulo 2

TEORÍA DE HIPERGRUPOS: LO BÁSICO

En este capítulo introduciremos el concepto abstracto de hipergrupos y estudiaremos sus propiedades básicas.

Los hipergrupos son una generalización de los grupos, en donde el producto de dos elementos está determinado por una función de distribución. Existe mucha investigación en esta área, sobre todo para generalizar conceptos básicos de la teoría de grupos, por ejemplo, en hipergrupos existe el teorema de Lagrange.

La teoría general de hipergrupos fue introducida por Dunkl [21], Jewett [32] y Spector [62] de manera independiente. En este capítulo nosotros seguiremos principalmente las ideas de Dunkl [21] y Jewett [32].

2.1. Hipergrupos. Definición y ejemplos

Un problema común es encontrar una buena noción de medida sobre un espacio topológico (X, τ) que sea compatible con la topología en algún sentido. Un camino para hacer esto es definir una medida sobre los conjuntos de Borel de un espacio topológico. En general, existen varios problemas con esto: por ejemplo, tal medida podría no tener un soporte bien definido. Otro enfoque para teoría de la medida es restringirnos a espacios Hausdorff localmente compactos, y sólo considerar las medidas que correspondan a funcionales lineales positivos sobre el espacio de las funciones continuas a soporte compacto. Esto produce una buena teoría sin problemas patológicos.

Comenzaremos fijando la notación necesaria. Para cualquier espacio localmente compacto X sean $M(X)$, $M^+(X)$, $M_c(X)$, $M_c^+(X)$ los conjuntos de medidas regulares de Borel a valores complejos sobre X, de medidas regulares de Borel a valores complejos, no negativas sobre X, de medidas regulares de Borel a valores complejos con soporte compacto sobre X y de medidas regulares de Borel a valores complejos, no negativas y con soporte compacto sobre X.

Dado $C(X)$ el espacio de las funciones continuas sobre X, el siguiente teorema de representación nos garantiza una identificación entre $M(X)$ y el espacio dual $C_c^*(X)$:

Teorema 2.1. *Dado X un espacio Hausdorff localmente compacto, para cualquier funcional lineal y positivo $\phi \in C_c^*(X)$, existe una única medida $\mu \in M(X)$ tal que*

$$\phi(f) = \int_X f(x)d\mu(x), \quad \forall f \in C_c(X). \tag{2.1}$$

Sea $C_c^+(X)$ el espacio de funciones no negativas a soporte compacto sobre X. Asignaremos a $M^+(X)$ la topología del cono, es decir, la menor topología tal que para cada $f \in C_c^+(X)$, la aplicación $\mu \mapsto \int_X f d\mu$ es continua, y tal que la aplicación $\mu \mapsto \mu(X)$ es continua. La topología del cono coincide con la topología $*$-débil si y sólo si, X es compacto.

El soporte de una medida μ será denotado por $\mathrm{supp}(\mu)$ y el punto masa en x por δ_x. X a menudo será uno de los siguientes espacios $[-1,1]$, $[0,\pi]$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$

Definición 2.1. *Sea X un espacio compacto y supongamos que $M(X)$ es un álgebra de Banach con producto $*$. Entonces el par $(X,*)$ es un hipergrupo si se satisfacen los siguientes axiomas:*

(H1) Si μ y ν son medidas de probabilidad sobre X, entonces $\mu * \nu$ también lo es.

(H2) Existe un único elemento $e \in X$ tal que $\delta_e * \mu = \mu * \delta_e$, para toda $\mu \in M(X)$.

(H3) *Existe un homeomorfismo* $^\vee : X \to X$ *tal que* $x^{\vee\vee} = x$ *y* $e \in \mathrm{supp}(\delta_x * \delta_y)$ *si y sólo si,* $y = x^\vee$. *El homeomorfismo* $^\vee$ *es llamado involución.*

(H4) $(\mu * \nu)^\vee = \nu^\vee * \mu^\vee$, *donde* $\mu^\vee$ *está definido por*

$$\int_X f(x)d\mu^\vee(x) = \int_X f(x^\vee)d\mu(x).$$

(H5) *La aplicación* $(x, y) \mapsto \mathrm{supp}(\delta_x * \delta_y)$, $X \times X \to \mathcal{C}(X)$ *es continua con respecto a una apropiada topología para el espacio* $\mathcal{C}(X)$ *de subconjuntos compactos de* X.

(H6) *La aplicación* $M_1(X) \times M_1(X)$ *dada por* $(\mu, \nu) \mapsto \mu * \nu$ *es continua* $*$*-débil.*

La apropiada topología en el axioma $(H5)$ es la topología de Michael [32, 53], la cual tiene una subbase que consiste de los conjuntos

$$\mathcal{C}_U(V) = \{K \in \mathcal{C}(X) : K \cap U \neq \emptyset \text{ y } K \subset V\},$$

donde U y V son subconjuntos abiertos arbitrarios de X.

Si X tiene una métrica ρ, esta topología es equivalente a la topología dada por la métrica de Hausdorff sobre $\mathcal{C}(X)$, la cual es definida para $A, B \in \mathcal{C}(X)$ por

$$\rho(A, B) = \text{ínf}\{r : A \subset V_r(B) \text{ y } B \subset V_r(A)\},$$

donde

$$V_r(E) = \{y \in X : \rho(x, y) < r, \text{ para algún } x \in E\}.$$

Una prueba de esta equivalencia está contenida en [35, Lemma 4.1].

En el caso en que X sea localmente compacto, debemos añadir al axioma $(H5)$ el requerimiento de que $\mathrm{supp}(\delta_x * \delta_y)$ sea compacto, y debemos reemplazar en el axioma $(H6)$ la propiedad "continua $*$-débil" por "continuidad positiva", la cual requiere que para cada función $f \in C(X)$ no negativa y a soporte compacto, la aplicación $(\mu, \nu) \mapsto \int_X f d(\mu * \nu)$ sea continua cuando es restricta a las medidas positivas en $M(X)$.

Cuando X es discreto, por ejemplo, $X = \mathbb{Z}_+$, el axioma $(H6)$ puede ser omitido y $(H5)$ puede ser reemplazado por "$\mathrm{supp}(\delta_x * \delta_y)$ es finito".

El conjunto definitivo de axiomas para la definición de un hipergrupo fue dado por primera vez por Jewett en su artículo [32], aunque él no llamó a estos objetos hipergrupos, sino "convos".

También necesitaremos las siguientes definiciones.

Definición 2.2. *Una medida* m *es llamada medida de Haar para el hipergrupo* $(X,*)$ *si para cualquier* $x \in X$, $m * \delta_x = \delta_x * m = m$. m *es una medida de Haar izquierda si al menos la segunda igualdad se satisface.*

Definición 2.3. *Una aplicación* $\phi \in C(X)$ *se llama caracter del hipergrupo* $(X,*)$, *si* ϕ *es acotada,* $\phi(x^\vee) = \overline{\phi(x)}$ *y se satisface la fórmula producto*

$$\phi(x)\phi(y) = \int_X \phi d(\delta_x * \delta_y), \quad x, y \in X. \tag{2.2}$$

Definición 2.4. $(X,*)$ *es un hipergrupo hermitiano si* $\phi(x^\vee) = x$, *para todo* $x \in X$.

Definición 2.5. *Si* $(X,*)$ *y* $(Y,\star)$ *son hipergrupos, diremos que son equivalentes o iguales salvo cambio de variables, si existe un homeomorfismo* A *de* X *sobre* Y, *tal que si* $x = A^{-1}(s)$ *e* $y = A^{-1}(t)$, *entonces*

$$\int_Y f d(\delta_s \star \delta_t) = \int_X (f \circ A) d(\delta_x * \delta_y), \quad f \in C(Y).$$

Cuando esto sucede escribimos $(Y,\star) = A(X,*)$.

