

**XXVIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS  
EMALCA-VENEZUELA 2015**

---

**CONTROLABILIDAD DE  
ECUACIONES DE EVOLUCIÓN  
SEMILINEAL**

**Alexander Carrasco, Hugo Leiva  
y Jahnett Uzcátegui**

**MÉRIDA, VENEZUELA, 30 de agosto al 4 de septiembre de 2015**



XXVIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS  
EMALCA - VENEZUELA 2015

---

CONTROLABILIDAD DE ECUACIONES DE EVOLUCIÓN  
SEMILINEAL

Alexander Carrasco

Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado,  
Barquisimeto, Venezuela.  
acarrasco@ucla.edu.ve

Hugo Leiva, Jahnett Uzcátegui

Universidad de Los Andes,  
Mérida, Venezuela  
jahnettu@ula.ve, hleiva@ula.ve

---

MÉRIDA, 30 DE AGOSTO AL 4 DE SEPTIEMBRE DE 2015

## XXVIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana. La XXVIII Escuela Venezolana de Matemáticas recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Banco Central de Venezuela, el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), la Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) y Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA).

2010 Mathematics Subject Classification: 93B05, 93C25, 93C55, 93B05.

©Ediciones IVIC

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Rif: G-20004206-0

### **Controlabilidad de Ecuaciones de Evolución Semilineal.**

Alexander Carrasco, Jahnett Uzcátegui, Hugo Leiva

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas

Depósito legal lf66020155102238

ISBN 978-980-261-162-1

Caracas, Venezuela

2015





# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>V</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Semigrupos de Operadores Fuertemente Continuos . . . . .	1
1.2. El Problema de Valor Inicial. . . . .	12
1.3. Ecuación no Lineal. . . . .	15
1.4. Una Caracterización de Operadores de Rango Denso. . . . .	19
1.5. Algunos Teoremas de Punto Fijo. . . . .	20
<b>2. Controlabilidad de Ecuaciones de Evolución en Espacios de Dimensión Finita</b>	<b>23</b>
2.1. Sistemas Lineales No Autónomos. . . . .	23
2.2. Sistemas de Control Autónomos . . . . .	28
2.2.1. Caracterización algebraica de controlabilidad del sistema $(A, B)$ . . . . .	29
2.3. Controlabilidad de Sistemas Semi-Lineales. . . . .	33
2.4. Controlabilidad de Sistemas Semi-Lineales con Impulsos. . . . .	42
<b>3. Controlabilidad de Sistemas Semilineales en Espacios de Dimensión Infinita</b>	<b>51</b>
3.1. Controlabilidad para Sistemas Lineales Continuos. (Exacta y Aproximada) . . . . .	51
3.1.1. Preliminares. . . . .	51
3.1.2. Resultados Principales. . . . .	53

3.2.	Controlabilidad Exacta para Sistemas Semilineales Continuos. . . . .	59
3.3.	Controlabilidad Aproximada para Sistemas Semilineales Continuos. . . . .	64
<b>4.</b>	<b>Controlabilidad de Sistemas Semilineales Discretos</b>	<b>69</b>
4.1.	Controlabilidad para Sistemas Lineales Discretos. . . . .	71
4.2.	Una Ecuación en Diferencias Lineal Particular. . . . .	82
4.3.	Controlabilidad Exacta para Sistemas Semilineales Discretos. . . . .	87
4.4.	Controlabilidad Aproximada para Sistemas Semilineales Discretos. . . . .	92
<b>5.</b>	<b>Aplicaciones a Sistemas de Control Gobernados por Ecuaciones en Derivadas Parciales</b>	<b>97</b>
5.1.	Estudio de la Controlabilidad de la Ecuación de la Onda. . . . .	99
5.1.1.	Caso Continuo. . . . .	99
5.1.2.	Caso Discreto. . . . .	103
5.2.	Estudio de la Controlabilidad de la Ecuación del Calor. . . . .	105
5.2.1.	Caso Continuo. . . . .	105
5.2.2.	Caso Discreto. . . . .	106
5.3.	La Ecuación de Termoelásticidad. . . . .	108
5.4.	La Ecuación de la Viga. . . . .	111
5.4.1.	Controlabilidad de la Ecuación de la Viga Semilineal con Impulso . . . . .	123
5.4.2.	Controlabilidad de la Ecuación de la Viga Perturbada . . . . .	138

# Prólogo

En las últimas décadas, la teoría de control ha ganado gran importancia como disciplina para ingenieros, matemáticos y otros científicos. Ejemplos de problemas de control van desde casos sencillos, como la conducción del calor a través de una barra, hasta casos más complejos como el aterrizaje de un vehículo sobre la Luna, el control de la economía de una nación, el control de epidemias, entre otros. Existe una extensa literatura sobre teoría de control para sistemas continuos, por mencionar algunos autores se tienen los trabajos de Barnett [4], Curtain & Pritchard [11], Curtain & Zwart [18] y Zuazua [60]. En cambio que, sobre la teoría de control de sistemas discretos la literatura es menos extensa; de hecho en muchos trabajos la presentan de manera introductoria como por ejemplo Agarwal [1], Elaydi [24] (ambos sobre espacios de dimensión finita) y Sasu [52].

En este curso se presenta una teoría sobre controlabilidad para sistemas sobre espacios de dimensión finita, así como también se exponen los conceptos y caracterizaciones sobre controlabilidad exacta y controlabilidad aproximada tanto para sistemas continuos como para sistemas discretos, lineales y semilineales, sobre espacios de dimensión infinita.

El libro está estructurado como sigue:

En el **capítulo 1**, se exponen definiciones y resultados importantes que serán de utilidad en el desarrollo de los siguientes capítulos; particularmente se muestran resultados sobre la teoría de semigrupos y sobre existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones de evolución, así como también algunos teoremas de punto fijo.

En el **capítulo 2**, se exponen los aspectos más resaltantes de la teoría de control para sistemas sobre espacios de dimensión finita.

En el **capítulo 3** se consideran sistemas de control continuos (lineales y semilineales) sobre espacios de dimensión infinita y se dan condiciones

## VI

para caracterizar la controlabilidad de dichos sistemas.

En el **capítulo 4** se presentan condiciones para caracterizar la controlabilidad de ecuaciones en diferencias sobre espacios de dimensión infinita. En primer lugar, se muestran caracterizaciones que permiten estudiar la controlabilidad, tanto exacta como aproximada, de ecuaciones en diferencias lineales. A pesar de que para el caso continuo existen trabajos previos que tratan la controlabilidad de sistemas semilineales, no existen trabajos que den condiciones para estudiar la controlabilidad de sistemas semilineales discretos. Por esta razón, en este capítulo también se exponen criterios para la controlabilidad, tanto exacta como aproximada, de ecuaciones en diferencias no lineales.

Finalmente, en el **capítulo 5** nos concentramos en el estudio de algunas aplicaciones de los resultados de los capítulos previos, para así estudiar la controlabilidad de la ecuación de la onda, la ecuación del calor y la ecuación de termoelasticidad y la ecuación de la viga.

No podemos dejar pasar la oportunidad para agradecer al Comité Organizador de la XXVIII Escuela Venezolana de Matemáticas la oportunidad de dictar este curso.

Los autores  
Caracas, Mayo 2015

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se dan algunas definiciones y se presentan resultados fundamentales sobre semigrupos fuertemente continuos de operadores lineales y acotados, así como también, sobre existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones de evolución que serán utilizados en los capítulos siguientes. La mayor parte de la teoría que se muestra en este capítulo se puede encontrar en los textos de Curtain & Zwart [18], Goldstein [27] y Pazy [51], salvo el Lema 1.1.1 el cual se encuentra en Leiva [35].

### 1.1. Semigrupos de Operadores Fuertemente Continuos

**Definición 1.1.1.** *Sea  $Z$  un espacio de Hilbert. Una familia  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  de operadores lineales y continuos  $T(t) : Z \rightarrow Z$  se denomina **Semigrupo Fuertemente Continuo** (o  $C_0$ -semigrupo) si ésta verifica las tres condiciones siguientes:*

i)  $T(0) = I$ .

ii)  $T(t + s) = T(t)T(s)$ ,  $(t, s \geq 0)$ .

iii) *Para todo  $z_0$  en  $Z$ ,  $T(t)z_0$  es fuertemente continuo en  $t = 0$ , es decir,*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)z_0 - z_0\|_Z = 0.$$

**Definición 1.1.2.** *El generador infinitesimal  $A$  de un  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  en un espacio de Hilbert  $Z$  es definido por:*

$$Az = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(T(t) - I)z,$$

*siempre que el límite exista. El dominio de  $A$ ,  $D(A)$  es el conjunto de elementos en  $Z$  para el cual el límite existe.*

Algunas propiedades importantes de los  $C_0$ -semigrupos están dadas en el siguiente Teorema:

**Teorema 1.1.1.** *Sea  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semigrupo sobre un espacio de Hilbert  $Z$ , entonces  $T(t)$  posee las siguientes propiedades:*

- (a)  $\|T(t)\|$  está acotada sobre todo intervalo finito de  $[0, +\infty)$ .
- (b)  $T(t)$  es fuertemente continuo en todo  $t \in [0, +\infty)$ .
- (c) Para todo  $z \in Z$ , se tiene que

$$\frac{1}{t} \int_0^t T(s)z ds \longrightarrow z, \quad t \rightarrow 0^+.$$

- (d) Si  $w_0 = \inf_{t > 0} \left( \frac{1}{t} \log \|T(t)\| \right)$ , entonces  $w_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \log \|T(t)\| \right) < \infty$ .
- (e) Para todo  $w > w_0$ , existe una constante  $M_w$  tal que

$$\|T(t)\| \leq M_w e^{wt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Para la demostración de este Teorema se puede consultar Curtain & Zwart [18]. ■

Ahora bien, el siguiente Teorema, el cual se encuentra en Curtain & Zwart [18], nos muestra ciertas propiedades importantes que satisface el generador infinitesimal de un  $C_0$ -semigrupo.

**Teorema 1.1.2.** *Sea  $Z$  un espacio de Hilbert y sea  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semigrupo sobre  $Z$ , con generador infinitesimal  $A$ . Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (a) Si  $z \in D(A)$ , entonces  $T(t)z \in D(A)$ ,  $\forall t \geq 0$ .

$$(b) \frac{d}{dt}(T(t)z) = AT(t)z = T(t)Az, \text{ para } z \in D(A), t > 0.$$

$$(c) \frac{d^n}{dt^n}(T(t)z) = A^n T(t)z = T(t)A^n z, \text{ para } z \in D(A^n), t > 0.$$

$$(d) T(t)z - z = \int_0^t T(s)Az ds, \text{ para } z \in D(A).$$

$$(e) \int_0^t T(s)z ds \in D(A), A \int_0^t T(s)z ds = T(t)z - z, \text{ para todo } z \in Z \\ \text{y } D(A) \text{ es denso en } Z.$$

(f)  $A$  es un operador lineal cerrado.

$$(g) \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n) \text{ es denso en } Z.$$

**Definición 1.1.3.** Sea  $A$  un operador sobre un espacio de Hilbert  $Z$ . El **conjunto resolvente** de  $A$  es

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D(A) \rightarrow Z \text{ es biyectivo y } (\lambda I - A)^{-1} \in L(Z)\}.$$

donde  $L(Z)$  es el espacio de todos los operadores lineales y acotados de  $Z$  en  $Z$ .

**Observación:** Si  $\rho(A) \neq \emptyset$ , entonces  $A$  es cerrado, es decir, su gráfico

$$\mathcal{G}(A) = \{(z, Az) : z \in D(A)\}$$

es un subespacio cerrado de  $Z \times Z$ . Si  $A$  es cerrado, entonces, por el Teorema del Gráfico Cerrado, se tiene que el conjunto resolvente de  $A$  es

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D(A) \rightarrow Z \text{ es biyectivo}\}.$$

$(\lambda I - A)^{-1}$  es llamado el **operador resolvente** de  $A$  y  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  es el **espectro** de  $A$ . ■

El siguiente Lema juega un papel fundamental para obtener los principales resultados que presentamos en los siguientes capítulos.

**Lema 1.1.1.** (Leiva [35]) Sean  $Z$  un espacio de Hilbert separable y  $\{A_n\}_{n \geq 1}$ ,  $\{P_n\}_{n \geq 1}$  dos familias de operadores lineales y acotados en  $Z$ , con  $\{P_n\}_{n \geq 1}$  una familia completa de proyectores ortogonales, tales que:

$$A_n P_n = P_n A_n, n \geq 1.$$

Defina la siguiente familia de operadores lineales

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z, \quad z \in Z, \quad t \geq 0.$$

Entonces:

- (a)  $T(t)$  es un operador lineal y acotado si  $\|e^{A_n t}\| \leq g(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , para alguna función continua a valores reales  $g(t) \geq 0$ ,  $t \geq 0$ .
- (b) Bajo la condición anterior  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es un  $C_0$ -semigrupo en el espacio de Hilbert  $Z$ , cuyo generador infinitesimal  $A$  está dado por

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z, \quad z \in D(A)$$

con

$$D(A) = \left\{ z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n P_n z\|^2 < \infty \right\}.$$

- (c) El espectro  $\sigma(A)$  de  $A$  está dado por

$$\sigma(A) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n})},$$

donde  $\overline{A_n} = A_n P_n : \mathcal{R}(P_n) \rightarrow \mathcal{R}(P_n)$ ,  $\mathcal{R}(P_n) = \text{Rango}(P_n)$ .

**Demostración**

- (a) Supongamos que existe  $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $\|e^{A_n t}\| \leq g(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Luego,

$$\begin{aligned} \|T(t)z\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|e^{A_n t} P_n z\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|e^{A_n t}\|^2 \|P_n z\|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} g(t)^2 \|P_n z\|^2 = g(t)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n z\|^2 = g(t)^2 \|z\|^2. \end{aligned}$$

Así,  $\|T(t)z\| \leq g(t)\|z\|$ . Entonces,  $\|T(t)\| = \sup_{\|z\|=1} \|T(t)z\| \leq g(t)$ . Por lo tanto,  $T \in L(Z)$ , es decir  $T(t)$  es un operador lineal y acotado.

(b) Veamos primero que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es un  $C_0$ -semigrupo.

i)  $T(0)z = \sum_{n=1}^{\infty} P_n z = z$ . Así,  $T(0) = I$ .

ii)

$$\begin{aligned} T(t)T(s)z &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n T(s)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n \left( \sum_{m=1}^{\infty} e^{A_m s} P_m z \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} e^{A_n s} P_n z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n (t+s)} P_n z \\ &= T(t+s)z. \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \|T(t)z - z\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z - \sum_{n=1}^{\infty} P_n z \right\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (e^{A_n t} - I) P_n z \right\|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|e^{A_n t} - I\|^2 \|P_n z\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^N \|e^{A_n t} - I\|^2 \|P_n z\|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \|e^{A_n t} - I\|^2 \|P_n z\|^2 \\ &\leq \sup_{1 \leq n \leq N} \|e^{A_n t} - I\|^2 \sum_{n=1}^N \|P_n z\|^2 + K \sum_{n=N+1}^{\infty} \|P_n z\|^2, \end{aligned}$$

donde  $K = \sup_{n \geq 1, 0 \leq t \leq 1} \|e^{A_n t} - I\|^2$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \|P_n z\|^2 < \frac{\varepsilon}{2K}$$

y podemos escoger  $t \leq 1$  tal que

$$\sup_{1 \leq n \leq N} \|e^{A_n t} - I\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2\|z\|^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|T(t)z - z\|^2 &\leq \frac{\varepsilon}{2\|z\|^2} \sum_{n=1}^N \|P_n z\|^2 + K \frac{\varepsilon}{2K} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\|z\|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n z\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2\|z\|^2} \|z\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)z - z\| = 0$ ,  $\forall z \in Z$ . De i), ii) y iii) se sigue que  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es un  $C_0$ -semigrupo.

Sea  $A$  el generador infinitesimal de  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  y  $D(A)$  su dominio, entonces para  $z \in D(A)$  se tiene, por definición, que

$$Az = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)z - z}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (e^{A_n t} - I) P_n z}{t}.$$

Ahora, puesto que  $e^{A_m t}$  es un  $C_0$ -semigrupo cuyo generador infinitesimal es  $A_m$ , entonces

$$P_m Az = P_m \left[ \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{e^{A_m t} - I}{t} \right) P_m z \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{A_m t} - I}{t} P_m z = A_m P_m z.$$

$$\text{Así, } Az = \sum_{n=1}^{\infty} P_n Az = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z.$$

Ahora, sea

$$D = \left\{ z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n P_n z\|^2 < \infty \right\}$$

y veamos que  $D(A) = D$ . Es claro que  $D(A) \subset D$ . Supongamos ahora que  $z \in D$ , entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z = y \in Z.$$

Sea  $z_k = \sum_{n=1}^k P_n z$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)z_k - z_k}{t} = \sum_{n=1}^k A_n P_n z.$$

por lo tanto,  $z_k \in D(A)$  y  $Az_k = \sum_{n=1}^k A_n P_n z$ .

Finalmente, si  $z_k \rightarrow z$  cuando  $k \rightarrow \infty$  y  $\lim_{t \rightarrow 0^+} Az_k = y$ , entonces, puesto que  $A$  es cerrado, obtenemos que  $z \in D(A)$  y  $Az = y$ . Con esto hemos probado que  $D \subset D(A)$ . Así,  $D(A) = D$ .

(c) es equivalente a probar lo siguiente:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\bar{A}_n) \subset \sigma(A) \quad \text{y} \quad \sigma(A) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\bar{A}_n)}.$$

Para probar la primera parte, mostraremos que  $\rho(A) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(\bar{A}_n)$ . En efecto, sea  $\lambda$  en  $\rho(A)$ . Entonces  $(\lambda I - A)^{-1} : Z \rightarrow D(A)$  es un operador lineal acotado. Necesitamos probar que

$$(\lambda I - \bar{A}_m)^{-1} : \mathcal{R}(P_m) \rightarrow \mathcal{R}(P_m)$$

existe y es acotado para  $m \geq 1$ . Supongamos que

$$(\lambda I - \bar{A}_m)^{-1} P_m z = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)P_m z &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda I - A_n)P_n P_m z \\ &= (\lambda I - A_m)P_m z = (\lambda I - \bar{A}_m)P_m z = 0. \end{aligned}$$

Lo cual implica que,  $P_m z = 0$ . Así,  $(\lambda I - \bar{A}_m)$  es inyectiva.

Ahora, dado  $y$  en  $\mathcal{R}(P_m)$  queremos resolver la ecuación  $(\lambda I - \bar{A}_m)w = y$ .

De hecho, puesto que  $\lambda \in \rho(A)$ , existe  $z \in Z$  tal que

$$(\lambda I - A)z = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda I - A_n)P_n z = y.$$

Entonces, aplicando  $P_m$  a ambos lados de esta ecuación obtenemos

$$P_m(\lambda I - A)z = (\lambda I - A_m)P_m z = (\lambda I - \bar{A}_m)P_m z = P_m y = y.$$

Por lo tanto,  $(\lambda I - \bar{A}_m) : \mathcal{R}(P_m) \rightarrow \mathcal{R}(P_m)$  es una biyección. Puesto que  $\bar{A}_m$  es cerrado, entonces, por el teorema del gráfico cerrado obtenemos que

$$\lambda \in \rho(\bar{A}_m) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - \bar{A}_m)^{-1} \text{ es acotada}\}$$

para todo  $m \geq 1$ , con lo cual hemos probado que

$$\rho(A) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(\bar{A}_n) \iff \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\bar{A}_n) \subset \sigma(A).$$

Ahora, para probar que:

$$\sigma(A) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\bar{A}_n)}.$$

recordemos que si  $\lambda \in \sigma(A)$ , entonces ocurre alguna de las siguientes situaciones

- (1)  $\lambda \in \sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ no es inyectiva}\}$ .
- (2)  $\lambda \in \sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ es inyectiva, pero } \overline{\mathcal{R}(A - \lambda I)} \neq Z\}$ .
- (3)  $\lambda \in \sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ es inyectiva, } \overline{\mathcal{R}(A - \lambda I)} = Z, \text{ pero } \mathcal{R}(A - \lambda I) \neq Z\}$ .

Ahora bien,

- (1) Si  $(A - \lambda I)$  no es inyectiva, entonces existe  $z \in Z$  no nulo tal que:  $(A - \lambda I)z = 0$ . Esto implica que para algún  $n_0$  tenemos:

$$(\bar{A}_{n_0} - \lambda I)P_{n_0}z = 0, \quad P_{n_0}z \neq 0.$$

Así,  $\lambda \in \sigma(\bar{A}_{n_0})$ , y por lo tanto  $\lambda \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\bar{A}_n)}$ .

- (2) Si  $\overline{\mathcal{R}(A - \lambda I)} \neq Z$ , entonces existe  $z_0 \in Z$  no nulo tal que:

$$\langle z_0, (A - \lambda I)z \rangle = 0, \quad \forall z \in D(A).$$

Pero,  $z = \sum_{n=1}^{\infty} P_n z$ , así:

$$\left\langle z_0, \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{A}_n - \lambda I)P_n z \right\rangle = 0.$$

Ahora, si  $z_0 \neq 0$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $P_{n_0}z_0 \neq 0$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle z_0, \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{A_n} - \lambda I) P_n z \right\rangle \\ &= \langle z_0, (\overline{A_{n_0}} - \lambda I) P_{n_0} z \rangle \\ &= \langle P_{n_0} z_0, (\overline{A_{n_0}} - \lambda I) P_{n_0} z \rangle. \end{aligned}$$

Así,  $\mathcal{R}(\overline{A_{n_0}} - \lambda I) \neq P_{n_0}Z$ . Por lo tanto,  $\lambda \in \sigma(\overline{A_{n_0}}) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n})}$ .

(3) Supongamos que  $(A - \lambda I)$  es inyectiva,  $\overline{\mathcal{R}(A - \lambda I)} = Z$  y  $\mathcal{R}(A - \lambda I) \subsetneq Z$ .

Supongamos por reducción al absurdo que  $\lambda \in \left( \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n})} \right)^C$ .

Pero,

$$\begin{aligned} \left( \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n})} \right)^C &\subset \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n}) \right)^C \\ &= \bigcap_{n \geq 1} (\sigma(\overline{A_n}))^C \\ &= \bigcap_{n \geq 1} \rho(\overline{A_n}). \end{aligned}$$

Lo cual implica que,  $\lambda \in \rho(\overline{A_n})$ , para todo  $n \geq 1$ . Entonces

$$(\overline{A_n} - \lambda I) : \mathcal{R}(P_n) \longrightarrow \mathcal{R}(P_n)$$

es invertible, con  $(\overline{A_n} - \lambda I)^{-1}$  acotada.

En consecuencia, para todo  $z \in D(A)$  obtenemos que

$$P_j(A - \lambda I)z = (\overline{A_j} - \lambda I)P_jz, \quad j = 1, 2, \dots$$

es decir,

$$(\overline{A_j} - \lambda I)^{-1}P_j(A - \lambda I)z = P_jz, \quad j = 1, 2, \dots$$

Ahora, puesto que  $D(A)$  es denso en  $Z$ , podemos extender el operador

$$(\overline{A_j} - \lambda I)^{-1} P_j (A - \lambda I)$$

a un operador acotado  $T_j$  definido sobre  $Z$ . De esto se sigue que

$$T_j z = P_j z, \quad \forall z \in Z, \quad j = 1, 2, \dots,$$

y

$$\|T_j\| = \|P_j\| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots$$

Puesto que  $\overline{\mathcal{R}(A - \lambda I)} = Z$ , se tiene que

$$\|(\overline{A_j} - \lambda I)^{-1}\| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Ahora veremos que  $\mathcal{R}(A - \lambda I) = Z$ . En efecto, dado  $z \in Z$  definamos  $y$  como sigue

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} (\overline{A_j} - \lambda I)^{-1} P_j z.$$

De (1.1) obtenemos que  $y$  está bien definido. Veamos ahora que  $y \in D(A)$  y  $(A - \lambda I)y = z$ . Para ello, sabemos que

$$y \in D(A) \iff \sum_{j=1}^{\infty} \|A_j P_j y\|^2 < \infty.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\overline{A_j} P_j y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|\{I + \lambda(\overline{A_j} - \lambda I)^{-1}\} P_j z\|^2.$$

Así,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|A_j P_j y\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|(1 + |\lambda|)^2 \|P_j z\|^2 = (1 + |\lambda|)^2 \|z\|^2 < \infty.$$

Entonces,  $y \in D(A)$  y  $(A - \lambda I)y = z$ .

Por lo tanto,  $\mathcal{R}(A - \lambda I) = Z$ , lo cual es una contradicción que viene de

haber asumido que:  $\lambda \in \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\overline{A_n}) \right)^C$ . ■

Además, presentaremos una prueba del recíproco del Lema 1.1.1.

**Lema 1.1.2.** Sean  $Z$  un espacio de Hilbert separable y  $\{A_n\}_{n \geq 1}$ ,  $\{P_n\}_{n \geq 1}$  dos familias de operadores lineales y acotados en  $Z$ , con  $\{P_n\}_{n \geq 1}$  una familia completa de proyectores ortogonales, tales que:

$$A_m P_n = P_n A_m, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Si el operador

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z, \quad z \in D(A),$$

con

$$D(A) = \{z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n P_n z\|^2 < \infty\},$$

genera un  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ , entonces

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z, \quad z \in Z.$$

Demostración

Si  $z_0 \in Z$ , entonces  $P_n z_0 \in D(A)$  y la solución del problema

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t), \\ z(0) = P_n z_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

está dada por  $z_n(t) = T(t)P_n z_0$ .

Del Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.1.12 de Curtain & Zwart [18]) se puede deducir que, si un operador conmuta con el generador de un  $C_0$ -semigrupo, entonces éste conmuta con el semigrupo. Por tanto, de (1.2) obtenemos que

$$T(t)z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n T(t)z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} T(t)P_n z_0. \quad (1.4)$$

Por otro lado, puesto que  $z_n(t)$  es una solución de (1.3), obtenemos

$$\begin{aligned}
 z'_n(t) &= Az_n(t) \\
 &= AT(t)P_n z_0 \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m P_m T(t) P_n z_0 \\
 &= A_n P_n T(t) P_n z_0 \\
 &= A_n T(t) P_n z_0 = A_n z_n(t).
 \end{aligned}$$

Así,  $z_n(t) = e^{A_n t} P_n z_0 = T(t) P_n z_0$  y de (1.4) concluimos que

$$T(t)z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z_0.$$

■

## 1.2. El Problema de Valor Inicial.

Consideremos el siguiente problema de valor inicial (P.V.I.) en el espacio de Hilbert  $Z$

$$\begin{cases} z' &= Az(t) + f(t), \quad t > 0, \\ z(0) &= z_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

donde  $f : [0, T) \rightarrow Z$ ,  $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$  es el generador infinitesimal del  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  en  $Z$ .

**Definición 1.2.1.** *La función  $z : [0, T) \rightarrow Z$  es una **solución clásica** del problema (1.5) si es continua en  $[0, T)$ ; continuamente diferenciable y  $z(t) \in D(A)$  en  $(0, T)$ , satisfaciendo además, la ecuación (1.5) en  $[0, T)$ .*

**Teorema 1.2.1.** *Sea  $f \in L^1(0, T; Z)$  y  $z_0 \in Z$ . Si el problema de valor inicial (1.5) tiene una solución, esta viene dada por:*

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \quad (1.6)$$

Demostración

Sea  $T(t)$  el  $C_0$ -semigrupo generado por  $A$  y sea  $z$  una solución de (1.5). Entonces, la función  $g(s) = T(t-s)z(s)$  es diferenciable para  $0 < s < t$  y

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds}(s) &= -AT(t-s)z(s) + T(t-s)z'(s) \\ &= -AT(t-s)z(s) + T(t-s)Az(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Si  $f \in L^1(0, T; Z)$ , entonces  $T(t-s)f(s)$  es integrable y

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

■

**Definición 1.2.2.** Sea  $A$  el generador de un  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ ;  $z_0 \in Z$  y  $f \in L^1(0, T; Z)$ . Entonces, la función  $z \in C([0, T], Z)$  dada por

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.7)$$

es llamada **solución moderada** del problema (1.5) en  $[0, T]$ .

**Observación:** Aunque toda solución de (1.5) es una solución de (1.7), el recíproco no es necesariamente cierto dado que las soluciones de (1.7) pueden no ser diferenciables.

**Teorema 1.2.2.** Sea  $A$  el generador infinitesimal de un  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ ,  $f \in L^1(0, T; Z)$  continua en  $(0, T]$  y la función

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.8)$$

Entonces el P.V.I. (1.5) tiene una única solución  $z$  en  $[0, T]$  para cualquier  $z_0 \in D(A)$  si, y sólo si, se satisface una de las siguientes condiciones:

i)  $v(t)$  es continuamente diferenciable en  $(0, T)$ .

ii)  $v(t) \in D(A)$ ,  $\forall t \in (0, T)$  y  $Av(t)$  es continua en  $(0, T)$ .

Además, si (1.5) tiene una solución en  $[0, T)$  para  $z_0 \in D(A)$ , entonces  $v(t)$  satisface i) y ii).

### Demostración

Si el P.V.I. (1.5) tiene una solución  $z$  para algún  $z_0$  en  $D(A)$ , entonces esta solución está dada por (1.6). En consecuencia,  $v(t) = z(t) - T(t)z_0$  es diferenciable para  $t > 0$  y  $v'(t) = z'(t) - T(t)Az_0$  es obviamente continua sobre  $(0, T)$ . Por lo tanto, i) se satisface. Ahora, si  $z_0 \in D(A)$ ,  $T(t)z_0 \in D(A)$  para  $t \geq 0$  y por lo tanto  $v(t) = z(t) - T(t)z_0 \in D(A)$  para  $t > 0$  y  $Av(t) = Az(t) - aT(t)z_0 = z'(t) - f(t) - T(t)Az_0$  es continua sobre  $(0, T)$ ; así ii) se satisface.

Por otro lado, es fácil verificar, para  $h > 0$ , la identidad

$$\frac{T(h)-I}{h}v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \quad (1.9)$$

De la continuidad de  $f$ , el segundo termino del lado derecho de (1.9) tiene el limite  $f(t)$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Si  $v(t)$  es continuamente diferenciable sobre  $(0, T)$ , entonces se sigue de (1.9) que  $v(t) \in D(A)$  para  $0 < t < T$  y  $Av(t) = v'(t) - f(t)$ . Puesto que  $v(0) = 0$  se sigue que  $z(t) = T(t)z_0 + v(t)$  es la solución del P.V.I. (1.5) para  $z_0 \in D(A)$ . Si  $v(t) \in D(A)$  se sigue de (1.9) que  $v(t)$  es diferenciable a la derecha de  $t$  y la derivada por la derecha  $D^+v(t)$  de  $v$  satisface  $D^+v(t) = Av(t) + f(t)$ . Puesto que  $D^+v(t)$  es continua,  $v(t)$  es continuamente diferenciable y  $v' = Av(t) + f(t)$ . Como  $v(0) = 0$ ,  $z(t) = T(t)z_0 + v(t)$  es la solución de (1.5) para  $z_0 \in D(A)$ , y esto completa la demostración. ■

**Corolario 1.2.1.** *Sea  $A$  el generador infinitesimal de un  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ . Si  $f \in C^1([0, T]; Z)$ , entonces el P.V.I (1.5) posee una única solución  $z : [0, T) \rightarrow Z$ ,  $\forall z_0 \in D(A)$ .*

### Demostración

Tenemos que

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(s)f(t-s)ds. \quad (1.10)$$

Es claro de (1.10) que  $v(t)$  es diferenciable para  $t > 0$  y que su derivada

$$v'(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(s)f'(t-s)ds = T(t)f(0) - \int_0^t T(t-s)f'(s)ds$$

es continua sobre  $(0, T)$ . El resultado se sigue ahora del Teorema 1.2.2 (i). ■

**Corolario 1.2.2.** *Sea  $A$  el generador infinitesimal de un  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  y  $f \in L^1(0, T; Z)$  continua en  $(0, T)$ . Si  $f(s) \in D(A)$  para todo  $0 < s < T$  y  $Af(s) \in L^1([0, T]; Z)$ , entonces para cualquier  $z \in D(A)$  el P.V.I (1.5) tiene una única solución sobre  $[0, T)$ .*

**Demostración**

De las hipótesis se sigue que para  $s > 0$ ,  $T(t-s)f(s) \in D(A)$  y que  $AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$  es integrable. Por lo tanto,  $v(t)$  definida por (1.8) satisface que  $v(t) \in D(A)$  para  $t > 0$  y

$$Av(t) = A \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(t-s)Af(s)ds$$

es continua. El resultado se sigue ahora del Teorema 1.2.2 (ii). ■

### 1.3. Ecuación no Lineal.

Consideremos el siguiente P.V.I, en el espacio de Hilbert  $Z$ :

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + f(t, z(t)), & t > t_0, \\ z(t_0) = z_0, & z_0 \in Z. \end{cases} \quad (1.11)$$

Donde  $A$  es el generador infinitesimal de un  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  en  $Z$ , el operador  $f : U \subset \mathbb{R}^+ \times Z \rightarrow Z$  satisface una condición de Lipschitz en  $Z$ ;  $U$  abierto,  $f$  continua en  $t$  y  $(t_0, x_0) \in U$ .

**Definición 1.3.1.** (a) Una **solución clásica** del problema (1.11) en  $[t_0, t_1)$  es una función continua  $z : [t_0, t_1) \rightarrow Z$  tal que  $z(t_0) = z_0$ ;  $(t, z(t)) \in U$ ,  $z'(t) \in Z$ ,  $z(t) \in D(A)$  y satisface la ecuación diferencial  $\forall t \in (t_0, t_1)$ .

(b) Una **solución moderada** en  $[t_0, t_1)$  es una función continua  $z(t)$  tal que  $(t, z(t)) \in U$ ;  $t \rightarrow f(\cdot, z(\cdot)) \in L^1((t_0, t_1), Z)$  y

$$z(t) = T(t - t_0)z_0 + \int_{t_0}^t T(t - s)f(s, z(s))ds. \quad (1.12)$$

**Teorema 1.3.1** (Existencia Local). Sea  $\Omega \subset Z$  un abierto,  $z_0 \in \Omega$  y  $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow Z$  continua satisfaciendo la siguiente condición de Lipschitz: para cada  $\tau \in \mathbb{R}^+$ , existe  $k = k(\tau)$  tal que

$$\|f(t, z) - f(t, y)\|_X \leq k\|z - y\|_Z, \quad \forall t \in [0, \tau]; \quad z, y \in \Omega.$$

Entonces, para  $\tau > 0$  suficientemente pequeño, existe una única solución moderada de (1.11) en  $[0, \tau)$ .