Ejemplo 2.1.1. *El álgebra de medidas de un grupo con identidad* e, *es un ejemplo de hipergrupo, donde la convolución está definida por* $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$, *y la involución por* $x^\vee = x^{-1}$, *donde* x^{-1} *representa al inverso de* x *en el grupo.*

Los siguientes ejemplos nos permitirán conectar la teoría de hipergrupos con polinomios ortogonales [30, 31]:

Ejemplo 2.1.2. *Consideremos los polinomios de Legendre* $\{P_n\}_{n\geq 0}$, *normalizados por la condición* $P_n(1) = 1$. *Es conocido que los polinomios de Legendre satisfacen la siguiente fórmula producto [28, 30, 31]:*

$$P_n(x)P_n(y) = \int_{-1}^{1} K(x,y,z) P_n(z) dz, \quad -1 < x, y < 1,$$

con

$$K(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(1-x^2-y^2-z^2+2xyz)^{-1/2}, \\ 0, \end{cases}$$

el primer valor de $K(x,y,z)$ *es tomado si y sólo si* $1-x^2-y^2-z^2+2xyz > 0$. *Es claro que* $K(x,y,z) \geq 0$ *y como* $P_0(x) = 1$, *entonces de la fórmula producto se deduce que*

$$\int_{-1}^{1} K(x,y,z)dz = 1.$$

Ahora bien, para $f, g \in L^1([-1,1], dx)$ *definimos la operación*

$$(f * g)(z) := \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K(x,y,z)f(x)f(y)dxdy, \qquad (2.3)$$

entonces es sencillo chequear que

$$\int_{-1}^{1} (f*g)(x)P_n(x)dx = \left[\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx\right]\left[\int_{-1}^{1} g(x)P_n(x)dx\right],$$

de donde podemos deducir que $(L^1([-1,1], dx), *)$ *es un álgebra de Banach.*

La operación $*$ *puede extenderse a masas puntuales definiendo:*

$$d(\delta_x * \delta_y)(z) := K(x,y,z)dz, \quad -1 < x, y < 1,$$
$$\delta_x * \delta_1 := \delta_x, \text{ y } \delta_x * \delta_{-1} := \delta_{-x}, \quad x \in [-1,1].$$

Finalmente, si $\mu, \nu \in M([-1,1])$, *definimos* $\mu * \nu$ *por medio de su acción sobre una función continua arbitraria, es decir,* $\mu * \nu$ *es definida como la medida tal que*

$$\int_{-1}^{1} fd(\mu * \nu) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} fd(\delta_x * \delta_y)d\mu(x)d\nu(y), \quad f \in C([-1,1]).$$

Se puede chequear (ver ejercicio **3.** *de este capítulo) que* $(M([-1,1]), *)$ *es un álgebra de medidas, la cual es usualmente denotada por* $([-1,1], *)$. *Además,* $([-1,1], *)$ *es un hipergrupo hermitiano con* $e = 1$, $x^\vee = x$, *caracteres precisamente los polinomios de Legendre* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *y la medida de Haar es la medida de ortogonalidad* dx.

Ejemplo 2.1.3. *Para $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, consideremos los polinomios de Gegenbauer $\{C_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$, ortogonales sobre $[-1,1]$ con respecto a la medida $(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx$, entonces los polinomios ortogonales dados por $R_n^{(\alpha)}(x) = \frac{C_n^{(\alpha)}(x)}{C_n^{(\alpha)}(1)}$, satisfacen la siguiente fórmula producto [28, 30, 31]:*

$$R_n^{(\alpha)}(x)R_n^{(\alpha)}(y) = \int_{-1}^{1} K^{(\alpha)}(x,y,z)R_n^{(\alpha)}(z)(1-z^2)^{\alpha-1/2}dz, \quad -1 < x, y < 1,$$

con

$$K^{(\alpha)}(x,y,z) = \begin{cases} \frac{2^{1-2\alpha}(1-x^2-y^2-z^2+2xyz)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)[(1-x^2)(1-x^y)(1-x^z)]^{\alpha-1/2}}, \\ 0, \end{cases}$$

el primer valor de $K^{(\alpha)}(x,y,z)$ es tomado si y sólo si $1-x^2-y^2-z^2+2xyz > 0$. Es claro que $K^{(\alpha)}(x,y,z) \geq 0$ y como $R_0^{(\alpha)}(x) = 1$, entonces de la fórmula producto se deduce que

$$\int_{-1}^{1} K^{(\alpha)}(x,y,z)(1-z^2)^{\alpha-1/2}dz = 1.$$

Ahora bien, para $f, g \in L^1([-1,1],(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx)$ definimos la operación

$$(f *_\alpha g)(z) := \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K^{(\alpha)}(x,y,z)f(x)f(y)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx(1-y^2)^{\alpha-1/2}dy, \tag{2.4}$$

entonces es sencillo chequear que

$$\int_{-1}^{1}(f *_\alpha g)(x)P_n(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx = \left[\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx\right] \left[\int_{-1}^{1} g(x)P_n(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx\right],$$

de donde podemos deducir que $(L^1([-1,1],(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx), *_\alpha)$ es un álgebra de Banach.

La operación $*_\alpha$ puede extenderse a masas puntuales definiendo:

$$d(\delta_x *_\alpha \delta_y)(z) := K^{(\alpha)}(x,y,z)(1-z^2)^{\alpha-1/2}dz, \quad -1 < x, y < 1,$$

$$\delta_x *_\alpha \delta_1 := \delta_x, \ y \ \delta_x *_\alpha \delta_{-1} := \delta_{-x}, \quad x \in [-1,1].$$

Finalmente, si $\mu, \nu \in M([-1,1])$*, definimos* $\mu *_\alpha \nu$ *por medio de su acción sobre una función continua arbitraria, es decir,* $\mu *_\alpha \nu$ *es definida como la medida tal que*

$$\int_{-1}^{1} f d(\mu *_\alpha \nu) = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f d(\delta_x *_\alpha \delta_y) d\mu(x) d\nu(y), \quad f \in C([-1,1]).$$

Se puede chequear (ver ejercicio **4.** *de este capítulo) que para cada* $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ $(M([-1,1]), *_\alpha)$ *es un álgebra de medidas, la cual es usualmente denotada por* $([-1,1], *_\alpha)$*. Además,* $([-1,1], *_\alpha)$ *es un hipergrupo hermitiano con* $e = 1$*,* $x^\vee = x$*, caracteres precisamente los polinomios de Legendre* $\{R_n^{(\alpha)}(x)\}_{n \geq 0}$ *y la medida de Haar es la medida de ortogonalidad* $(1-x^2)^{\alpha - 1/2} dx$*.*

2.1.1. Conexión con problemas de Sturm-Liouville

Los ejemplos de hipergrupos 2.1.2 y 2.1.3 tienen una propiedad en común: sus caracteres son autofunciones de un operador diferencial lineal de segundo orden. Haciendo el cambio de variables $x = \cos\theta$ y escribiendo para $n \in \mathbb{Z}_+$, $u_n^{(\alpha)}(\theta) = R_n^{(\alpha)}(\cos\theta)$, estas funciones forman sistema completo de autofunciones para el siguiente problema de Sturm-Liouville sobre $[0,\pi]$:

$$(\rho^2 y')' + \lambda \rho^2 y = 0, \text{ con } y'(0) = y'(\pi) = 0, \tag{2.5}$$

y $\rho(\theta) = (\operatorname{sen}\theta)^\alpha$.

Esta observación, entre otros ejemplos similares, llevó a A. Schwartz [60] a hacer los siguientes cuestionamientos:

(1) Condiciones suficientes. ¿Cuáles problemas de Sturm-Liouville tienen autofunciones asociadas que son caracteres de un hipergrupo? En tales casos, la estructura de hipergrupos completa está disponible para aclarar desarrollos en términos de las auto-funciones.

(2) Condiciones necesarias. ¿Cuáles hipergrupos sobre intervalos reales tienen caracteres que son autofunciones de problemas de Sturm-Liouville? En tales casos, la ecuación diferencial asociada produce información detallada acerca de esos caracteres.

Para las condiciones suficientes, esbozaremos un resultado dado en [18], el cual comienza desde el estudio de un problema de Sturm-Liouville (2.5) hasta llegar al correspondiente hipergrupo. Comenzaremos imponiendo algunos supuestos sobre la función ρ:

1. ρ es positiva y continua sobre $(0,\pi)$.
2. $\rho(\pi - s) = \rho(s)$.
3. $\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}$ es no creciente en $(0,\pi)$.
4. $\rho(s) = (\operatorname{sen} s)^\gamma g(s)$ para algún $\gamma \geq 0$. La función g debe ser real y analítica en 0 y ρ tiene p derivadas continuas sobre $(0,\pi)$, donde $p \geq \text{máx}\left\{\gamma + \frac{1}{2}, 2\right\}$.

Entonces, bajo estos supuestos los autovalores de (2.5) forman una sucesión creciente $0 = \mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_n < \cdots$. Sea y_k la autofunción correspondiente al autovalor μ_k, normalizada por $y_k(0) = 1$, así que, en particular, $\phi_0(s) = 1$. Luego,

$$y_k(\pi - s) = (-1)^k y_k(s), \tag{2.6}$$

y $\{y_k\}$ es un sistema ortogonal completo para el espacio $L^2([0,\pi], \rho^2(s)ds)$. El hecho clave es que $\{y_k\}$ satisface una fórmula producto:

Teorema 2.2. *Para cada $s, t \in J = [0,\pi]$ existe $\sigma_{s,t} \in M_1(J)$ tal que*

(i) $\int_J y_k d\sigma_{s,t} = y_k(s) y_k(t), \quad k \in \mathbb{Z}_+$.

(ii) $\operatorname{supp}(\sigma_{s,t}) \subset [|s-t|, \pi - |s+t-\pi|]$.

(iii) $f(s,t) = \int_J f d\sigma_{s,t}$ *es continua sobre* $J \times J$.

Entonces existe un hipergrupo hermitiano $(J,*)$ con caracteres $\{y_k\}$, medida de Haar $\rho^2(s)ds$, $e = 0$ y convolución de dos medidas $\mu, \nu \in M(J)$ definida por su acción sobre $f \in C(J)$:

$$\int_J d(\mu * \nu) = \int_J \int_J \left[\int_J f d\sigma_{s,t}\right] d\mu(s) d\nu(t).$$

En particular, $\delta_s * \delta_t = \sigma_{s,t}$.

La demostración de este teorema está basada en los siguientes dos lemas.

Lema 2.1. *Sea $\mathcal{P}$ el espacio de las combinaciones lineales finitas de $\{y_k\}$. Entonces $\mathcal{P}$ es denso en $C(J)$ en la topología de la convergencia uniforme.*

Demostración. La ecuación diferencial (2.5) puede ser usada para mostrar que si f tiene $2p$ derivadas continuas y soporte compacto en $(0,\pi)$, entonces la serie de Fourier de f con respecto a $\{y_k\}$ converge absolutamente y uniformemente a f.

■

Lema 2.2. *Si*

$$f(s)=\sum_{k=0}^{n} c_k y_k(s)\leq 0, \quad s\in J, \tag{2.7}$$

entonces

$$f(s,t)=\sum_{k=0}^{n} c_k y_k(s)y_k(t)\leq 0, \quad (s,t)\in J\times J. \tag{2.8}$$

Demostración. Para $0\leq a\leq b\leq \frac{\pi}{2}$ sea $\Delta(a,b)$ el triángulo con vértices (a,b), $(a-b,0)$ y $(a+b,0)$. Supongamos que la desigualdad (2.7) es estrictamente positiva, entonces mostraremos que (2.8) es estrictamente positiva en $\Delta\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

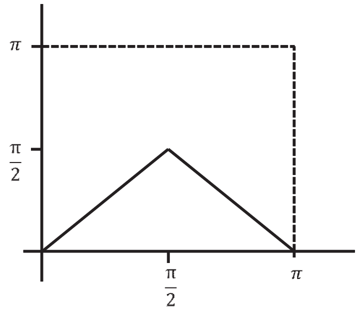

Figura 2.1: Triángulo $\Delta\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ en $J\times J$.

Supongamos que existe un punto $P = (\xi, \eta) \in \Delta\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(\xi, \eta) = 0$, pero $f(s,t) > 0$ si $(s,t) \in \Delta\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{(\xi, \eta)\}$.

Consideremos $W(s,t) = \rho^2(s)\rho^2(t)$, entonces $f(s,t)$ satisface el siguiente problema de Cauchy hiperbólico:

$$(Wf_s)_s - (Wf_t)_t = 0, \quad f(s,0) = f(s), \quad f_t(s,0) = 0. \tag{2.9}$$

Ahora, tomemos los puntos $C = (\xi - \eta, 0)$ y $D = (\xi + \eta, 0)$, entonces por el teorema de Green tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int\int_{\Delta(\xi,\eta)} \left[(Wf_s)_s - Wf_t)_t\right] dsdt \\ &= \int_{\partial\Delta(\xi,\eta)} (Wf_s dt + Wf_t dt) = -\left[\int_{CP} + \int_{DP}\right] Wdf. \end{aligned}$$

Integrando por partes obtenemos que

$$\begin{aligned} 2W(P)f(P) &= W(C)f(C) + W(D)f(D) + \int_{CP} f(W_t + W_s)dt \\ &\quad + \int_{DP} f(W_t - W_s)dt, \end{aligned}$$

lo cual implica que $f(P) > 0$ y nos lleva a una contradicción.

Ahora, si (2.7) se satisface y $\varepsilon > 0$ es arbitrario, entonces

$$f_\varepsilon := f + \varepsilon = f + \varepsilon y_0 > 0,$$

por lo que para cualquier $(s,t) \in \Delta\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tenemos

$$f_\varepsilon(s,t) = f(s,t) + \varepsilon y_0(s) y_0(t) = f(s,t) + \varepsilon > 0,$$

por lo tanto, $f(s,t) \geq 0$ para todo $(s,t) \in \Delta\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Finalmente, para obtener la desigualdad (2.8) en todos los puntos de $J \times J$ basta emplear las igualdades $f(s,t) = f(t,s)$ y $f(\pi - s, \pi - t) = f(s,t)$.

$\blacksquare$

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema 2.2:
Demostración. (Teorema 2.2).

Si $f \in C(J)$ es no negativa, entonces $0 \leq f(s) \leq \|f\|_\infty$ y por el lema 2.8 tenemos $0 \leq f(s,t) \leq \|f\|_\infty$. Por lo tanto, $\sigma_{s,t} \in M_1(J)$. Las otras propiedades son sencillas de verificar.

■

Otros resultados pueden ser obtenidos por medio de la aplicación del principio del máximo para ecuaciones hiperbólicas o usando un método ideado por C. Markett [14, 15, 47] basado en el método de integración de Riemman para tales ecuaciones. Este último método tiene la ventaja de producir una descripción explícita de la medida $\sigma_{s,t}$, y muestra que es absolutamente continua para $s, t \in (0, \pi)$.

En el caso de las condiciones necesarias, la cuestión es determinar cuándo un hipergrupo unidimensional $(X, *)$ (esto es, un hipergrupo en el cual X es homeomorfo a la circunferencia o a un intervalo de la recta) tiene caracteres que son autofunciones de un problema de Sturm-Liouville. La primera parte del problema entonces será obtener alguna información sobre los hipergrupos unidimensionales. Resulta ser que todos estos hipergrupos son conmutativos, y existen esencialmente cuatro tipos de ellos [59, 64]:

(i) $X = \mathbb{R}$ y $*$ la convolución clásica. En este caso $e = 0$ y $x^\vee = -x$.

(ii) $X = \mathbb{T}$ (donde $\mathbb{T}$ denota a la circunferencia unidad en el plano complejo) y $*$ la convolución clásica. En este caso $e = 1$ y $z^\vee = \overline{z}$.

(iii) X es un intervalo compacto, e es un punto extremo del intervalo, y $x^\vee = x$.

(iv) X es un intervalo semi abierto (no necesariamente acotado), e es el punto extremo del intervalo, y $x^\vee = x$.

2.2. Hipergrupos de tipo Jacobi

En esta sección nos enfocaremos en el caso en que X es un intervalo compacto, sin pérdida de generalidad consideraremos $X = [0, \pi]$ y mostraremos las condiciones suficientes conocidas sobre un hipergrupo $(X, *)$ de manera que sus caracteres sean exactamente las autofunciones de un problema de Sturm-Liouville como (2.5). Luego, siguiendo a [60], con cada tal hipergrupo asociaremos un par de parámetros (α, β) que serán usados para ayudarnos a describir las propiedades del hipergrupo. La definición es algo complicada, pero incluye (salvo un cambio de variables) a cualquier hipergrupo $(X, *)$ donde X sea un intervalo compacto. Nuestra discusión estará basada en un breve esquema de [17].

Comenzaremos requiriendo que $(X, *)$ satisfaga la siguiente condición de diferenciabilidad: Si f tiene p derivadas continuas y está compactamente soportado en $(0, \pi)$, entonces

$$f(s,t) = \int_X f\, d(\delta_s * \delta_t)$$

tiene las p-ésimas derivadas acotadas en el interior de $X \times X$. Para $\mu = 1, 2$ sea K_μ el mayor entero positivo tal que

$$M_\mu(s,t) = \int_X (r-t)^\mu\, d(\delta_s * \delta_t)(r) = O(s^{k_\mu}).$$

Cuando k_μ es finito,

$$M_\mu(s,t) = A_\mu(t) s^{k_\mu} + o(s^{k_{k_\mu}}).$$

Definición 2.6. $(X, *)$ *es un hipergrupo de Jacobi de tipo* (α, β) *si*

(i) $k_1 = k_2 = 2$.