Demostración

Sea  $\tau > 0$ ,  $\mathcal{C} = C([0, \tau]; Z)$  y considere  $B$  una vecindad cerrada de  $z_0$  en  $\Omega$ . Definamos  $S$  como sigue

$$(Sz)(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t - s)f(s, z(s))ds,$$

para  $0 \leq t \leq \tau$  y  $z \in \mathcal{M} = \{v \in \mathcal{C} : v(0) = z_0, v([0, \tau]) \subset B\}$ . Notese que  $\mathcal{M}$  es un espacio métrico completo y  $Sz \in \mathcal{C}$ . Considérese  $M, w$  tales que  $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|Sz - Sv\|_{\mathcal{C}} &= \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|Sz(t) - Sv(t)\| \\ &= \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left\| \int_0^t T(t - s)[f(s, z(s)) - f(s, v(s))]ds \right\| \\ &\leq Me^{w\tau} \int_0^\tau \|f(s, z(s)) - f(s, v(s))\| ds \\ &\leq Me^{w\tau} k(\tau) \int_0^\tau \|z(s) - v(s)\| ds \\ &\leq Me^{w\tau} k(\tau) \tau \|z - v\|_{\mathcal{C}}. \end{aligned}$$

Además,  $Me^{wt}k(\tau)\tau \rightarrow 0$  cuando  $\tau \rightarrow 0^+$  (puesto que  $k(\tau)$  se puede asumir acotada por  $k(1)$  para  $\tau < 1$ ). Veamos ahora que  $S(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ . Sin perder generalidad supongamos que  $B$  es acotado.

$$\|Sz - z_0\|_c \leq \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|T(t)z_0 - z_0\| + \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left\| \int_0^t T(t-s)f(s, z(s))ds \right\|.$$

$$J_1(\tau) = \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|T(t)z_0 - z_0\| \rightarrow 0 \text{ cuando } \tau \rightarrow 0, \text{ y}$$

$$\begin{aligned} J_2(\tau) &= \sup_{0 \leq t \leq \tau} \left\| \int_0^t T(t-s)f(s, z(s))ds \right\| \leq \tau M e^{w\tau} \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|f(t, z(t))\| \\ &\leq \tau M e^{w\tau} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|f(t, z_0)\| + k(\tau) \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|z(t) - z_0\| \right\}. \end{aligned}$$

Así,  $J_2(\tau) \rightarrow 0$  cuando  $\tau \rightarrow 0^+$ . Por lo tanto,  $S(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$  para  $\tau$  suficientemente pequeño. La conclusión del teorema se sigue de aquí, haciendo uso del Teorema de punto Fijo de Picard-Banach, pues  $z$  es una solución moderada de (1.11) si, y sólo si,  $z$  es un punto fijo de  $S$ . ■

**Teorema 1.3.2** (Existencia Global). *Sea  $z_0 \in Z$  y  $f : \mathbb{R}^+ \times Z \rightarrow Z$  continua y satisfaciendo la siguiente condición de Lipschitz: para cada  $\tau > 0$ , existe  $k = k(\tau)$  tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_Z \leq k\|x - y\|_Z, \quad \forall t \in [0, \tau]; \quad x, y \in Z.$$

*Entonces, (1.11) tiene una única solución moderada definida para todo  $\tau$  en  $\mathbb{R}^+$ .*

**Demostración**

Sean  $S, M, w$ , como en la demostración del Teorema 1.3.1. Afirmamos que:

$$\|S^n z(t) - S^n v(t)\| \leq [Mk(t)e^{wt}t]^n \sup_{0 \leq s \leq t} \|z(s) - v(s)\|/n! \quad (1.13)$$

para todo  $t > 0$ ,  $z, v \in C([0, t], Z)$ . Podemos asumir que  $t \rightarrow k(t)$  es monótona no decreciente. Para  $n = 1$  (1.13) vale por un calculo simple dado en la demostración del Teorema 1.3.1. Supongamos que (1.13) es

cierto para  $n = m$ . Entonces

$$\begin{aligned} \|S^{m+1}z(t) - S^{m+1}v(t)\| &= \left\| \int_0^t T(t-s)[f(s, S^m z(s)) - f(s, S^m v(s))] ds \right\| \\ &\leq Me^{w\tau} \int_0^t k(s) [Me^{ws} k(s) s]^m \sup_{0 \leq r \leq s} \|z(r) - v(r)\| ds / m! \\ &\leq [me^{wt} k(t)]^{m+1} \sup_{0 \leq r \leq s} \|z(r) - v(r)\| \int_0^t s^m ds / m! \end{aligned}$$

y (1.13) se sigue con  $n = m + 1$ . Por inducción, (1.13) se cumple para todos los enteros positivos  $n$ . Ahora sea  $\tau > 0$  arbitrario pero fijo. Escojamos  $n$  lo suficientemente grande tal que

$$\alpha = [Me^{wt} k(\tau) \tau]^n / n! < 1.$$

Entonces por (1.13),

$$\|S^n z - S^n v\|_c \leq \alpha \|z - v\|_c,$$

para todo  $z, v \in \mathcal{C} = C([0, \tau], Z)$ . Por lo tanto  $S$  tiene un único punto fijo en  $\mathcal{C}$ , y así el problema (1.11) tiene una única solución moderada continua sobre  $[0, \tau]$ . El teorema se sigue pues  $\tau > 0$  es arbitrario. ■

**Teorema 1.3.3.** *Supongase que  $f : \mathbb{R}^+ \times Z \rightarrow Z$  es continua y satisface la siguiente condición de Lipschitz: para cada  $c > 0$ , existe  $k(c)$  tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k(c) \|x - y\|, \quad \forall t \in [0, c]; \quad x, y \in \overline{B_Z(0, c)}.$$

Sea  $z \in C([0, \tau], X)$  la solución moderada de (1.11) donde  $\tau < \infty$ . Entonces se satisface una de las siguientes posibilidades:

- a) Existe una única solución moderada de (1.11) en  $\mathbb{R}^+$ .
- b)  $[0, \tau)$  es el intervalo maximal de existencia de la solución moderada de (1.11) y se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \tau^-} \|x(t)\| = +\infty.$$

## 1.4. Una Caracterización de Operadores de Rango Denso.

A continuación se enuncian algunos resultados sobre operadores de rango denso.

**Teorema 1.4.1.** (*Curtain & Pritchard [11] Curtain & Zwart [18]*) Sean  $W$  y  $Z$  espacios de Banach reflexivos y  $G \in L(W, Z)$ . Entonces las siguientes afirmación son ciertas

a.-  $\text{Rango}(G) = Z$  si, y sólo si, existe  $\alpha$  tal que  $\|G^*z^*\| \geq \alpha\|z^*\|$ ,  $x \in Z^*$ .

b.-  $\overline{\text{Rango}(G)} = Z$  si, y sólo si,  $\text{Ker}(G^*) = \{0\}$

**Lema 1.4.1.** Si además de las hipótesis anteriores, se tiene que  $\dim Z < \infty$ , entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a.-  $\text{Rango}(G) = Z$

b.- Existe  $\alpha$  tal que  $\|G^*z^*\| \geq \alpha\|z^*\|$ ,  $z^* \in Z^*$ .

c.-  $\text{Ker}(G^*) = \{0\}$

**Lema 1.4.2.** (*Bashirov, Mahmudov, Semi y Etikan [2] y Leiva, Merentes y Sanchez [40]*) Sea  $G : W \rightarrow Z$  un operador lineal y continuo entre los espacios de Hilbert  $W$  and  $Z$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a)  $\overline{\text{Rang}(G)} = Z$ .

b)  $\text{Ker}(G^*) = \{0\}$ .

c)  $\langle GG^*z, z \rangle > 0$ ,  $z \neq 0$  in  $Z$ .

d)  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}z = 0$ .

e) Para todo  $z \in Z$  se tiene que  $Gu_\alpha = z - \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}z$ , donde

$$u_\alpha = G^*(\alpha I + GG^*)^{-1}z, \quad \alpha \in (0, 1].$$

Así,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} Gu_\alpha = z$  y el error  $E_\alpha z$  de esta aproximación viene dada por

$$E_\alpha z = \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}z, \quad \alpha \in (0, 1].$$

**Observación 1.4.1.** El lema 1.4.2 implica que la familia de operadores lineales  $\Gamma_\alpha : Z \rightarrow L^2(0, \tau; U)$ , con  $0 < \alpha \leq 1$  dada por

$$\Gamma_\alpha z = G^*(\alpha I + GG^*)^{-1}z, \quad (1.14)$$

es una inversa aproximada por la derecha del operador  $G$  en el sentido que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} G\Gamma_\alpha = I. \quad (1.15)$$

**Proposición 1.4.1.** (*Leiva, Merentes y Sanchez [40]*) Si  $\overline{\text{Rang}(G)} = Z$ , entonces

$$\sup_{\alpha > 0} \|\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}\| \leq 1. \quad (1.16)$$

## 1.5. Algunos Teoremas de Punto Fijo.

En esta sección presentaremos algunos teoremas del punto fijo que serán utilizados en los capítulos siguientes para probar la controlabilidad de algunos sistemas de control gobernados por ecuaciones de evolución. El primero de ellos es el famoso teorema del punto fijo de Banach, el cual lo utilizaremos para probar controlabilidad exacta de sistemas semilineales, luego el teorema del punto fijo de Schauder y finalmente el teorema del punto fijo de Rothe, que se utilizará para probar controlabilidad aproximada de algunas ecuaciones en derivadas parciales semilineales.

**Teorema 1.5.1. (Teorema del Punto Fijo de Banach)** *Sea  $E$  un espacio de Banach y sea  $T : E \rightarrow E$  una Contracción (Es decir, para algún  $k \in [0, 1)$   $\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|$ ). Entonces  $T$  posee un único punto fijo  $x_*$ . Es más, la sucesión  $\{T^n(x)\}$  converge a  $x_*$  para cualquier  $x \in X$ .*

**Teorema 1.5.2. (Teorema del Punto Fijo de Schauder)** *Sea  $S$  un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach  $E$ . Entonces, toda aplicación continua y compacta  $T : S \rightarrow E$  tiene un punto fijo.*

**Teorema 1.5.3. (Teorema del Punto fijo de Rothe, [21], pg. 129)** *Sea  $E(\tau)$  un espacio vectorial topológico de Hausdorff. Sea  $B \subset E$  un subconjunto cerrado y convexo tal que el cero de  $E$  pertenece al interior de  $B$ .*

*Considérese  $\Phi : B \rightarrow E$  un aplicación continua con  $\Phi(B)$  relativamente compacto en  $E$  y  $\Phi(\partial B) \subset B$  ( $\partial B$  denota la frontera del conjunto  $B$ ). Entonces existe un punto  $x^* \in B$  tal que  $\Phi(x^*) = x^*$ .*



## Capítulo 2

# Controlabilidad de Ecuaciones de Evolución en Espacios de Dimensión Finita

### 2.1. Sistemas Lineales No Autónomos.

Consideremos el siguiente sistema de control lineal no autónomo

$$z'(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t), \quad (2.1)$$

donde el estado  $z(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$  son funciones matriciales continuas de dimensiones  $n \times n$  y  $n \times m$  respectivamente, definidas sobre  $J = [0, T]$  y la función control  $u(\cdot)$  pertenece a  $L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$ .

**Proposición 2.1.1.** *Dado  $z_0 \in \mathbb{R}^n$  y un control  $u(\cdot)$  en  $L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$  el sistema (2.1) tiene una única solución  $z(t) = z_u(t)$  dada por:*

$$z_u(t) = \phi(t)z_0 + \phi(t) \int_0^t \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds,$$

donde  $\phi(\cdot)$  es la matriz fundamental del sistema  $z'(t) = A(t)z(t)$ . Es decir,  $\phi$  satisface el problema de valor inicial siguiente

$$\begin{cases} \phi'(t) = A(t)\phi(t), \\ \phi(0) = I_{\mathbb{R}^n}, \end{cases} \quad (2.2)$$

**Definición 2.1.1.** *El sistema (2.1) es Controlable sobre  $[0, T]$ . Si dado dos puntos  $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n$ , existe un control  $u \in L^2(J, \mathbb{R}^m)$  tal que la solución correspondiente  $z_u(\cdot)$  de (2.1) satisface la condición de frontera:  $z_u(0) = z_0, z_u(T) = z_1$ .*

Consideremos el siguiente operador

$$G : L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

definido por

$$Gu(s) = \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds$$

**Proposición 2.1.2.** *El sistema (2.1) es controlable sobre  $[0, T]$  si, y sólo si, el operador  $G$  es sobreyectivo. Es decir,  $\text{Rango}(G) = \mathbb{R}^n$ .*

**Teorema 2.1.1.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i.- *El sistema (2.1) es controlable sobre  $[0, T]$ .*
- ii.-  *$\text{Rango}(G) = \mathbb{R}^n$ .*
- iii.- *Existe  $\gamma > 0$  tal que:*

$$\gamma \|B^*(\cdot)\phi^{-1*}(\cdot)z\|_{L^2} \geq \|z\|_{\mathbb{R}^n}, z \in \mathbb{R}^n$$

iv.- *Si  $B^*(t)\phi^{*-1}(t)z = 0$  con  $0 \leq t \leq T$ , entonces  $z = 0$*

v.- *La siguiente matriz es definida positiva*

$$W = \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)B^*(s)\phi^{-1*}(s)ds.$$

*Es decir, existe  $\alpha > 0$  tal que*

$$\langle Wz, z \rangle \geq \alpha \|z\|^2.$$

*Más aún, dado  $z_1, z_0 \in \mathbb{R}^n$  el control*

$$u(t) = B^*(t)\phi^{-1*}(t)W^{-1}(\phi^{-1}(T)z_1 - z_0),$$

*transfiere el punto  $z_0$  hasta el punto  $z_1$ .*

Demostración

( $i \Rightarrow ii$ ) Supongamos que el sistema (2.1) es controlable sobre  $[0, T]$ . Probemos la sobreyectividad del operador  $G$ .

Dado  $z \in \mathbb{R}^n$ , consideremos  $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $z = \phi^{-1}(T)z_1 - z_0$ . Es decir,

$$z_1 = \phi(T)(z + z_0).$$

De la controlabilidad del sistema (2.1) existe  $u \in L^2[0, T; \mathbb{R}^m]$  tal que se satisfacen las condiciones de frontera

$$z_u(0) = z_0 \quad y \quad z_u(T) = z_1,$$

donde  $\phi(T)(z + z_0) = z_1 = z_u(T)$ .

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \phi(T)(z + z_0) &= \phi(T)z_0 + \phi(T) \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\ z + z_0 &= z_0 + \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\ z &= \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds = Gu \end{aligned}$$

( $ii \Rightarrow i$ ) Supongamos que  $G$  es sobreyectivo.

Dado  $z \in \mathbb{R}^n$ , existen  $z_1, z_0$  tal que:

$$z = \phi^{-1}(T)z_1 - z_0.$$

Ahora, como  $G$  es sobreyectivo existe  $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  tal que

$$Gu = z = \phi^{-1}(T)z_1 - z_0.$$

Luego,

$$\phi^{-1}(T)z_1 - z_0 = Gu$$

$$\phi^{-1}(T)z_1 - z_0 = \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds$$

$$\phi^{-1}(T)z_1 = z_0 + \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds$$

$$z_1 = \phi(T) \left[ z_0 + \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \right] = z_u(T)$$

De esta manera hemos conseguido una solución  $x_u(\cdot)$  del sistema (2.1), tal que

$$z_u(T) = z_1, \quad z_u(0) = z_0.$$

Por lo tanto, el sistema es controlable. ■

Para probar las siguientes implicaciones usaremos el Lema 1.4.1 que caracteriza los operadores sobreyectivos. Para ello es necesario hallar  $G^*$  explícitamente.

En efecto,  $G^*$  viene dado por:

$$G^* : \mathbb{R}^{n^*} \rightarrow L^{2^*}(0, T; \mathbb{R}^m),$$

donde se tiene  $\mathbb{R}^{n^*} = \mathbb{R}^n$  y  $L^{2^*}(0, T; \mathbb{R}^m) = L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$ .

Por definición de adjunto se cumple que:

$$\langle u, G^*z \rangle_{L^2, L^2} = \langle Gu, z \rangle_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n}, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^m)$$

De aquí resulta que

$$\begin{aligned} \langle Gu, z \rangle_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n} &= \left\langle \int_0^T \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds, z \right\rangle_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n} \\ &= \int_0^T \langle u(s), B^*(s)\Phi^{-1^*}(s)z \rangle_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n} ds \\ &= \langle u(\cdot), B^*(\cdot)\Phi^{-1^*}(\cdot)z \rangle_{L^2, L^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $G^*z = B^*(\cdot)\Phi^{-1*}(\cdot)z$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$ .

De aquí, aplicando el Lema 1.4.1, obtenemos la equivalencia entre iii) y iv).

(iii  $\Rightarrow$  v) Supongamos que el sistema (2.1) es controlable sobre  $[0, T]$ . Del Lema 1.4.1 existe un  $\alpha > 0$  tal que

$$\alpha \|B^*(\cdot)\Phi^{-1*}(\cdot)z\| = \alpha \|G^*z\| \geq \|z\|, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

de esta igualdad, elevando al cuadrado a ambos lados, se tiene

$$\alpha^2 \|B^*(\cdot)\Phi^{-1*}(\cdot)z\|_{L^2}^2 \geq \|z\|_{\mathbb{R}^n}^2, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

Por la definición de la norma en  $L^2$ , obtenemos

$$\alpha^2 \int_0^T \|B^*(\cdot)\Phi^{-1*}(\cdot)z\|_{\mathbb{R}^n}^2 ds \geq \|z\|_{\mathbb{R}^n}^2 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

lo cual es equivalente a

$$\int_0^T \langle B^*(\cdot)\Phi^{-1*}(\cdot)z, B^*(\cdot)\Phi^{-1*}(\cdot)z \rangle ds \geq \frac{1}{\alpha^2} \langle z, z \rangle, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Por propiedades del producto interno y la definición de adjunto se tiene:

$$\left\langle \int_0^T \Phi^{-1}(\cdot)B(\cdot)B^*(\cdot)\Phi^{-1*}(\cdot)z ds, z \right\rangle \geq \frac{1}{\alpha^2} \langle z, z \rangle, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

que es equivalente

$$\langle z, Wz \rangle \geq \frac{1}{\alpha^2} \|z\|^2 > 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Obteniéndose que  $W$  es definida positiva.

(v  $\Leftrightarrow$  ii) Sea  $W$  definida positiva, entonces existe  $W^{-1}$ .

Dado  $z \in \mathbb{R}^n$  definamos el siguiente control

$$u(s) = B^*(s)\phi^{-1*}(s)W^{-1}z.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 Gu &= \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\
 &= \int_0^T \phi^{-1}(s)B(s)B^*(s)\phi^{-1*}(s)W^{-1}zds \\
 &= WW^{-1}z = z.
 \end{aligned}$$

Así  $Gu = z$ . Por lo tanto  $\text{Rango}(G) = \mathbb{R}^n$ .

Por otra parte, si  $W(T)$  es definida positiva, entonces existe  $W^{-1}(T)$ . Por lo tanto, para todo  $z \in \mathbb{R}^n$  definamos el control

$$u(t) = B^*(t)\Phi^{-1*}(t)W^{-1}(T)z.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 Gu &= \int_0^T \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \\
 &= \int_0^T \Phi^{-1}(s)B(s)B^*(s)\Phi^{-1*}(s)W^{-1}zds \\
 &= W(T)W^{-1}(T)z = z.
 \end{aligned}$$

Luego, para todo  $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n$ , definamos el control

$$u(t) = B^*(t)\Phi^{-1*}(t)W^{-1}[\Phi^{-1}(T)z_1 - z_0].$$

De esta manera hemos exhibido un control que transfiere el sistema (2.1) desde  $z_0$  hasta  $z_1$ . ■

## 2.2. Sistemas de Control Autónomos

Consideremos el sistema lineal autónomo

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.3)$$

**Observación 2.2.1.** Para referirnos al sistema (2.3) usaremos la notación  $(A, B)$ , donde

$$A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

matrices constantes. El operador  $G$  toma la forma siguiente

$$Gu = \int_0^T e^{-As} Bu(s) ds,$$

y la solución del sistema con condición inicial  $z(0) = z_0$  está dada por:

$$z_u(t) = e^{At} z_0 + e^{At} \int_0^t e^{-As} Bu(s) ds, t \geq 0$$

### 2.2.1. Caracterización algebraica de controlabilidad del sistema $(A, B)$

Ahora presentaremos y demostraremos un Teorema fundamental de la Teoría de Control Lineal Autónomo debido a Kalman, cuya demostración se basa en el teorema de Cayley-Hamilton. Este teorema permite identificar el sistema (2.3) por  $(A, B)$ .

**Teorema 2.2.1.** *(Condición de Kalman) El sistema  $(A, B)$  es controlable sobre  $[0, T]$  si, y sólo si*

$$\text{Rank}[B|AB|\dots|A^{n-1}B] = n.$$

Demostración

**(Suficiencia)** Supongamos que el sistema  $(A, B)$  es controlable; es decir,  $\text{Rango}(G) = \mathbb{R}^n$ .

Por Teorema de Caley-Hamilton sabemos que toda matriz  $A$  es una raíz del polinomio característico. Es decir, si

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n\lambda^0$$

es el polinomio característico de  $A$ , entonces

$$P(A) = A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \dots + a_nA^0 = 0,$$

lo cual implica que

$$e^{-As} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(-s)A^i, \quad \alpha_i(-s) \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Luego, el operador  $G$  puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} Gu &= \int_0^T \left( \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(-s)A^i \right) Bu(s)ds \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \int_0^T \alpha_i(-s)u(s)ds. \end{aligned}$$

Haciendo  $y(i) = \int_0^T \alpha_i(-s)u(s)ds$ , y teniendo en cuenta que,  $u(s) \in \mathbb{R}^m$ , y  $\alpha_i(-s) \in \mathbb{R}$ , obtenemos

$$Gu = \sum_{i=0}^{n-1} A^i B y(i), \quad y(i) \in \mathbb{R}^m.$$

Ahora, consideremos el siguiente operador:

$$\tilde{G} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{Y} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m$$

definido por:

$$\tilde{G}y = \sum_{i=0}^{n-1} A^i B y(i), \quad y = (y(0), y(1), \dots, y(n-1)).$$

Entonces,

$$\mathbb{R}^n = \text{Rango}(G) \subset \text{Rango}\tilde{G} \Rightarrow \text{Rango}\tilde{G} = \mathbb{R}^n.$$

Esto implica que

$$\text{Span}\{B\mathbb{R}^m, AB\mathbb{R}^m, \dots, A^{n-1}B\mathbb{R}^m\} = \mathbb{R}^n,$$

lo cual es equivalente a

$$\text{Rank}[B|AB|\dots|A^{n-1}B] = n.$$

**(Necesaria).** Supongamos que

$$\text{Rank}[B|AB|\dots|A^{n-1}B] = n$$

y el sistema (2.3) no es controlable, en consecuencia  $\text{Ker}(G^*) \neq \{0\}$ . Entonces existe  $\eta \neq 0$  tal que

$$B^*(\Phi^{-1})^*(t)\eta = B^*e^{-A^*t}\eta = 0, \quad t \in [0, T],$$

luego

$$0 = \langle B^*e^{-A^*t}\eta, z \rangle_{\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m} = \langle \eta, e^{-At}Bz \rangle_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n}, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

Si  $t = 0$ , entonces

$$\langle \eta, Bz \rangle_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n} = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

Ahora, al tomar la  $k$ -ésima derivada en (3) se tiene:

$$\frac{d^k}{dt^k} \langle \eta, e^{-At}Bz \rangle_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n} \Big|_{t=0} = \langle \eta, -A^k e^{-At}Bz \rangle_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n} \Big|_{t=0} = \langle \eta, -A^k Bz \rangle_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n}$$

Así,

$$\langle \eta, -A^k Bz \rangle_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n} = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

lo que es equivalente a:

$$\langle \eta, \text{Span}\{B\mathbb{R}^m, AB\mathbb{R}^m, \dots, A^{m-1}B\mathbb{R}^m\} \rangle = 0.$$

Es decir, si llamamos  $\pi_\eta$  el plano por el origen cuya normal es  $\eta$ , resulta que

$$\text{Span}\{B\mathbb{R}^m, AB\mathbb{R}^m, \dots, A^{m-1}B\mathbb{R}^m\} \subset \pi_\eta$$

Por lo tanto,  $\dim \{ \text{Span}\{B\mathbb{R}^m, AB\mathbb{R}^m, \dots, A^{m-1}B\mathbb{R}^m\} \} < n$ , lo cual es una contradicción. ■

**Ejemplo 2.2.1.** Supongamos que deseamos mover un punto material de masa  $m = 1$ , el cual se desplaza en línea recta según la ecuación

$$\ddot{x} = u.$$

$u$ - es la fuerza o control regulador del movimiento. Usando cambio de variable tenemos:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u \end{cases}$$

Esto es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

donde

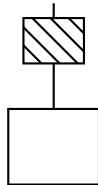
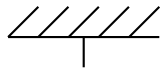
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia,

$$\text{Rank}[B : AB] = \text{Rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Por lo tanto, el sistema es controlable.

**Ejemplo 2.2.2.** Consideremos un sistema de masa-resorte con amortiguamiento y con una fuerza externa actuando como control y veamos que el sistema es controlable:



$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = u(t)$$

$k$ -la constante del resorte  
 $\eta\dot{x}$ - Fuerza de amortiguamiento  
 $u(t)$ -Fuerza externa (Control)

Considerando:

$$m = 1, \quad k \leq 0, \quad \eta \leq 0,$$

y haciendo el cambio de variable

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\eta\dot{x} - kx + u(t) \end{cases}$$

O equivalentemente  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$ ,

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\eta \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia,

$$\text{Rank}[B : AB] = \text{Rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\eta \end{bmatrix} = 2.$$

Por lo tanto, el sistema es controlable.

## 2.3. Controlabilidad de Sistemas Semi-Lineales.

En esta sección se aplica el teorema del punto fijo de Rothe para demostrar la controlabilidad del siguiente sistema semilineal de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} z'(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t) + f(t, z(t), u(t)), & t \in (0, \tau], \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

donde  $z(t) \in \mathbb{R}^n (n \geq 1)$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m (m \geq 1)$ ,  $A(t)$ ,  $B(t)$  son matrices continuas de dimensiones  $n \times n$  y  $n \times m$  respectivamente, la función control  $u$  pertenece a  $L_2(0, \tau; \mathbb{R}^m)$  y la función no lineal  $f : [0, \tau] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua y existen constantes  $a, b, c \in \mathbb{R}$  y  $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$  tal que

$$\|f(t, z, u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a\|z\|_{\mathbb{R}^n} + b\|u\|_{\mathbb{R}^m}^\beta + c, \quad u \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n. \quad (2.5)$$

bajo las condiciones anteriores, es bien sabido que, para todos  $z_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $u \in L_2(0, \tau; \mathbb{R}^m)$  el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z' = A(t)z(t) + B(t)u(t), & z \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, \tau], \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (2.6)$$

admite un única solución dada por

$$z(t) = U(t, 0)z_0 + \int_0^t U(t, s)B(s)u(s)ds, \quad t \in [0, \tau], \quad (2.7)$$

donde  $U(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$  y  $\Phi(t)$  es la matriz fundamental del sistema lineal

$$z'(t) = A(t)z(t). \quad (2.8)$$

Es decir, la matriz  $\Phi(t)$  satisface:

$$\begin{cases} \Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \\ \Phi(0) = I_{\mathbb{R}^n}, \end{cases} \quad (2.9)$$

donde  $I_{\mathbb{R}^n}$  es la matriz identidad de dimension  $n \times n$ . Por lo tanto, existen constantes  $M > 0$  y  $\omega > 0$  tal que

$$\|U(t, s)\| \leq Me^{\omega(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t \leq \tau. \quad (2.10)$$

Bajo las condiciones (2.5) y (2.10) se prueba la siguiente afirmación: Si el sistema lineal

$$z'(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t), \quad (2.11)$$

es controllable, entonces el sistema semilineal no autónomo (2.4) es también controlable sobre  $[0, \tau]$ . Más aún, se puede exhibir un control que transfiere el sistema no lineal desde un estado inicial  $z_0$  hasta un estado final  $z_1$  en tiempo  $\tau > 0$ , lo cual es muy importante desde el punto de vista de las aplicaciones.

La controlabilidad del sistema lineal (2.6) es muy conocido y hay una amplia referencia sobre ello, incluyendo libros; tal vez, uno puede mencionar a Chukwu [12], Lee & Markus [34] y Sontag [55].

A diferencia de los sistemas lineales, la bibliografía no es muy amplia cuando se trata de sistemas no autónomos semilineales, en este sentido podemos mencionar el trabajo realizado por Lukes en [23], donde se puso de manifiesto que, si el sistema lineal (2.6) es controlable, entonces el

sistema no lineal (sistema perturbado) también es controlable siempre que la función no lineal  $f$  está acotada. El resultado de Lukes aparece en un marco más general en J.M. Coron (ver Teorema 3.40 y Corolario 3.41 de J.M Coron [17]), pero el término no lineal sigue dependiendo sólo de las variables  $(t, z)$ . Vidyasagar en [56] estudia el caso cuando la función  $f$  no depende del parámetro  $u \in \mathbb{R}^m$ , y lo demostró utilizando el Teorema del Punto Fijo de Schauder, bajo las condición de que exista para cada par de números positivos  $(a, c)$  un número  $M > 0$  tal que

$$a|f(t, z)| + c \leq M, \quad \text{siempre } \|z\| \leq M \quad \text{y } t \in [0, \tau], \quad (2.12)$$

La controlabilidad del sistema lineal (2.6) se conserva bajo la perturbación no lineal  $f$ ; es decir, el sistema no lineal (2.4) es controlable. Dauer en [19] obtiene varias condiciones suficientes sobre la función  $f$  para la controlabilidad del sistema perturbado (2.4). De alguna forma la perturbación no lineal  $f$  está sujeta al sistema lineal, que es natural cuando se perturba un sistema lineal, en este sentido, Do en [20] encontró una condición más débil en el término no lineal  $f$  para la controlabilidad del sistema (2.4), que contiene las condiciones de Dauer; sin embargo, esta condición depende fuertemente del sistema lineal (2.6), en particular, sobre la matriz fundamental  $\Phi(t)$  del sistema lineal sin control (2.8), que es, en general, difícil de calcular. Para la controlabilidad de ecuaciones de evolución semilineal en dimensión infinita se pueden ver los trabajos realizados Balachandran & Dauer [6] y [7].

La controlabilidad nula, la cual es equivalente a decir que  $0 \in \text{int}(\mathcal{C})$ , donde  $\mathcal{C}$  es el dominio de controlabilidad nula, ha sido estudiado por Chukwu en [12], [13], [14], [15], [16], Mirza & Womack [48],[49], Nieto & Tisdell [50] y Sinha & Yokomoto [54]. Particularmente, E.N. Chukwu, en [12], estudió la controlabilidad nula del siguiente sistema no lineal

$$\begin{cases} z'(t) = g(t, z(t), u(t)), & t \in (0, \tau], \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (2.13)$$

donde la función no lineal  $g : [0, \tau] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua y en la variables segunda y tercera es continuamente diferenciable. Si además de (2.13), se considera el sistema linealizado

$$z'(t) = D_2g(t, 0, 0)z(t) + D_3g(t, 0, 0)u(t), \quad (2.14)$$

entonces se obtiene el siguiente resultado:

**Teorema 2.3.1.** (Teorema 8.1.1 de Chukwu [12]) Supongamos que la función  $g$  satisface las siguientes condiciones:

- i) es continua, y en la segunda y tercera variable es continuamente diferenciable.
- ii)  $g(t, 0, 0) = 0$ .
- iii) el sistema lineal (2.14) es controllable.

Entonces  $\mathcal{C}$  (dominio de controlabilidad nula del sistema (2.13)) satisface que el  $0 \in \text{Int}(\mathcal{C})$ .

En [50], J.J. Nieto y C.C. Tiesdell, estudiaron la controlabilidad exacta para ecuaciones diferenciales con impulso de la forma

$$\begin{cases} z'(t) + \lambda z(t) = f(t, z(t), u(t)) + u(t), & t \in (0, \tau], \\ z(t_j^+) = z(t_j^-) + I_j(z(t_j)), & j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (2.15)$$

donde el termino no lineal  $f(t, z)$  no depende del control  $u$  y satisface la siguiente condicion

$$\|f(t, z)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a\|z\|_{\mathbb{R}^n}^\alpha + b, z \in \mathbb{R}^n. \quad (2.16)$$

con  $a, b \geq 0$  y  $0 < \alpha < 1$ .

Bajo esta condición y algunas hipótesis adicionales sobre los impulsos  $I_j$ , aplicando el Teorema del Punto Fijo de Schauder, los autores probaron que el sistema (2.15) es exactamente controlable.

Como puede verse trivialmente, la función que se define a continuación no satisface la condición antes mencionada

$$g(t, z, u) = A(t)z + B(t)u + a \begin{pmatrix} \sin(\|z\|) \\ \vdots \\ \sin(\|z\|) \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sqrt{\|z\|} \\ \vdots \\ \sqrt{\|z\|} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix};$$

esta función no es acotada, no es diferenciable, no se anula en cero, depende de todas la variable involucradas y satisface la condición (2.5). Según nuestros conocimientos, y mirando las obras mencionadas en la literatura, la hipótesis principal en el estudio de la controlabilidad de los sistemas de control semilineales gobernados por ecuaciones diferenciales, es que el sistema lineal asociado es controlable, entonces la controlabilidad del sistema semilineal dependerá de la perturbación  $f(t, z, u)$

aplicada al sistema lineal. En ese sentido, el tipo de perturbación que presentamos aquí en este texto no se había considerado previamente; esto, unido a la técnica utilizada, forma parte de la novedad.

A continuación se prueba la controlabilidad del sistema no lineal (2.4). Para ello, para todo  $z_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $u \in L_2(0, \tau; \mathbb{R}^m)$  consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z' = A(t)z(t) + B(t)u(t) + f(t, z(t), u(t)), \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (2.17)$$

el cual admite un única solución dada por

$$\begin{aligned} z_u(t) &= U(t, 0)z_0 + \int_0^t U(t, s)B(s)u(s)ds \\ &+ \int_0^t U(t, s)f(s, z_u(s), u(s))ds, \quad t \in [0, \tau]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

**Lema 2.3.1.** *La solución del problema de valor inicial (2.17) satisface la siguiente estimación*

$$\|z(t)\| \leq \left\{ K + \int_0^\tau \|B\|_\infty M e^{\omega(\tau-s)} \|u(s)\| ds + \int_0^\tau b M e^{\omega(\tau-s)} \|u(s)\|^\beta ds \right\} e^{aM\tau}, \quad (2.19)$$

donde  $\|B\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|B(t)\|$  and  $K = M\|z_0\| + \int_0^\tau c M e^{-\omega s} ds$ .

**Observación 2.3.1.** Sin pérdida de generalidad, supondremos, cuando sea necesario, que el estado inicial  $z_0 = 0$ , es fijo y  $c = 0$ .

**Definición 2.3.1.** *Para el sistema (2.6) and (2.4) se definen los siguientes conceptos: La aplicación de controlabilidad (para  $\tau > 0$ )  $G, G_f : L_2(0, \tau; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n$  está dada por*

$$Gu = \int_0^\tau U(\tau, s)B(s)u(s)ds. \quad (2.20)$$

$$G_f u = \int_0^\tau U(\tau, s)B(s)u(s)ds + \int_0^\tau U(\tau, s)f(s, z_u(s), u(s))ds, \quad (2.21)$$

donde  $z_u(\cdot)$  es la única solución del problema de valor inicial (2.17).

El adjunto de este operador  $G^* : \mathbb{R}^n \rightarrow L_2(0, \tau; \mathbb{R}^m)$  del operador  $G$  está dado por

$$(G^*z)(s) = B^*(s)U^*(\tau, s)z, \quad \forall s \in [0, \tau], \quad \forall z \in Z. \quad (2.22)$$

**Proposición 2.3.1.** *Los sistemas (2.6) y (2.4) son controlables sobre  $[0, \tau]$  si, sólo si, respectivamente,  $\text{Rang}(G_f) = Z$  y  $\text{Rang}(G) = Z$ .*

Usando el Lema 1.4.1 se obtiene el siguiente resultado

**Corolario 2.3.1.**  *$(GG^*)^{-1}$  existe y el operador  $\Gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow L_2(0, \tau; \mathbb{R}^m)$  definido por*

$$\Gamma z = B^*(\cdot)U^*(\tau, \cdot)(GG^*)^{-1}z = G^*(GG^*)^{-1}z, \quad (2.23)$$

*es una inversa por la derecha del operador  $G$ , en el sentido que*

$$G\Gamma = I. \quad (2.24)$$

*Más aún,*

$$\|(GG^*)^{-1}z\| \leq \gamma^{-1}\|z\|, \quad z \in Z. \quad (2.25)$$

*Por otra parte, el operador  $G_f : L_2(0, \tau; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por (2.21) puede ser escrito como sigue*

$$G_f u = G(u) + H(u), \quad (2.26)$$

*donde  $H : L_2(0, \tau; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un operador no lineal dado por*

$$H(u) = \int_0^\tau U(\tau, s)f(s, z_u(s), u(s))ds, \quad u \in L_2(0, \tau; \mathbb{R}^m). \quad (2.27)$$

**Definición 2.3.2.** *La siguiente ecuación se denomina ecuación de controlabilidad asociada a la ecuación no lineal (2.4)*

$$u = \Gamma(z - H(u)) = G^*(GG^*)^{-1}(z - H(u)), \quad t \in [0, \tau]. \quad (2.28)$$

**Proposición 2.3.2.** *Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida con  $\mu(X) < \infty$  y  $1 \leq q < r < \infty$ . Entonces  $L_r(\mu) \subset L_q(\mu)$  y*

$$\|f\|_q \leq \mu(X)^{\frac{r-q}{rq}} \|f\|_r, \quad f \in L_r(\mu). \quad (2.29)$$

Ahora, estamos listos para presentar y demostrar la controlabilidad del sistema no lineal (2.4).

**Teorema 2.3.2.** *Si el sistema lineal (2.6) es controlable sobre  $[0, \tau]$  y*

$$\frac{1}{\gamma\sqrt{2}}\|B\|_{\infty}^2 M^3 a\sqrt{\tau}e^{aM\tau} \left(\frac{e^{2\omega\tau} - 1}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} < 1, \quad (2.30)$$

*entonces el sistema (2.4) es controlable sobre  $[0, \tau]$ . Más aún, existe un control que transfiere la solución del sistema (2.4) desde el estado inicial  $z_0$  hasta el estado final  $z_1$ , en el tiempo  $\tau > 0$  y viene dado por*

$$u(t) = B^*(t)U^*(\tau, t)(GG^*)^{-1}(z_1 - U(\tau, 0)z_0 - H(u)), \quad t \in [0, \tau]. \quad (2.31)$$

**Demostración**

Para cualquier  $z \in \mathbb{R}^n$  fijo se considera el siguiente operador auxiliar  $K : L_2(0, \tau; \mathbb{R}^m) \rightarrow L_2(0, \tau; \mathbb{R}^m)$  dado por

$$K(u) = \Gamma(z - H(u)) = G^*(GG^*)^{-1}(z - H(u)). \quad (2.32)$$

Primero, se probará que el operador  $K$  tiene un punto fijo  $u$  que depende de  $z$ . En efecto, dado que el operador de evolución  $U(t, s)$  es continuo (en este caso compacto porque  $\text{Rang}(U(t, s)) = \mathbb{R}^n$ ) y que el término no lineal  $f$  satisface la condición (2.5), se obtiene que  $H$  es un operador compacto.

Más aún,

$$\overline{\lim}_{\|u\|_{L_2} \rightarrow \infty} \frac{\|K(u)\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}} \leq \frac{M^2}{\omega} a\sqrt{\tau}\|B\|_{\infty} e^{aM\tau} (e^{2\omega\tau} - 1). \quad (2.33)$$

En efecto, de (2.5) y (2.19), la definición del operador  $H(u)$  y la Propo-

sición 2.3.2, se obtiene, para  $u \in L_2(0, \tau; \mathbb{R}^m)$ , la siguiente estimación

$$\begin{aligned}
\|H(u)\| &\leq \int_0^\tau M e^{\omega(\tau-s)} \|f(s, z_u(s), u(s))\| ds, \\
&\leq \left( \int_0^\tau M^2 e^{2\omega(\tau-s)} ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^\tau \|f(s, z_u(s), u(s))\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= N \left( \int_0^\tau \|f(s, z_u(s), u(s))\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq N \left( \int_0^\tau (a\|z(s)\| + b\|u(s)\|^\beta)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq N \left( \int_0^\tau (4a^2\|z(s)\|^2 + 4b^2\|u(s)\|^{2\beta}) ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2Na \left( \int_0^\tau \|z(s)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2Nb \left( \int_0^\tau \|u(s)\|^{2\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2Na \left( \int_0^\tau \left\{ \int_0^\tau \|B\|_\infty M e^{\omega(\tau-r)} \|u(r)\| dr \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^\tau b M e^{\omega(\tau-r)} \|u(r)\|^\beta dr \right\}^2 e^{2aM\tau} \right)^{\frac{1}{2}} ds 2Nb \left\{ \left( \int_0^\tau \|u(s)\|^{2\beta} \right)^{\frac{1}{2\beta}} \right\}^\beta \\
&\leq 2Na\sqrt{\tau} \left\{ \int_0^\tau \|B\|_\infty M e^{\omega(\tau-s)} \|u(s)\| ds + \int_0^\tau b M e^{\omega(\tau-s)} \|u(s)\|^\beta ds \right\} e^{aM\tau} \\
&\quad + 2Nb \|u\|_{L_{2\beta}}^\beta \\
&= 2N^2 a\sqrt{\tau} \|B\|_\infty e^{aM\tau} \|u\|_{L_2} + (2N^2 ab\sqrt{\tau} e^{aM\tau} + 2Nb) \|u\|_{L_{2\beta}}^\beta,
\end{aligned}$$

donde  $L_{2\beta} = L_{2\beta}(0, \tau; \mathbb{R}^m)$  y  $N = \left( \int_0^\tau M^2 e^{2\omega(\tau-s)} ds \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Ahora, dado que  $\frac{1}{2} \leq \beta < 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2\beta < 2$ , aplicando la Proposición 2.3.2, se consigue que:

$$\|H(u)\| \leq 2N^2 a\sqrt{\tau} \|B\|_\infty e^{aM\tau} \|u\|_{L_2} + 2Nb\tau^{\frac{1-\beta}{2}} (Na\sqrt{\tau} e^{aM\tau} + 1) \|u\|_{L_2}^\beta.$$

Por lo tanto,

$$\overline{\lim}_{\|u\|_{L_2} \rightarrow \infty} \frac{\|H(u)\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}} \leq \frac{M^2}{\omega} a\sqrt{\tau} \|B\|_\infty e^{aM\tau} (e^{2\omega\tau} - 1).$$

Consecuentemente,

$$\overline{\lim}_{\|u\|_{L_2} \rightarrow \infty} \frac{\|K(u)\|}{\|u\|_{L_2}} \leq \|G^*(GG^*)^{-1}\| \frac{M^2}{\omega} a\sqrt{\tau} \|B\|_{\infty} e^{aM\tau} (e^{2\omega\tau} - 1),$$

y

$$\overline{\lim}_{\|u\|_{L_2} \rightarrow \infty} \frac{\|K(u)\|}{\|u\|_{L_2}} \leq \frac{1}{\gamma\sqrt{2}} \|B\|_{\infty}^2 M^3 a\sqrt{\tau} e^{aM\tau} \left( \frac{e^{2\omega\tau} - 1}{\omega} \right)^{\frac{3}{2}} = R < 1.$$

Entonces, resulta que, para un número fijo  $\rho$  con  $R < \rho < 1$ , existe  $R_0 > 0$  suficientemente grande tal que

$$\|K(u)\|_{L_2} \leq \rho \|u\|_{L_2}, \quad \|u\|_{L_2} = R_0.$$

Por consiguiente, si se denota por  $B(0, R_0)$  a la bola de centro cero y radio  $R_0 > 0$ , se obtiene que  $K(\partial B(0, R_0)) \subset B(0, R_0)$ . Como  $K$  es compacto y envía a la esfera  $\partial B(0, R_0)$  en el interior de la bola  $B(0, R_0)$ , podemos aplicar el Teorema de Rothe 1.5.3 para asegurar la existencia de un punto fijo  $u \in B(0, R_0) \subset L_2(0, \tau; \mathbb{R}^m)$  tal que

$$u = \Gamma(z - H(u)) = G^*(GG^*)^{-1}(z - H(u)).$$

Entonces,

$$Gu = G\Gamma(z - H(u)) = z - H(u),$$

y

$$Gu + H(u) = z.$$

Así, haciendo  $z = z_1 - U(\tau, 0)z_0$  y usando (2.7), se obtiene el resultado deseado

$$\begin{aligned} z_1 &= U(\tau, 0)z_0 + \int_0^{\tau} U(\tau, s)B(s)u(s)ds \\ &+ \int_0^{\tau} U(\tau, s)f(s, z_u(s), u(s))ds \end{aligned}$$

■

**Corolario 2.3.2.** *Si el sistema lineal (2.6) es controlable sobre  $[0, \tau]$  y a ó  $\|B\|_{\infty}$  son suficientemente pequeño, entonces el sistema (2.4) es controlable sobre  $[0, \tau]$ . Más aún, existe un control que transfiere la solución del sistema (2.4) desde el estado inicial  $z_0$  hasta el estado final  $z_1$  en un tiempo  $\tau > 0$  y viene dado por*

$$u(t) = B^*(t)U^*(\tau, t)(GG^*)^{-1}(z_1 - U(\tau, 0)z_0 - H(u)), \quad t \in [0, \tau]. \quad (2.34)$$

## 2.4. Controlabilidad de Sistemas Semi-Lineales con Impulsos.

En esta sección aplicaremos nuevamente el Teorema del Punto Fijo de Rothe (1.5.3) para probar la controlabilidad del siguiente sistema semi-lineal de ecuaciones diferenciales con impulsos

$$\begin{cases} z'(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t) + f(t, z(t), u(t)), & t \in (0, \tau], t \neq t_k \\ z(t_k^+) = z(t_k^-) + I_k(z(t_k), u(t_k)), & k = 1, 2, 3, \dots, p. \end{cases} \quad (2.35)$$

donde  $z(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $A(t)$ ,  $B(t)$  son matrices continuas de dimensiones  $n \times n$  and  $n \times m$  respectivamente, el control  $u$  pertenece a  $C(0, \tau; \mathbb{R}^m)$  y  $f \in C([0, \tau] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ ,  $I_k \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, p$ , tal que

$$\|f(t, z, u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a_0 \|z\|_{\mathbb{R}^n}^{\alpha_0} + b_0 \|u\|_{\mathbb{R}^m}^{\beta_0} + c_0, \quad u \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n. \quad (2.36)$$

$$\|I_k(z, u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a_k \|z\|_{\mathbb{R}^n}^{\alpha_k} + b_k \|u\|_{\mathbb{R}^m}^{\beta_k} + c_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, p, z \in \mathbb{R}^n. \quad (2.37)$$

con  $0 < \alpha_k \leq 1$ ,  $0 < \beta_k \leq 1$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, p$ , y

$$z(t_k) = z(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} z(t), \quad z(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} z(t).$$

En casi todas las referencias sobre ecuaciones diferenciales con impulso el espacio natural para trabajar es el espacio de Banach:

$$PC([0, \tau]; \mathbb{R}^n) = \{z : J = [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n : z \in C(J'; \mathbb{R}^n), \exists z(t_k^+), z(t_k^-) \text{ y } z(t_k) = z(t_k^+)\},$$

donde  $J' = [0, \tau] \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_p\}$ , dotado con la norma

$$\|z\|_0 = \sup_{t \in [0, \tau]} \|z(t)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

También, se considera el espacio de Banach

$$PC(J) \times C(J) = PC([0, \tau]; \mathbb{R}^n) \times C(0, \tau; \mathbb{R}^m)$$

dotado con la norma

$$\|(z, u)\| = \|z\|_0 + \|u\|_0.$$

Además, en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  se considera la norma:

$$\|(z, u)\|_1 = \|z\|_{\mathbb{R}^n} + \|u\|_{\mathbb{R}^m} = \|z\| + \|u\|, \quad \forall (z, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Para todo  $(z, u) \in PC(J) \times C(J)$  se define:

$$\|f(\cdot, u, z)\|_0 = \sup_{t \in [0, \tau]} \|f(t, u(t), z(t))\|_{\mathbb{R}^n}.$$

JJ. Nieto y C.C. Tiesdell en [50], estudiaron la controlabilidad exacta del sistema con impulso

$$\begin{cases} z'(t) + \lambda z(t) = f(t, z(t)) + u(t), & t \in (0, \tau], \\ z(t_j^+) = z(t_j^-) + I_j(z(t_j), u(t)), & j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (2.38)$$

donde  $\lambda$  es una matriz  $n \times n$  y el término no lineal  $f(t, z)$  no depende del control  $u$  y satisface la siguiente condición

$$\|f(t, z)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a_0 \|z\|_{\mathbb{R}^n}^{\alpha_0} + b_0, \quad z \in \mathbb{R}^n. \quad (2.39)$$

y

$$\|I_k(z)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a_k \|z\|_{\mathbb{R}^n}^{\alpha_k} + b_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, p, z \in \mathbb{R}^n. \quad (2.40)$$

con  $0 < \alpha_k < 1$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, p$ .

Bajo esta condición, aplicando el Teorema del Punto Fijo de Schauder, los autores probaron que el sistema (2.38) es exactamente controlable. Es claro que la parte lineal de este sistema (2.38) sin impulso es exactamente controlable sobre  $[0, \tau]$ , lo cual puede verificarse trivialmente ya que el la acción del control es  $Bu = u$ . Específicamente, el sistema lineal

$$\begin{cases} z'(t) = -\lambda z(t) + u(t), & t \in (0, \tau], \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

es exactamente controlable, ya que la condición de Kalman se satisface

$$\text{Rank}[I|(-\lambda)|(-\lambda)^2 \dots |(-\lambda)^{n-1}] = n.$$

Zhi-Qing Zhu y Qing-Wen Lin, en [59], generaliza el trabajo realizado por J.J. Nieto y C.C. Tiesdell en [50]. Específicamente, estudian la controlabilidad del sistema semilineal no autónomo con impulso de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} z'(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t) + f(t, z(t)), & t \in (0, \tau], t \neq t_k \\ z(t_k^+) = z(t_k^-) + I_k(z(t_k)), & k = 1, 2, 3, \dots, \infty. \end{cases} \quad (2.41)$$

donde  $z(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $A(t)$ ,  $B(t)$  son matrices continuas de dimensión  $n \times n$  y  $n \times m$  respectivamente, la función control  $u$  pertenece a  $C([t_0, \infty); \mathbb{R}^m)$  y  $f \in C([t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ,  $I_k \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ , tal que

$$\|f(t, z)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a_0(t)\|z\|_{\mathbb{R}^n}^{\alpha_0} + b_0(t), \quad u \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n. \quad (2.42)$$

$$\|I_k(z)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a_k\|z\|_{\mathbb{R}^n}^{\alpha_k} + b_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, p, z \in \mathbb{R}^n. \quad (2.43)$$

con  $a_0, b_0 \in C([t_0, \infty), [0, \infty))$ ,  $0 < \alpha_k \leq 1$ ,  $b_k \geq 0$ ,  $a_k \geq 0$   $k = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ . En este trabajo una de los principales hipótesis es que el sistema lineal asociado a (2.41) es exactamente controlable sobre  $[t_0, \tau]$ . Nuestro proposito en esta sección es mostrar que bajo las condiciones (2.36) y (2.37), si el sistema lineal

$$z'(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t), \quad (2.44)$$

es controlable, entonces el sistema semilineal no autónomo (2.35) es también controlable sobre  $[0, \tau]$ . Más aún, se exhiben controles tales que el sistema no lineal satisface las condiciones de frontera  $z(0) = z_0$  y  $z(\tau) = z_1$ ,  $\tau > 0$ , lo cual es muy importante desde el punto de vista numérico.

Con este fin, para todo  $z_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $u \in C(0, \tau; \mathbb{R}^m)$  tenemos que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z'(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t) + f(t, z(t), u(t)), & t \in (0, \tau], t \neq t_k \\ z(t_k^+) = z(t_k^-) + I_k(z(t_k), u(t_k)), & k = 1, 2, 3, \dots, p. \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (2.45)$$

admite un única solución dada por

$$\begin{aligned} z_u(t) = & U(t, 0)z_0 + \int_0^t U(t, s)B(s)u(s)ds + \int_0^t U(t, s)f(s, z_u(s), u(s))ds \\ & + \sum_{0 < t_k < t} U(t, t_k)I_k(z(t_k), u(t_k)) \quad t \in [0, \tau]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

A continuación, se define el operador

$$\mathcal{K} : PC([0, \tau]; \mathbb{R}^n) \times C(0, \tau; \mathbb{R}^m) \rightarrow PC([0, \tau]; \mathbb{R}^n) \times C(0, \tau; \mathbb{R}^m)$$

mediante la siguiente formula:

$$(y, v) = (\mathcal{K}_1(z, u), \mathcal{K}_2(z, u)) = \mathcal{K}(z, u)$$

donde

$$y(t) = \mathcal{K}_1(z, u)(t) = U(t, 0)z_0 + \int_0^t U(t, s)B(s)(\Gamma\mathcal{L}(z, u))(s)ds \quad (2.47)$$

$$+ \int_0^t U(t, s)f(s, z(s), u(s))ds + \sum_{0 < t_k < t} U(t, t_k)I_k(z(t_k), u(t_k)) \quad t \in [0, \tau],$$

y

$$v(t) = \mathcal{K}_2(z, u)(t) = (\Gamma\mathcal{L}(z, u))(t) = B^*(t)U^*(\tau, t)W^{-1}\mathcal{L}(z, u), \quad (2.48)$$

con  $\mathcal{L} : PC([0, \tau]; \mathbb{R}^n) \times C(0, \tau; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por

$$\mathcal{L}(z, u) = z_1 - U(\tau, 0)z_0 - \int_0^\tau U(\tau, s)f(s, z(s), u(s))ds \quad (2.49)$$

$$- \sum_{0 < t_k < \tau} U(\tau, t_k)I_k(z(t_k), u(t_k)).$$

Los siguientes resultados son caracterizaciones sobre la controlabilidad del sistema (2.35).

**Teorema 2.4.1.** *El sistema semilineal con impulso (2.45) es controlable si, y sólo si, para todo estado inicial  $z_0$  y estado final  $z_1$  el operador  $\mathcal{K}$  dado por (2.47)-(2.48) tiene un punto fijo. Es decir,*

$$(z, u) = \mathcal{K}(z, u)$$

**Teorema 2.4.2.** *Supongamos que el sistema lineal (2.44) es controlable sobre  $[0, \tau]$ . Si  $0 < \alpha_k < 1$ ,  $0 < \beta_k < 1$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, p$ , entonces el sistema no lineal (2.45) es controlable sobre  $[0, \tau]$ . Más aún, existe un control  $u \in C(0, \tau; \mathbb{R}^m)$  tal que para  $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n$  la solución correspondiente  $z_u(\cdot)$  of (2.45) satisface:*

$$z_1 = U(\tau, 0)z_0 + \int_0^\tau U(\tau, s)B(s)u(s)ds + \int_0^\tau U(\tau, s)f(s, z_u(s), u(s))ds$$

$$+ \sum_{0 < t_k < \tau} U(\tau, t_k)I_k(z(t_k), u(t_k)),$$

y

$$u(t) = B^*(t)U^*(\tau, t)W^{-1}\mathcal{L}(z, u),$$

con

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(z, u) &= z_1 - U(\tau, 0)z_0 - \int_0^\tau U(\tau, s)f(s, z(s), u(s))ds \\ &- \sum_{0 < t_k < \tau} U(\tau, t_k)I_k(z(t_k), u(t_k)).\end{aligned}$$

Demostración

La prueba esta estructurada a través de afirmaciones.

**Afirmación 1.** El operador  $\mathcal{K}$  es continuo. En efecto, es suficiente probar que los operadores:

$$\mathcal{K}_1 : PC([0, \tau]; \mathbb{R}^n) \times C(0, \tau; \mathbb{R}^m) \rightarrow PC([0, \tau]; \mathbb{R}^n)$$

y

$$\mathcal{K}_2 : PC([0, \tau]; \mathbb{R}^n) \times C(0, \tau; \mathbb{R}^m) \rightarrow C(0, \tau; \mathbb{R}^m),$$

definidos anteriormente son continuos. La continuidad de  $\mathcal{K}_1$  se sigue de la continuidad de la función no lineal  $f(t, z, u)$ ,  $I_k(z, u)$  y la siguiente estimación

$$\begin{aligned}\|\mathcal{K}_1(z, u) - \mathcal{K}_1(w, v)\| &\leq M_1 \|u - v\| + M_2 \sup_{s \in J} \|f(s, z(s), u(s)) - f(s, w(s), v(s))\| \\ &+ M_3 \sum_{0 < t_k < t} \|I_k(z(t_k), u(t_k)) - I_k(w(t_k), v(t_k))\|.\end{aligned}$$

La continuidad del operador  $\mathcal{K}_2$  se sigue de la continuidad de los operadores  $\mathcal{L}$  y  $\Gamma$ .

**Afirmación 2.** El operador  $\mathcal{K}$  es compacto. En efecto, sea  $D$  un subconjunto acotado de  $PC(J; \mathbb{R}^n) \times C(J; \mathbb{R}^m)$ . De esto se sigue que

$$\|f(\cdot, z, u)\|_0 \leq M_4, \quad \|W^{-1}\mathcal{L}(z, u)\| \leq M_5, \quad \|I_k(z, u)\|_0 \leq M_k, \quad k = 1, \dots, p; \forall (z, u) \in D.$$

Por lo tanto,  $\mathcal{K}(D)$  es uniformemente acotado.

Ahora, consideremos la siguiente estimaciones:

$$\|\mathcal{K}(z, u)(t_2) - \mathcal{K}(z, u)(t_1)\|_1 = \|\mathcal{K}_1(z, u)(t_2) - \mathcal{K}_1(z, u)(t_1)\| + \|\mathcal{K}_2(z, u)(t_2) - \mathcal{K}_2(z, u)(t_1)\|,$$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}_1(z, u)(t_2) - \mathcal{K}_1(z, u)(t_1)\| &\leq \|U(t_2, 0) - U(t_1, 0)\| \|z_0\| \\
&+ \int_0^{t_1} \|U(t_2, s) - U(t_1, s)\| \|B(s)\| \|u(s)\| ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \|U(t_2, s)\| \|B(s)\| \|u(s)\| ds \\
&+ \int_0^{t_1} \|U(t_2, s) - U(t_1, s)\| \|f(s, z(s), u(s))\| ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \|U(t_2, s)\| \|f(s, z(s), u(s))\| ds \\
&+ \sum_{0 < t_k < t_1} \|U(t_2, t_k) - U(t_1, t_k)\| \|I_k(z(t_k), u(t_k))\| \\
&+ \sum_{t_1 < t_k < t_2} \|U(t_2, t_k)\| \|I_k(z(t_k), u(t_k))\|,
\end{aligned}$$

y

$$\|\mathcal{K}_1(z, u)(t_2) - \mathcal{K}_1(z, u)(t_1)\| \leq \|B^*(t_2)U^*(\tau, t_2) - B^*(t_1)U^*(\tau, t_1)\| \|W^{-1}\mathcal{L}(z, u)\|.$$

Consecuentemente, si se considera una sucesión  $\{\phi_j : j = 1, 2, \dots\}$  sobre  $\mathcal{K}(D)$ , esta sucesión es uniformemente acotada y equicontinua sobre el intervalo  $[0, t_1]$  y, por el Teorema de Arzela, existe una sub-sucesión  $\{\phi_j^1 : j = 1, 2, \dots\}$  de  $\{\phi_j : j = 1, 2, \dots\}$ , la cual es uniformemente convergente sobre  $[0, t_1]$ .

Consideremos la sucesión  $\{\phi_j^1 : j = 1, 2, \dots\}$  sobre el intervalo  $(t_1, t_2]$ . Sobre este intervalo la sucesión  $\{\phi_j^1 : j = 1, 2, \dots\}$  es uniformemente acotada y equicontinua, y, por la misma razón, esta contiene una sub-sucesión  $\{\phi_j^2\}$  uniformemente convergente sobre  $[0, t_2]$ .

Continuando con este proceso para los intervalos  $(t_2, t_3]$ ,  $(t_3, t_4]$ ,  $\dots$ ,  $(t_p, \tau]$ , vemos que la sucesión  $\{\phi_j^{p+1} : j = 1, 2, \dots\}$  converge uniformemente sobre el intervalo  $[0, \tau]$ . Esto significa que  $\overline{\mathcal{K}(D)}$  es compacto, lo cual implica que el operador  $\mathcal{K}$  es compacto.

**Afirmación 3.**

$$\lim_{\| (z, u) \| \rightarrow \infty} \frac{\| \mathcal{K}(z, u) \|}{\| (z, u) \|} = 0,$$

donde  $\| (z, u) \| = \|z\|_0 + \|u\|_0$  es la norma en el espacio  $PC([0, \tau]; \mathbb{R}^n) \times C(0, \tau; \mathbb{R}^m)$ . En efecto, consideremos la siguiente estimación:

$$\|\mathcal{L}(z, u)\| \leq M_1 + M_2 \{a_0 \|z\|^{\alpha_0} + b_0 \|u\|^{\beta_0} + c_0\} + M_3 \sum_{0 < t_k < \tau} \{a_k \|z\|^{\alpha_k} + b_k \|u\|^{\beta_k} + c_k\},$$

donde

$$M_1 = \|z_1\| + Me^{\omega\tau}\|z_0\|, \quad M_2 = \frac{M}{\omega}(e^{\omega\tau} - 1) \quad \text{and} \quad M_3 = Me^{\omega\tau}.$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_2(z, u)\| &\leq \|B\|M_3M_1\|W^{-1}\| + \|B\|M_3M_2\|W^{-1}\|\{a_0\|z\|^{\alpha_0} + b_0\|u\|^{\beta_0} + c_0\} \\ &+ \|B\|M_3M_2\|W^{-1}\| \sum_{0 < t_k < \tau} \{a_k\|z\|^{\alpha_k} + b_k\|u\|^{\beta_k} + c_k\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_1(z, u)\| &\leq M_3\{\|z_0\| + \|B\|^2M_1M_2\|W^{-1}\|\} \\ &+ M_2\{1 + \|B\|^2M_2M_3\|W^{-1}\|\}\{a_0\|z\|^{\alpha_0} + b_0\|u\|^{\beta_0} + c_0\} \\ &+ M_3\{1 + \|B\|^2M_2M_3\|W^{-1}\|\} \sum_{0 < t_k < \tau} \{a_k\|z\|^{\alpha_k} + b_k\|u\|^{\beta_k} + c_k\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|\|\mathcal{K}(z, u)\|\| &= \|\mathcal{K}_1(z, u)\| + \|\mathcal{K}_2(z, u)\| \leq M_4 \\ &+ \{\|B\|M_3M_2\|W^{-1}\|\{1 + \|B\|M_2\} + M_2\}\{a_0\|z\|^{\alpha_0} + b_0\|u\|^{\beta_0} + c_0\} \\ &+ \{\|B\|M_3M_2\|W^{-1}\|\{1 + \|B\|M_3\} + M_3\} \sum_{0 < t_k < \tau} \{a_k\|z\|^{\alpha_k} + b_k\|u\|^{\beta_k} + c_k\}, \end{aligned}$$

donde  $M_4$  es dado por:

$$M_4 = M_3\{\|z_0\| + (\|B\|M_2 + 1)\|B\|M_1\|W^{-1}\|\}.$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{\|\|\mathcal{K}(z, u)\|\|}{\|\|(z, u)\|\|} &\leq \frac{M_4}{\|z\| + \|u\|} \\ &+ \{\|B\|M_3M_2\|W^{-1}\|\{1 + \|B\|M_2\} + M_2\}\{a_0\|z\|^{\alpha_0-1} + b_0\|u\|^{\beta_0-1} \\ &+ \frac{c_0}{\|z\| + \|u\|}\} + \{\|B\|M_3M_2\|W^{-1}\|\{1 + \|B\|M_3\} + M_3\} \times \\ &\sum_{0 < t_k < \tau} \{a_k\|z\|^{\alpha_k-1} + b_k\|u\|^{\beta_k-1} + \frac{c_k}{\|z\| + \|u\|}\}, \end{aligned}$$

y

$$\lim_{\|\|(z, u)\|\| \rightarrow \infty} \frac{\|\|\mathcal{K}(z, u)\|\|}{\|\|(z, u)\|\|} = 0.$$

**Afirmación 4.** El operador  $\mathcal{K}$  tiene un punto fijo. En efecto, para  $0 < \rho < 1$  fijo, existe  $R > 0$  suficientemente grande tal que

$$\|\|\mathcal{K}(z, u)\|\| \leq \rho\|\|(z, u)\|\|, \quad \|\|(z, u)\|\| = R.$$

Consecuentemente, si se denota por  $B(0, R)$  la bola de centro cero y radio  $R > 0$ , se obtiene que  $\mathcal{K}(\partial B(0, R)) \subset B(0, R)$ . Dado que  $\mathcal{K}$  es compacto y aplica la esfera  $\partial B(0, R)$  en el interior de la bola  $B(0, R)$ , se puede aplicar el Teorema del Punto Fijo de Rothe para asegurar la existencia de un punto fijo  $(z, u) \in B(0, R) \subset PC([0, \tau]; \mathbb{R}^n) \times C(0, \tau; \mathbb{R}^m)$  tal que

$$u = \Gamma \mathcal{L}(z, u) = B^*(\cdot)U^*(\tau, \cdot)W^{-1}\mathcal{L}(z, u).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} Gu &= G\Gamma \mathcal{L}(z, u) \\ &= \mathcal{L}(z, u) \\ &= z_1 - U(\tau, 0)z_0 - \int_0^\tau U(\tau, s)f(s, z(s), u(s))ds \\ &\quad - \sum_{0 < t_k < \tau} U(\tau, t_k)I_k(z(t_k), u(t_k)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^\tau U(\tau, s)B(s)u(s)ds &= z_1 - U(\tau, 0)z_0 - \int_0^\tau U(\tau, s)f(s, z(s), u(s))ds \\ &\quad - \sum_{0 < t_k < \tau} U(\tau, t_k)I_k(z(t_k), u(t_k)), \end{aligned}$$

O equivalentemente,

$$\begin{aligned} z_1 &= U(\tau, 0)z_0 + \int_0^\tau U(\tau, s)B(s)u(s)ds + \int_0^\tau U(\tau, s)f(s, z(s), u(s))ds \\ &\quad + \sum_{0 < t_k < \tau} U(\tau, t_k)I_k(z(t_k), u(t_k)), \end{aligned}$$

■



## Capítulo 3

# Controlabilidad de Sistemas Semilineales en Espacios de Dimensión Infinita

### 3.1. Controlabilidad para Sistemas Lineales Continuos. (Exacta y Aproximada)

#### 3.1.1. Preliminares.

En esta sección presentamos algunos resultados sobre la controlabilidad del sistema de control lineal

$$z' = Az(t) + Bu(t), \quad t > 0,$$

donde  $Z, U$  son espacios de Hilbert,  $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$  es el generador de un  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  en  $Z$ ,  $B \in L(U, Z)$ ,  $u \in L^2(0, \tau; U)$ .

De acuerdo al Teorema 1.2.1 y la Definición 1.2.2, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z' &= Az(t) + Bu(t), \quad t > 0, \\ z(0) &= z_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

admite una única solución moderada dada por

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds, \quad t \in [0, \tau]. \quad (3.2)$$

Ahora, daremos las definiciones de controlabilidad exacta y aproximada para el sistema (3.1).