(ii) $(\operatorname{sen} t) A_1(t)$ *es derivable sobre* X.

(iii) $A_2(t)$ *es una constante positiva* a_2.

(iv) Los parámetros α *y* β *satisfacen*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{a_2} A_1(t) = \alpha + \frac{1}{2} \quad y \quad \lim_{t \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} t}{a_2} A_1(t) = -\left(\beta + \frac{1}{2}\right).$$

Estas condiciones no son tan restrictivas como parecen, ya que una amplia clase de hipergrupos son equivalentes a hipergrupos de Jacobi de tipo (α, β) por medio de un cambio de variables, de manera que es sólo realmente necesario que k_1 sea finito, $(\operatorname{sen} t) A_1(t)$ y $A_2(t)$ puedan ser extendidas a funciones positivas derivables sobre X, y que $A_2(t)$ sea positiva.

La definición 2.6 está motivada por los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$, los cuales como ya sabemos son ortogonales en $[-1,1]$ con respecto a la función peso $w^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$. Para muchos valores de los parámetros (α,β) los polinomios de Jacobi normalizados por 1 en $x = 1$ son caracteres de un hipergrupo (el cual describiremos en el próximo capítulo). Ese hipergrupo con el cambio de variables $x = \cos\theta$ satisface las propiedades de la definición 2.6 y las funciones $\phi(t) = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)}$ son autofunciones del problema de Sturm-Liouville (2.5) para $\rho(t) = \left(\frac{\operatorname{sen} t}{2}\right)^{\alpha+2}\left(\frac{\cos t}{2}\right)^{\beta+2}$.

Ahora asumamos que $(X,*)$ es un hipergrupo de Jacobi de tipo (α,β). Sea

$$\rho(t) = c\exp\left(\int_{\pi/2}^{t} \frac{A_1(r)}{a_2}\,dr\right),$$

donde c es elegida de manera que $\int_0^\pi \rho^2(t)\,dt = 1$. Los autovalores de (2.5) pueden ser ordenados de manera creciente $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots$. Sea ϕ_k la autofunción correspondiente a λ_k que satisface $\phi_k(0) = 1$; se puede mostrar que estos son los caracteres de $(X,*)$. Entonces si nosotros asumimos $\alpha,\beta \geq -\frac{1}{2}$, entonces es posible obtener algunas estimaciones precisas para los caracteres. Para ello, primero introduciremos algunas constantes.

Existen constantes positivas a_α y a_β tales que

$$\lim_{t\to 0^+} (\operatorname{sen} t)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\rho(t) = a_\alpha, \quad \lim_{t\to \pi^-} (\operatorname{sen} t)^{-\beta-\frac{1}{2}}\rho(t) = a_\beta.$$

Sean $E_\alpha = 2^\alpha\Gamma(\alpha+1)a_\alpha$, $E_\beta = 2^\beta\Gamma(\beta+1)a_\beta$, y $E = \frac{E_\alpha}{E_\beta}$, entonces es posible obtener la siguiente información sobre $(X,*)$:

(i) $\rho^2(t)\,dt$ es la medida de Haar para $(X,*)$.

(ii) $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$.

(iii) $\lim_{k\to\infty}(-1)^k k^{\alpha-\beta}\phi_k(\pi) = E$.

(iv) $\lim_{k\to\infty}\int_X \phi_k^2(t)\,dt = E_\alpha^2$.

(v) $\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{k} = 1$.

(vi) Existe $K > 0$ tal que $\phi_k(t) \geq \frac{1}{3}$, siempre que $kt \leq K$.

(vii) Existen constantes C y C_ε para cualquier $\varepsilon > 0$ tales que

$$\phi_k(s) = a_\alpha \frac{s^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\rho(s)} \mathcal{J}_\alpha(s\lambda_k) + I_k(s),$$

donde $\mathcal{J}_\alpha$ es la función de Bessel modificada y I_k satisface:

$$|I_k(s)| = \begin{cases} Ck^{-1}, & 0 \leq s \leq \frac{1}{k}, \\ C_\varepsilon \frac{\ln k}{k(sk)^{\alpha+\frac{1}{2}}}, & k^{-1} \leq s \leq \pi - \varepsilon. \end{cases}$$

Una estimación similar es cierta en π.

Estas propiedades facilitan un estudio del análisis armónico de $(X, *)$, de manera en que se puede obtener, por ejemplo, un análogo de la desigualdad maximal de Hardy-Littlewood [16].

2.3. Ejercicios

1. Muestre que si $(Y, \star) = A(X, *)$ entonces

i) $s^\vee = A(x^\vee)$.

ii) ϕ es un caracter de $(X, *)$, si y sólo si, $\phi \circ A^{-1}$ es un caracter de $(Y, \star)$.

2. Muestre que $L^1([-1, 1], dx)$ con la operación (2.3) es un álgebra de Banach.

3. Muestre que $(M([-1, 1]), *)$ es un álgebra de medidas.

4. Muestre que $(M([-1, 1]), *_\alpha)$ es un álgebra de medidas.

5. Demuestre que para la función definida en (2.8) se satisface que $f(\pi - s, \pi - t) = f(s, t)$, para todo $(s, t) \in J \times J$. Sugerencia: recuerde la igualdad (2.6).

6. Muestre que las funciones $\phi_n(t) = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)}$ son autofunciones del problema de Sturm-Liouville (2.5) para $\rho(t) = \left(\frac{\operatorname{sen} t}{2}\right)^{\alpha+2} \left(\frac{\cos t}{2}\right)^{\beta+2}$.

Capítulo 3

POLINOMIOS ORTOGONALES E HIPERGRUPOS

.

3.1. Operaciones asociadas a polinomios de Gegenbauer

En [30, 31] Hirschman estudia una operación sobre $l^1 = M(\mathbb{Z}_+)$ basada sobre la fórmula de linealización para los polinomios de Gegenbauer o ultraesféricos:

$$R_n^{(\alpha)}(x)R_m^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c_{n,m}^k R_k^{(\alpha)}(x). \tag{3.1}$$

La fórmula explícita citada por Hirschman muestra que $c_{n,m}^k \geq 0$, y si hacemos $x = 1$ en (3.1), obtenemos $\sum_{k=0}^{\infty} c_{n,m}^k = 1$. Así si $a, b \in l^1 = M(\mathbb{Z}_+)$ podemos definir su convolución $a \star_\alpha b$ por

$$(a \star_\alpha b)_k := \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m}^k a_n b_m,$$

o equivalentemente, si para cada $x \in [-1, 1]$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a \star_\alpha b)_k R_k^{(\alpha)}(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_n^{(\alpha)}(x)\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty} b_m R_m^{(\alpha)}(x)\right].$$

$M(\mathbb{Z}_+)$ con esta operación es un hipergrupo, el cual denotaremos por $(\mathbb{Z}_+, \star_\alpha)$. Hirschman describe dos hipergrupos $([-1,1], *_\alpha)$ y $(\mathbb{Z}_+, \star_\alpha)$ los cuales tienen propiedades análogas a la clásica convolución de álgebras de medidas sobre la circunferencia unidad y su dual sobre el grupo de los enteros.

Es importante notar que $\star_\alpha$ es una convolución distinta para cada $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, y por lo tanto una cantidad no numerable de álgebras de Banach puede ser construida sobre el espacio de Banach $M(\mathbb{Z}_+)$. La estructura algebraica no depende de ninguna aritmética en el espacio subyacente $\mathbb{Z}_+$.

3.2. Polinomios ortogonales asociados a una medida μ

Es posible formular fórmulas producto y de linealización para familias de polinomios ortogonales asociados a una medida μ y quizás imitar la construcción de dos álgebras de medidas como en el caso de los polinomios de Gegenbauer. Sin embargo, en este caso no existe garantía de que estas operaciones estén realmente bien definidas. Nosotros estaremos interesados en aquellas construcciones que producen hipergrupos.

Entonces, supongamos que $\mu \in M_1(\mathbb{R})$ y sean $X = \operatorname{supp}(\mu)$ y $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión estándar de polinomios ortogonales respecto a la medida μ. Si x_0 es elegido de manera que $P_n(x_0) \neq 0$, entonces podemos definir los polinomios normalizados

$$R_n(x) := \frac{P_n(x)}{P_n(x_0)}, \qquad \text{así que} \qquad R_n(x_0) = 1.$$

Usando el desarrollo de Fourier correspondiente, podemos verificar que una sucesión estándar de polinomios ortogonales respecto a la medida μ siempre tiene una fórmula de linealización:

$$R_n(x)R_m(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_{n,m}^k R_k(x),$$

donde

$$c_{n,m}^k = \frac{\langle R_n R_m, R_k \rangle}{\langle R_k, R_k \rangle} = \frac{\int_X R_n(x) R_m(x) R_k(x)\, d\mu(x)}{\int_X R_k^2(x)\, d\mu(x)}.$$

Claramente la ortogonalidad de $\{R_n\}_{n\geq 0}$ implica que $c_{n,m}^k = 0$ si $k > n+m$ o si $n > m+k$ o si $m > n+k$; es decir, la fórmula de linealización puede ser reescrita como

$$R_n(x)R_m(x) = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c_{n,m}^k R_k(x). \tag{3.2}$$

Evaluando (3.2) en $x = x_0$ obtenemos

$$\sum_{k=|n-m|}^{n+m} c_{n,m}^k = 1. \tag{3.3}$$

Si, en efecto

$$c_{n,m}^k \geq 0, \tag{3.4}$$

entonces es posible definir el producto de dos sucesiones $a, b \in l^1 = M(\mathbb{Z}_+)$ tomando el mismo camino de Hirschman:

$$(a \star_\alpha b)_k := \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m}^k a_n b_m,$$

o equivalentemente,

$$a \star_\alpha b = c \Leftrightarrow \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_n(x)\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty} b_m R_m(x)\right] = \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k R_k(x)\right],$$

al menos para sucesiones finitamente soportadas a y b.

Las ecuaciones (3.3) y (3.4) garantizan que $M(\mathbb{Z}_+)$ es un álgebra de Banach. En efecto, $(\mathbb{Z}_+, \star)$ es un hipergrupo hermitiano con elemento identidad $e = 0$ y cada caracter tiene la forma

$$\phi_z(a) = \sum_{n}^{\infty} a_n R_n(z),$$

siempre que $z \in \mathbb{C}$ sea tal que $\mathrm{lub}(|R_n(z)|) \leq \infty$. Tal hipergrupo es llamado **hipergrupo polinomial discreto asociado con** $\{R_n\}_{n\geq 0}$.

En el caso de fórmulas producto, las cuales son el análogo continuo de las fórmulas de linealización, no existe garantía de que siempre se puedan conseguir.

Definición 3.1. *Diremos que la sucesión de polinomios ortogonales $\{R_n\}_{\geq 0}$ tiene una fórmula producto si para cada $x, y \in X$, existe una medida $\sigma_{x,y} \in M(X)$ tal que para cualquier $n \in \mathbb{Z}_+$ se tiene*

$$R_n(x)R_n(y) = \int_X R_n(z)\, d\sigma_{x,y}(z). \tag{3.5}$$

Si $\|\sigma_{x,y}\|$ están uniformemente acotadas, es posible definir un producto continuo $*$ sobre $M(H)$ mediante la fórmula

$$\int_X f\, d(\mu * \nu) := \int_X \int_X \int_X f\, d\sigma_{x,y}\, d\mu(x) d\nu(y),$$

de manera que, en particular, $\delta_x * \delta_y = \sigma_{x,y}$. Si $\sigma_{x,y}$ es una medida no negativa, la evaluación de (3.5) en $n = 0$ nos da que $\sigma_{x,y} \in M_1(X)$ así que $M(X)$ se transforma en un álgebra de Banach con la operación $*$. También si en (3.5) evaluamos en $x = x_0$ obtenemos que $\sigma_{x_0,y} = \delta_y$, de manera que si en efecto esta álgebra de Banach es un hipergrupo, entonces será hermitiano con elemento identidad $e = x_0$. En ese caso diremos que $\{R_n\}_{\geq 0}$ **tiene una fórmula producto de hipergrupo** y llamaremos al hipergrupo correspondiente $(X, *)$ **hipergrupo polinomial continuo asociado con la sucesión** $\{R_n\}_{\geq 0}$.

Cuando una sucesión de polinomios ortogonales tiene asociados tanto un hipergrupo polinomial continuo como uno discreto, los dos hipergrupos son en algún sentido duales, en analogía con la manera en que el grupo de la circunferencia $\mathbb{T}$ y $\mathbb{Z}$ son un par de grupos duales.

En [60] A. Schwartz se hace los siguientes cuestionamientos:

(Q1) ¿Cuáles hipergrupos $(\mathbb{Z}_+, \star)$ son en efecto hipergrupos polinomiales discretos?

(Q2) ¿Cuáles sucesiones de polinomios ortogonales asociados a una medida μ dan origen a hipergrupos polinomiales discretos?

(Q3) ¿Cuáles hipergrupos (X,*) con $X \subseteq \mathbb{R}$ son en efecto hipergrupos polinomiales continuos?

(Q4) ¿Cuáles sucesiones de polinomios ortogonales asociados a una medida μ dan origen a hipergrupos polinomiales continuos?

3.2.1. Polinomios de Jacobi

En el capítulo 1, definimos los polinomios de Jacobi mediante la fórmula de Rodrigues:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \quad := \quad (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right\},$$

para $x \in (-1,1)$.

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) \quad := \quad \binom{n+\alpha}{n}, \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) := (-1)^n\binom{n+\beta}{n},$$

donde $\alpha, \beta > -1$.

Desde su aparición hasta la fecha existe una gran cantidad de literatura asociada a diversas propiedades de estos polinomios (ver por ejemplo, [2, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 33, 34, 36, 37, 40, 44, 45, 54, 63] y las referencias allí sugeridas).

Históricamente, una de las razones fundamentales para el estudio de los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$ es el hecho de que sus ceros $x_{n,k}^{(\alpha,\beta)}$, $k = 1,\ldots,n$, tienen una interpretación electrostática muy interesante: ellos son los puntos de equilibrio n cargas en $(-1,1)$ en el campo generado por las cargas $\frac{\alpha+1}{2}$ en 1 y $\frac{\beta+1}{2}$ en -1, donde las cargas se repelen de acuerdo a una ley de interacción bajo un potencial logarítmico. También los polinomios de Jacobi constituyen un sistema ortogonal completo en $L^2([-1,1], w^{(\alpha,\beta)}(x)dx)$ y una representación explícita para ellos está dada por funciones hipergeométricas del modo siguiente:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n+\alpha+\beta+1)_k(k+\alpha+1)_{n-k}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k, \quad (3.6)$$

donde $(a)_k$, $k > 0$, y $(a)_0 = 1$, es el símbolo de Pochhammer, (ver [63], pág. 62, o [2], pág. 7).

También, estos polinomios satisfacen las siguientes propiedades

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x), \quad (3.7)$$

es decir, ellos son funciones pares o impares cuando $\alpha = \beta$ de acuerdo a la paridad de sus grados.

Como mencionamos en el capítulo 1, al ser ortogonales con respecto a la medida $w^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx$, ellos forman una sucesión estándar de polinomios ortogonales y en consecuencia satisfacen la siguiente relación de recurrencia a tres términos ([63], pág. 71):

$$\kappa_n^{(\alpha,\beta)}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(2n+\alpha+\beta-1)(\nu_n^{(\alpha,\beta)}x-\alpha^2-\beta^2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)-\gamma_n^{(\alpha,\beta)}P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x), \tag{3.8}$$

donde $n\geq 2$, $\kappa_n^{(\alpha,\beta)}=2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)$, $\gamma_n^{(\alpha,\beta)}=2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)$, $\nu_n^{(\alpha,\beta)}=(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)$ y

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(x)=1,\quad P_1^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{\alpha+\beta+2}{2}x+\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Las derivadas de los polinomios de Jacobi son, salvo un factor constante, polinomios de Jacobi traslados una unidad en los parámetros α,β. De hecho, de (3.6) obtenemos

$$\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x) \tag{3.9}$$

Otro rasgo importante de los polinomios de Jacobi proviene del hecho de que $P_n^{(\alpha,\beta)}$ es la única solución polinomial (salvo un factor constante [63, p. 61, Theorem 4.2.2]) de la ecuación diferencial de segundo orden

$$(1-x^2)y''(x)+(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)y'(x)+n(n+\alpha+\beta+1)y(x)=0. \tag{3.10}$$

Cuando $\alpha>-\frac{1}{2}$ y $\beta\leq\alpha$, el máximo de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ en $[-1,1]$ puede ser explícitamente calculado, (ver [63], pág. 168):

$$\sup_{-1\leq x\leq 1}\left|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right|=P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!},\quad \alpha>-\frac{1}{2},\quad \beta\leq\alpha. \tag{3.11}$$