**Definición 3.1.1. (Controlabilidad Exacta)** *El sistema (3.1) se dice que es **exactamente controlable** sobre  $[0, \tau]$  si para cada  $z_0, z_1 \in Z$  existe  $u \in L^2(0, \tau; U)$  tal que la solución moderada  $z(t)$  de (3.1) correspondiente a  $u$  verifica:  $z(\tau) = z_1$ .*

**Definición 3.1.2. (Controlabilidad Aproximada)** *El sistema (3.1) se dice que es **aproximadamente controlable** sobre  $[0, \tau]$  si para cada  $z_0, z_1 \in Z$ ,  $\varepsilon > 0$  existe  $u \in L^2(0, \tau; U)$  tal que la solución moderada  $z(t)$  de (3.1) correspondiente a  $u$  verifica:*

$$\|z(\tau) - z_1\| < \varepsilon.$$

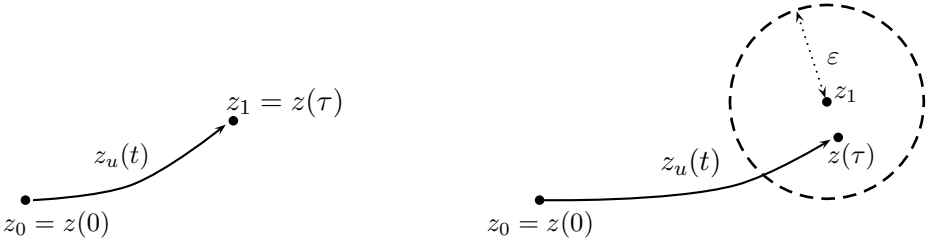


Figura 1: Controlabilidad exacta (izq.) Controlabilidad aproximada (der.)

**Definición 3.1.3.** *Para el sistema (3.1) definimos los siguientes conceptos:*

- a) **La aplicación de controlabilidad** (para  $\tau > 0$ ) es definida como sigue  $\mathcal{B}^\tau : L^2(0, \tau; U) \rightarrow Z$  por

$$\mathcal{B}^\tau u = \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds. \quad (3.3)$$

- b) **La aplicación gramian**  $L_{\mathcal{B}^\tau} : Z \rightarrow Z$  es definida por  $L_{\mathcal{B}^\tau} = \mathcal{B}^\tau \mathcal{B}^{\tau*}$ , es decir,

$$L_{\mathcal{B}^\tau} z = \mathcal{B}^\tau \mathcal{B}^{\tau*} z = \int_0^\tau T(\tau - s)BB^*T^*(\tau - s)zds.$$

El siguiente teorema se puede encontrar en forma general para ecuaciones de evolución en Curtain & Zwart [18].

**Teorema 3.1.1.** (a) *La ecuación (3.1) es exactamente controlable sobre  $[0, \tau]$  si, y sólo si, una de las siguientes afirmaciones vale:*

(i)  $\text{Rango}(\mathcal{B}^\tau) = Z$ .

(ii) *Existe  $\gamma > 0$  tal que*

$$\langle L_{\mathcal{B}^\tau} z, z \rangle \geq \gamma \|z\|_Z^2, \quad z \in Z.$$

(iii) *Existe  $\gamma > 0$  tal que*

$$\|\mathcal{B}^{\tau*} z\|_{L^2(0, \tau; U)} \geq \gamma \|z\|_Z, \quad z \in Z.$$

(b) *La ecuación (3.1) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$  si, y sólo si, una de las siguientes afirmaciones vale:*

(i)  $\text{Ker}(\mathcal{B}^{\tau*}) = \{0\}$ .

(ii)  $\langle L_{\mathcal{B}^\tau} z, z \rangle > 0, \quad z \neq 0$  en  $Z$ .

(iii)  $B^* T^* z = 0 \Rightarrow z = 0$ .

(iv)  $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}^\tau)} = Z$ .

### 3.1.2. Resultados Principales.

A continuación presentamos los resultados principales de esta sección, para este fin supondremos que el semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  generado por el operador  $A$  está dado por

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j z, \quad z \in Z, \quad t \geq 0, \quad (3.4)$$

de acuerdo al Lema 1.1.1.

A lo largo de esta sección se supone la siguiente hipótesis:

$$P_j B B^* = B B^* P_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

**Proposición 3.1.1.** *Bajo la hipótesis (3.5) el operador*

$$L_{\mathcal{B}^\tau} z = \mathcal{B}^\tau \mathcal{B}^{\tau*} z = \int_0^\tau T(s) B B^* T^*(s) z ds,$$

*puede escribirse de la siguiente manera*

$$L_{\mathcal{B}^\tau} = \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j,$$

*donde*

$$L_{\mathcal{B}_j^\tau} y = \mathcal{B}_j^\tau \mathcal{B}_j^{\tau*} y = \int_0^\tau e^{A_j s} B_j B_j^* e^{A_j^* s} y ds, \quad y \in \text{Rango}(P_j).$$

**Demostración**

De la definición del operador  $L_{\mathcal{B}^\tau}$  y la representación (3.4) de  $T(t)$  obtenemos que

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}^\tau} z &= \int_0^\tau \left( \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j s} P_j \right) B B^* \left( \sum_{k=1}^{\infty} e^{A_k^* s} P_k z \right) ds \\ &= \int_0^\tau \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j s} B_j B_j^* e^{A_j^* s} P_j z ds \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^\tau e^{A_j s} B_j B_j^* e^{A_j^* s} P_j z ds \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z. \end{aligned}$$

■

**Lema 3.1.1.** *El sistema (3.1) es exactamente controlable sobre  $[0, \tau]$  si, y sólo si, el operador  $L_{\mathcal{B}^\tau}$  es invertible. Además, en este caso,  $S = \mathcal{B}^{\tau*} L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1}$  es una inversa por la derecha de  $\mathcal{B}^\tau$  y un control  $u \in L^2(0, \tau; U)$  que transfiere el estado inicial  $z_0$  a un estado final  $z_1$  en tiempo  $\tau > 0$  está dado por:*

$$u(t) = B^* T^*(\tau - t) L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1} (z_1 - T(\tau) z_0). \quad (3.6)$$

Demostración

Supongamos que el sistema (3.1) es exactamente controlable. Entonces, del Teorema 3.1.1 parte (a) – (iii) existe  $\gamma > 0$  tal que  $\|\mathcal{B}^{\tau*}z\|_{L^2(0,\tau;U)} \geq \gamma\|z\|_Z$ , para todo  $z \in Z$ , es decir,

$$\|\mathcal{B}^{\tau*}z\|^2 \geq \gamma^2\|z\|^2, \quad z \in Z,$$

equivalentemente,

$$\langle \mathcal{B}^{\tau} \mathcal{B}^{\tau*} z, z \rangle \geq \gamma^2 \|z\|^2, \quad z \in Z,$$

y,

$$\langle L_{\mathcal{B}^{\tau}} z, z \rangle \geq \gamma^2 \|z\|^2, \quad z \in Z. \quad (3.7)$$

Esto implica que  $L_{\mathcal{B}^{\tau}}$  es inyectiva. Ahora probaremos que  $L_{\mathcal{B}^{\tau}}$  es sobreyectiva. Es decir,

$$\mathcal{R}(L_{\mathcal{B}^{\tau}}) = \text{Rango}(L_{\mathcal{B}^{\tau}}) = Z.$$

Supongamos, por reducción al absurdo, que  $\mathcal{R}(L_{\mathcal{B}^{\tau}})$  está estrictamente contenido en  $Z$ . Por otro lado, usando la desigualdad de Cauchy Schwarz y (3.7) obtenemos

$$\|L_{\mathcal{B}^{\tau}} z\|_{l^2} \geq \gamma^2 \|z\|, \quad z \in Z,$$

lo cual implica que  $\mathcal{R}(L_{\mathcal{B}^{\tau}})$  es cerrado. Entonces, del Teorema de Hahn Banach existe  $z_0 \neq 0$  tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{\tau}} z, z_0 \rangle = 0, \quad \forall z \in Z.$$

En particular, poniendo  $z = z_0$  se obtiene de (3.7) que

$$0 = \langle L_{\mathcal{B}^{\tau}} z_0, z_0 \rangle \geq \gamma^2 \|z_0\|^2.$$

Entonces  $z_0 = 0$ , lo cual es una contradicción. En consecuencia,  $L_{\mathcal{B}^{\tau}}$  es una biyección y por el Teorema de la Aplicación Abierta,  $L_{\mathcal{B}^{\tau}}^{-1}$  es un operador lineal acotado.

Ahora, supongamos que  $L_{\mathcal{B}^{\tau}}$  es invertible. Entonces, por el Teorema 3.1.1 es suficiente probar que  $\mathcal{R}(\mathcal{B}^{\tau}) = Z$ . Para  $z \in Z$  definamos el control  $u_z \in L^2(0, \tau; U)$  como sigue

$$u_z = Sz = \mathcal{B}^{\tau*} L_{\mathcal{B}^{\tau}}^{-1} z.$$

Entonces  $\mathcal{B}^{\tau} u_z = z$ . El resto de la prueba se sigue de aquí. ■

**Corolario 3.1.1.** *El control dado por (3.6) en el Lema 3.1.1 es el de norma mínima. Es decir,  $\|u\| = \inf\{\|v\| : v \in S_z\}$ , donde  $S_z = \{v \in L^2(0, \tau; U) : \mathcal{B}^\tau v = z\}$ .*

*Demostración*

Consideremos las siguientes igualdades

$$\|v\|^2 = \|u + (v - u)\|^2 = \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u, v - u \rangle + \|v - u\|^2, v \in S_z.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \langle u, v - u \rangle &= \int_0^\tau \langle \mathcal{B}^{\tau*} L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1} z, v(s) - u(s) \rangle ds \\ &= \int_0^\tau \langle B^* T^*(\tau - s) L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1} z, v(s) - u(s) \rangle ds \\ &= \int_0^\tau \langle L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1} z, T(\tau - s) B v(s) - T(\tau - s) B u(s) \rangle ds \\ &= \langle L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1} z, \mathcal{B}^\tau v - \mathcal{B}^\tau u \rangle \\ &= \langle L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1} z, z - z \rangle = 0. \end{aligned}$$

Así,

$$\|v\|^2 - \|u\|^2 = \|v - u\|^2 \geq 0, v \in S_z.$$

Por lo tanto,  $\|u\| \leq \|v\|$  para todo  $v \in S_z$  y  $\|u\| = \|v\|$  si, y sólo si,  $u = v$ . ■

**Lema 3.1.2.** (a) *El sistema (3.1) es exactamente controlable sobre  $[0, \tau]$  si, y sólo si, existe  $\gamma > 0$  tal que*

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z, P_j z \rangle \geq \gamma \|P_j z\|^2, \quad \forall z \in Z, \quad \forall j = 1, 2, 3, \dots$$

(b) *El sistema (3.1) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$  si, y sólo si, cada uno de los siguientes sistemas*

$$z' = A_j z + B_j u(t), \quad z(t) \in \operatorname{Rango}(P_j), \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.8)$$

*es aproximadamente controlable.*

(c) El sistema (3.1) es aproximadamente controlable si, y sólo si,

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} y, y \rangle > 0, \forall y \neq 0 \text{ en } \text{Rango}(P_j), \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Demostración

(a) Supongamos que el sistema (3.1) es exactamente controlable. Entonces, por el Teorema 3.1.1 parte (a) – (ii), existe  $\gamma > 0$  tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}^\tau} z, z \rangle \geq \gamma \|z\|^2, \quad \forall z \in Z.$$

Por otro lado, de la Proposición 3.1.1 sabemos que

$$L_{\mathcal{B}^\tau} w = \sum_{l=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_l^\tau} P_l w, \quad \forall w \in Z.$$

En particular, haciendo  $w = P_j z$ , para  $j = 1, 2, 3, \dots$ , obtenemos  $L_{\mathcal{B}^\tau} P_j z = L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z$ . Entonces, de la desigualdad de arriba obtenemos

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z, P_j z \rangle \geq \gamma \|P_j z\|^2, \quad \forall z \in Z, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Ahora, supongamos que

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z, P_j z \rangle \geq \gamma \|P_j z\|^2, \quad \forall z \in Z.$$

Entonces, para todo  $z$  en  $Z$  tenemos que

$$\begin{aligned} \langle L_{\mathcal{B}^\tau} z, z \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z, \sum_{j=1}^{\infty} P_j z \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z, P_j z \rangle \\ &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma \|P_j z\|^2 = \gamma \|z\|^2. \end{aligned}$$

(b) Por reducción al absurdo, supongamos que el sistema (3.1) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$  y que existe  $j$  tal que el sistema

$$z' = A_j z + B_j u(t); \quad z \in \text{Rango}(P_j)$$

no es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$ . Entonces, existe  $z_j \in \text{Rango}(P_j)$  tal que:

$$B_j^* e^{A_j^* t} z_j = 0, \quad t \in [0, \tau] \quad \text{y} \quad z_j \neq 0. \quad (3.9)$$

Por otro lado, de la parte (b) – (iii) del Teorema 3.1.1 tenemos que:

$$B^* T^*(t) z = 0, \quad \forall t \in [0, \tau] \implies z = 0.$$

Ahora, tomando  $z = P_j z_j = z_j$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} B^* T^*(t) z &= B^* \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n^* t} P_n z \\ &= B^* e^{A_j^* t} P_j z_j \\ &= (B_j)^* e^{A_j^* t} z_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que  $z_j = 0$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, (3.8) es aproximadamente controlable para todo  $j$ .

Recíprocamente, supongamos que para todo  $j$  el sistema (3.8) es aproximadamente controlable. Notese que  $L_{\mathcal{B}_j^\tau}$  es la aplicación gammian asociada a (3.8). Entonces por el Teorema 3.1.1 parte (b) – (ii), tenemos que

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} y, y \rangle > 0, \quad \forall y \neq 0 \text{ en } \text{Rango}(P_j), \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Claramente que, para todo  $z \in Z$  ( $z \neq 0$ ) existe  $J \in \mathbb{N}$  tal que  $P_J z \neq 0$ . Entonces, usando la Proposición 3.1.1, obtenemos, para todo  $z$  en  $Z$ , que

$$\begin{aligned} \langle L_{\mathcal{B}^\tau} z, z \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z, \sum_{j=1}^{\infty} P_j z \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z, P_j z \rangle > 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, (3.1) es aproximadamente controlable y se prueba (b).

(c) se sigue inmediatamente de (b) y el Teorema 3.1.1 parte (b). ■

### 3.2. Controlabilidad Exacta para Sistemas Semilineales Continuos.

En esta sección estudiaremos la controlabilidad exacta de la ecuación no lineal:

$$z' = Az(t) + Bu(t) + f(z(t), u(t)), \quad t > 0,$$

donde  $Z, U$  son espacios de Hilbert,  $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$  es el generador de un  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  en  $Z$ ,  $B \in L(U, Z)$ ,  $u \in L^2(0, \tau; U)$  y el término no lineal  $f : Z \times U \rightarrow Z$  es una función continua Lipschitziana. Es decir, para  $z_1, z_2 \in Z$  y  $u_1, u_2 \in U$  tenemos que

$$\|f(z_2, u_2) - f(z_1, u_1)\| \leq L\{\|z_2 - z_1\| + \|u_2 - u_1\|\}. \quad (3.10)$$

Supondremos que  $L$  es suficientemente pequeño y que el sistema (3.1) es exactamente controlable, es decir,  $\mathcal{R}(\mathcal{B}^\tau) = Z$ .

Por otra parte, del Teorema 1.3.1, sabemos que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z' &= Az(t) + Bu(t) + f(z(t), u(t)), \quad t > 0, \\ z(0) &= z_0, \end{cases} \quad (3.11)$$

admite una única solución moderada dada por

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds + \int_0^t T(t-s)f(z(s), u(s))ds \quad t \in [0, \tau]. \quad (3.12)$$

**Definición 3.2.1.** *El sistema (3.11) se dice que es **exactamente controlable** sobre  $[0, \tau]$ , si para todo  $z_0, z_1 \in Z$ , existe un control  $u \in L^2(0, \tau; U)$  tal que la solución moderada correspondiente,  $z$ , de (3.11) satisface  $z(\tau) = z_1$ .*

Definamos el siguiente operador:  $\mathcal{B}_f^\tau : L^2(0, \tau; U) \rightarrow Z$ , por

$$\mathcal{B}_f^\tau u = \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds + \int_0^\tau T(\tau - s)f(z(s), u(s))ds, \quad (3.13)$$

donde  $z(t)$  es la solución de (3.11) correspondiente al control  $u$ .

Entonces, la siguiente proposición es una caracterización de la controlabilidad exacta del sistema no lineal (3.11)

**Proposición 3.2.1.** *El sistema (3.11) es exactamente controlable sobre  $[0, \tau]$  si, y sólo si,  $\text{Rango}(\mathcal{B}_f^\tau) = Z$ .*

Demostración

Supongamos que (3.11) es exactamente controlable sobre  $[0, \tau]$ . Dado  $z \in Z$ , podemos encontrar  $z_0, z_1 \in Z$  tales que

$$z_1 = T(\tau)z_0 + z. \quad (3.14)$$

Luego, existe un control  $u \in L^2(0, \tau; U)$  tal que  $z_u(0) = z_0$  y  $z_u(\tau) = z_1$ . Así,

$$z_1 = z_u(\tau) = T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau-s)Bu(s)ds + \int_0^\tau T(\tau-s)f(z_u(s), u(s))ds. \quad (3.15)$$

Sustituyendo (3.14) en (3.15), obtenemos

$$T(\tau)z_0 + z = T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau-s)Bu(s)ds + \int_0^\tau T(\tau-s)f(z_u(s), u(s))ds.$$

Entonces,

$$z = \int_0^\tau T(\tau-s)Bu(s)ds + \int_0^\tau T(\tau-s)f(z_u(s), u(s))ds = \mathcal{B}_f^\tau u.$$

Así,  $\text{Rango}(\mathcal{B}_f^\tau) = Z$ .

Supongamos ahora que  $\text{Rango}(\mathcal{B}_f^\tau) = Z$ . Consideremos  $z \in Z$  tal que

$$z = z_1 - T(\tau)z_0 \quad (3.16)$$

con  $z_0, z_1 \in Z$ . Entonces existe un control  $u \in L^2(0, \tau; U)$  tal que

$$\mathcal{B}_f^\tau u = z. \quad (3.17)$$

Entonces, sustituyendo (3.16) en (3.17), obtenemos

$$z = z_1 - T(\tau)z_0 = \int_0^\tau T(\tau-s)Bu(s)ds + \int_0^\tau T(\tau-s)f(z_u(s), u(s))ds.$$

De donde,

$$z_u(\tau) = T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau-s)Bu(s)ds + \int_0^\tau T(\tau-s)f(z_u(s), u(s))ds.$$

Así, hemos obtenido una solución  $z_u(\cdot)$  de (3.11) tal que  $z_u(\tau) = z_1$  y  $z_u(0) = z_0$ , es decir, (3.11) es exactamente controlable sobre  $[0, \tau]$ . ■

**Lema 3.2.1.** Sean  $u_1, u_2 \in L^2(0, \tau; U)$  y  $z_1, z_2$  las soluciones correspondientes de (3.11). Entonces vale la siguiente estimación:

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_Z \leq M[\|B\| + L]\sqrt{\tau}e^{ML\tau}\|u_1 - u_2\|_{L^2(0, \tau; U)} \quad (3.18)$$

donde  $0 \leq t \leq \tau$  y  $M = \sup_{1 \leq s \leq t \leq \tau} \{\|T(t-s)\|\}$ .

**Demostración**

Sean  $z_1, z_2$  soluciones de (3.11) correspondientes a  $u_1, u_2$  respectivamente. Entonces

$$z_1(t) - z_2(t) = \int_0^t T(t-s)[Bu_1(s) + f(z_1(s), u_1(s)) - Bu_2(s) - f(z_2(s), u_2(s))] ds.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|z_1(t) - z_2(t)\| &\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \|B\| \|u_1(s) - u_2(s)\| ds \\ &\quad + \int_0^t \|T(t-s)\| \|f(z_1(s), u_1(s)) - f(z_2(s), u_2(s))\| ds \\ &\leq M[\|B\| + L]\sqrt{\tau}\|u_1 - u_2\|_{L^2} + ML \int_0^t \|z_1(s) - z_2(s)\| ds. \end{aligned}$$

Así, usando la desigualdad de Gronwall se obtiene

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_Z \leq M[\|B\| + L]\sqrt{\tau}e^{ML\tau}\|u_1 - u_2\|_{L^2}, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

■

Consideremos ahora el siguiente Teorema el cual es de suma importancia en lo que sigue.

**Teorema 3.2.1.** Sean  $Z$  un espacio Banach y  $K : Z \rightarrow Z$  una función Lipschitz con constante de Lipschitz  $L_K < 1$  y considere  $G(z) = z + Kz$ . Entonces  $G$  es un homeomorfismo cuya inversa es una función Lipschitz con constante de Lipschitz  $(1 - L_K)^{-1}$ .

**Demostración**

Veamos primero que  $G$  es inyectiva. Sean  $z_1, z_2 \in Z$  tales que  $Gz_1 = Gz_2$ . Entonces  $z_1 + Kz_1 = z_2 + Kz_2$ . Luego,  $z_1 - z_2 = Kz_2 - Kz_1$ . Así,

$$\|z_1 - z_2\| = \|Kz_1 - Kz_2\| \leq L_K \|z_1 - z_2\|.$$

De donde,  $(1 - L_K)\|z_1 - z_2\| \leq 0$ , y como  $(1 - L_K) > 0$ , entonces  $z_1 = z_2$ . Veamos ahora que  $G$  es sobreyectiva. Sea  $y \in Z$  y definamos  $H : Z \rightarrow Z$  por  $H z = y - K z$ . Luego, para  $z_1, z_2 \in Z$ , se tiene

$$\|H z_1 - H z_2\| = \|K z_1 - K z_2\| \leq L_K \|z_1 - z_2\|, \quad (L_K < 1).$$

Es decir,  $H$  es una contracción. Así, para cada  $y \in Z$ ,  $H$  tiene un punto fijo  $z$ . Por lo tanto, para  $y \in Z$ , existe  $z \in Z$  tal que  $H z = z$ . Así,  $z = y - K z$ . Entonces  $G z = z + K z = y$ .

Ahora, sean  $z_1, z_2 \in Z$ .

$$\|G z_1 - G z_2\| \geq \|z_1 - z_2\| - \|K z_1 - K z_2\| \geq (1 - L_K)\|z_1 - z_2\|.$$

Sean  $y_1 = G z_1$ ,  $y_2 = G z_2$ . Entonces,

$$\|G^{-1} y_1 - G^{-1} y_2\| = \|z_1 - z_2\| \leq (1 - L_K)^{-1} \|y_1 - y_2\|.$$

Por lo tanto,  $G^{-1}$  es Lipschitziana con constante de Lipschitz  $(1 - L_K)^{-1}$ . ■

Ahora estamos listos para formular y probar el resultado principal de esta sección.

**Teorema 3.2.2.** *Si el siguiente estimado se cumple*

$$L_K = M^2 L(\Gamma + 1) \|B^*\| \|L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1}\| \tau < 1, \quad (3.19)$$

donde  $\Gamma = M[\|B\| + L]\sqrt{\tau} e^{ML\tau}$ , y el sistema lineal (3.1) es exactamente controlable, entonces el sistema no lineal (3.11) es exactamente controlable.

**Demostración**

Queremos probar que

$$\mathcal{B}_f^\tau(L^2(0, \tau; U)) = \text{Rango}(\mathcal{B}_f^\tau) = Z.$$

Pero, de la controlabilidad exacta del sistema lineal (3.1) sabemos, por el Lema 3.1.1, que el operador  $S = \mathcal{B}^{\tau*} L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1}$  es una inversa por la derecha de  $\mathcal{B}^\tau$ . Entonces, es suficiente probar que el operador  $\tilde{\mathcal{B}}_f^\tau = \mathcal{B}_f^\tau \circ S$  es

sobreyectivo. De la ecuación (3.13) obtenemos la siguiente expresión para este operador

$$\tilde{\mathcal{B}}_f^\tau \xi = \xi + \int_0^\tau T(\tau - s) f(z(s), S(\xi)(s)) ds. \quad (3.20)$$

Ahora, si definimos el operador  $K : Z \rightarrow Z$  por

$$K\xi = \int_0^\tau T(\tau - s) f(z(s), S(\xi)(s)) ds, \quad (3.21)$$

donde  $z = z_\xi$  es la solución de (3.11) correspondiente al control  $u = S(\xi)$ . Entonces la ecuación (3.20) toma la forma

$$\tilde{\mathcal{B}}_f^\tau = I + K. \quad (3.22)$$

La función  $K$  es globalmente Lipschitz. En efecto, sean  $z_1, z_2$  soluciones de (3.11) correspondientes a los controles  $S\xi_1, S\xi_2$ , respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \|K\xi_1 - K\xi_2\| &\leq \int_0^\tau \|T(\tau - s)\| \|f(z_1(s), S(\xi_1)(s)) - f(z_2(s), S(\xi_2)(s))\| ds \\ &\leq \int_0^\tau ML\{\|z_1(s) - z_2(s)\| + \|(S\xi_1)(s) - (S\xi_2)(s)\|\} ds \\ &\leq \int_0^\tau ML(\Gamma + 1)\|(S\xi_1)(s) - (S\xi_2)(s)\| ds \\ &\leq ML(\Gamma + 1) \int_0^\tau \|B^*T^*(\tau - s)L_{\mathcal{B}_\tau}^{-1}\|\|\xi_1 - \xi_2\| ds \\ &\leq ML(\Gamma + 1) \int_0^\tau \|B^*\|M\|L_{\mathcal{B}_\tau}^{-1}\|\|\xi_1 - \xi_2\| ds \\ &= M^2L(\Gamma + 1)\|B^*\|\|L_{\mathcal{B}_\tau}^{-1}\|\tau\|\xi_1 - \xi_2\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $K$  es Lipschitziana con constante de Lipschitz  $L_K = M^2L(\Gamma + 1)\|B^*\|\|L_{\mathcal{B}_\tau}^{-1}\|\tau$ , y la hipótesis (3.19) implica que  $L_K < 1$ . Así, del Teorema 3.2.1 obtenemos que  $\tilde{\mathcal{B}}_f^\tau = I + K$  es un homeomorfismo y en consecuencia el operador  $\mathcal{B}_f^\tau$  es sobreyectivo; es decir,

$$\mathcal{B}_f^\tau(L^2(0, \tau; U)) = \text{Rango}(\mathcal{B}_f^\tau) = Z.$$

■

**Corolario 3.2.1.** *Bajo las hipótesis del Teorema 3.2.2 un control que transfiera el estado inicial  $z_0$  a un estado final  $z_1$  está dado por*

$$u = \mathcal{B}^{\tau*} L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1} (I + K)^{-1} (z_1 - T(\tau)z_0).$$

Demostración

De la definición 3.2.1 se sigue que para  $z_0, z_1 \in Z$  existe  $u \in L^2(0, \tau; U)$  tal que  $z(\tau) = z_1$ . Entonces

$$z_1 = z(\tau) = T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau-s)Bu(s)ds + \int_0^\tau T(\tau-s)f(z_u(s), u(s))ds.$$

Así,

$$z_1 - T(\tau)z_0 = \mathcal{B}_f^\tau u.$$

Luego,

$$\begin{aligned} u &= (\mathcal{B}_f^\tau)^{-1} (z_1 - T(\tau)z_0) \\ &= (\tilde{\mathcal{B}}_f^\tau \circ S^{-1})^{-1} (z_1 - T(\tau)z_0) = S \circ (I + K)^{-1} (z_1 - T(\tau)z_0). \end{aligned}$$

De donde,  $u = \mathcal{B}^{\tau*} L_{\mathcal{B}^\tau}^{-1} (I + K)^{-1} (z_1 - T(\tau)z_0)$ . ■

Ahora, el siguiente corolario es inmediato de lo anterior.

**Corolario 3.2.2.** *El operador  $\Gamma : Z \rightarrow Z$  definido por  $\Gamma = S \circ (I + K)^{-1}$  es una inversa por la derecha de el operador no lineal  $\mathcal{B}_f^\tau$ . Es decir,  $\mathcal{B}_f^\tau \circ \Gamma = I$ .*

### 3.3. Controlabilidad Aproximada para Sistemas Semilineales Continuos.

En esta sección estudiaremos la controlabilidad aproximada de la ecuación diferencial no lineal (3.11) bajo ciertas condiciones sobre  $f$  y suponiendo la controlabilidad aproximada de la ecuación (3.1) sobre el intervalo  $[0, \tau]$  para algún  $\tau > 0$ .

Como mencionamos en la sección anterior, para  $z_0 \in Z$ , la ecuación (3.11) tiene una única solución dada por (3,12).

**Definición 3.3.1. (Controlabilidad Aproximada)** *El sistema (3.11) se dice que es **aproximadamente controlable** sobre  $[0, \tau]$  si para cada  $z_0, z_1 \in Z$ ,  $\varepsilon > 0$  existe  $u \in L^2(0, \tau; U)$  tal que la solución moderada  $z(t)$  de (3.11) correspondiente a  $u$  verifica:*

$$\|z(\tau) - z_1\| < \varepsilon.$$

Consideremos el operador no lineal dado por (3.13).

Luego, la siguiente proposición es una caracterización de la controlabilidad aproximada del sistema no lineal (3.11).

**Proposición 3.3.1.** *El sistema (3.11) es aproximadamente controlable sobre el intervalo  $[0, \tau]$  para algún  $\tau > 0$  si, y sólo si,  $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}_f^\tau)} = Z$ .*

Demostración

Supongamos que (3.11) es aproximadamente controlable, entonces para  $\varepsilon > 0$ ,  $z, z_0, z_1$  en  $Z$ , tales que  $z_1 = T(0)z_0 + z$ , existe  $u \in L^2(0, \tau, U)$  con  $z_u(0) = z_0$  y  $\|z_u(t_0) - z_1\| < \varepsilon$ . Así,

$$z_u(\tau) = T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau - s)[Bu(s) + f(z_u(s), u(s))]ds.$$

Por lo tanto,

$$\|\mathcal{B}_f^\tau u - z\| = \|z_u(\tau) - z_1\| < \varepsilon,$$

lo cual implica que  $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}_f^\tau)} = Z$ .

Supongamos ahora que  $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}_f^\tau)} = Z$ . Sea  $z \in Z$  tal que  $z = z_1 - T(\tau)z_0$  con  $z_0, z_1$  en  $Z$ . Entonces, existe un control  $u$  tal que  $\|\mathcal{B}_f^\tau u - z\| < \varepsilon$ . Así,

$$\|\mathcal{B}_f^\tau u + T(\tau)z_0 - z_1\| = \|z_u(\tau) - z_1\| < \varepsilon.$$

Luego, hemos obtenido una solución  $z_u(\cdot)$  de (3.11) tal que  $z_u(0) = z_0$  y  $\|z_u(\tau) - z_1\| < \varepsilon$ ; lo cual nos permite concluir que (3.11) es aproximadamente controlable. ■

Ahora, si definimos el operador  $F : L^2(0, \tau, U) \rightarrow Z$  por

$$F(u) = \int_0^\tau T(\tau - t)f(z(t), u(t)), \quad (3.23)$$

entonces

$$\mathcal{B}_f^\tau u = \mathcal{B}^\tau u + Fu. \quad (3.24)$$

Supongamos que  $f$  es una función tal que se satisface lo siguiente

$$\langle F \circ \mathcal{B}^{\tau*} z, z \rangle > 0, \quad \forall z \in Z, \quad z \neq 0. \quad (3.25)$$

Entonces obtenemos el siguiente resultado:

**Lema 3.3.1.** *Si el sistema lineal (3.1) es aproximadamente controlable y se cumple la condición (3.25), entonces el sistema no lineal (3.11) es aproximadamente controlable.*

*Demostración*

Como (3.1) es aproximadamente controlable se sigue del Teorema 3.1.1 parte (b) – (ii) que

$$\langle L_{\mathcal{B}^\tau} z, z \rangle > 0, \quad \forall z \in Z, \quad z \neq 0.$$

Supongamos que  $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}_f^\tau)} \subsetneq Z$ . Por el Teorema de Hahn-Banach se tiene que existe  $z_0 \in Z$ ,  $z_0 \neq 0$ , tal que  $\langle \mathcal{B}_f^\tau u, z_0 \rangle = 0, \forall u \in L^2(0, \tau, U)$ . En particular,  $\langle \mathcal{B}_f^\tau \circ \mathcal{B}^{\tau*} z_0, z_0 \rangle = 0$ . Luego,

$$0 = \langle \mathcal{B}_f^\tau \circ \mathcal{B}^{\tau*} z_0, z_0 \rangle = \langle L_{\mathcal{B}^\tau} z_0, z_0 \rangle + \langle F \circ \mathcal{B}^{\tau*} z_0, z_0 \rangle > 0.$$

Esta contradicción prueba que  $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}_f^\tau)} = Z$ . Así, por la Proposición 3.3.1, se tiene que (3.11) es aproximadamente controlable. ■

Otro resultado que muestra que la controlabilidad aproximada de (3.1) se preserva bajo cierta perturbación no lineal es el siguiente.

**Lema 3.3.2.** *Si el sistema lineal (3.1) es aproximadamente controlable,  $\text{Rango}(F)$  es relativamente compacto y para todo  $z \in Z$ ,  $\alpha > 0$  existe  $u_\alpha \in L^2(0, \tau, U)$  tal que*

$$u_\alpha = \mathcal{B}^{\tau*}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}(z - F(u_\alpha)), \quad (3.26)$$

*entonces el sistema no lineal (3.11) es aproximadamente controlable.*

*Demostración*

Como (3.1) es aproximadamente controlable, se tiene, del Teorema 3.1.1 parte (b) – (ii), que

$$\langle L_{\mathcal{B}^\tau} z, z \rangle > 0, \quad \forall z \in Z, \quad z \neq 0.$$

De donde se sigue que

$$\|z\| \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})z\| \geq \langle z, (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})z \rangle > \alpha \|z\|^2, z \neq 0.$$

Así,  $\|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})z\| > \alpha \|z\|$ ,  $z \neq 0$ . Por tanto,  $\alpha \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}z\| < \|z\|$ ,  $z \neq 0$  y entonces

$$\sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}\| \leq 1. \quad (3.27)$$

Por otro lado, del Lema 1.4.2 se tiene que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}z = 0, \quad \forall z \in Z. \quad (3.28)$$

Queremos probar que  $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}_f^\tau)} = Z$ , es decir, dado  $z \in Z$ , existe  $\{u_\alpha\} \subset L^2(0, \tau, U)$  tal que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{B}_f^\tau u_\alpha = z. \quad (3.29)$$

De (3.24) se sigue que (3.29) es equivalente a probar que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} [\mathcal{B}^\tau u_\alpha + F(u_\alpha)] = z,$$

ó

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{B}^\tau u_\alpha = z - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} F(u_\alpha).$$

Ahora, de la hipótesis (3.26) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\tau u_\alpha &= \mathcal{B}^\tau \mathcal{B}^{\tau*} (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} (z - F(u_\alpha)) \\ &= L_{\mathcal{B}^\tau} (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} (z - F(u_\alpha)) \\ &= [(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} - \alpha I (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}] (z - F(u_\alpha)) \\ &= [I - \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1}] (z - F(u_\alpha)) \\ &= z - F(u_\alpha) - \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} (z - F(u_\alpha)). \end{aligned}$$

Así,  $\mathcal{B}^\tau u_\alpha + F(u_\alpha) = z - \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} (z - F(u_\alpha))$ . Luego, (3.29) se cumple si, y sólo si,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} (z - F(u_\alpha)) = 0,$$

es decir,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} z - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} F(u_\alpha) = 0. \quad (3.30)$$

El primer límite en (3.30) es cero por (3.28).

Ahora, como  $\text{Rango}(F)$  es relativamente compacto, podemos suponer, sin perder generalidad, que existe  $y \in Z$  tal que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} F(u_\alpha) = y. \quad (3.31)$$

Luego,

$$\alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} F(u_\alpha) = \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} y + \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^\tau})^{-1} (F(u_\alpha) - y).$$

Tomando en cuenta (3.27), (3.28), (3.31) y la expresión anterior, obtenemos que el segundo límite en (3.30) es cero. Así, se satisface (3.29) y por lo tanto el sistema no lineal (3.11) es aproximadamente controlable. ■

**Observación.** En el caso en que el sistema lineal (3.1) es exactamente controlable y  $F$  es, además, una función lipschitziana con constante de lipschitz suficientemente pequeña, entonces (3.26) se satisface y así se tendría la conclusión del Lema 3.3.2 anterior.

## Capítulo 4

# Controlabilidad de Sistemas Semilineales Discretos

Una de las principales áreas de aplicación para los métodos de control discretos es el control de sistemas continuos, es decir, aquellos sistemas modelados por ecuaciones diferenciales y no por ecuaciones en diferencias. La razón para esto es que mientras la mayoría de los sistemas físicos están modelados por ecuaciones diferenciales, las leyes de control son a menudo implementadas en un computador digital, cuyas entradas y salidas son sucesiones. Una aproximación común para diseños de control en este caso es obtener un modelo de ecuación en diferencias que aproxima al sistema continuo a ser controlado.

En el presente capítulo estudiamos la controlabilidad de ecuaciones en diferencias, sobre espacios de dimensión infinita, de la forma

$$z(n+1) = A(n)z(n) + B(n)u(n) + f(z(n), u(n)), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad z(0) = z_0, \quad (4.1)$$

donde  $z(n) \in Z$ ,  $u(n) \in U$ ,  $Z$  y  $U$  son espacios de Hilbert,  $A \in l^\infty(\mathbb{N}, L(Z))$ ,  $B \in l^\infty(\mathbb{N}, L(U, Z))$ ,  $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ ,  $L(U, Z)$  denota el espacio de todos los operadores lineales acotados de  $U$  a  $Z$  y  $L(Z, Z) = L(Z)$ . El término no lineal  $f : Z \times U \rightarrow Z$  es una función adecuada.

En primer lugar, damos caracterizaciones que permiten estudiar la controlabilidad, tanto exacta como aproximada, de la ecuación lineal, es decir, de ecuaciones de la forma (4.1) sin el término no lineal  $f(z, u)$ . En especial, mostramos un teorema análogo al Teorema 3.1.1 del capítulo 3, para la ecuación en diferencias lineal

$$z(n+1) = A(n)z(n) + B(n)u(n), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad z(0) = z_0. \quad (4.2)$$

Como un segundo paso consideraremos la siguiente ecuación en diferencias lineal

$$z(n+1) = T(n)z(n) + B(n)u(n), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad z(n) \in Z, \quad u(n) \in U, \quad (4.3)$$

donde  $Z, U$  son espacios de Hilbert,  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $B \in l^\infty(\mathbb{N}, L(U, Z))$ ,  $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$  y  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es un  $C_0$ -semigrupo dado por:

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j z, \quad z \in Z, \quad t \geq 0,$$

de acuerdo al Lema 1.1.1. Particularmente, damos caracterizaciones que permiten reducir el estudio de la controlabilidad de la ecuación lineal (4.3), al estudio de la controlabilidad de una familia de sistemas, usando para ello las técnicas que se conocen del capítulo 3 para la ecuación de evolución continua (3.1), adaptándolas al caso discreto, junto con herramientas propias de las ecuaciones en diferencias de la forma (4.3). En tercer lugar, estudiamos la controlabilidad, tanto exacta como aproximada, de la ecuación no lineal de la forma (4.1). Para ser más específicos, suponiendo que el sistema lineal (4.2) es exactamente controlable y que  $f$  es una función Lipschitziana con constante de lipschitz suficientemente pequeña, mostraremos que el sistema (4.1) es exactamente controlable, es decir, la controlabilidad exacta de la ecuación lineal se preserva bajo la perturbación no lineal  $f$ . Y, si el sistema lineal (4.2) es aproximadamente controlable, dando ciertas condiciones para  $f$ , mostraremos que el sistema no lineal (4.1) es aproximadamente controlable.

La motivación para estudiar, en este trabajo, la controlabilidad para ecuaciones en diferencias, nos la da el trabajo de Sasu [52].

Allí, la autora se concentra en el estudio de la estabilizabilidad de la ecuación (4.2), más que en la controlabilidad, particularmente su resultado principal es el siguiente: “*Si el sistema (4.2) es completamente estabilizable y  $A$  es sobreyectivo, entonces (4.2) es exactamente controlable*”.

Notese que ese resultado no caracteriza completamente la controlabilidad exacta de la ecuación (4.2), es decir, no es una condición necesaria y

suficiente; pues no es cierto que un sistema en diferencias que sea exactamente controlable, sea estabilizable y el operador  $A$  sea sobreyectivo. Por otra parte, en este trabajo de Sasu, no se estudia la controlabilidad de la ecuación semilineal (4.1), algo común que observamos al revisar la poca bibliografía existente sobre controlabilidad de ecuaciones en diferencias. Es por ello que nos motivamos a estudiar la controlabilidad de las ecuaciones en diferencias (4.2) y (4.1). Algunos de los resultados presentados en este capítulo se encuentran en menor detalle en [43], [44], [45].

## 4.1. Controlabilidad para Sistemas Lineales Discretos.

En esta sección presentamos condiciones necesarias y suficientes para estudiar la controlabilidad exacta y aproximada de la siguiente ecuación en diferencias lineal

$$z(n+1) = A(n)z(n) + B(n)u(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad z(0) = z_0, \quad (4.4)$$

donde  $z(n) \in Z$ ,  $u(n) \in U$ ,  $Z$ ,  $U$  son espacios de Hilbert,  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $A \in l^\infty(\mathbb{N}, L(Z))$ ,  $B \in l^\infty(\mathbb{N}, L(U, Z))$ ,  $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ .

Para este fin, daremos primero las definiciones de controlabilidad exacta y aproximada para el sistema (4.4).

Considere el conjunto  $\Delta = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \geq n\}$  y sea  $\Phi = \{\Phi(m, n)\}_{(m, n) \in \Delta}$  el operador de evolución asociado a  $A$ , i.e.,

$$\Phi(m, n) = \begin{cases} A(m-1) \cdots A(n), & m > n, \\ I, & m = n, \end{cases}$$

donde  $I$  es el operador identidad en el espacio de Hilbert  $Z$ .

Entonces, la solución de (4.4) está dada por la fórmula de variación de constantes discreta:

$$z(n) = \Phi(n, 0)z(0) + \sum_{k=1}^n \Phi(n, k)B(k-1)u(k-1), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.5)$$

**Definición 4.1.1. (Controlabilidad Exacta)** *El sistema (4.4) se dice que es **exactamente controlable** si existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $z_0, z_1 \in Z$  existe  $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$  para el cual  $z(0) = z_0$  y  $z(n_0) = z_1$ .*

**Definición 4.1.2. (Controlabilidad Aproximada)** *El sistema (4.4) se dice que es **aproximadamente controlable** si existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $z_0, z_1 \in Z$ ,  $\varepsilon > 0$  existe  $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$  para el cual  $z(0) = z_0$  y  $\|z(n_0) - z_1\| < \varepsilon$ .*

En estos casos decimos que (4.4) es exactamente (resp. aproximadamente) controlable para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

A continuación presentaremos una versión discreta del Teorema 3.1.1 del capítulo 3 para la ecuación controlada en diferencias (4.4) en espacios de Hilbert. Para ello daremos las siguientes definiciones.

**Definición 4.1.3.** *Para el sistema (4.4) definimos los siguientes conceptos:*

a) **La aplicación de controlabilidad**,  $\mathcal{B}^{n_0} : l^2(\mathbb{N}, U) \rightarrow Z$  (para  $n_0 \in \mathbb{N}$ ), es definida como sigue

$$\mathcal{B}^{n_0} u = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n, k) B(k-1) u(k-1). \quad (4.6)$$

b) **La aplicación gramman** (para  $n_0 \in \mathbb{N}$ ) es definida por  $L_{\mathcal{B}^{n_0}} = \mathcal{B}^{n_0} \mathcal{B}^{n_0*}$ .

**Proposición 4.1.1.** *El adjunto  $\mathcal{B}^{n_0*}$  del operador  $\mathcal{B}^{n_0}$  está dado por  $\mathcal{B}^{n_0*} : Z \rightarrow l^2(\mathbb{N}, U)$*

$$(\mathcal{B}^{n_0*} z)(k-1) = \begin{cases} B^*(k-1) \Phi^*(n_0, k) z, & k \leq n_0, \\ 0, & k > n_0, \end{cases} \quad (4.7)$$

y

$$L_{\mathcal{B}^{n_0}} z = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) B(k-1) B^*(k-1) \Phi^*(n_0, k) z, \quad z \in Z. \quad (4.8)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{B}^{n_0} u, z \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) B(k-1) u(k-1), z \right\rangle_{Z, Z} \\
&= \sum_{k=1}^{n_0} \langle \Phi(n_0, k) B(k-1) u(k-1), z \rangle_{Z, Z} \\
&= \sum_{k=1}^{n_0} \langle u(k-1), B^*(k-1) \Phi^*(n_0, k) z \rangle_{U, U} \\
&= \sum_{k=1}^{n_0} \langle u(k-1), B^*(k-1) \Phi^*(n_0, k) z \rangle_{U, U} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \langle u(k-1), 0 \rangle_{U, U} \\
&= \langle u, \mathcal{B}^{n_0*} z \rangle_{l^2(\mathbb{N}, U), l^2(\mathbb{N}, U)}
\end{aligned}$$

lo cual prueba (4.7). Más aún, (4.8) se sigue inmediatamente de la definición 4.1.3 y de (4.7).  $\blacksquare$

**Teorema 4.1.1.** (a) *La ecuación (4.4) es exactamente controlable para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$  si, y sólo si, una de las siguientes afirmaciones vale:*

- (i)  $\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0}) = Z$ .
- (ii) Existe  $\gamma > 0$  tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle \geq \gamma \|z\|_Z^2, \quad \forall z \in Z.$$

- (iii) Existe  $\gamma > 0$  tal que

$$\|\mathcal{B}^{n_0*} z\|_{l^2(\mathbb{N}, U)} \geq \gamma \|z\|_Z, \quad \forall z \in Z.$$

(b) *La ecuación (4.4) es aproximadamente controlable para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$  si, y sólo si, una de las siguientes afirmaciones vale:*

- (i)  $\text{Ker}(\mathcal{B}^{n_0*}) = \{0\}$ .
- (ii)  $\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle > 0$ ,  $z \neq 0$  en  $Z$ .
- (iii)  $B^*(k-1) \Phi^*(n_0, k) z = 0 \Rightarrow z = 0$ ,  $k \leq n_0$ .
- (iv)  $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0})} = Z$ .

Demostración

(a) Puesto que  $L_{\mathcal{B}^{n_0}} = \mathcal{B}^{n_0} \mathcal{B}^{n_0*}$ , tenemos que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle = \langle \mathcal{B}^{n_0} \mathcal{B}^{n_0*} z, z \rangle = \langle \mathcal{B}^{n_0*} z, \mathcal{B}^{n_0*} z \rangle = \|\mathcal{B}^{n_0*} z\|^2, \forall z \in Z, \quad (4.9)$$

lo cual muestra la equivalencia entre (ii) y (iii).

Si (ii) vale, entonces  $L_{\mathcal{B}^{n_0}}$  es invertible y acotada. Así,  $\text{Rango}(L_{\mathcal{B}^{n_0}}) = \text{Dom}((L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}) = Z$ . Del hecho de que  $L_{\mathcal{B}^{n_0}} = \mathcal{B}^{n_0} \mathcal{B}^{n_0*}$  se obtiene  $\text{Rango}(L_{\mathcal{B}^{n_0}}) \subset \text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0})$ . Así  $\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0}) = Z$ , con lo cual se prueba (i).

Supongamos que  $\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0}) = Z$ . Entonces, probaremos que (iii) se cumple. Primero, supongamos que  $\mathcal{B}^{n_0}$  es inyectiva; entonces  $(\mathcal{B}^{n_0})^{-1} \in L(Z, l^2(\mathbb{N}, U))$  y  $(\mathcal{B}^{n_0*})^{-1} \in L(l^2(\mathbb{N}, U), Z)$ . Por tanto, existe  $\beta > 0$  tal que

$$\|(\mathcal{B}^{n_0*})^{-1} u\|_Z \leq \beta \|u\|_{l^2(\mathbb{N}, U)}, \quad \forall u \in l^2(\mathbb{N}, U),$$

y con  $z = (\mathcal{B}^{n_0*})^{-1} u$  obtenemos

$$\|z\|_Z \leq \beta \|\mathcal{B}^{n_0*} z\|_{l^2(\mathbb{N}, U)},$$

lo cual es equivalente a (iii) considerando  $\gamma = 1/\beta$ .

Para el caso general, definamos el espacio de Hilbert  $X = [\text{Ker}(\mathcal{B}^{n_0})]^\perp$  dotado con la norma definida por  $\|u\|_X = \|u\|_{l^2}$ .

Luego, definimos  $\widehat{\mathcal{B}}^{n_0} u = \mathcal{B}^{n_0} u$ ,  $u \in X$ , lo cual hace que  $\widehat{\mathcal{B}}^{n_0}$  sea una aplicación biyectiva sobre  $X$ , y aplicando nuestro argumento de arriba a  $\widehat{\mathcal{B}}^{n_0}$  se muestra que existe  $\beta > 0$  tal que para todo  $z \in Z$

$$\beta \|\widehat{\mathcal{B}}^{n_0*} z\|_X \geq \|z\|_Z.$$

Del Lema A.3.30 de Curtain & Zwart [18], el Teorema de Representación de Riesz y el Teorema de Hahn Banach deducimos que

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathcal{B}}^{n_0*} z\| &= \sup_{\{u \in X: \|u\| \leq 1\}} \langle u, \widehat{\mathcal{B}}^{n_0*} z \rangle = \sup_{\{u \in X: \|u\| \leq 1\}} \langle \widehat{\mathcal{B}}^{n_0} u, z \rangle \\ &= \sup_{\{u \in X: \|u\| \leq 1\}} \langle \mathcal{B}^{n_0} u, z \rangle = \sup_{\{u \in l^2(\mathbb{N}, U): \|u\| \leq 1\}} \langle \mathcal{B}^{n_0} u, z \rangle \\ &= \|\mathcal{B}^{n_0*} z\|_{l^2}. \end{aligned}$$

En consecuencia, tenemos que

$$\|\mathcal{B}^{n_0*}z\|_{l^2} = \|\widehat{\mathcal{B}}^{n_0*}z\|_X \geq \frac{1}{\beta}\|z\|_Z.$$

Una vez más, con  $\gamma = 1/\beta$ , tenemos (iii).

Ahora, probaremos que la controlabilidad exacta de (4.4) implica (i). Supongamos que (4.4) es exactamente controlable para algún  $n_0$ . Dado  $z \in Z$  podemos encontrar  $z_0$  y  $z_1$  en  $Z$  tales que

$$z_1 = \Phi(n_0, 0)z_0 + z. \quad (4.10)$$

Entonces existe  $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$  tal que  $z_0(0) = z_0$  and  $z_u(n_0) = z_1$ . Así,

$$z_1 = z_u(n_0) = \Phi(n_0, 0)z_0 + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1). \quad (4.11)$$

Sustituyendo (4.10) en (4.11), obtenemos

$$\Phi(n_0, 0)z_0 + z = \Phi(n_0, 0)z_0 + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1).$$

Entonces,

$$z = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1) = \mathcal{B}^{n_0}u.$$

Así,  $\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0}) = Z$ .

A continuación, mostraremos que (i) implica la controlabilidad exacta de (4.4). Supongamos que  $\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0}) = Z$ . Consideremos  $z$  en  $Z$  tal que

$$z = z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0, \quad (4.12)$$

con  $z_0, z_1$  in  $Z$ . Entonces existe un control  $u$  tal que

$$\mathcal{B}^{n_0}u = z. \quad (4.13)$$

Luego, sustituyendo (4.12) en (4.13), obtenemos

$$z = z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0 = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1).$$

Por tanto,

$$z_u(n_0) = \Phi(n_0, 0)z_0 + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1).$$

Así, obtenemos una solución  $z_u(\cdot)$  de (4.4) tal que  $z_u(n_0) = z_1$  y  $z_u(0) = z_0$ , es decir, (4.4) es exactamente controlable. Esto concluye la prueba de la parte (a).

- (b) De la proposición 4.1.1 se sigue que (i) y (iii) son equivalentes, y (4.9) muestra que (i) y (ii) son equivalentes. Sabemos que

$$(\text{Ker}(\mathcal{B}^{n_0*}))^\perp = \overline{\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0})}.$$

De esto se sigue que:  $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0})} = Z$  sii  $(\text{Ker}(\mathcal{B}^{n_0*}))^\perp = Z$  sii  $\text{Ker}(\mathcal{B}^{n_0*}) = \{0\}$ , lo cual muestra que (i) y (iv) son equivalentes.

Ahora, supongamos que (4.4) es aproximadamente controlable; entonces para  $\varepsilon > 0$ ,  $z, z_0, z_1$  en  $Z$ , tales que  $z_1 = \Phi(n_0, 0)z_0 + z$ , existe  $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$  con  $z_u(0) = z_0$  y  $\|z_u(n_0) - z_1\| < \varepsilon$ . Así,

$$z_u(n_0) = \Phi(n_0, 0)z_0 + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}^{n_0}u - z\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1) - z \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1) + \Phi(n_0, 0)z_0 - z_1 \right\| \\ &= \|z_u(n_0) - z_1\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual implica (iv).

Supongamos que  $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0})} = Z$ . Sea  $z \in Z$  tal que  $z = z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0$  con  $z_0, z_1$  en  $Z$ . Entonces, existe un control  $u$  tal que  $\|\mathcal{B}^{n_0}u - z\| < \varepsilon$ . Así,

$$\|\mathcal{B}^{n_0}u + \Phi(n_0, 0)z_0 - z_1\| = \|z_u(n_0) - z_1\| < \varepsilon.$$

Luego, hemos obtenido una solución  $z_u(\cdot)$  de (4.4) tal que  $z_u(0) = z_0$  y  $\|z_u(n_0) - z_1\| < \varepsilon$ ; esto nos permite concluir que (4.4) es aproximadamente controlable y termina la prueba de la parte (b). ■

**Lema 4.1.1.** *La ecuación (4.4) es exactamente controlable para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$  si, y sólo si,  $L_{\mathcal{B}^{n_0}}$  es invertible. Más aún, en este caso  $S = \mathcal{B}^{n_0*} L_{\mathcal{B}^{n_0}}^{-1}$  es una inversa por la derecha de  $\mathcal{B}^{n_0}$  y un control  $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$  que lleva el estado inicial  $z_0$  a un estado final  $z_1$  está dado por:*

$$u = \mathcal{B}^{n_0*} L_{\mathcal{B}^{n_0}}^{-1} (z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0). \quad (4.14)$$

*Demostración*

Supongamos que el sistema (4.4) es exactamente controlable. Entonces, del Teorema 4.1.1 parte (a) – (iii), existe  $\gamma > 0$  tal que  $\|\mathcal{B}^{n_0*} z\| \geq \gamma \|z\|$ , para todo  $z \in Z$ , es decir,

$$\|\mathcal{B}^{n_0*} z\|^2 \geq \gamma^2 \|z\|^2, \quad z \in Z,$$

equivalentemente,

$$\langle \mathcal{B}^{n_0} \mathcal{B}^{n_0*} z, z \rangle \geq \gamma^2 \|z\|^2, \quad z \in Z,$$

y,

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle \geq \gamma^2 \|z\|^2, \quad z \in Z. \quad (4.15)$$

Esto implica que  $L_{\mathcal{B}^{n_0}}$  es inyectiva. Ahora, probaremos que  $L_{\mathcal{B}^{n_0}}$  es sobreyectiva. Es decir,

$$\mathcal{R}(L_{\mathcal{B}^{n_0}}) = \text{Rango}(L_{\mathcal{B}^{n_0}}) = Z.$$

Por reducción al absurdo, supongamos que  $\mathcal{R}(L_{\mathcal{B}^{n_0}})$  está estrictamente contenido en  $Z$ . Por otro lado, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (4.15) obtenemos

$$\|L_{\mathcal{B}^{n_0}} z\|_{l^2} \geq \gamma^2 \|z\|, \quad z \in Z,$$

lo cual implica que  $\mathcal{R}(L_{\mathcal{B}^{n_0}})$  es cerrado. De aquí, aplicando el Teorema de Hahn Banach, podemos probar que  $\text{Rango}(L_{\mathcal{B}^{n_0}}) = Z$ . En consecuencia,  $L_{\mathcal{B}^{n_0}}$  es una biyección y del Teorema de la Aplicación Abierta,  $L_{\mathcal{B}^{n_0}}^{-1}$  es un operador lineal acotado.

Ahora supongamos que  $L_{\mathcal{B}^{n_0}}$  es invertible. Entonces, del Teorema 4.1.1 es suficiente probar que  $\mathcal{R}(\mathcal{B}^{n_0}) = Z$ . Para  $z \in Z$  definimos el control  $u_z \in l^2(\mathbb{N}, U)$  como sigue

$$u_z = Sz = \mathcal{B}^{n_0*} L_{\mathcal{B}^{n_0}}^{-1} z.$$

Entonces  $\mathcal{B}^{n_0} u_z = z$ . El resto de la prueba se sigue de aquí. ■

Un par de caracterizaciones más para la controlabilidad exacta del sistema (4.4) están dadas en los siguientes Lemas.

**Lema 4.1.2.** *El sistema (4.4) es exactamente controlable para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$  si, y sólo si,*

$$\sup_{\alpha \in (0,1]} \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}\| < \infty. \quad (4.16)$$

*Demostración*

Supongamos que (4.4) es exactamente controlable. Entonces por el Teorema 4.1.1 parte (a) – (ii), se tiene que existe  $\gamma > 0$  tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle \geq \gamma \|z\|_Z^2, \quad \forall z \in Z.$$

Luego, para todo  $z \in Z$  y  $\alpha \geq 0$ , tenemos

$$\langle z, (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}}) z \rangle = \langle z, \alpha z \rangle + \langle z, L_{\mathcal{B}^{n_0}} z \rangle = \alpha \|z\|^2 + \langle z, L_{\mathcal{B}^{n_0}} z \rangle \geq (\alpha + \gamma) \|z\|^2,$$

es decir,

$$\langle z, (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}}) z \rangle \geq (\alpha + \gamma) \|z\|^2.$$

Usando la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$\|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}}) z\| \geq (\alpha + \gamma) \|z\|.$$

Así,

$$(\alpha + \gamma) \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} y\| \leq \|y\|,$$

de donde se sigue que, para todo  $\alpha \geq 0$ ,

$$\|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha + \gamma} \leq \frac{1}{\gamma}.$$

Por tanto,  $\|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}\|$  es acotada como función de  $\alpha \geq 0$  y así se tiene la validez de (4.16).

Recíprocamente, supongamos que vale (4.16). Esto implica que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}$  existe y es finito. En efecto, sabemos que  $(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} = R(\alpha I, -L_{\mathcal{B}^{n_0}})$  y, la identidad del resolvente,

$$R(\alpha I, -L_{\mathcal{B}^{n_0}}) - R(\beta I, -L_{\mathcal{B}^{n_0}}) = (\beta - \alpha)R(\alpha I, -L_{\mathcal{B}^{n_0}})R(\beta I, -L_{\mathcal{B}^{n_0}}),$$

junto con (4.16), muestran que  $\{R(\alpha I, -L_{\mathcal{B}^{n_0}})\}$  es una sucesión de Cauchy de operadores lineales acotados. Consideremos

$$S = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} R(\alpha I, -L_{\mathcal{B}^{n_0}}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}.$$

Luego,

$$L_{\mathcal{B}^{n_0}} \left( \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} \right) = L_{\mathcal{B}^{n_0}} S.$$

Entonces,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}} - \alpha I)(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} = L_{\mathcal{B}^{n_0}} S,$$

es decir,

$$I - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} = L_{\mathcal{B}^{n_0}} S.$$

Pero la condición (4.16) implica que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} = 0.$$

Así, para todo  $z \in Z$ , se tiene que

$$z = L_{\mathcal{B}^{n_0}} S z = \mathcal{B}^{n_0} \mathcal{B}^{n_0*} S z.$$

Por tanto  $\mathcal{B}^{n_0}$  es sobreyectivo, y en consecuencia (4.4) es exactamente controlable por el Teorema 4.1.1 parte (a) – (i).  $\blacksquare$

**Proposición 4.1.2.** *El sistema (4.4) es exactamente controlable para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$  si, y sólo si,*

$$\sup_{\alpha > 0} \alpha \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}\| < 1. \quad (4.17)$$

Demostración

Supongamos que (4.4) es exactamente controlable para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ , entonces por el Teorema 4.1.1 parte (a) – (ii) existe  $\gamma > 0$  tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle \geq \gamma \|z\|^2, \quad \forall z \in Z.$$

Luego, para  $z \in Z$  se tiene que

$$\langle (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}}) z, z \rangle > (\alpha + \gamma) \|z\|^2,$$

y, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene

$$\|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}}) z\| > (\alpha + \gamma) \|z\|,$$

así

$$(\alpha + \gamma) \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z\| < \|z\|.$$

Por tanto

$$0 < \sup_{\alpha > 0} \alpha \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}\| < \sup_{\alpha > 0} (\alpha + \gamma) \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}\| \leq 1.$$

Recíprocamente, supongamos que (4.17) es cierto, entonces

$$\mathcal{B}^{n_0} \mathcal{B}^{n_0*} = (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}}) - \alpha I,$$

así

$$\mathcal{B}^{n_0} \mathcal{B}^{n_0*} (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} = I - \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1},$$

de aquí, haciendo uso del Teorema 3.2.1, tenemos que  $\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0}) = Z$ , es decir, (4.4) es exactamente controlable. ■

Con respecto a la controlabilidad aproximada de la ecuación en diferencias lineal (4.4), tenemos las siguientes caracterizaciones.

**Lema 4.1.3.** *La ecuación (4.4) es aproximadamente controlable para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$  si, y sólo si,  $\text{Rango}(L_{\mathcal{B}^{n_0}}) = Z$ .*

Demostración

Supongamos que el sistema (4.4) es aproximadamente controlable para algún  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ . Entonces, del Teorema 4.1.1 parte (b) – (ii) tenemos que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle > 0, \quad \forall z \in Z, \quad z \neq 0. \quad (4.18)$$

Por reducción al absurdo, supongamos que

$$\overline{\text{Rango}(L_{\mathcal{B}^{n_0}})} \subsetneq Z.$$

Entonces, del Teorema de Hanh-Banach existe  $z_0 \neq 0$  tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z_0 \rangle = 0, \quad \forall z \in Z.$$

En particular, si ponemos  $z = z_0$ , entonces  $\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z_0, z_0 \rangle = 0$ , lo cual contradice (4.18).

Recíprocamente, supongamos que  $\overline{\text{Rango}(L_{\mathcal{B}^{n_0}})} = \overline{\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0} \mathcal{B}^{n_0*})} = Z$ , así  $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0})} = Z$ . Entonces, del Teorema 4.1.1 tenemos que (4.4) es aproximadamente controlable. ■

**Lema 4.1.4.** *El sistema (4.4) es aproximadamente controlable para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$  si, y sólo si, para cada  $z \in Z$ ,*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z = 0. \quad (4.19)$$

*Más aún, en este caso, una sucesión de controles que transfiere el estado inicial  $z_0$  a una  $\varepsilon$ -vecindad de un estado final  $z_1$  está dada por*

$$u_\alpha = \mathcal{B}^{n_0*} (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} (z_1 - \Phi(n_0, 0) z_0).$$

*Demostración*

Supongamos que el sistema (4.4) es aproximadamente controlable para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Entonces, por el Teorema 4.1.1 parte (b) – (ii), se tiene que, para  $z \neq 0$  en  $Z$

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle > 0. \quad (4.20)$$

Supongamos que existe  $z_0 \in Z$  tal que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z_0 = y_0 \neq 0.$$

Entonces,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha L_{\mathcal{B}^{n_0}} (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z_0 = L_{\mathcal{B}^{n_0}} y_0,$$

y

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha z_0 - \alpha[\alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z_0] = L_{\mathcal{B}^{n_0}} y_0.$$

Es decir,  $L_{\mathcal{B}^{n_0}} y_0 = 0$ , lo cual contradice (4.20). Por tanto, vale (4.19).

Recíprocamente, supongamos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z = 0, \forall z \in Z.$$

Queremos probar que  $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}^{n_0})} = Z$ . Equivalentemente debemos ver que, para todo  $z \in Z$  existe una sucesión de controles  $\{u_\alpha\} \subset l^2$ , tales que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{B}^{n_0} u_\alpha = z.$$

Para todo  $z \in Z$ , definimos la familia de controles

$$u_\alpha = \mathcal{B}^{n_0*}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z,$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{n_0} u_\alpha &= \mathcal{B}^{n_0} \mathcal{B}^{n_0*}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z \\ &= (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}} - \alpha I)(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z \\ &= z - \alpha(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z. \end{aligned}$$

De esto y (4.19) se sigue que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{B}^{n_0} u_\alpha = z.$$

En consecuencia, el sistema (4.4) es aproximadamente controlable. Esto completa la prueba del Lema.  $\blacksquare$

**Corolario 4.1.1.** *La familia de operadores  $\Gamma_\alpha : Z \rightarrow l^2(\mathbb{N}, U)$  definida por*

$$\Gamma_\alpha z = \mathcal{B}^{n_0*}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z, \quad \alpha \in (0, 1],$$

*es una inversa aproximada por la derecha del operador  $\mathcal{B}^{n_0}$ , es decir,*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{B}^{n_0} \Gamma_\alpha = I.$$

## 4.2. Una Ecuación en Diferencias Lineal Particular.

Ahora bien, una forma de obtener Ecuaciones en Diferencias en espacios de Banach es haciendo una discretización en el flujo de una ecuación de

evolución; este método fue usado por Chow & Leiva [10], Henry [29] y Megan, Sasu & Sasu [47], para caracterizar dicotomía exponencial para operadores de evolución y productos cruzados de semiflujos (skew product semiflows). Así que, en la presente sección estudiamos la controlabilidad del sistema

$$z(n+1) = T(n)z(n) + B(n)u(n), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad z(n) \in Z, \quad u(n) \in U, \quad (4.21)$$

donde  $Z, U$  son espacios de Hilbert,  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $B \in l^\infty(\mathbb{N}, L(U, Z))$ ,  $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$  y  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es un  $C_0$ -semigrupo dado por:

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j z, \quad z \in Z, \quad t \geq 0, \quad (4.22)$$

de acuerdo al Lema 1.1.1. Notese que la ecuación (4.21) anterior es la discretización en el flujo del sistema de control gobernado por la ecuación de evolución (3.1).

**Proposición 4.2.1.** *El operador de evolución  $\Phi = \{\Phi(m, n)\}_{(m, n) \in \Delta}$  asociado a la ecuación (4.21), está dado por la fórmula  $\Phi(m, n) = T(\Theta(m, n))$ , donde*

$$\Theta(m, n) = \frac{m^2 - n^2 - m + n}{2} \in \mathbb{N}, \quad m \geq n.$$

Demostración

Sabemos que

$$\Phi(m, n) = T(m-1)T(m-2) \cdots T(n) = T(m-1)T(m-2) \cdots T(m-k),$$

donde  $m = n + k$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \Phi(m, n) &= T(m-1 + m-2 + \cdots + m-k) = T\left(km - \sum_{i=1}^k i\right) \\ &= T\left(km - \frac{k(k+1)}{2}\right) = T\left(\frac{2km - k^2 - k}{2}\right) = T\left(\frac{k(2m-k)-k}{2}\right) \\ &= T\left(\frac{k(m+n)-k}{2}\right) = T\left(\frac{k(m+n-1)}{2}\right) = T\left(\frac{(m-n)(m+n-1)}{2}\right) \\ &= T\left(\frac{m^2 - n^2 - m + n}{2}\right) = T(\Theta(m, n)). \end{aligned}$$

Ahora consideramos de nuevo la hipótesis

$$P_j B B^* = B B^* P_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.23)$$

**Proposición 4.2.2.** *Bajo la hipótesis (4.23) el operador*

$$L_{\mathcal{B}^{n_0}} z = \mathcal{B}^{n_0} \mathcal{B}^{n_0*} z = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) B(k-1) B^*(k-1) \Phi^*(n_0, k) z,$$

puede ser escrito como sigue

$$L_{\mathcal{B}^{n_0}} z = \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z,$$

donde

$$L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} z = \mathcal{B}_j^{n_0} \mathcal{B}_j^{n_0*} z = \sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j \Theta(n_0, k)} B_j B_j^* e^{A_j^* \Theta(n_0, k)} z, \quad z \in \mathcal{R}(P_j),$$

$$y \Theta(n_0, k) = \frac{n_0^2 - k^2 - n_0 + k}{2} \in \mathbb{N}.$$

*Demostración*

De la definición del operador  $L_{\mathcal{B}^{n_0}}$ , la representación (4.22) de  $T(t)$  y la Proposición 4.2.1 obtenemos que

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}^{n_0}} z &= \sum_{k=0}^{n_0} \left( \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j \Theta(n_0, k)} P_j \right) B B^* \left( \sum_{l=1}^{\infty} e^{A_l^* \Theta(n_0, k)} P_l z \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n_0} \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j \Theta(n_0, k)} B_j B_j^* e^{A_j^* \Theta(n_0, k)} P_j z \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n_0} e^{A_j \Theta(n_0, k)} B_j B_j^* e^{A_j^* \Theta(n_0, k)} P_j z \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z. \end{aligned}$$

■

El siguiente Lema es el resultado principal de esta sección.