Y la norma L^2 de $P_n^{(\alpha,\beta)}$ con respecto a la medida $w^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx$ en $[-1,1]$ está dada por

$$\begin{aligned}h_n^{(\alpha,\beta)} &:= \int_{-1}^{1}\left(P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right)^2 w^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx\\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2n+\alpha+\beta+1)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Ahora bien, es conocido que los polinomios normalizados de Jacobi $\{R_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\geq 0}$ tienen fórmulas producto y de linealización para muchos valores de los parámetros α, β. La región del plano (α, β) donde esto sucede fue identificada por Gasper [26, 27] (ver también [4]), consecuentemente existe un hipergrupo polinomial continuo $X(\alpha,\beta) = (I, *_{(\alpha,\beta)})$ (con $I = [-1,1]$) asociado con la sucesión $\{R_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\geq 0}$, si y sólo si, el par (α,β) pertenece al siguiente conjunto:

$$E_J = \{(\alpha,\beta) : \alpha \geq \beta > -1 \text{ y } \beta \geq -1/2 \text{ o } \alpha+\beta \geq 0\},$$

y existe un hipergrupo polinomial discreto $(\mathbb{Z}_+, \star_{(\alpha,\beta)})$ asociado con la sucesión $\{R_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\geq 0}$, si y sólo si, el par (α,β) pertenece al siguiente conjunto:

$$F_J = \{(\alpha,\beta) : a(a+3)^2(a+5) \geq (a^2-7a-24)b^2, \text{donde } a = \alpha+\beta+1 \text{ y } b = \alpha-\beta\}.$$

El conjunto F_J contiene a E_J como subconjunto propio. El resultado anterior incluye los ejemplos discutidos por Hirschman ya que el hipergrupo polinomial continuo asociado con la sucesión de polinomios de Gegenbauer $\{R_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$ es $X\left(\alpha - \frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2}\right)$.

3.3. Hipergrupos polinomiales discretos

Comenzaremos esta sección con el siguiente lema.

Lema 3.1. *Si ϕ es un caracter de un hipergrupo $(X, *)$ entonces*

$$\|\phi\|_\infty = \sup_{x\in X} |\phi(x)| = 1.$$

Demostración. Primero observemos que

$$\phi(x)\phi(y) = \int_X \phi(z)\, d(\delta_x * \delta_y),$$

de esta igualdad se deduce que $\|\phi\|_\infty^2 \leq \|\phi\|_\infty$ y por lo tanto, $\|\phi\|_\infty \leq 1$. Por otro lado, $\|\phi\|_\infty \geq \phi(e) = 1$.

■

Del lema 3.1 se desprende que si $(X, *)$ es un hipergrupo polinomial discreto asociado con una sucesión de polinomios ortogonales respecto a una medida μ, $\{R_n\}_{n\geq 0}$, entonces X debe ser un conjunto acotado, ya que para $n > 0$, R_n es una función continua no acotada.

Un cambio de variables nos permite insistir en que $X \subset I$ con $e = 1$. X es necesariamente hermitiano y conmutativo.

Por otro lado, recordemos que toda sucesión de polinomios ortogonales respecto a una medida μ, satisface una relación de recurrencia a tres términos

$$xR_n(x) = \gamma_n R_{n+1}(x) + \beta_n R_n(x) + \alpha_n R_{n-1}(x) \tag{3.13}$$

y por el Teorema de Favard [23, 61] existen condiciones suficientes para que los polinomios que satisfacen una relación como (3.13) sean ortogonales con respecto a alguna medida no negativa compactamente soportada. Entonces basados en esta última observación, la pregunta (Q1) tiene la siguiente respuesta:

Teorema 3.1. $(\mathbb{Z}_+, \star)$ *es el hipergrupo polinomial discreto asociado con la sucesión* $\{R_n\}_{n\geq 0}$ *de polinomios ortogonales respecto a una medida* μ*, si y sólo si,*

(i) $(\delta_n \star \delta_1)(\{k\}) = 0$*, si* $|n - k| > 1$.

(ii) $(\delta_n \star \delta_1)(\{n + 1\}) > 0$.

Además, los polinomios pueden ser normalizados de manera que $R_1(x) = x$ *y la medida de ortogonalidad esté soportada en* $[-1, 1]$.

Existen dos tipos de respuesta para la pregunta más difícil (Q2). La primera es una larga colección de resultados como los de Gasper [26, 27] que ha sido obtenida por quienes trabajan con funciones especiales. Existen varios resultados basados en la fórmula de recurrencia (3.13). Uno de los primeros resultados conocidos fue dado en 1970 y es debido a R. Askey [3], posteriormente en 1992 este resultado fue incluido en una investigación más amplia debida a Szwarc [65, 66], Mostraremos un resultado que aparece en [65], aunque Szwarc ha probado otros teoremas que son más ampliamente aplicables.

TEOREMA 3.2. *Si la sucesión de polinomios $\{P_n\}$ satisface la relación*

$$xP_n = \gamma_n P_{n+1} + \beta_n P_n + \alpha_n P_{n-1}$$

y

(i) α_n, β_n *y* $\alpha_n + \gamma_n$ *son sucesiones crecientes* $(\gamma_n, \alpha_n \geq 0)$.

(ii) $\alpha_n \leq \gamma_n$, *para* $n \in \mathbb{Z}_+$.

Entonces

$$P_n P_m = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c_{n,m}^k P_k$$

con $c_{n,m}^k \geq 0$.

No incluiremos la prueba completa de este resultado, pero si haremos algunos comentarios. El método de demostración de Szwarc está basado en una versión discreta del problema de Cauchy hiperbólico descrito en (2.9). La idea proviene del hecho de el resultado anterior es un análogo discreto para un problema de Sturm-Liouville, ya que la relación de recurrencia (3.13) puede ser reformulada como la siguiente ecuación en diferencias:

$$xR_n(x) = \gamma_n \Delta^2 R_n(x) + (\gamma_n - \alpha_n)\Delta R_n(x) + (\gamma_n + \beta_n) R_n(x),$$

donde $\Delta^2 R_n(x) = R_{n+1}(x) - 2R_n(x) + R_{n-1}$ y $\Delta R_n(x) = R_n(x) - R_{n-1}(x)$.

Markett ha obtenido otro método de demostración del teorema (3.2) utilizando un método que generaliza la integración de Riemann y el cual puede ser usado para obtener fórmulas de linealización explícitas [48].

El lector interesado puede encontrar en el libro de Bloom y Heyer [6] muchos ejemplos de hipergrupos polinomiales discretos (en este libro se usa el término *hipergrupos polinomiales* para referirse a hipergrupos polinomiales discretos).

3.4. Hipergrupos polinomiales continuos

El lector interesado puede encontrar en [14, 19, 20] extensa información sobre hipergrupos polinomiales continuos. Respuestas completas a las preguntas (Q3) y (Q4) están contenidas en los siguientes teoremas.

Teorema 3.3. *Si X es un intervalo entonces $(X,*)$ es un hipergrupo polinomial continuo, si y sólo si, $(X,*)$ es equivalente por medio de un cambio de variables lineal a un hipergrupo polinomial continuo de Jacobi $X(\alpha,\beta)$ con $(\alpha,\beta)\in E_J$.*

Demostración. Daremos un esquema de la demostración.

($\Rightarrow$) Esta parte está basada en la idea de obtener una ecuación de Sturm-Liouville general de segundo orden para los caracteres, y entonces utilizar un conocido resultado de Bochner [7], el cual muestra que sólo las familias de los polinomios de Jacobi, Laguerre, Hermite, $\{x^n\}_{n\geq 0}$ y los polinomios de Bessel satisfacen tal ecuación. De manera que si asumimos que $(X,*)$ es un hipergrupo polinomial continuo asociado con una sucesión de polinomios ortogonales respecto a una medida μ, $\{R_n\}_{n\geq 0}$. Para obtener la ecuación diferencial, comenzamos con la relación

$$R_n(s)R_n(t)=\int_X R_n(r)\,d(\delta_s*\delta_t)(r). \tag{3.14}$$

Ahora podemos obtener la ecuación diferencial para $\{R_n\}_{n\geq 0}$ siguiendo el método de [38]. Consideramos el desarrollo de Taylor de $R_n(s)$ alrededor de $s=e$ y el desarrollo de Taylor de $R_n(r)$ alrededor de $r=t$, entonces:

$$R_n(s)R_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}R_n^{(k)}(e)(s-e)^k R_n(t), \tag{3.15}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_X R_n(r)\,d(\delta_s*\delta_t)(r) &= \int_X\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}R_n^{(k)}(t)(r-t)^k\right]d(\delta_s*\delta_t)(r)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}R_n^{(k)}(t)\int_X (r-t)^k\,d(\delta_s*\delta_t)(r)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}M_k(s,t)R_n^{(k)}(t), \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

donde $M_k(s,t) = \int_X (r-t)^k \, d(\delta_s * \delta_t)(r)$. De (3.14)-(3.16) obtenemos que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} R_n^{(k)}(e)(s-e)^k R_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M_k(s,t) R_n^{(k)}(t). \tag{3.17}$$

$M_1(s,t)$ y $M_2(s,t)$ pueden ser explícitamente calculadas en términos de R_1 y R_2 y entonces expresadas en términos de $s-e$ y de $(s-e)^2$, respectivamente. Para $k > 2$ $M_k(s,t)$ no tiene términos $s-e$, ya que $M_k(s,t) = o(M_2(s,t))$ si $k > 2$. Luego, los coeficientes de $s-e$ en ambos lados de (3.17) son igualados para obtener la ecuación de Sturm-Liouville general de segundo orden:

$$A(t)y''(y) + B(t)y'(t) = \lambda_n y(t), \quad (y = R_n, \quad \lambda_n = R_n'(e)).$$

($\Leftarrow$) Es suficiente seguir la demostración dada por Gasper en [27].