**Lema 4.2.1.** (a) *El sistema (4.21) es exactamente controlable (para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ ) si, y sólo si, existe  $\gamma > 0$  tal que*

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, P_j z \rangle \geq \gamma \|P_j z\|^2, \quad \forall z \in Z, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

(b) *El sistema (4.21) es aproximadamente controlable (para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ ) si, y sólo si, cada uno de los siguientes sistemas*

$$z(n+1) = e^{A_j n} z(n) + B_j u(n), \quad z(n) \in \mathcal{R}(P_j), \quad n \in \mathbb{N}, j = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.24)$$

*es aproximadamente controlable.*

(c) *El sistema (4.21) es aproximadamente controlable (para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ ) si, y sólo si,*

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, P_j z \rangle > 0, \quad \forall z \neq 0 \text{ en } Z, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

**Demostración**

(a) Supongamos que existe  $\gamma > 0$  tal que  $\langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, P_j z \rangle \geq \gamma \|P_j z\|^2$ .

Entonces

$$\begin{aligned} \langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, \sum_{m=1}^{\infty} P_m z \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j \Theta(n_0, k)} B_j B_j^* e^{A_j^* \Theta(n_0, k)} \right) P_j z, \sum_{m=1}^{\infty} P_m z \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j \Theta(n_0, k)} B_j B_j^* e^{A_j^* \Theta(n_0, k)} P_j z, P_m z \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j \Theta(n_0, k)} B_j B_j^* e^{A_j^* \Theta(n_0, k)} P_j z, P_j z \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, P_j z \rangle \geq \gamma \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j z\|^2 = \gamma \|z\|^2. \end{aligned}$$

Así, (4.21) es exactamente controlable por el Teorema 4.1.1 parte (a) – (ii). Recíprocamente, supongamos que (4.21) es exactamente controlable, entonces por el Teorema 4.1.1 parte (a) – (ii), existe  $\gamma > 0$  tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle \geq \gamma \|z\|^2.$$

En particular,

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, P_j z \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_i^{n_0}} P_i P_j z, P_j z \right\rangle = \langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} P_j z, P_j z \rangle \geq \gamma \|P_j z\|^2,$$

lo cual concluye la prueba de (a).

- (b) Supongamos que (4.21) es aproximadamente controlable y que existe  $j$  tal que

$$z(n+1) = e^{A_j n} z(n) + B_j u(n), \quad z(n) \in \mathcal{R}(P_j), \quad n \in \mathbb{N}$$

no es aproximadamente controlable. Entonces por el Teorema 4.1.1 parte (b) – (iii), existe  $z_j \in \mathcal{R}(P_j)$ ,  $z_j \neq 0$  tal que

$$B_j^* e^{A_j^* \Theta(n,k)} z_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Más aún, puesto que (4.21) es aproximadamente controlable, tenemos

$$B^* T^*(\Theta(n, k)) z = 0 \Rightarrow z = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ahora, si ponemos  $z = P_j z_j = z_j$ , entonces

$$\begin{aligned} B^* T^*(\Theta(n, k)) z &= B^* \sum_{l=1}^{\infty} e^{A_l^* \Theta(n,k)} P_l z \\ &= B^* e^{A_j^* \Theta(n,k)} P_j z_j = (B_j)^* e^{A_j^* \Theta(n,k)} z_j = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que  $z_j = 0$ , y esto es una contradicción. Por tanto, (4.24) es aproximadamente controlable para todo  $j$ .

Recíprocamente, supongamos que (4.24) es aproximadamente controlable para todo  $j$ . Notese que  $L_{\mathcal{B}_j^{n_0}}$  es la aplicación gramman asociada a (4.24). Entonces, por el Teorema 4.1.1 parte (b) – (ii), tenemos que

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, P_j z \rangle > 0, \quad z \neq 0.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, \sum_{m=1}^{\infty} P_m z \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j \Theta(n_0, k)} B_j B_j^* e^{A_j^* \Theta(n_0, k)} \right) P_j z, \sum_{m=1}^{\infty} P_m z \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j \Theta(n_0, k)} B_j B_j^* e^{A_j^* \Theta(n_0, k)} P_j z, P_m z \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j \Theta(n_0, k)} B_j B_j^* e^{A_j^* \Theta(n_0, k)} P_j z, P_j z \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, P_j z \rangle > 0, \quad z \neq 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia, (4.21) es aproximadamente controlable y se prueba (b).

(c) se sigue inmediatamente de (b) y el Teorema 4.1.1 parte (b). ■

### 4.3. Controlabilidad Exacta para Sistemas Semilineales Discretos.

En esta sección estudiaremos la controlabilidad exacta de la ecuación en diferencias no lineal:

$$z(n+1) = A(n)z(n) + B(n)u(n) + f(z(n), u(n)), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad z(0) = z_0, \quad (4.25)$$

donde  $z(n) \in Z$ ,  $u(n) \in U$ ,  $Z$  y  $U$  son espacios de Hilbert,  $A \in l^\infty(\mathbb{N}, L(Z))$ ,  $B \in l^\infty(\mathbb{N}, L(U, Z))$ ,  $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ ,  $L(U, Z)$  denota el espacio de todos los operadores lineales acotados de  $U$  a  $Z$  y  $L(Z, Z) = L(Z)$ . El termino no lineal  $f : Z \times U \rightarrow Z$  es una función continua Lipschitziana. Es decir: para todo  $z_2, z_1 \in Z$  y  $u_1, u_2 \in U$  tenemos que

$$\|f(z_2, u_2) - f(z_1, u_1)\| \leq L\{\|z_2 - z_1\| + \|u_2 - u_1\|\}. \quad (4.26)$$

Supondremos que  $L$  es suficientemente pequeño y que el sistema en diferencias lineal (4.4) es exactamente controlable (para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ ), es decir,  $\mathcal{R}(\mathcal{B}^{n_0}) = Z$ .

Para  $z_0 \in Z$ , la ecuación (4.25) tiene una única solución dada por

$$z(n) = \Phi(n, 0)z(0) + \sum_{k=1}^n \Phi(n, k)[B(k-1)u(k-1) + f(z(k-1), u(k-1))], n \in \mathbb{N}. \quad (4.27)$$

**Definición 4.3.1. (Controlabilidad Exacta)** *El sistema (4.25) se dice que es **exactamente controlable** si existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $z_0, z_1 \in Z$  existe  $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$  para el cual  $z(0) = z_0$  y  $z(n_0) = z_1$ .*

En este caso decimos que (4.25) es exactamente controlable para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Consideremos el siguiente operador no lineal  $\mathcal{B}_f^{n_0} : l^2(\mathbb{N}, U) \rightarrow Z$  definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_f^{n_0} u &= \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1) + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)f(z(k-1), u(k-1)) \\ &= \mathcal{B}^{n_0} u + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k)f(z(k-1), u(k-1)). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Entonces, la siguiente proposición es una caracterización de la controlabilidad exacta del sistema no lineal (4.25).

**Proposición 4.3.1.** *El sistema (4.25) es exactamente controlable para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$  si, y sólo si,  $\mathcal{R}(\mathcal{B}_f^{n_0}) = \text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0}) = Z$ .*

**Demostración**

Supongamos que (4.25) es exactamente controlable sobre para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Dado  $z \in Z$ , podemos encontrar  $z_0, z_1 \in Z$  tales que

$$z_1 = \Phi(n_0, 0)z_0 + z. \quad (4.29)$$

Luego, existe un control  $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$  tal que  $z_u(0) = z_0$  y  $z_u(n_0) = z_1$ . Así,

$$\begin{aligned} z_1 &= z_u(n_0) = \Phi(n_0, 0)z_0 + \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1) + \\ &\quad \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k)f(z_u(k-1), u(k-1)). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Sustituyendo (4.29) en (4.30), obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi(n_0, 0)z_0 + z &= \Phi(n_0, 0)z_0 + \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1) + \\ &\quad \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k)f(z_u(k-1), u(k-1)). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Entonces,

$$z = \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1) + \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k)f(z_u(k-1), u(k-1)) = \mathcal{B}_f^{n_0}u.$$

Así,  $\text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0}) = Z$ .

Supongamos ahora que  $\text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0}) = Z$ . Consideremos  $z \in Z$  tal que

$$z = z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0, \quad (4.32)$$

con  $z_0, z_1 \in Z$ . Entonces existe un control  $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$  tal que

$$\mathcal{B}_f^{n_0}u = z. \quad (4.33)$$

Entonces, sustituyendo (4.32) en (4.33), obtenemos

$$\begin{aligned} z &= z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0 = \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1) + \\ &\quad \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k)f(z_u(k-1), u(k-1)). \end{aligned} \quad (4.34)$$

De donde,

$$\begin{aligned} z_u(n_0) &= \Phi(n_0, 0)z_0 + \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k)B(k-1)u(k-1) + \\ &\quad \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k)f(z_u(k-1), u(k-1)). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Así, hemos obtenido una solución  $z_u(\cdot)$  de (4.25) tal que  $z_u(n_0) = z_1$  y  $z_u(0) = z_0$ , es decir, (4.25) es exactamente controlable para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ . ■

**Lema 4.3.1.** Sean  $u_1, u_2 \in l^2(\mathbb{N}, U)$  y  $z_1, z_2$  las soluciones correspondientes de (4.25). Entonces, vale el siguiente estimado:

$$\|z_1(j) - z_2(j)\|_Z \leq M[\|B\| + L]\sqrt{n_0}e^{MLn_0}\|u_1 - u_2\|_{l^2(\mathbb{N}, U)} \quad (4.36)$$

donde  $j \leq n_0$  y  $M = \sup_{1 \leq j, k \leq n_0} \{\|\Phi(j, k)\|\}$ .

*Demostración*

Sean  $z_1, z_2$  soluciones de (4.25) correspondientes a  $u_1, u_2$  respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \|z_1(j) - z_2(j)\| &= \sum_{k=1}^j \|\Phi(j, k)\| \|B\| \|u_1(k-1) - u_2(k-1)\| \\ &\quad + \sum_{k=1}^j \|\Phi(j, k)\| \|f(z_1(k-1), u_1(k-1)) - f(z_2(k-1), u_2(k-1))\| \\ &\leq M[\|B\| + L] \sum_{k=1}^{j-1} \|u_1(k) - u_2(k)\| + ML \sum_{k=1}^{j-1} \|z_1(k) - z_2(k)\| \\ &\leq M[\|B\| + L]\sqrt{n_0}\|u_1 - u_2\| + ML \sum_{k=1}^{j-1} \|z_1(k) - z_2(k)\|. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Usando la desigualdad de Gronwall Discreta (Lakshmikantham & Tri-giante [32] Corolario 1.6.2) obtenemos

$$\|z_1(j) - z_2(j)\|_Z \leq M[\|B\| + L]\sqrt{n_0}e^{MLn_0}\|u_1 - u_2\|_{l^2(\mathbb{N}, U)}, j \leq n_0. \quad \blacksquare$$

Ahora, formularemos y probaremos el resultado principal de esta sección.

**Teorema 4.3.1.** Si el siguiente estimado vale

$$L_K = ML(\Gamma + 1)\|\mathcal{B}^{n_0*}\| \|L_{\mathcal{B}^{n_0}}^{-1}\| \sqrt{n_0} < 1, \quad (4.38)$$

donde  $\Gamma = M[\|B\| + L]\sqrt{n_0}e^{MLn_0}$ , y el sistema lineal (4.4) es exactamente controlable, entonces el sistema no lineal (4.25) es exactamente controlable para  $n_0$ .

*Demostración*

Queremos probar que

$$\mathcal{B}_f^{n_0}(l^2(\mathbb{N}; U)) = \text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0}) = Z.$$

Pero, de la controlabilidad exacta del sistema lineal (4.4) sabemos, debido al Lema 4.1.1, que el operador  $S = \mathcal{B}^{n_0*} L_{\mathcal{B}^{n_0}}^{-1}$  es una inversa por la derecha de  $\mathcal{B}^{n_0}$ . Entonces, es suficiente probar que el operador  $\tilde{\mathcal{B}}_f^{n_0} = \mathcal{B}_f^{n_0} \circ S$  es sobreyectivo. De la ecuación (4.28) obtenemos la siguiente expresión para este operador

$$\tilde{\mathcal{B}}_f^{n_0} \xi = \xi + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) f(z(k-1), S(\xi)(k-1)). \quad (4.39)$$

Ahora, definamos el operador  $K : Z \rightarrow Z$  por

$$K\xi = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) f(z(k-1), S(\xi)(k-1)), \quad (4.40)$$

donde  $z = z_\xi$  es la solución de (4.25) correspondiente a el control  $u = S(\xi)$ .

Entonces la ecuación (4.39) toma la forma

$$\tilde{\mathcal{B}}_f^{n_0} = I + K. \quad (4.41)$$

Se puede probar que la función  $K$  es globalmente Lipschitz con constante de lipschitz

$$L_K = ML(\Gamma + 1) \|\mathcal{B}^{n_0*}\| \|L_{\mathcal{B}^{n_0}}^{-1}\| \sqrt{n_0},$$

y la suposición (4.38) implica que  $L_K < 1$ . En consecuencia, del Teorema 3.2.1 obtenemos que  $\tilde{\mathcal{B}}_f^{n_0} = I + K$  es un homeomorfismo y así el operador  $\mathcal{B}_f^{n_0}$  es sobreyectivo; es decir,

$$\mathcal{B}_f^{n_0}(l^2(\mathbb{N}; U)) = \text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0}) = Z. \quad \blacksquare$$

**Corolario 4.3.1.** *Bajo la hipótesis del Teorema 4.3.1 un control que envía el estado inicial  $z_0$  a un estado final  $z_1$  está dado por*

$$u = \mathcal{B}^{n_0*} L_{\mathcal{B}^{n_0}}^{-1} (I + K)^{-1} (z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0).$$

**Corolario 4.3.2.** *El operador  $\Gamma : Z \rightarrow Z$  definido por  $\Gamma = S \circ (I + K)^{-1}$  es una inversa por la derecha de el operador no lineal  $\mathcal{B}_f^{n_0}$ . Es decir,  $\mathcal{B}_f^{n_0} \circ \Gamma = I$ .*

## 4.4. Controlabilidad Aproximada para Sistemas Semilineales Discretos.

En esta sección estudiaremos la controlabilidad aproximada de la ecuación en diferencias no lineal (4.25) bajo ciertas condiciones sobre  $f$  y suponiendo la controlabilidad aproximada de la ecuación (4.4) para algún  $n_0$ .

Como mencionamos en la sección anterior, para  $z_0 \in Z$ , la ecuación (4.25) tiene una única solución dada por (4.27).

**Definición 4.4.1. (Controlabilidad Aproximada)** *El sistema (4.25) se dice que es **aproximadamente controlable** si existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $z_0, z_1 \in Z$  y  $\varepsilon > 0$  existe  $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$  tal que  $z(0) = z_0$  y  $\|z(n_0) - z_1\| < \varepsilon$ .*

En este caso decimos que (4.25) es aproximadamente controlable para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Consideremos el siguiente operador no lineal  $\mathcal{B}_f^{n_0} : l^2(\mathbb{N}, U) \rightarrow Z$  definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_f^{n_0} u &= \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k) B(k-1) u(k-1) + \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k) f(z(k-1), u(k-1)) \\ &= \mathcal{B}^{n_0} u + \sum_{k=0}^{n_0} \Phi(n_0, k) f(z(k-1), u(k-1)). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Luego, la siguiente proposición es una caracterización de la controlabilidad aproximada del sistema no lineal (4.25).

**Proposición 4.4.1.** *El sistema (4.25) es aproximadamente controlable para algún  $n_0$  si, y sólo si,  $\text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0}) = Z$ .*

*Demostración*

Supongamos que (4.25) es aproximadamente controlable, entonces para  $\varepsilon > 0$ ,  $z, z_0, z_1 \in Z$ , tales que  $z_1 = \Phi(n_0, 0)z_0 + z$ , existe  $u \in l^2(\mathbb{N}, U)$  con  $z_u(0) = z_0$  y  $\|z_u(n_0) - z_1\| < \varepsilon$ . Así,

$$z_u(n_0) = \Phi(n_0, 0)z_0 + \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) [B(k-1)u(k-1) + f(z(k-1), u(k-1))].$$

Por lo tanto,

$$\|\mathcal{B}_f^{n_0} u - z\| = \|z_u(n_0) - z_1\| < \varepsilon,$$

lo cual implica que  $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0})} = Z$ .

Supongamos ahora que  $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0})} = Z$ . Sea  $z \in Z$  tal que  $z = z_1 - \Phi(n_0, 0)z_0$  con  $z_0, z_1 \in Z$ . Entonces, existe un control  $u$  tal que  $\|\mathcal{B}_f^{n_0} u - z\| < \varepsilon$ . Así,

$$\|\mathcal{B}_f^{n_0} u + \Phi(n_0, 0)z_0 - z_1\| = \|z_u(n_0) - z_1\| < \varepsilon.$$

Luego, hemos obtenido una solución  $z_u(\cdot)$  de (4.25) tal que  $z_u(0) = z_0$  y  $\|z_u(n_0) - z_1\| < \varepsilon$ ; lo cual nos permite concluir que (4.25) es aproximadamente controlable.  $\blacksquare$

Ahora, si definimos el operador  $F : l^2(\mathbb{N}, U) \rightarrow Z$  por

$$F(u) = \sum_{k=1}^{n_0} \Phi(n_0, k) f(z(k-1), u(k-1)), \quad (4.43)$$

entonces

$$\mathcal{B}_f^{n_0} u = \mathcal{B}^{n_0} u + F u. \quad (4.44)$$

Supongamos que  $f$  es una función tal que se satisface lo siguiente

$$\langle F \circ \mathcal{B}^{n_0*} z, z \rangle > 0, \quad \forall z \in Z, \quad z \neq 0. \quad (4.45)$$

Entonces obtenemos el siguiente resultado:

**Lema 4.4.1.** *Si el sistema lineal (4.4) es aproximadamente controlable y se cumple la condición (4.45), entonces el sistema no lineal (4.25) es aproximadamente controlable.*

*Demostración*

Como (4.4) es aproximadamente controlable se sigue del Teorema 4.1.1 parte (b) – (ii) que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle > 0, \quad \forall z \in Z, \quad z \neq 0.$$

Supongamos que  $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0})} \subsetneq Z$ . Por el Teorema de Hahn-Banach se tiene que existe  $z_0 \in Z$ ,  $z_0 \neq 0$ , tal que  $\langle \mathcal{B}_f^{n_0} u, z_0 \rangle = 0, \forall u \in l^2(\mathbb{N}, U)$ . En particular,  $\langle \mathcal{B}_f^{n_0} \circ \mathcal{B}^{n_0*} z_0, z_0 \rangle = 0$ . Luego,

$$0 = \langle \mathcal{B}_f^{n_0} \circ \mathcal{B}^{n_0*} z_0, z_0 \rangle = \langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z_0, z_0 \rangle + \langle F \circ \mathcal{B}^{n_0*} z_0, z_0 \rangle > 0.$$

Esta contradicción prueba que  $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0})} = Z$ . Así, por la Proposición 4.4.1, se tiene que (4.25) es aproximadamente controlable. ■

Otro resultado que muestra que la controlabilidad aproximada de (4.4) se preserva bajo cierta perturbación no lineal es el siguiente.

**Lema 4.4.2.** *Si el sistema lineal (4.4) es aproximadamente controlable,  $\text{Rango}(F)$  es relativamente compacto y para todo  $z \in Z$ ,  $\alpha > 0$  existe  $u_\alpha \in l^2(\mathbb{N}, U)$  tal que*

$$u_\alpha = \mathcal{B}^{n_0*}(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}(z - F(u_\alpha)), \quad (4.46)$$

entonces el sistema no lineal (4.25) es aproximadamente controlable.

Demostración

Como (4.4) es aproximadamente controlable, se tiene, del Teorema 4.1.1 parte (b) – (ii), que

$$\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle > 0, \quad \forall z \in Z, \quad z \neq 0.$$

De donde se sigue que

$$\|z\| \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})z\| \geq \langle z, (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})z \rangle > \alpha \|z\|^2, \quad z \neq 0.$$

Así,  $\|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})z\| > \alpha \|z\|$ ,  $z \neq 0$ . Por tanto,  $\alpha \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}z\| < \|z\|$ ,  $z \neq 0$  y entonces

$$\sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \|(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}\| \leq 1. \quad (4.47)$$

Por otro lado, del Lema 4.1.4 se tiene que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z = 0, \quad \forall z \in Z. \quad (4.48)$$

Queremos probar que  $\overline{\text{Rango}(\mathcal{B}_f^{n_0})} = Z$ , es decir, dado  $z \in Z$ , existe  $\{u_\alpha\} \subset l^2(\mathbb{N}, U)$  tal que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{B}_f^{n_0} u_\alpha = z. \quad (4.49)$$

De (4.44) se sigue que (4.49) es equivalente a probar que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} [\mathcal{B}^{n_0} u_\alpha + F(u_\alpha)] = z,$$

ó

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{B}^{n_0} u_\alpha = z - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} F(u_\alpha).$$

Ahora, de la hipótesis (4.46) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{n_0} u_\alpha &= \mathcal{B}^{n_0} \mathcal{B}^{n_0*} (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} (z - F(u_\alpha)) \\ &= L_{\mathcal{B}^{n_0}} (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} (z - F(u_\alpha)) \\ &= [(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})(\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} - \alpha I (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}] (z - F(u_\alpha)) \\ &= [I - \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1}] (z - F(u_\alpha)) \\ &= z - F(u_\alpha) - \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} (z - F(u_\alpha)). \end{aligned}$$

Así,  $\mathcal{B}^{n_0} u_\alpha + F(u_\alpha) = z - \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} (z - F(u_\alpha))$ . Luego, (4.49) se cumple si, y sólo si,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} (z - F(u_\alpha)) = 0,$$

es decir,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} z - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} F(u_\alpha) = 0. \quad (4.50)$$

El primer límite en (4.50) es cero por (4.48).

Ahora, como  $\text{Rango}(F)$  es relativamente compacto, podemos suponer, sin perder generalidad, que existe  $y \in Z$  tal que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} F(u_\alpha) = y. \quad (4.51)$$

Luego,

$$\alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} F(u_\alpha) = \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} y + \alpha (\alpha I + L_{\mathcal{B}^{n_0}})^{-1} (F(u_\alpha) - y).$$

Tomando en cuenta (4.47), (4.48), (4.51) y la expresión anterior, obtenemos que el segundo límite en (4.50) es cero. Así, se satisface (4.49) y por lo tanto el sistema no lineal (4.25) es aproximadamente controlable. ■

**Observación.** En el caso en que el sistema lineal (4.4) es exactamente controlable y  $F$  es, además, una función lipschitziana con constante de lipschitz suficientemente pequeña, entonces (4.46) se satisface y así se tendría la conclusión del Lema 4.4.2 anterior.



## Capítulo 5

# Aplicaciones a Sistemas de Control Gobernados por Ecuaciones en Derivadas Parciales

En el presente capítulo, como aplicación de los resultados obtenidos en los capítulos previos, estudiaremos la controlabilidad de algunos problemas particulares. Pero antes haremos una formulación abstracta de los mismos para lo cual es necesario recordar algunas propiedades de el operador Laplaciano, que serán de utilidad en todas las aplicaciones que presentaremos a continuación.

Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  y  $X = L^2(\Omega, \mathbb{R})$  y consideremos el operador lineal no acotado  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  definido por  $A\phi = -\Delta\phi$ , donde

$$D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \quad (5.1)$$

El operador  $A$  tiene las siguientes propiedades bien conocidas: el espectro de  $A$  consiste de solo autovalores

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \rightarrow \infty,$$

cada uno con multiplicidad  $\gamma_n$  igual a la dimensión del correspondiente autoespacio.

- a) Existe un conjunto ortonormal completo  $\{\phi_n\}$  de autovectores de  $A$ .  
 b) Para todo  $x \in D(A)$  tenemos

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{k=1}^{\gamma_n} \langle \xi, \phi_{n,k} \rangle \phi_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n \xi, \quad (5.2)$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto interno en  $X$  y

$$E_n x = \sum_{k=1}^{\gamma_n} \langle \xi, \phi_{n,k} \rangle \phi_{n,k}. \quad (5.3)$$

Así,  $\{E_n\}$  es una familia de proyecciones ortonormal completa en  $X$  y  $x = \sum_{n=1}^{\infty} E_n x$ ,  $x \in X$ .

- c)  $-A$  genera un semigrupo analítico  $\{e^{-At}\}$  dado por

$$e^{-At} x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} E_n x. \quad (5.4)$$

- d) Los espacios de potencias fraccionarios  $X^r$  están dados por:

$$X^r = D(A^r) = \left\{ x \in X : \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n)^{2r} \|E_n x\|^2 < \infty \right\}, \quad r \geq 0,$$

con la norma

$$\|x\|_r = \|A^r x\| = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2r} \|E_n x\|^2 \right\}^{1/2}, \quad x \in X^r,$$

y

$$A^r x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^r E_n x. \quad (5.5)$$

Además, para  $r \geq 0$  definimos  $Z_r = X^r \times X$ , el cual es un Espacio de Hilbert con la norma dada por

$$\left\| \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \right\|_{Z_r}^2 = \|w\|_r^2 + \|v\|^2.$$

## 5.1. Estudio de la Controlabilidad de la Ecuación de la Onda.

### 5.1.1. Caso Continuo.

**Ejemplo 5.1.1. La ecuación de onda (n-dimensional) con control.**

Consideremos la ecuación de onda con control

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = u(t, x), & x \in \Omega, \\ y = 0 & \text{sobre } \mathbb{R} \times \partial\Omega, \\ y(0, x) = y_0(x), & y_t(0, x) = y_1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.6)$$

donde  $\Omega$  es un dominio en  $\mathbb{R}^n$ , el control  $u \in L^2(0, \tau; L^2(\Omega))$ . El sistema (5.6) puede escribirse como una ecuación abstracta de segundo orden en el espacio de Hilbert  $X = L^2(\Omega)$  como sigue:

$$\begin{cases} y'' = -Ay + u(t), \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \end{cases} \quad (5.7)$$

donde el operador  $-A$  es el operador Laplaciano definido arriba.

Usando el cambio de variables  $y' = v$ , la ecuación de segundo orden (5.7) puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en el espacio de Hilbert  $Z = Z_{1/2} = X^{1/2} \times X$  como

$$\begin{cases} z' = \mathcal{A}z + Bu(t), & z \in Z, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (5.8)$$

donde

$$z = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

$\mathcal{A}$  es un operador lineal acotado con dominio  $D(\mathcal{A}) = D(A) \times X$  y  $u \in L^2(0, \tau, U)$  con  $U = X$ . La prueba del siguiente teorema se sigue directamente del Lema 1.1.1.

**Teorema 5.1.1.** *El operador  $\mathcal{A}$  dado por (5.9), es el generador infinitesimal de un  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  dado por*

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j z, \quad z \in Z, \quad t \geq 0, \quad (5.10)$$

donde  $\{P_j\}_{j \geq 1}$  es una familia completa de proyecciones ortogonales en el espacio de Hilbert  $Z$  dadas por

$$P_j = \text{diag}[E_j, E_j], \quad j \geq 1, \quad (5.11)$$

y

$$A_j = R_j P_j, \quad R_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_j & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Notese que

$$R_j^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \lambda_j & 0 \end{bmatrix}, \quad A_j = R_j P_j, \quad A_j^* = R_j^* P_j, \quad j \geq 1.$$

Además,  $e^{A_j s} = e^{R_j s} P_j$  y los autovalores de  $R_j$  son:  $\sqrt{\lambda_j} i$  y  $-\sqrt{\lambda_j} i$ . Si se quiere ver una demostración del Teorema 5.1.1 anterior se puede también consultar Leiva [37], específicamente el Teorema 3.1, tomando  $c = 0$  y  $d = 1$ .

**Proposición 5.1.1.** *El sistema (5.8) es exactamente controlable sobre  $[0, \tau]$  para todo  $\tau > 0$ .*

Demostración

Por el Lema 4.2.1 parte a), es suficiente probar la existencia de  $\gamma > 0$  tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z, P_j z \rangle \geq \gamma \|P_j z\|^2, \quad \forall z \in Z. \quad (5.13)$$

En efecto, en este caso tenemos:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad B^* = [0 \quad I] \quad \text{y} \quad BB^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,  $P_j BB^* = BB^* P_j$  y

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z &= \mathcal{B}_j^\tau \mathcal{B}_j^{\tau*} z = \int_0^\tau e^{A_j s} B_j B_j^* e^{A_j^* s} P_j z ds \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \left[ \frac{\sqrt{\lambda_j} \tau}{2} - \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_j} \tau)}{4} \right] E_j z_1 + \frac{1}{4\lambda_j} [\cos(2\sqrt{\lambda_j} \tau) - 1] E_j z_2 \\ \frac{1}{4} [\cos(2\sqrt{\lambda_j} \tau) - 1] E_j z_1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \left[ \frac{\sqrt{\lambda_j} \tau}{2} + \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_j} \tau)}{4} \right] E_j z_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde  $z = [z_1, z_2]^T$ .

Luego,

$$\begin{aligned} \langle L_{\mathcal{B}_j^T} P_j z, P_j z \rangle &= \lambda_j a_j \|E_j z_1\|^2 + b_j \|E_j z_2\|^2 - \frac{1}{2} c_j \langle E_j z_1, E_j z_2 \rangle \\ &\geq \lambda_j a_j \|E_j z_1\|^2 + b_j \|E_j z_2\|^2 - \frac{1}{2} c_j \|E_j z_1\| \|E_j z_2\|, \end{aligned}$$

donde

$$a_j = \frac{\tau}{2} - \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_j}\tau)}{4\sqrt{\lambda_j}}, \quad b_j = \frac{\tau}{2} + \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_j}\tau)}{4\sqrt{\lambda_j}}, \quad c_j = 1 - \cos(2\sqrt{\lambda_j}\tau).$$

Entonces para mostrar (5.13) es suficiente probar la siguiente desigualdad para algún  $\gamma > 0$

$$\lambda_j a_j \|E_j z_1\|^2 + b_j \|E_j z_2\|^2 - \frac{1}{2} c_j \|E_j z_1\| \|E_j z_2\| \geq \gamma \{ \lambda_j \|E_j z_1\|^2 + \|E_j z_2\|^2 \},$$

lo cual es equivalente a encontrar un  $\tilde{\gamma} = \frac{1}{\gamma} > 0$  tal que

$$\tilde{\gamma} \lambda_j a_j \|E_j z_1\|^2 + \tilde{\gamma} b_j \|E_j z_2\|^2 - \frac{1}{2} \tilde{\gamma} c_j \|E_j z_1\| \|E_j z_2\| \geq \lambda_j \|E_j z_1\|^2 + \|E_j z_2\|^2,$$

o

$$\lambda_j (\tilde{\gamma} a_j - 1) \|E_j z_1\|^2 + (\tilde{\gamma} b_j - 1) \|E_j z_2\|^2 - \frac{1}{2} \tilde{\gamma} c_j \|E_j z_1\| \|E_j z_2\| \geq 0. \quad (5.14)$$

Ahora, (5.14) es cierto si

$$\tilde{\gamma} a_j - 1 > 0, \quad \tilde{\gamma} b_j - 1 > 0, \quad (5.15)$$

y

$$\lambda_j (\tilde{\gamma} a_j - 1) (\tilde{\gamma} b_j - 1) \geq \frac{1}{16} \tilde{\gamma}^2 c_j^2. \quad (5.16)$$

La expresión en (5.16) es equivalente a

$$[\lambda_j \tau^2 - \sin^2(\sqrt{\lambda_j}\tau)] \tilde{\gamma}^2 - 4\lambda_j \tau \tilde{\gamma} + 4\lambda_j \geq 0.$$

Puesto que la función real  $x^2 - \sin^2(x)$  es no negativa, la última expresión (considerada como cuadrática en  $\tilde{\gamma}$ ) se satisface si

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &\geq \frac{4\lambda_j\tau + \sqrt{16\lambda_j^2\tau^2 - 16\lambda_j(\lambda_j\tau^2 - \sin^2(\sqrt{\lambda_j}\tau))}}{2(\lambda_j\tau^2 - \sin^2(\sqrt{\lambda_j}\tau))} \\ &= \frac{2\lambda_j\tau + 2\sqrt{\lambda_j}|\sin(\sqrt{\lambda_j}\tau)|}{(\sqrt{\lambda_j}\tau - |\sin(\sqrt{\lambda_j}\tau)|)(\sqrt{\lambda_j}\tau + |\sin(\sqrt{\lambda_j}\tau)|)} \\ &= \frac{2}{\tau - \left| \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\tau)}{\sqrt{\lambda_j}} \right|}. \end{aligned}$$

Con esto y (5.15) obtenemos que  $\tilde{\gamma}$  tiene que satisfacer la siguiente condición

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &> \max_{j \geq 1} \left( \frac{2}{\tau - \left| \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\tau)}{\sqrt{\lambda_j}} \right|}, \frac{2}{\tau - \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_j}\tau)}{\sqrt{\lambda_j}}}, \frac{2}{\tau + \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_j}\tau)}{\sqrt{\lambda_j}}} \right) \\ &= \max_{j \geq 1} \left( \frac{2}{\tau - \left| \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\tau)}{\sqrt{\lambda_j}} \right|} \right), \end{aligned}$$

lo cual es posible para  $\tau > 0$  pues  $\tau - \left| \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\tau)}{\sqrt{\lambda_j}} \right| > 0$  para todo  $\tau > 0$  y decrece en  $j$ . Así, podemos siempre encontrar un  $\tilde{\gamma} > 0$  adecuado (en consecuencia  $\gamma > 0$ ) tal que (5.13) se cumpla. Por lo tanto, el sistema (5.8) es exactamente controlable sobre  $[0, \tau]$  para cualquier  $\tau > 0$ . ■

Ahora bien, si consideramos una perturbación de la ecuación (5.8), digamos

$$\begin{cases} z' = \mathcal{A}z + Bu(t) + f(z, u), & z \in Z, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (5.17)$$

donde el termino no lineal  $f : Z \times U \rightarrow Z$  satisface:

$$\|f(z_2, u_2) - f(z_1, u_1)\| \leq L\{\|z_2 - z_1\| + \|u_2 - u_1\|\}.$$

y  $L$  es suficientemente pequeño, tenemos, por los resultados de la sección 3.2, que (5.17) es exactamente controlable.

### 5.1.2. Caso Discreto.

#### Ejemplo 5.1.2. Discretización de la ecuación de la onda.

La discretización en flujo de la abstracción de la ecuación de la onda lineal (5.8) mostrada en el ejemplo 5.1.1 está dada por

$$\begin{cases} z(n+1) = T(n)z(n) + B(n)u(n), & z \in Z, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (5.18)$$

donde

$$B : U \longrightarrow Z, \quad Bu = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u.$$

Para este caso tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 5.1.2.** *El sistema (5.11) es aproximadamente controlable para cualquier  $n_0 \in \mathbb{N}$ .*

Demostración

En este caso, tenemos

$$\mathcal{B}^{n_0} : l^2(\mathbb{N}, U) \longrightarrow Z, \quad \mathcal{B}^{n_0}u = \sum_{k=1}^{n_0} T(\Theta(n_0, k))Bu(k-1),$$

y

$$L_{\mathcal{B}^{n_0}} : Z \longrightarrow Z, \quad L_{\mathcal{B}^{n_0}} = \mathcal{B}^{n_0}\mathcal{B}^{n_0*}.$$

Puesto que

$$BB^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

obtenemos que

$$P_j BB^* = BB^* P_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (5.19)$$

Por otro lado, tenemos que  $T^*(t) = T(-t)$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 L_{\mathcal{B}^{n_0}} z &= \sum_{k=1}^{n_0} T(\Theta(n_0, k)) B B^* T^*(\Theta(n_0, k)) z \\
 &= \sum_{k=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j \Theta(n_0, k)} P_j B B^* \sum_{i=1}^{\infty} e^{-A_i \Theta(n_0, k)} P_i z \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j \Theta(n_0, k)} B B^* e^{-A_j \Theta(n_0, k)} P_j z \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z,
 \end{aligned}$$

donde  $L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} y = \mathcal{B}_j^{n_0} \mathcal{B}_j^{n_0*} y = \sum_{k=1}^{n_0} e^{A_j \Theta(n_0, k)} B B^* e^{-A_j \Theta(n_0, k)} y$ ,  $y \in \mathcal{R}(P_j)$ .

En consecuencia,  $L_{\mathcal{B}^{n_0}} = \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}}$ .

Sea  $z = [z_1, z_2]^T$  en  $Z$ . Puesto que

$$e^{R_j s} = \left[ \cos(\sqrt{\lambda_j} s) \right] I + \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_j} s)}{\sqrt{\lambda_j}} R_j, \quad j \geq 1,$$

podemos ver que

$$\begin{aligned}
 e^{A_j \Theta(n_0, k)} B B^* e^{-A_j \Theta(n_0, k)} P_j z &= e^{R_j \Theta(n_0, k)} B B^* e^{R_j^* \Theta(n_0, k)} P_j z \\
 &= [0, E_j z_2]^T, \quad j \geq 1.
 \end{aligned}$$

Así,

$$L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z = \sum_{k=1}^{n_0} [0, E_j z_2]^T = n_0 [0, E_j z_2]^T.$$

Entonces

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, P_j z \rangle = \langle n_0 [0, E_j z_2]^T, [E_j z_1, E_j z_2]^T \rangle = n_0 \|E_j z_2\|^2 > 0, \quad \forall j.$$

Luego, usando (5.19), tenemos, para  $z \neq 0$  en  $Z$ , que

$$\begin{aligned}
\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, \sum_{j=1}^{\infty} P_j z \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} P_j z, P_j z \rangle = n_0 \sum_{j=1}^{\infty} \|E_j z\|^2 = n_0 \|z\|^2 > 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia, por el Lema 4.2.1 parte (c), la ecuación (5.11) es aproximadamente controlable. ■

Ahora bien, si consideramos una perturbación de la ecuación (5.11), digamos

$$\begin{cases} z(n+1) = T(n)z(n) + B(n)u(n) + f(z, u), & z \in Z, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (5.20)$$

donde el termino no lineal  $f : Z \times U \rightarrow Z$  satisface las hipótesis adecuadas, tenemos, por los resultados de la sección 4.4, que (5.20) es aproximadamente controlable.

## 5.2. Estudio de la Controlabilidad de la Ecuación del Calor.

### 5.2.1. Caso Continuo.

#### Ejemplo 5.2.1. La Ecuación del Calor (n-dimensional) con control.

Consideremos la ecuación del calor con control

$$\begin{cases} y_t = \Delta y + u(t, x), \\ y(0, x) = y_0(x), \\ y = 0 \quad \text{sobre } \mathbb{R} \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.21)$$

donde  $\Omega$  es un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$ , el control  $u \in L^2(0, \tau; L^2(\Omega))$ . El sistema (5.21) puede escribirse como una ecuación abstracta en el espacio  $Z = L^2(\Omega)$

$$\begin{cases} z' = -Az + Bu(t), & z \in Z, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (5.22)$$

donde  $B = I$ , la función de control  $u$  pertenece a  $L^2(0, \tau; Z)$  y el operador  $A$  está dado por  $A\phi = -\Delta\phi$  con dominio  $D(A) = H^2 \cap H_0^1$  y

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n z.$$

En este caso  $P_j = E_j$ ,  $j \geq 1$ . Así,

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{B}_j^\tau} P_j z &= \int_0^\tau e^{A_j s} B_j B_j^* e^{A_j^* s} E_j z ds \\ &= \int_0^\tau e^{-\lambda_j s} e^{-\lambda_j s} E_j z \\ &= \int_0^\tau e^{-2\lambda_j s} E_j z = -\frac{1}{2} [e^{-2\lambda_j \tau} - 1] E_j z. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \langle L_{\mathcal{B}_j^\tau} E_j z, E_j z \rangle &= -\frac{1}{2} [e^{-2\lambda_j \tau} - 1] \langle E_j z, E_j z \rangle \\ &= -\frac{1}{2} [e^{-2\lambda_j \tau} - 1] \|E_j z\|^2 > 0, \forall E_j z \neq 0, \end{aligned}$$

con  $z \in Z$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , lo cual prueba que el sistema (5.22) es aproximadamente controlable. ■

## 5.2.2. Caso Discreto.

### Ejemplo 5.2.2. Discretización de la Ecuación del calor.

La discretización en flujo de la abstracción de la ecuación del calor (5.22) presentada en el ejemplo 5.2.1 está dada por

$$\begin{cases} z(n+1) = T(n)z(n) + B(n)u(n), & z \in Z, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \quad (5.23)$$

En este caso,  $T^*(t) = T(t) = e^{-At}$  y  $B = I$ .

**Proposición 5.2.1.** *El sistema (5.23) es exactamente controlable para cualquier  $n_0 \in \mathbb{N}$ .*

Demostración

En efecto, en este caso tenemos que:

$$\mathcal{B}^{n_0} : l^2(\mathbb{N}, U) \longrightarrow Z, \quad \mathcal{B}^{n_0} u = \sum_{k=1}^{n_0} T(\Theta(n_0, k)) u(k-1),$$

y

$$L_{\mathcal{B}^{n_0}} : Z \longrightarrow Z, \quad L_{\mathcal{B}^{n_0}} z = \mathcal{B}^{n_0} \mathcal{B}^{n_0*} z = \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} E_j z,$$

donde  $L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} y = \sum_{k=1}^{n_0} e^{-2\lambda_j \Theta(n_0, k)} y$ ,  $y \in \mathcal{R}(E_j)$ .

Ahora, probaremos la existencia de  $\gamma > 0$  tal que

$$\langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} E_j z, E_j z \rangle \geq \gamma \|E_j z\|^2.$$

Esto es equivalente a la existencia de  $\gamma > 0$  tal que

$$\left[ \sum_{k=1}^{n_0} e^{-2\lambda_j \Theta(n_0, k)} - \gamma \right] \|E_j z\|^2 \geq 0,$$

lo cual es obviamente cierto para  $0 < \gamma < 1$  puesto que  $e^{-2\lambda_j \Theta(n_0, n_0)} = 1$ .

Entonces, para tal  $\gamma$  tenemos

$$\begin{aligned} \langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} E_j z, E_j z \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle L_{\mathcal{B}_j^{n_0}} E_j z, E_j z \rangle \geq \gamma \sum_{j=1}^{\infty} \|E_j z\|^2 = \gamma \|z\|^2. \end{aligned}$$

Así,  $\langle L_{\mathcal{B}^{n_0}} z, z \rangle \geq \gamma \|z\|^2$ ,  $z \in Z$ . Por lo tanto, aplicando el Teorema 4.1.1 parte (a) – (ii) obtenemos que (5.23) es exactamente controlable. ■

De manera análoga a la ecuación de la onda, si se considera una perturbación de la ecuación (5.23), donde el término no lineal satisfaga las hipótesis adecuadas, se tendrá que esa perturbación de la ecuación del calor discreta será exactamente controlable (Sección 4.3).

### 5.3. La Ecuación de Termoelásticidad.

#### Ejemplo 5.3.1. La Ecuación de Termoelásticidad en una placa con control.

Considere la ecuación de termoelásticidad en una placa con control

$$\begin{cases} w_{tt} + \Delta^2 w + \alpha \Delta \theta = u_1(t, x), & t > 0, & x \in \Omega, \\ \theta_t - \beta \Delta \theta - \alpha \Delta w_t = u_2(t, x), & t > 0, & x \in \Omega, \\ \theta = w = \Delta w = 0, & t \geq 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.24)$$

donde  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\Omega$  es un dominio acotado suficientemente regular en  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) y  $u_i \in L^2([0, \tau]; L^2(\Omega))$ ,  $i = 1, 2$ .

Consideremos  $Z = X^1 \times X \times X$ , el cual es un espacio de Hilbert con la norma dada por

$$\left\| \begin{bmatrix} w \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \right\|_Z^2 = \|w\|_1^2 + \|v\|^2 + \|\theta\|.$$

En consecuencia, (5.24) puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias abstracto en el espacio de Hilbert  $Z = X^1 \times X \times X$  como sigue:

$$\begin{cases} w' = v, \\ v' = -A^2 w - \alpha A \theta + u_1, \\ \theta' = -\beta A \theta - \alpha A v + u_2, \end{cases} \quad (5.25)$$

Finalmente, el sistema (5.24) puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en el espacio de Hilbert  $Z = X^1 \times X \times X$  como sigue:

$$z' = \mathcal{A}z + Bu, \quad z \in Z, \quad t \geq 0, \quad (5.26)$$

donde  $u \in L^2([0, \tau]; U)$ ,  $U = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_X & 0 \\ -A^2 & 0 & -\alpha A \\ 0 & -\alpha A & -\beta A \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

es un operador lineal no acotado con dominio

$$D(\mathcal{A}) = \{w \in H^4(\Omega) : w = \Delta w = 0\} \times D(A) \times D(A),$$

y  $B : U \longrightarrow Z$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_X & 0 \\ 0 & I_X \end{bmatrix}$  es un operador lineal acotado.

**Proposición 5.3.1.** *El adjunto del operador  $B$  está dado por*

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 & I_X & 0 \\ 0 & 0 & I_X \end{bmatrix}, \quad y \quad BB^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_X & 0 \\ 0 & 0 & I_X \end{bmatrix}.$$

Demostración

Calcularemos  $B^*$ .

$$\begin{aligned} \langle Bu, z \rangle_Z &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \right\rangle_Z \\ &= \langle 0, z_1 \rangle_{X^1} + \langle u_1, z_2 \rangle_X + \langle u_2, z_3 \rangle_X \\ &= \langle u_1, z_2 \rangle_{L^2} + \langle u_2, z_3 \rangle_{L^2} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & I_X & 0 \\ 0 & 0 & I_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle u, \begin{bmatrix} 0 & I_X & 0 \\ 0 & 0 & I_X \end{bmatrix} z \right\rangle_U. \end{aligned}$$

Entonces,  $B^* = \begin{bmatrix} 0 & I_X & 0 \\ 0 & 0 & I_X \end{bmatrix}$  and  $B^* \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ .

Así,  $BB^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_X & 0 \\ 0 & I_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_X & 0 \\ 0 & 0 & I_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_X & 0 \\ 0 & 0 & I_X \end{bmatrix}$ . ■

Ahora, usando directamente el Lema 1.1.1, obtenemos que el operador  $\mathcal{A}$  dado por (5.27), es el generador infinitesimal de un  $C_0$ -semigrupo

$\{T(t)\}_{t \geq 0}$  dado por:

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j z, \quad z \in Z \quad t \geq 0.$$

donde  $P_j = \text{diag}(E_j, E_j, E_j)$ ,  $A_j = R_j P_j$ , y

$$R_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\lambda_j^2 & 0 & -\alpha\lambda_j \\ 0 & -\alpha\lambda_j & -\beta\lambda_j \end{bmatrix}, \quad j \geq 1.$$

La afirmación previa se puede ver también usando el Teorema 3.1 de Leiva [36].

**Proposición 5.3.2.** *El sistema (5.24) es aproximadamente controlable.*

Demostración

Es fácil ver que  $P_j B B^* = B B^* P_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Así, aplicando el Lema 3.1.2, obtenemos que la controlabilidad aproximada del sistema (5.24) es equivalente a la controlabilidad aproximada de cada uno de los sistemas finito dimensionales

$$z' = A_j z + B_j u, \quad (5.28)$$

donde  $z \in \mathcal{R}(P_j)$ ,  $\dim(\mathcal{R}(P_j)) = 3\gamma_j$ ,  $B_j = P_j B : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$B_j \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = P_j B \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_j u_1 \\ E_j u_2 \end{bmatrix} = D_j \begin{bmatrix} E_j u_1 \\ E_j u_2 \end{bmatrix}.$$

Pero la controlabilidad aproximada del sistema (5.28) es equivalente a la controlabilidad de cada uno de los sistemas finito dimensionales

$$z' = R_j z + D_j u, \quad z \in \mathbb{R}^3, \quad (5.29)$$

donde  $u \in \mathbb{R}^2$ . Y es conocido (Lee & Markus [34], Leiva & Zambrano [46]) que el sistema (5.29) es controlable si, y sólo si,

$$\text{rank}[D_j : R_j D_j : R_j^2 D_j] = 3,$$

lo cual, haciendo los cálculos respectivos, es trivialmente cierto. En consecuencia, hemos probado que el sistema (5.24) es aproximadamente controlable. ■

## 5.4. La Ecuación de la Viga.

A continuación en los siguientes ejemplos se hace un estudio de controlabilidad de la ecuación de la Viga.

### Ejemplo 5.4.1. La Ecuación de Beam Semilineal con Control.

Considere la siguiente ecuación de la Viga semilineal

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} = 2\beta\Delta \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} - \Delta^2 y(t, x) + u(t, x) + f(t, (y, y_t, u)(t, x)), \\ y(t, x) = \Delta y(t, x) = 0, \text{ sobre } (0, \tau) \times \partial\Omega, \\ y(0, x) = y_0(x), \quad y_t(x) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.30)$$

donde  $\beta > 1$ ,  $\Omega$  es un dominio acotado suficientemente regular en  $\mathbb{R}^N$ , el control distribuido  $u$  pertenece a  $L^2([0, \tau]; U)$  ( $U = L^2(\Omega)$ ), y la función no lineal  $f : [0, \tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es suficientemente suave y existe  $a, c \in \mathbb{R}$  tal que  $a < \lambda_1^2$ , con  $\lambda_1$  el primer autovalor de  $-\Delta$  con condición de borde del tipo de Dirichlet, y

$$\sup_{(t, y, v, u) \in Q_\tau} |f(t, y, v, u) - ay - cu| < \infty, \quad (5.31)$$

donde  $Q_\tau = [0, \tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Aquí, el espacio estado es  $Z_1 = [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times L^2(\Omega) = D(-\Delta) \times L^2(\Omega)$  dotado con la norma del gráfico; esto es:

$$\left\| \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \right\|_{Z_1} = \sqrt{\|(-\Delta)y\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2},$$

donde

$$\|v\| = \|v\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx}, \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

**Observación 5.4.1.** El término  $-2\beta\Delta \frac{\partial y(t, x)}{\partial t}$  en la ecuación (5.30) actúa como una fuerza de amortiguamiento, por tanto, el espacio energía usado para la ecuación de onda no es adecuado aquí; en efecto, la ecuación lineal sin control puede ser transformada en un sistema de ecuaciones parabólicas de la forma  $z_t = D\Delta z$  (ver Luiz de Oliveira [22]), el cual muestra que  $Z_1 = [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times L^2(\Omega)$  es el espacio correcto para la formulación abstracta del problema.

Bajo ciertas condiciones se prueba la siguiente afirmación: La ecuación no lineal (5.30) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$ . Más aún, se puede exhibir una sucesión de controles de entrada tal que la solución del sistema asociada parte de un estado inicial y finaliza en un entorno de radio  $\epsilon$  del estado final en un tiempo prefijado  $\tau$ .

Ahora, describiremos la estrategia a seguir: En primer lugar, se prueba que el sistema lineal auxiliar en  $(0, \tau) \times \Omega$  dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} &= 2\beta\Delta \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} - \Delta^2 y(t, x) + u(t, x) + ay(t, x) + cu(t, x), \\ y(t, x) &= \Delta y(t, x) = 0, \text{ sobre } (0, \tau) \times \partial\Omega, \\ y(0, x) &= y_0(x), \quad y_t(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.32)$$

es aproximadamente controlable.

En segundo lugar, se escribe el sistema (5.30) en la forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} &= 2\beta\Delta \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} - \Delta^2 y(t, x) + u(t, x) \\ &+ ay(t, x) + cu(t, x) + g(t, y, y_t, u), \text{ en } (0, \tau) \times \Omega \\ y(t, x) &= \Delta y(t, x) = 0, \text{ sobre } (0, \tau) \times \partial\Omega, \\ y(0, x) &= y_0(x), \quad y_t(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.33)$$

donde  $g$  definida como  $g(t, y, v, u) = f(t, y, v, u) - ay - cu$ , es una función suficientemente suave y acotada.

Finalmente, para probar la controlabilidad aproximada del sistema no lineal (5.30), se hace uso de la técnica desarrolladas por H. Leiva, N. Merentes y J.L. Sanchez, en [38]. Esto es, la controlabilidad aproximada del sistema (5.30) se sigue de la controlabilidad aproximada del sistema (5.32), la compacidad del semigrupo generado por la parte lineal del sistema (5.32), la acotación uniforme del término no lineal  $g$  y aplicando el teorema de punto fijo de Schauder.

En efecto, sea  $Z = L^2(\Omega)$  y consideremos el operador lineal no acotado  $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$  definido por  $A\phi = -\Delta\phi$ , donde

$$D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \quad (5.34)$$

De acá que la ecuación (5.30) puede ser escrita como un sistema abstracto de ecuaciones diferenciales ordinarias en el espacio de Hilbert  $Z_1$

como sigue:

$$\begin{cases} y' = v, \\ v' = -A^2y - 2\beta Av + u + f(t, y, v, u). \end{cases} \quad (5.35)$$

Más aún, la ecuación (5.35) puede ser reescrita como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en el espacio de Hilbert  $Z_1$  como sigue:

$$z' = \mathcal{A}z + Bu + F(t, z, u), \quad z \in Z_1, \quad t \geq 0 \quad (5.36)$$

donde  $u \in L^2([0, \tau]; U)$ ,  $U = Z = L^2(\Omega)$ ,

$$\begin{pmatrix} 0 & I_Z \\ -A^2 & -2\beta A \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

es un operador lineal no acotado con dominio

$$D(\mathcal{A}) = \{y \in H^4(\Omega) : y = \Delta y = 0\} \times D(A),$$

es decir,

$$z = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}) \Leftrightarrow y \in \{y \in H^4(\Omega) : y = \Delta y = 0\} \quad y \quad v \in D(A).$$

$I = I_Z : Z = L^2(\Omega) \rightarrow Z$  es el operador identidad,  $B : U \rightarrow Z_1$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ I_Z \end{pmatrix}$  es un operador lineal acotado, y  $F(t, z, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t, y, v, u) \end{pmatrix}$  es suficientemente suave, completamente continuo y:

$$\sup_{(t, z, u) \in \hat{Q}_\tau} \|F(t, z, u) - B^a z - B^c u\|_{Z_1} < \infty, \quad (5.38)$$

donde  $\hat{Q}_\tau = [0, \tau] \times Z_1 \times U$  y  $B^a = \begin{pmatrix} 0 \\ aI \end{pmatrix}$  y  $B^c = \begin{pmatrix} 0 \\ cI \end{pmatrix}$ ,  $a < \lambda_1^2$ .

Los sistemas (5.32) y (5.33) pueden ser escritos como una ecuación diferencial ordinaria en el espacio de Hilbert  $Z_1$  como sigue:

$$z' = \mathcal{A}z + Bu + B^a z + B^c u, \quad t \in (0, \tau], \quad (5.39)$$

$$z' = \mathcal{A}z + Bu + B^a z + B^c u + G(t, z, u), \quad t \in (0, \tau], \quad (5.40)$$

donde  $G(t, z, u) = F(t, z, u) - B^a z - B^c u$ .

Por otro lado, la hipótesis (5.31) implica que

$$\sup_{(t,z,u) \in \hat{Q}_\tau} \| G(t, z, u) \|_{Z_1} < \infty. \quad (5.41)$$

Por lo tanto,  $G : \hat{Q}_\tau \rightarrow Z_1$  es una función acotada, suficientemente suave y completamente continua.

Ahora bien, usando el lema 1.1.1 se puede probar que el operador lineal no acotado  $\mathcal{A}$  dado por la ecuación lineal (5.37) genera un semigrupo compacto fuertemente continuo en el espacio  $Z_1$ , el cual decae exponencialmente a cero.

**Teorema 5.4.1.** *El operador  $\mathcal{A}$  es el generador infinitesimal de un semigrupo compacto fuertemente continuo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  representado por*

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\mathbb{A}_j t} P_j z, \quad z \in Z_1, \quad t \geq 0, \quad (5.42)$$

donde  $\{P_j\}_{j \geq 0}$  es una familia de proyecciones ortogonales completa en el espacio de Hilbert  $Z_1$  dado por

$$P_j = \text{diag}(E_j, E_j), \quad (5.43)$$

y

$$\mathbb{A}_j = K_j P_j, \quad K_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_j^2 & -2\beta\lambda_j \end{pmatrix} \quad j \geq 1,$$

y el operador adjunto  $\mathbb{A}^*$  del operador  $\mathbb{A}$  viene dado por

$$\mathbb{A}_j^* = \tilde{K}_j P_j, \quad \tilde{K}_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \lambda_j^2 & -2\beta\lambda_j \end{pmatrix} \quad j \geq 1.$$

Más aun, los autovalores  $\sigma_1(j)$ ,  $\sigma_2(j)$ , de la matriz  $K_j$  son simples y dados por:

$$\sigma_1(j) = -\lambda_j \rho_1, \quad \sigma_2(j) = -\lambda_j \rho_2$$

donde  $0 < \rho_1 < \rho_2$  son dados por

$$\rho_1 = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \quad \text{and} \quad \rho_2 = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}; \quad , \quad \beta^2 > 1,$$

y este semigrupo decae exponencialmente a cero

$$\| T(t) \| \leq M e^{-\mu t}, \quad t \geq 0,$$

donde  $\mu = \lambda_1 \rho_1$  y  $\| T(t) \| = \sup_{\|z\|=1} \| T(t)z \|$ .

Los sistemas (5.39) y (5.40) también pueden ser escritos como sigue:

$$z' = \mathbb{A}z + (B + B^c)u, \quad z \in Z_1 \quad t \in (0, \tau]. \quad (5.44)$$

$$z' = \mathbb{A}z + (Bu + B^c)u + G(t, z, u), \quad z \in Z_1 \quad t \in (0, \tau]. \quad (5.45)$$

donde el operador  $\mathbb{A}$  viene dado por

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & I_Z \\ -A^2 + aI & -2\beta A \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

El siguiente corolario es consecuencia del teorema anterior.

**Corolario 5.4.1.** *El operador  $\mathbb{A}$  es el generador infinitesimal de un semigrupo compacto fuertemente continuo  $\{T_a(t)\}_{t \geq 0}$  representado por*

$$T_a(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\mathbb{A}_j t} P_j z, \quad z \in Z_1, \quad t \geq 0$$

donde  $\{P_j\}_{j \geq 0}$  es una familia de proyecciones ortogonales completa en el espacio de Hilbert  $Z_1$  dado por

$$P_j = \text{diag}(E_j, E_j), \quad (5.47)$$

y

$$\mathbb{A}_j = K_j P_j, \quad K_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_j^2 + a & -2\beta \lambda_j \end{pmatrix} \quad j \geq 1,$$

y el operador adjunto  $\mathbb{A}^*$  del operador  $\mathbb{A}$  viene dado por

$$\mathbb{A}_j^* = \tilde{K}_j P_j, \quad \tilde{K}_j = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{\lambda_j^2} - 1 \\ \lambda_j^2 & -2\beta \lambda_j \end{pmatrix} \quad j \geq 1.$$

Más aún, los autovalores  $\sigma_1(j)$ ,  $\sigma_2(j)$ , de la matriz  $K_j$  son simples y dados por:

$$\sigma_1(j) = -\lambda_j \rho_{1j}, \quad \sigma_2(j) = -\lambda_j \rho_{2j}$$

donde  $0 < \rho_{1j} < \rho_{2j}$  vienen dado por

$$\rho_{1j} = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1 + \frac{a}{\lambda_j^2}} \quad \text{and} \quad \rho_{2j} = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1 + \frac{a}{\lambda_j^2}}; \quad a < \lambda_1^2, \quad \beta^2 > 1,$$

y este semigrupo decae exponencialmente a cero

$$\|T_a(t)\| \leq M e^{-\mu t}, \quad t \geq 0,$$

donde  $\mu = \lambda_1 \rho_{11}$  y  $\|T_a(t)\| = \sup_{\|z\|=1} \|T_a(t)z\|$ .

A continuación se prueba que el sistema lineal (5.44) es aproximadamente controlable. Para ello, dado  $z_0 \in Z_1$  fijo pero arbitrario y  $u \in L^2([0, \tau]; U)$  se tiene que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z'(t) = \mathbb{A}z(t) + (B + B^c)u(t), & z \in Z_1, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (5.48)$$

admite una única solución moderada dada por

$$z(t) = T_a(t)z_0 + \int_0^t T_a(t-s)(B + B^c)u(s)ds; \quad t \in [0, \tau]. \quad (5.49)$$

**Definición 5.4.1.** Para el sistema (5.48) se define el siguiente concepto: El operador de controlabilidad (para  $\tau > 0$ )  $G_a : L^2([0, \tau]; U) \rightarrow Z_1$  viene dado por

$$G_a u = \int_0^\tau T_a(\tau-s)(B + B^c)u(s)ds, \quad (5.50)$$

cuyo operador adjunto  $G_a^* : Z_1 \rightarrow L^2([0, \tau]; U)$  viene dado por

$$(G_a^* z)(s) = (B^* + (B^c)^*)T_a(\tau-s)z, \quad \forall s \in [0, \tau], \quad \forall z \in Z_1. \quad (5.51)$$

Los siguientes dos resultados se pueden encontrar en [11], [18] y [39].

**Lema 5.4.1.** La ecuación (5.48) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$  si, y sólo si,  $\overline{\text{Rang}(G_a)} = Z_1$ .

**Teorema 5.4.2.** El sistema (5.48) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$  si, y sólo si, cada uno de las siguientes condiciones se tienen:

- $\overline{\text{Rang}(G_a)} = Z_1$ .
- $\text{Ker}(G_a^*) = \{0\}$ .
- $(B + B^c)^* T_a^*(s)z = 0, \quad \forall s \in [0, \tau] \implies z = 0$ .
- $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1} z = 0$ .
- $\sup_{\alpha > 0} \|\alpha(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}\| \leq 1$ .
- $\langle G_a G_a^* z, z \rangle > 0, \quad z \neq 0$  en  $Z$ .
- Para todo  $z \in Z_1$  se tiene  $G_a u_\alpha = z - \alpha(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1} z$ , donde

$$u_\alpha = G_a^*(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1} z, \quad \alpha \in (0, 1].$$

Así,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} G_a u_\alpha = z$  y el error  $E_\alpha z$  de esta aproximación viene dada por

$$E_\alpha z = \alpha(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1} z, \quad \alpha \in (0, 1].$$

**Observación 5.4.2.** El teorema 5.4.2 implica que la familia de operadores lineales

$$\Gamma_\alpha z = (B + B^c)^* T_a^*(\cdot)(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1} z = G_a^*(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1} z,$$

es una inversa aproximada por la derecha del operador  $G_a$  en el siguiente sentido

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} G_a \Gamma_\alpha z = z, \quad \forall z \in Z_1.$$

En otras palabras,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} G_a \Gamma_\alpha = I,$$

en la topología fuerte de  $Z_1$ .

En consecuencia, se tiene el resultado.

**Teorema 5.4.3.** *El sistema (5.48) es aproximadamente controlable.*

*Demostración*

En primer lugar, es fácil ver que  $P_j(B + B^c)(B + B^c)^* = (B + B^c)(B + B^c)^* P_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Entonces, aplicando lema 3.1.2 parte (b), se obtiene que la controlabilidad aproximada del sistema (5.48) es equivalente a probar la controlabilidad aproximada de cada uno de los sistemas en dimensión finita

$$y' = \mathbb{A}_j y + (B + B^c)_j u(t), \quad y(t) \in \text{Ran}(P_j), \quad t \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, \quad (5.52)$$

donde  $(B + B^c)_j = P_j(B + B^c)_j : U \rightarrow \text{Ran}(P_j)$ ,

$$\begin{aligned} (B + B^c)_j u &= P_j(B + B^c)_j u \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + c \end{pmatrix} E_j u \\ &= D_j E_j u. \end{aligned}$$

Pero, la controlabilidad aproximada del sistema (5.52) es equivalente a la controlabilidad de cada de los siguiente sistemas

$$x' = C_j x + D_j u, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (5.53)$$

donde  $u \in \mathbb{R}$  y

$$C_j = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_j^2 \\ \frac{a}{\lambda_j^2} - 1 & -2\beta\lambda_j \end{pmatrix}, \quad C_j^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{\lambda_j^2} - 1 \\ \lambda_j^2 & -2\beta\lambda_j \end{pmatrix} = \tilde{K}_j, \quad j \geq 1.$$

Y es bien conocido (Lárez, Leiva, Uzcategui [34] y Leiva, Zambrano [46]) que el sistema (5.53) es controlable si, y sólo si,

$$\text{Rank}[D_j|C_jD_j] = 2,$$

el cual, haciendo los cálculos respectivos, es trivialmente cierto. En efecto, la controlabilidad de los sistemas (5.52) y (5.53) es equivalente a lo siguiente:

$$(B + B^c)_j^* e^{\mathbb{A}_j^* t} y = 0, \quad \forall t \in [0, \tau] \Rightarrow y = 0, \quad y \in \text{Ran}(P_j).$$

$$D_j^* e^{C_j^* t} x = 0, \quad \forall t \in [0, \tau] \Rightarrow x = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Pero, por otro lado, se tiene que

$$(B + B^c)_j^* e^{\mathbb{A}_j^* t} y = D_j^* e^{\tilde{K}_j t} P_j y = D_j^* e^{C_j^* t} P_j y, \quad \forall t \in [0, \tau] \Rightarrow P_j y = y = 0.$$

En consecuencia, se tiene que el sistema (5.48) es aproximadamente controlable. ■

Para concluir, se demostrará que el sistema semilineal (5.33) es aproximadamente controlable. Para ello, dado que la función  $G(t, z, u)$  es suficientemente suave, se tiene que para todo  $z_0 \in Z_1$  y  $u \in L^2([0, \tau]; U)$  el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z'(t) = \mathbb{A}z + (B + B^c)u + G(t, z, u), & t \geq 0, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{5.54}$$

admite una única **Solución Moderada** dada por (Ver Goldstein [27], pg. 90)

$$z(t) = T_a(t)z_0 + \int_0^t T_a(t-s)(B^c + B)u(s)ds + \int_0^t T_a(t-s)G(s, z, u)ds, \quad t \in [0, \tau]. \tag{5.55}$$

**Observación 5.4.3.** (ver H. Leiva [36] y [37]) La función  $G$  es suficientemente suave si:

- La solución moderada  $z(u) = z_u$  del problema (5.54) es única.
- La solución moderada  $z(u) = z_u$  depende continuamente de  $u$ .
- Más aún, si  $F$  es una función Lipschitz, entonces  $z(u) = z_u$  como función de  $u$ , también es una función Lipschitz.

**Observación 5.4.4.** La controlabilidad aproximada del sistema (5.54) consiste en:

Dado dos estados  $z_0, z_1 \in Z_1$ , encontrar un control  $u \in L^2([0, \tau]; U)$  tal que la correspondiente solución moderada (5.55)  $z = z_u = z(u)$  satisface

$$z_1 \approx T_a(\tau)z_0 + \int_0^\tau T_a(\tau-s)(B^c + B)u(s)ds + \int_0^\tau T_a(\tau-s)G(s, z_u, u)ds,$$

es decir,

$$z_1 - T_a(\tau)z_0 \approx \int_0^\tau T_a(\tau-s)(B^c + B)u(s)ds + \int_0^\tau T_a(\tau-s)G(s, z_u, u)ds,$$

es decir,

$$z_1 - T_a(\tau)z_0 \approx G_a(u) + \int_0^\tau T_a(\tau-s)G(s, z_u, u)ds.$$

es decir,

$$G_a(u) \approx z_1 - T_a(\tau)z_0 - \int_0^\tau T_a(\tau-s)G(s, z_u, u)ds,$$

donde la notación  $l \approx m$  indica que  $l$  es aproximadamente igual a  $m$ .