■

La misma demostración puede ser usada para mostrar un resultado que debilita la condición de que X sea un intervalo.

Teorema 3.4. *Supongamos que $(X,*)$ es un hipergrupo donde X es un subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ y para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ $(X,*)$ tiene un caracter el cual es un polinomio R_n de grado n. Asumamos que una de las siguientes condiciones se satisface:*

(i) X es compacto.

(ii) La sucesión $\{R_n\}_{n\geq 0}$ es ortogonal con respecto a una medida positiva de Borel sobre X.

Entonces $(X,*)$ es equivalente por medio de un cambio de variables lineal a un hipergrupo polinomial de Jacobi continuo $X(\alpha,\beta)$ con $(\alpha,\beta) \in E_J$.

3.5. Hipergrupos y ortogonalidad Sobolev

Preguntas como (Q1)-(Q4) podrían tener respuestas en el contexto de ortogonalidad Sobolev. Por ejemplo, cuando se consideran productos internos de Sobolev de la forma:

$$\langle f, g\rangle_S = \int_{\mathrm{supp}(\mu_0)} f(x)g(x)\, d\mu_0(x) + \lambda \int_{\mathrm{supp}(\mu_1)} f'(x)g'(x)\, d\mu_1(x), \tag{3.18}$$

con $\lambda \geq 0$.

Una cuestión interesante, sería poder generar estructuras de hipergrupo en el caso de la ortogonalidad Sobolev. Por ejemplo, es conocido que cuando se considera el siguiente producto interno de Sobolev

$$\langle f, g\rangle_S = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w^{(\alpha,\beta)}(x)\, dx + \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)\, dx, \tag{3.19}$$

donde $w^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ es el peso de Jacobi, entonces usando (3.9) y (3.12), los polinomios $\{R_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\geq 0}$ satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad Sobolev

$$\begin{aligned}\langle R_n^{(\alpha,\beta)}, R_m^{(\alpha,\beta)}\rangle_S \;=\; & \left[\frac{h_n^{(\alpha,\beta)}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)P_m^{(\alpha,\beta)}(1)}\right. \\ & \left. + \frac{h_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(n+\alpha+\beta+1)(m+\alpha+\beta+1)}{4P_n^{(\alpha,\beta)}(1)P_m^{(\alpha,\beta)}(1)}\right]\delta_{n\,m},\end{aligned}$$

con $n, m \geq 0$, y consecuentemente, existen hipergrupos polinomiales continuos asociados a tal sucesión, con $(\alpha, \beta) \in E_J$.

Es claro que si consideramos una sucesión de polinomios ortogonales $\{Q_{n,\lambda}\}_{n\geq 0}$ con respecto un producto interno de Sobolev como (3.18). Si x_0 es elegido de manera que $Q_{n,\lambda}(x_0) \neq 0$ para $n \geq 0$, entonces podemos definir los polinomios normalizados $R_{n,\lambda}(x) = \frac{Q_{n,\lambda}(x)}{Q_{n,\lambda}(x_0)}$ y como toda familia de polinomios ortogonales (estándar o no) siempre tiene una fórmula de linealización:

$$R_{n,\lambda}R_{m,\lambda} = \sum_{k=|n-m|^{n+m}} c_{n,m}^k(\lambda)R_{k,\lambda}, \tag{3.20}$$

donde

$$c_{n,m}^k(\lambda) = \frac{\langle R_{n,\lambda}R_{m,\lambda}, R_{k,\lambda}\rangle_S}{\|R_{k,\lambda}\|_S^2}.$$

El problema de encontrar hipergrupos polinomiales discretos asociados con la sucesión $\{R_{n,\lambda}\}_{n\geq 0}$ se reduciría a:

(i) Garantizar que un tal x_0 con la propiedad de que $Q_{n,\lambda}(x_0) \neq 0$ para $n \geq 0$, puede ser elegido.

(ii) Garantizar que el par de medidas $(d\mu_0, d\mu_1)$ es tal que $c_{n,m}^k(\lambda) \geq 0$.

Con respecto a la condición (i), un resultado de López Lagomasino y Pijeira [41] dice que si el operador multiplicación por x M_x está acotado, entonces los ceros de los polinomios $\{R_{n,\lambda}\}_{n\geq 0}$ están contenidos en el disco $D = \{z : |z| \leq \|M_x\|\}$, con $\|M_x\|$ la norma del operador. Así pues si M_x está acotado, basta elegir $x_0 \notin D$.

La condición (ii) es más complicada y hasta donde la autora conoce no es un problema que se haya abordado en la literatura actual.

Para garantizar la existencia de hipergrupos polinomiales continuos asociados a la sucesión $\{R_{n,\lambda}\}_{n\geq 0}$, habría que encontrar condiciones sobre el par de medidas $(d\mu_0, d\mu_1)$ que garanticen la existencia de una tercera medida no-negativa $\sigma_{x,y} \in M(\mathrm{supp}(\sigma_{x,y}))$ con $\|\sigma_{x,y}\|$ uniformemente acotada y tal que se satisfaga la fórmula producto

$$R_{n,\lambda}(x)R_{n,\lambda}(y) = \int_{\mathrm{supp}(\sigma_{x,y})} R_{n,\lambda}(z)\, d\sigma_{x,y}(z).$$

Bibliografía

[1] P. Althammer, *Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation*, J. Reine Angew. Math. **211** (1962), 192–204.

[2] R. Askey, *Orthogonal Polynomials and Special Functions, Regional Conference Series in Applied Mathematics.* SIAM. Bristol 3, England. J. W. Arrowsmith Ltd. 1975.

[3] R. Askey, *Linearization of the product of orthogonal polynomials.* En *Problems in Analysis. Princenton, NJ*. R. Gunning, editor. Princenton University Press, 1970, 223–228.

[4] R. Askey, G. Gasper, *Linearization of the product of Jacobi polynomials, III*, Canad. J. Math. **23** (1971), 332–338.

[5] J. Brenner, *Über eine erweiterung des orthogonalittsbegriffes bei polynomen.* En *Proceedings Conference on the Constructive Theory of Functions*, Budapest, 1969, G. Alexits and S. B. Stechkin Eds. Akadémia Kiadó, Budapest, 1972. 77–83.

[6] W. R. Bloom, H. Heyer, *Harmonic analysis of probability measures on hypergroups*, vol. 20 of de Gruyter Studies in Mathematics. De Gruyter, Berlin, New York, 1995.

[7] S. Bochner, *Über Sturm-Liouvillische polynomesysteme*, Math. Z. **29** (1929), 730–736.

[8] W. Boyce, R. C. Di Prima, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Noriega Editores, Editorial Limusa, tercera edición, 1973.

[9] H. Chébli, *Sur la positivité des opérateurs de "translation généralisée" associés à un opérateur de Sturm-Liouville sur* $]0,\infty[$, C. R. Acad. Sci. Paris, **275** (1972), 601–604.

[10] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc. New York, 1978.

[11] E. A. Cohen, *Theoretical Properties of Best Polynomial Approximation in* $W^{1,2}[-1,1]$, SIAM J. Math. Anal. **2** (1971), 187–192.

[12] W. C. Connett, O. Gebuhrer, A. L. Schwartz, editors. *Applications of hypergroups and related measure algebras*, Contemporary Mathematics, **183**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[13] W. C. Connett, C. Markertt, A. L. Schwartz, *Jacobi polynomials and related hypergroup structures*. En *Probability measures on groups X, Proceedings Oberwolfach 1990*. H. Heyer, editor. Plenum, New York, 1991, 45–81.

[14] W. C. Connett, C. Markertt, A. L. Schwartz, *Convolution and hypergroup structures associated with a class of Sturm-Liouville systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), 365–390.

[15] W. C. Connett, C. Markertt, A. L. Schwartz, *Product formulas and convolutions for angular and radial spheroidal wave functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993), 695–710.

[16] W. C. Connett, A. L. Schwartz, *A Hardy-Littlewood maximal inequality for Jacobi type hypergroups*, Proc. Amer. Math. Soc. **107** (1989), 137–143.

[17] W. C. Connett, A. L. Schwartz, *Analysis of a class of probability preserving measure algebras on a compact interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **320** (1990), 371–393.

[18] W. C. Connett, A. L. Schwartz, *Positive product formulas and hypergroups associated with singular Sturm-Liouville problem on a compact interval*, Colloq. Math. **LX/LXI** (1990), 525–535.

[19] W. C. Connett, A. L. Schwartz, *Product formulas, hypergroups, and Jacobi polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc. **22** (1990), 91–96.

[20] W. C. Connett, A. L. Schwartz, *Subsets of $\mathbb{R}$ which support hypergroups with polynomial characters*, J. Comput. Appl. Math. **65** (1995), 73–84.

[21] C. F. Dunkl, *The measure algebra of a locally compact hypergroup*, Trans. Amer. Math. Soc. **22** (1973), 331–348.

[22] W. D. Evans, L. L. Littlejohn, F. Marcellán, C. Markett y A. Ronveaux, *On recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **26** (1995), 446–467.

[23] J. Favard, *Sur les polynomes de Tchebicheff*, C. R. Acad. Sci. Paris, **200** Sér. A–B (1935), 2052–2053.

[24] G. Freud, *Orthogonal Polynomials*, Akademiai Kiado/Pergamon Press, Budapest (1971).

[25] G. Gasper, *Linearization of the product of Jacobi polynomials, I*, Canad. J. Math. **22** (1970), 171–175.

[26] G. Gasper, *Linearization of the product of Jacobi polynomials, II*, Canad. J. Math. **22** (1970), 582–593.

[27] G. Gasper, *Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel*, Ann. of Math. **95** (1972), 261–280.

[28] L. Gegenbauer, *Über einige bestimmte Integrale*, Sitzungsberichte Kaiserlichen Akad. der Wiss. math.-natur. Klasse Wien, **70** (2a) (1874), 433–443.

[29] W. Gröbner, *Orthogonale polynomsysteme, die gleichzeitig mit $f(x)$ auch deren ableitung $f'(x)$ approximieren*, En *Funktionanalysis, Approximations-theorie, Numerische Mathematik*, ISNM **7**, Birkhäuser, Basel, 1967. 24–32.

[30] I. I. Hirschman, Jr., *Harmonic analysis and the ultraspherical polynomials*. En *Symposium of the Conference on Harmonic Analysis*. Cornell, 1956.

[31] I. I. Hirschman, Jr., *Sur les polynomes ultraspheriques*, C. R. Acad. Sci. Paris, **242** (1956), 2212–2214.

[32] R. I. Jewett, *Spaces with an abstract convolution of measures*, Adv. in Math. **18** (1975), 1–101.

[33] T. Koornwinder, *Jacobi polynomials II. An analytical proof of the product formula*, SIAM J. Math. Anal. **5** (1974), 125–137.

[34] T. Koornwinder, *Orthogonal polynomials, a short introduction*, arXiv:1303.2825v1[math.CA], 2013.

[35] T. Koornwinder, A. L. Schwartz *Product formulas and associated hypergroups for orthogonal polynomials on the simplex and on a parabolic biangle*, Constr. Approx. **13** (1997), 537–567.

[36] R. Lasser, *Orthogonal polynomials and hypergroups*, Rend. Mat. **7** (3) (1983), 185–209.

[37] R. Lasser, J. Obermaiere, H. Rauhut, *Generalized hypergroups and orthogonal polynomials*, J. Aust. Math. Soc. **82** (2007), 369–393.

[38] B. M. Levitan, *Generalized translation operator*, Israel program for scientific translations, Jerusalem, 1964.

[39] G. L. Litvinov, *Hypergroups and hypergroup algebras*, J. Soviet Math. **28** (1987), 1734–1761.

[40] G. López Lagomasino, H. Pijeira, *Polinomios Ortogonales*, XIV Escuela Venezolana de Matemáticas, Ediciones IVIC. Caracas, Venezuela, 2001.

[41] G. López Lagomasino, H. Pijeira, *Zero location and n-th root asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **99** (1999), 30–43.

[42] F. Marcellán, J. J. Moreno Balcázar, *Asymptotics and zeros of Sobolev orthogonal polynomials on unbounded supports*, Acta Appl. Math. **94** (2006), 163–192.

[43] F. Marcellán, F. Peherstorfer, R. Steinbauer *Orthogonality properties of linear combinations of orthogonal polynomials I*, Adv. in Comput. Math. **5** (1996), 281-295.

[44] F. Marcellán, Y. Quintana, *Polinomios ortogonales no-estándar. Propiedades algebraicas y analíticas.* XXII Escuela Venezolana de Matemáticas. Ediciones IVIC. Caracas, Venezuela, 2009.

[45] F. Marcellán, Y. Quintana, A. Urieles, *On the Pollard decomposition method applied to some Jacobi-Sobolev expansions*, Turk. J. Math. **37** (6) (2013), 934–948.

[46] F. Marcellán, W. Van Assche, *Relative asymptotics for orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **72** (1993), 193–209.

[47] C. Markett, *Product formulas and convolution structure for Fourier-Bessel series*, Constr. Approx. **5** (1989), 383–404.

[48] C. Markett, *Linearization of the product of symmetrical orthogonal polynomials*, Constr. Approx. **10** (1994), 317–338.

[49] A. Martínez Finkelshtein, *Analytic Aspects of Sobolev Orthogonal Polynomials revisited*, J. Comput. Appl. Math. **127** (2001), 255–266.

[50] A. Martínez Finkelshtein, J. J. Moreno-Balcázar, T. E. Pérez, M. A. Piñar, *Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs*, J. Approx. Theory **92** (1998), 280–293.

[51] A. Martínez Finkelshtein, J. J. Moreno-Balcázar, H. Pijeira, *Strong asymptotics for Gegenbauer-Sobolev orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **81** (1997), 211–216.

[52] H. G. Meijer, *Coherent pairs and zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials,* Indag. Math. (N.S.) **4** (1993), 93–112.

[53] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 152–182.

[54] Y. Quintana, *Aproximación polinomial y ortogonalidad estándar sobre la recta.* II EMALCA-Colombia. Editoral Universidad del Atlántico-Uniatlántico. Barranquilla, Colombia, 2013.

[55] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Intersciens Publishers, 1962.

[56] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, second edition, 1974.

[57] F. W. Schäfke, *Zu den orthogonalpolynomen von Althammer*, J. Reine Angew. Math. **252** (1972), 195–199.

[58] A. L. Schwartz, *l^1-convolution algebras: representation and factorization*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **41** (1977), 161–176.

[59] A. L. Schwartz, *Classification of one-dimensional hypergroups*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 1073–1081.

[60] A. L. Schwartz, *Three lectures on hypergroups. Delhi, December 1995.* En *Trends in Mathematics. Harmonic Analysis and Hypergroups.* K. A. Ross, J. M. Anderson, G. L. Litvinov, A. I. Singh, V. S. Sunder, N. J. Wildberger, editors. Birkhäuser, 1996.

[61] J. Shohat, *The relation of the classical orthogonal polynomials to the polynomials of Appell*, Amer. J. Math. **58** (1936), 453–464.

[62] R. Spector, *Mesures invariantes sur les hypergroupes*, Trans. Amer. Math. Soc. **239** (1978), 147–165.

[63] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Colloq. Publ. Amer. Math. Soc. Vol **23**, (4th ed.), Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1975.

[64] H. Zeuner, *One-dimensional hypergroups*, Adv. in Math. **76** (1989), 1–18.

[65] R. Szwarc, *Orthogonal polynomials and a discrete boundary value problem I*, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 959–964.

[66] R. Szwarc, *Orthogonal polynomials and a discrete boundary value problem II*, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 965–969.

Índice alfabético

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela.

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela
`http://amv.ivic.gob.ve`

IVIC

Gobierno Bolivariano de Venezuela

Ministerio del Poder Popular para **Educación Universitaria, Ciencia y Tecnología**

PuebloVictorioso