**Observación 5.4.5.** Sin perder generalidad, en lo adelante, supondremos que el estado inicial  $z_0$  es fijo.

Estas observaciones sirven de motivación para dar la siguiente definición:

**Definición 5.4.2.** Para el sistema (5.54) se definen los siguientes conceptos: El operador de controlabilidad no lineal (para  $\tau > 0$ )

$G_g : L^2([0, \tau]; U) \longrightarrow Z_1$  dado por

$$G_g u = \int_0^\tau T_a(\tau - s)(B^c + B)u(s)ds + \int_0^\tau T_a(\tau - s)G(\tau, z_u, u)ds = G_a(u) + H(u)$$

donde  $H : L^2([0, \tau]; U) \rightarrow Z_1$  es el operador no lineal dado por

$$H(u) = \int_0^\tau T_a(\tau - s)G(\tau, z_u, u)ds.$$

donde  $z = z_u = z(u)$  es la correspondiente solución moderada del problema de valor inicial (5.54).

El lema siguiente es trivial:

**Lema 5.4.2.** *El sistema (5.54) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$  si, y sólo si,  $\overline{\text{Rang}(G_g)} = Z_1$ .*

Demostración: (Suficiencia) Supongase que el sistema (5.54) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$ , esto es, para todo  $z_1 \in Z_1$  y  $\epsilon > 0$  existe un control  $u \in L^2([0, \tau]; U)$  tal que la correspondiente solución moderada del problema de valor inicial (5.54) satisface que:

$$\|z(\tau) - z_1\|_{Z_1} \leq \epsilon.$$

Ahora bien, probaremos que  $\overline{\text{Rang}(G_g)} = Z_1$ . En efecto, dado  $z \in Z_1$  y  $z_1 = z + T(\tau)z_0$  se obtiene que

$$\|z(\tau) - z_1\|_{Z_1} = \|z(\tau) - T(\tau)z_0 - z\|_{Z_1} = \|G_g(u) - z\|_{Z_1} \leq \epsilon,$$

el cual implica que  $\overline{\text{Rang}(G_g)} = Z_1$ .

(Necesaria) Supongamos que  $\overline{\text{Rang}(G_g)} = Z_1$ , es decir, para todo  $\epsilon > 0$  y  $z \in Z_1$  existe un control  $u \in L^2([0, \tau]; U)$  tal que

$$\|G_g(u) - z\|_{Z_1} \leq \epsilon.$$

Ahora bien, para todo  $z_1 \in Z_1$  y  $\epsilon > 0$ ,  $z = z_1 - T_a(\tau)z_0$ , obtenemos que

$$\|G_g(u) - z\|_{Z_1} = \|G_g(u) + T(\tau)z_0 - z_1\|_{Z_1} = \|z(\tau) - z_1\|_{Z_1} \leq \epsilon,$$

el cual implica que el sistema (5.54) es aproximadamente controlable. ■

De la observaciones anteriores y lema 5.4.2 se tiene la siguiente aproximación

$$G_a(u) \approx z_1 - T_a(\tau)z_0 - H(u) = z - H(u),$$

donde  $z = z_1 - T_a(\tau)z_0$ . Esto motiva la siguiente definición

**Definición 5.4.3.** *La ecuación dada a continuación será llamada ecuación de controlabilidad asociada al sistema no lineal (5.54)*

$$u = \Gamma_\alpha(z - H(u)) = G_a^*(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}(z - H(u)), \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

**Teorema 5.4.4.** *El sistema (5.54) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$ . Más aún, existe una sucesión de controles tal que la solución asociada al sistema (5.54) satisface que inicia en un estado  $z_0$  y finaliza en una vecindad de radio  $\epsilon$  de un estado  $z_1$  en un tiempo  $\tau > 0$  y vienen dados por*

$$u_\alpha(t) = (B + B^c)^* T_a^*(\tau - t)(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}(z_1 - T_a(\tau)z_0 - H(u_\alpha)),$$

y el error de esta aproximación  $E_\alpha$  viene dado por

$$E_\alpha = \alpha(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}(z_1 - T_a(\tau)z_0 - H(u_\alpha)).$$

**Demostración**

Para cada  $z \in Z_1$  fijo consideremos la familia de operadores no lineales siguiente

$K_\alpha : L^2([0, \tau]; U) \longrightarrow L^2([0, \tau]; U)$  dada por

$$K_\alpha(u) = \Gamma_\alpha(z - H(u)) = G_a^*(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}(z - H(u)), \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

En primer lugar, se probará que para todo  $\alpha \in (0, 1]$  el operador  $K_\alpha$  tiene un punto fijo  $u_\alpha$ . En efecto, ya que el semigrupo  $\{T_a(t)\}_{t \geq 0}$  es compacto, usamos el resultado de D. Barcenás, H. Leiva y Z. Sivoli ( ver [3]), la suavidad y el acotamiento del término no lineal  $G$  para obtener que el operador  $H$  es compacto y más aún el conjunto  $\overline{\text{Rang}(H)}$  también es compacto.

Por otro lado, ya que el operador  $G$  es acotado y  $\|T_a(t)\| \leq M e^{-\mu t}$ ,  $t \geq 0$ , se tiene que existe una constante  $R > 0$  tal que

$$\|H(u)\| \leq R, \quad \forall u \in L^2(0, \tau; U).$$

Entonces,

$$\|K_\alpha(u)\| \leq \| \Gamma_\alpha \| (\|z\| + R), \quad \forall u \in L^2(0, \tau; U).$$

Por lo tanto, el operador  $K_\alpha$  envía la bola  $B_r(0) \subset L^2(0, \tau; U)$  de centro cero y radio  $r \geq \| \Gamma_\alpha \| (\|z\| + R)$  en si mismo. Así, aplicando el teorema

de punto fijo de Schauder se obtiene que el operador  $K_\alpha$  tiene un punto fijo  $u_\alpha \in B_r(0) \subset L^2([0, \tau]; U)$ .

Ya que  $\overline{Rang(H)}$  es compacto, sin perder generalidad, podemos suponer que la sucesión  $H(u_\alpha)$  converge a  $y \in Z_1$ . Así, si

$$u_\alpha = \Gamma_\alpha(z - H(u_\alpha)) = G_a^*(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}(z - H(u_\alpha)),$$

entonces,

$$\begin{aligned} G_a u_\alpha &= G_a \Gamma_\alpha(z - H(u_\alpha)) = G_a G_a^*(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}(z - H(u_\alpha)) \\ &= (\alpha I + G_a G_a^* - \alpha I)(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}(z - H(u_\alpha)) \\ &= z - H(u_\alpha) - \alpha(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}(z - H(u_\alpha)). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$G_a u_\alpha + H(u_\alpha) = z - \alpha(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}(z - H(u_\alpha)).$$

Para concluir la prueba de este teorema, es necesario probar que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{-\alpha(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}(z - H(u_\alpha))\} = 0.$$

Del teorema 5.4.2 parte (d) se tiene que

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{-\alpha(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}(z - H(u_\alpha))\} \\ &= - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{-\alpha(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}H(u_\alpha)\} \\ &= - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{-\alpha(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}(H(u_\alpha) - y)\} \\ &\quad - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{-\alpha(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}y\} \\ &= - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{-\alpha(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}(H(u_\alpha) - y)\}. \end{aligned}$$

Por otro lado, del teorema 5.4.2 parte (e) se tiene que

$$\|\alpha(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}(H(u_\alpha) - y)\| \leq \|H(u_\alpha) - y\|.$$

Por lo tanto, se obtiene que  $H(u_\alpha)$  converge a  $y$ , por lo que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{-\alpha(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}(H(u_\alpha) - y)\} = 0$$

En consecuencia,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{-\alpha(\alpha I + G_a G_a^*)^{-1}(z - H(u_\alpha))\} = 0.$$

Finalmente, haciendo  $z = z_1 - T_a(\tau)z_0$  y usando la solución moderada dada por (5.55), se obtiene la prueba:

$$z_1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{T_a(\tau)z_0 + \int_0^\tau T_a(\tau - s)(B^c + B)u_\alpha(s)ds + \int_0^\tau T_a(\tau - s)G(s, z_{u_\alpha}, u_\alpha)ds\}.$$

■

### 5.4.1. Controlabilidad de la Ecuación de la Viga Semilineal con Impulso

Consideremos la siguiente ecuación de la viga semilineal con impulso

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} &= 2\beta\Delta \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} - \Delta^2 y(t, x) + u(t, x) + f(t, y, y_t, u), \text{ en } (0, \tau) \times \Omega, \\ y(t, x) &= \Delta y(t, x) = 0, \text{ sobre } (0, \tau) \times \partial\Omega, \\ y(0, x) &= y_0(x), \quad y_t(x) = v_0(x), x \in \Omega, \\ y_t(t_k^+, x) &= y_t(t_k^-, x) + I_k(t, y(t_k, x), y_t(t_k, x), u(t_k, x)), x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.56)$$

donde  $\beta > 1$ ,  $\Omega$  es un dominio acotado suficientemente regular en  $\mathbb{R}^N$ , el control distribuido  $u$  pertenece a  $C([0, \tau]; L^2(\Omega))$  y  $f, I_k \in C([0, \tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, p$ , tales que

$$|f(t, y, v, u)| \leq a_0(|y|^{\alpha_0} + |v|^{\alpha_0}) + b_0|u|^{\beta_0} + c_0, \quad u, y, v \in \mathbb{R}. \quad (5.57)$$

$$|I_k(t, y, v, u)| \leq a_k(|y|^{\alpha_k} + |v|^{\alpha_k}) + b_k|u|^{\beta_k} + c_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, p. \quad (5.58)$$

con  $\frac{1}{2} \leq \alpha_k < 1$ ,  $\frac{1}{2} \leq \beta_k < 1$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, p$ .

$$\begin{aligned} y(t_k, x) &= y(t_k^+, x) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} y(t, x), & y(t_k^-, x) &= \lim_{t \rightarrow t_k^-} y(t, x), \\ y_t(t_k, x) &= y_t(t_k^+, x) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} y_t(t, x), & y_t(t_k^-, x) &= \lim_{t \rightarrow t_k^-} y_t(t, x). \end{aligned}$$

Aquí el espacio estado es  $Z_1 = [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times L^2(\Omega) = D(-\Delta) \times L^2(\Omega)$  dotado con la norma del gráfico; esto es:

$$\left\| \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \right\|_{Z_1} = \sqrt{\|(-\Delta)y\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2},$$

donde

$$\|v\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\Omega} \|v(x)\|^2 dx}, \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

En casi todas las referencias sobre ecuaciones diferenciales con impulso el espacio natural para trabajar es el espacio de Banach

$$PC([0, \tau]; Z_1) = \{z : J = [0, \tau] \rightarrow Z_1 : z \in C(J'; Z_1), \exists z(t_k^+, \cdot), z(t_k^-, \cdot) \text{ y } z(t_k, \cdot) = z(t_k^+, \cdot)\},$$

dotado con la norma

$$\|z\|_0 = \sup_{t \in [0, \tau]} |z(t, \cdot)|_{Z_1}.$$

**Definición 5.4.4. (Controlabilidad Aproximada)** *El sistema (5.56) se dice que es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$  si para todo  $z_0, z_1 \in Z_1, \varepsilon > 0$  existe  $u \in C(0, \tau; U) (U = Z)$  tal que la solución  $z(t)$  de (5.56) correspondiente a  $u$  verifica que:*

$$z(0) = z_0 \text{ y } \|z(\tau) - z_1\|_{Z_1} < \varepsilon, \quad (\text{Fig.2})$$

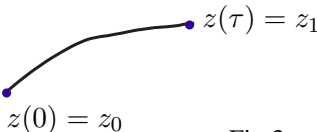


Fig.1

Fig.3

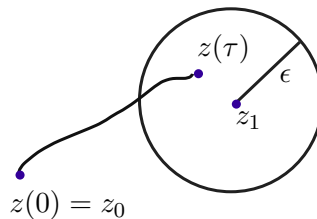


Fig.2

**Definición 5.4.5. (Controlabilidad por Trayectoria)** *El sistema (5.56) se dice que es controlable por trayectoria sobre  $[0, \tau]$  si para todo  $z_0, \hat{z}_0 \in Z_1$  and  $\hat{u} \in C(0, \tau; U)$  there exists  $u \in L^2(0, \tau; U)$  such la solución moderada  $z(t)$  de (5.56) correspondiente a  $u$  verifica que:*

$$z(\tau, z_0, u) = z(\tau, \hat{z}_0, \hat{u}) \quad (\text{Fig.3}).$$

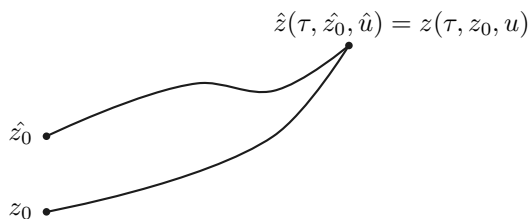


Fig.3

**Definición 5.4.6. (Controlabilidad Nula)** El sistema (5.56) se dice que controlable nulo sobre  $[0, \tau]$  si para todo  $z_0 \in Z_1$  existe  $u \in C(0, \tau; U)$  tal que la solución moderada  $z(t)$  de (5.56) correspondiente a  $u$  verifica que:

$$z(0) = z_0 \quad \text{y} \quad z(\tau) = 0 \quad (\text{Fig.4}).$$



Fig.4

**Observación 5.4.6.** Es claro que la controlabilidad exacta del sistema (5.56) implica la controlabilidad aproximada, la controlabilidad nula y la controlabilidad por trayectoria del sistema. Pero, es bien conocido (D. Barcenás, H. Leiva y Z. Sivoli, ver [3]) que en el caso de efectos difusivos o compacidad del semigrupo generado por la ecuación lineal asociada, la ecuación de la Viga puede no ser exactamente controlable. También se puede observar que en el caso lineal la controlabilidad por trayectoria y la controlabilidad nula son equivalentes. Sin embargo, la controlabilidad aproximada y la controlabilidad nula son, en general, independientes. Por lo tanto, en este caso sólo nos concentraremos en el estudio de la controlabilidad aproximada del sistema (5.56).

El esquema a seguir es el siguiente: En primer lugar, se tiene que la

ecuación de la Viga dada por:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} &= 2\beta\Delta \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} - \Delta^2 y(t, x) + u(t, x) + f(t, y, y_t, u), \\ &\text{in } (0, \tau) \times \Omega, \\ y(t, x) &= \Delta y(t, x) = 0, \text{ on } (0, \tau) \times \partial\Omega, \\ y(0, x) &= y_0(x), \quad y_t(x) = v_0(x), x \in \Omega, \end{cases} \tag{5.59}$$

es aproximadamente controlable, ver A. Carrasco, H. Leiva y J.L. Sanchez [9]. En segundo lugar, la compacidad del semigrupo generado por la ecuación lineal, las condiciones (5.57) - (5.58) que satisfacen los términos no lineales  $f, I_k$  y el siguiente resultado:

**Proposición 5.4.1.** *Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida con  $\mu(X) < \infty$  y  $1 \leq q < r < \infty$ . Entonces  $L_r(\mu) \subset L_q(\mu)$  y*

$$\|f\|_q \leq \mu(X)^{\frac{r-q}{rq}} \|f\|_r, \quad f \in L_r(\mu). \tag{5.60}$$

en conjunto con el teorema de Rothe 1.5.3, permiten probar que el sistema (5.56) es aproximadamente controlable.

Para escribir la ecuación de la Viga con impulso (5.56) en una ecuación diferencial abstracta se consideran resultados obtenidos por R. F. Curtain, A. J. Pritchard [11] pg.46, Lawrence C. Evans [25] pg.335 y C. Kesavan [31] pg.147:

En efecto, consideremos el espacio de Hilbert  $Z = L^2(\Omega)$  y  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_j \rightarrow \infty$  los autovalores de  $-\Delta$  con condiciones de homogéneas de Dirichlet, cada uno con multiplicidad  $\gamma_j$  igual a la dimensión del correspondiente autoespacio. Y consideremos el operador lineal no acotado  $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$  definido por  $A\phi = -\Delta\phi$ , donde:

$$D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

En consecuencia, el sistema (5.56) puede ser escrito como una ecuación diferencial abstracta con impulso en  $Z$ :

$$\begin{cases} z' = \mathcal{A}z + Bu + F(t, z, u), \quad z \in Z_1, \quad t \in (0, \tau], t \neq t_k, \\ z(0) = z_0, \\ z(t_k^+) = z(t_k^-) + I_k^e(t_k, z(t_k), u(t_k)), \quad k = 1, 2, 3, \dots, p. \end{cases} \tag{5.61}$$

donde  $u \in C([0, \tau]; U)$ ,  $U = Z = L^2(\Omega)$ ,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_Z \\ -A^2 & -2\beta A \end{bmatrix} \tag{5.62}$$

es un operador lineal no acotado con dominio

$$D(\mathcal{A}) = \{y \in H^4(\Omega) : y = \Delta y = 0\} \times D(A),$$

esto es,

$$z = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \in D(\mathcal{A}) \Leftrightarrow y \in \{y \in H^4(\Omega) : y = \Delta y = 0\} \quad y \quad v \in D(A).$$

$I = I_Z : Z \rightarrow Z = L^2(\Omega)$  es el operador identidad,  $B : U \rightarrow Z_1$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_Z \end{bmatrix}$  es un operador lineal acotado y  $F, I_k^e : [0, \tau] \times Z_1 \times U \rightarrow Z_1$  son funciones suaves definidas como:

$$F(t, z, u)(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t, w(x), v(x), u(x)) \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

y

$$I_k^e(t, z, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ I_k(t, w(x), v(x), u(x)) \end{bmatrix}, \quad (5.64)$$

$\forall x \in \Omega, k = 1, 2, \dots, p$ .

Por otro lado, de las condiciones (5.57) y (5.58) se siguen las estimaciones siguientes:

**Proposición 5.4.2.** *Bajo las condiciones (5.57)-(5.58) las funciones  $F, I_k^e : [0, \tau] \times Z_1 \times U \rightarrow Z_1, k = 1, 2, 3, \dots, p$ , definidas por (5.63) y (5.64) satisfacen que  $\forall u \in Z = L^2(\Omega) \forall z \in Z_1$ :*

$$\|F(t, z, u)\|_{Z_1} \leq \bar{a}_0 \|z\|_{Z_1}^{\alpha_0} + \bar{b}_0 \|u\|_Z^{\beta_0} + \bar{c}_0 \quad (5.65)$$

$$\|I_k^e(t, z, u)\|_{Z_1} \leq \bar{a}_k \|z\|_{Z_1}^{\alpha_k} + \bar{b}_k \|u\|_Z^{\beta_k} + \bar{c}_k, \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (5.66)$$

**Demostración**

$$\begin{aligned} \|F(t, z, u)\|_{Z_1}^2 &= \int_{\Omega} |f(t, w(x), v(x), u(x))|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \{a_0(|w(x)|^{\alpha_0} + |v(x)|^{\alpha_0}) + b_0|u(x)|^{\beta_0} + c_0\}^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \{4^2 a_0^2 (|w(x)|^{2\alpha_0} + |v(x)|^{2\alpha_0}) + 4^2 b_0^2 |u(x)|^{2\beta_0} + 4^2 c_0^2\} dx \\ &\leq 4^2 a_0^2 \int_{\Omega} (|w(x)|^{2\alpha_0} + |v(x)|^{2\alpha_0}) dx + 4^2 b_0^2 \int_{\Omega} |u(x)|^{2\beta_0} dx + 4^2 c_0^2 \mu(\Omega). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|F(t, z, u)\|_{Z_1} &\leq 4a_0 \left( \int_{\Omega} (|w(x)|^{2\alpha_0} + |v(x)|^{2\alpha_0}) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ 4b_0 \left( \int_{\Omega} |u(x)|^{2\beta_0} dx \right)^{\frac{1}{2}} + 4c_0 \sqrt{\mu(\Omega)} \\ &= 4a_0 \left( \|w\|_{L^{2\alpha_0}}^{\alpha_0} + \|v\|_{L^{2\alpha_0}}^{\alpha_0} \right) + 4b_0 \|z\|_{L^{2\beta_0}}^{\beta_0} + 4c_0 \sqrt{\mu(\Omega)} \end{aligned}$$

Ahora bien, ya que  $\frac{1}{2} \leq \alpha_0 < 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2\alpha_0 < 2$  y  $\frac{1}{2} \leq \beta_0 < 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2\beta_0 < 2$ , se obtiene aplicando la proposición 5.4.1, que:

$$\|F(t, z, u)\|_{Z_1} \leq 4a_0 \mu(\Omega)^{\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}} (\|w\|_Z^{\alpha_0} + \|v\|_Z^{\alpha_0}) + 4b_0 \mu(\Omega)^{\frac{1-\beta_0}{\beta_0}} \|u\|_U^{\beta_0} + 4c_0 \sqrt{\mu(\Omega)}.$$

Luego, de la inclusión continua  $Z^1 \subset Z$ , existe una constante  $L > 0$  tal que

$$\|z\| \leq L \|z\|_1, \quad \forall z \in Z^1.$$

Por lo tanto,

$$\|F(t, z, u)\|_{Z_1} \leq 4a_0 \mu(\Omega)^{\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}} (L \|w\|_1^{\alpha_0} + \|v\|_Z^{\alpha_0}) + 4b_0 \mu(\Omega)^{\frac{1-\beta_0}{\beta_0}} \|u\|_U^{\beta_0} + 4c_0 \sqrt{\mu(\Omega)}.$$

Así, considerando  $m = \max\{L, 1\}$  se obtiene que

$$\|F(t, z, u)\|_{Z_1} \leq m 4a_0 \mu(\Omega)^{\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}} (\|w\|_1^{\alpha_0} + \|v\|_Z^{\alpha_0}) + 4b_0 \mu(\Omega)^{\frac{1-\beta_0}{\beta_0}} \|u\|_U^{\beta_0} + 4c_0 \sqrt{\mu(\Omega)}.$$

Finalmente, usando el hecho que  $\|w\|_1, \|v\| \leq \sqrt{\|w\|_1^2 + \|v\|^2} = \|z\|_{Z_1}$  se tiene que

$$\|F(t, z, u)\|_{Z_1} \leq 8ma_0 \mu(\Omega)^{\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}} \|z\|_{Z_1}^{\alpha_0} + 4b_0 \mu(\Omega)^{\frac{1-\beta_0}{\beta_0}} \|u\|_U^{\beta_0} + 4c_0 \sqrt{\mu(\Omega)}.$$

Análogamente, se obtiene la estimación para

$$\|I_k^c(t, z, u)\|_{Z_1} \leq 8ma_k \mu(\Omega)^{\frac{1-\alpha_k}{\alpha_k}} \|z\|_{Z_1}^{\alpha_k} + 4b_k \mu(\Omega)^{\frac{1-\beta_k}{\beta_k}} \|u\|_U^{\beta_k} + 4c_k \sqrt{\mu(\Omega)},$$

con  $k = 1, 2, 3, \dots, p$ , lo cual completa la prueba. ■

El teorema que a continuación enunciaremos se puede encontrar en el artículo de A. Carrasco, H. Leiva y J.L. Sanchez, ver [9].

**Teorema 5.4.5.** *El operador  $\mathcal{A}$  es el generador infinitesimal de un semigrupo compacto fuertemente continuo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  representado por*

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\mathbb{A}_j t} P_j z, \quad z \in Z_1, \quad t \geq 0, \quad (5.67)$$

donde  $\{P_j\}_{j \geq 0}$  es una familia completa de proyecciones ortogonales en el espacio de Hilbert  $Z_1$  dado por

$$P_j = \text{diag}(E_j, E_j), \quad (5.68)$$

y

$$\mathbb{A}_j = K_j P_j, \quad K_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_j^2 & -2\beta\lambda_j \end{bmatrix} \quad j \geq 1,$$

y el operador adjunto  $\mathbb{A}^*$  del operador  $\mathbb{A}$  viene dado por

$$\mathbb{A}_j^* = \tilde{K}_j P_j, \quad \tilde{K}_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \lambda_j^2 & -2\beta\lambda_j \end{bmatrix} \quad j \geq 1.$$

Más aún, los autovalores  $\sigma_1(j)$ ,  $\sigma_2(j)$ , de la matriz  $K_j$  son simples y dados por:

$$\sigma_1(j) = -\lambda_j \rho_1, \quad \sigma_2(j) = -\lambda_j \rho_2$$

donde  $0 < \rho_1 < \rho_2$  son dados por

$$\rho_1 = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \quad \text{and} \quad \rho_2 = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}; \quad , \quad \beta^2 > 1,$$

y este semigrupo decae exponencialmente a cero

$$\|T(t)\| \leq m e^{-\mu t}, \quad t \geq 0,$$

donde  $\mu = \lambda_1 \rho_1$  and  $\|T(t)\| = \sup_{\|z\|=1} \|T(t)z\|$ .

A continuación se demostrará que el sistema lineal sin impulso es aproximadamente controlable. Para ello, para todo  $z_0 \in Z_1$  y  $u \in L^2([0, \tau]; U)$ , se tiene que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z'(t) = \mathcal{A}z(t) + Bu(t), & z \in Z_1, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (5.69)$$

admite una única solución moderada dada por

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds; \quad t \in [0, \tau]. \quad (5.70)$$

**Definición 5.4.7.** Para el sistema (5.69) se define el siguiente concepto: El operador controlabilidad (para  $\tau > 0$ )  $G : L^2([0, \tau]; U) \rightarrow Z_1$  es definido por

$$Gu = \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds, \quad (5.71)$$

cuyo operador autoadjunto  $G^* : Z_1 \rightarrow L^2([0, \tau]; U)$  viene dado por

$$(G^*z)(s) = B^*T(\tau - s)z, \quad \forall s \in [0, \tau], \quad \forall z \in Z_1. \quad (5.72)$$

La prueba del lema siguiente es trivial.

**Lema 5.4.3.** El sistema (5.69) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$  si, y sólo si,  $\overline{\text{Rang}(G)} = Z_1$ .

El teorema a continuación es una caracterización de la controlabilidad para el sistema (5.69):

**Teorema 5.4.6.** (H. Leiva, N. Merentes y J.L. Sanchez, ver [9], [38], [39]) El sistema (5.69) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$  si, y sólo si, cada una de las siguientes condiciones se tienen:

- $\overline{\text{Rang}(G)} = Z_1$ .
- $\text{Ker}(G^*) = \{0\}$ .
- $B^*T^*(s)z = 0, \quad \forall s \in [0, \tau] \implies z = 0$ .
- $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}z = 0$ .
- $\langle GG^*z, z \rangle > 0, \quad z \neq 0$  in  $Z_1$ .
- Para todo  $z \in Z_1$  se tiene que  $Gu_\alpha = z - \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}z$ , donde

$$u_\alpha = G^*(\alpha I + GG^*)^{-1}z, \quad \alpha \in (0, 1].$$

En consecuencia,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} Gu_\alpha = z$  y el error  $E_\alpha z$  de la aproximación viene dada por

$$E_\alpha z = \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}z, \quad \alpha \in (0, 1].$$

**Observación 5.4.7.** El teorema 5.4.6 implica que la familia de operadores lineales

$$\Gamma_\alpha z = B^*T^*(\cdot)(\alpha I + GG^*)^{-1}z = G^*(\alpha I + GG^*)^{-1}z,$$

es una inversa aproximada por la derecha del operador  $G$  en el sentido que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} G\Gamma_\alpha = I$$

en la topología fuerte.

**Proposición 5.4.3.** Si  $\overline{\text{Rang}(G)} = Z_1$ , entonces

$$\sup_{\alpha > 0} \|\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}\| \leq 1.$$

El siguiente resultado fue probado por A. Carrasco, H. Leiva y J.L. Sanchez, ver [9].

**Teorema 5.4.7.** *El sistema (5.69) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$ . Más aún, existe una sucesión de controles de entrada del sistema (5.69) tal que la solución asociada satisface que inicia en un estado  $z_0$  y finaliza en una vecindad de radio  $\epsilon$  de un estado final  $z_1$  en un tiempo  $\tau > 0$  dado por*

$$u_\alpha(t) = B_\omega^* T^*(\tau - t)(\alpha I + GG^*)^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0),$$

y el error de esta aproximación  $E_\alpha$  viene dado por

$$E_\alpha = \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0).$$

Finalmente se demostrara que la ecuación de la Viga semilineal con impulso dada por (5.56), es aproximadamente controlable o equivalentemente que el sistema (5.61) es aproximadamente controlable. Para ello, para todo  $z_0 \in Z_1$  y  $u \in C(0, \tau; U)$  se tiene que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z' = \mathcal{A}z + Bu + F(t, z, u), & t \in (0, \tau], t \neq t_k, \quad z \in Z_1 \\ z(0) = z_0, \\ z(t_k^+) = z(t_k^-) + I_k^e(t, z(t_k), u(t_k)), \quad k = 1, 2, 3, \dots, p. \end{cases} \quad (5.73)$$

admite una única solución moderada dada por

$$\begin{aligned} z_u(t) &= T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds \\ &+ \int_0^t T(t-s)F(s, z_u(s), u(s))ds \\ &+ \sum_{0 < t_k < t} T(t-t_k)I_k^e(t_k, z(t_k), u(t_k)), \quad t \in [0, \tau]. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Para lograr el objetivo, la idea es transformar el problema de controlabilidad a la existencia de un punto fijo de un operador no lineal:

Por tanto, se define el operador  $\mathcal{K}^\alpha : PC([0, \tau]; Z_1) \times C(0, \tau; U) \rightarrow PC([0, \tau]; Z_1) \times C(0, \tau; U)$  dado por la fórmula siguiente:

$$(y, v) = (\mathcal{K}_1^\alpha(z, u), \mathcal{K}_2^\alpha(z, u)) = \mathcal{K}^\alpha(z, u)$$

donde

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{K}_1^\alpha(z, u)(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)B(\Gamma_\alpha \mathcal{L}(z, u))(s)ds \\ &+ \int_0^t T(t-s)F(s, z(s), u(s))ds + \sum_{0 < t_k < t} T(t-t_k)I_k^e(t_k, z(t_k), u(t_k)), \end{aligned} \quad (5.75)$$

y

$$v(t) = \mathcal{K}_2^\alpha(z, u)(t) = (\Gamma_\alpha \mathcal{L}(z, u))(t) = B^*T^*(\tau - t)(\alpha I + \mathcal{W})^{-1}\mathcal{L}(z, u), \quad (5.76)$$

con  $\mathcal{L} : PC([0, \tau]; Z_1) \times C(0, \tau; U) \rightarrow Z_1$  dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(z, u) &= z_1 - T(\tau)z_0 - \int_0^\tau T(\tau-s)F(s, z(s), u(s))ds \\ &- \sum_{0 < t_k < \tau} T(\tau-t_k)I_k^e(t_k, z(t_k), u(t_k)). \end{aligned} \quad (5.77)$$

**Teorema 5.4.8.** *El sistema no lineal (5.61) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$ . Más aún, existe una sucesión de controles, tales que la solución asociada al sistema (5.61) satisface que inicia en un estado inicial  $z_0$  y tiene como punto de llegada un estado en una vecindad de radio  $\epsilon$  del estado final  $z_1$  en un tiempo  $\tau > 0$  dados por*

$$u_\alpha(t) = B^*T^*(\tau - t)(\alpha I + \mathcal{W})^{-1}\mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha),$$

y el error de esta aproximación  $E_\alpha z$  viene dado por

$$E_\alpha z = \alpha(\alpha I + \mathcal{W})^{-1}\mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha),$$

donde

$$\begin{aligned} z_\alpha(t) &= T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu_\alpha(s)ds \\ &+ \int_0^t T(t-s)F(s, z_\alpha(s), u_\alpha(s))ds \\ &+ \sum_{0 < t_k < t} T(t-t_k)I_k^e(t_k, z_\alpha(t_k), u_\alpha(t_k)), \quad t \in [0, \tau]. \end{aligned}$$

Demostración

La prueba se divide en un conjunto de afirmaciones. Pero antes note que  $\|B\| = 1$  y  $\|T(t)\| \leq me^{-\mu t}$ ,  $t \geq 0$ .

**Afirmación 1.** El operador  $\mathcal{K}^\alpha$  es continuo. En efecto, en primer lugar, probemos que los operadores:

$$\mathcal{K}_1^\alpha : PC([0, \tau]; Z_1) \times C(0, \tau; U) \rightarrow PC([0, \tau]; Z_1)$$

y

$$\mathcal{K}_2^\alpha : PC([0, \tau]; Z_1) \times C(0, \tau; U) \rightarrow C(0, \tau; U),$$

definidos por (5.75) y (5.76) son continuos. La continuidad de  $\mathcal{K}_1^\alpha$  se sigue de la continuidad de las funciones no lineales  $F(t, z, u)$ ,  $I_k^e(z, u)$  y de la estimación siguiente

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_1^\alpha(z, u) - \mathcal{K}_1^\alpha(w, v)\| &\leq M_1 \|u - v\| + M_2 \sup_{s \in J} \|F(s, z(s), u(s)) - F(s, w(s), v(s))\| \\ &\quad + M_3 \sum_{0 < t_k < \tau} \|I_k^e(t_k, z(t_k), u(t_k)) - I_k^e(t_k, w(t_k), v(t_k))\|. \end{aligned}$$

La continuidad del operador  $\mathcal{K}_2^\alpha$  se sigue de la continuidad de los operadores  $\mathcal{L}$  y  $\Gamma_\alpha$ .

**Afirmación 2.** El operador  $\mathcal{K}^\alpha$  es compacto. En efecto, sea  $D$  un subconjunto acotado de  $PC(J; Z_1) \times C(J; U)$ . Dado  $(z, u) \in D$  fijo pero arbitrario, se tiene que

$$\begin{aligned} \|F(\cdot, z, u)\|_0 &\leq M_4, & \|(\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \mathcal{L}(z, u)\| &\leq M_5, \\ \|\mathcal{L}(z, u)\| &\leq M_6, & \|I_K^e(\cdot, z, u)\|_0 &\leq M_k, \quad k = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mathcal{K}^\alpha(D)$  es uniformemente acotado.

Ahora bien, consideremos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}^\alpha(z, u)(t_2) - \mathcal{K}^\alpha(z, u)(t_1)\|_1 &= \|\mathcal{K}_1^\alpha(z, u)(t_2) - \mathcal{K}_1^\alpha(z, u)(t_1)\| \\ &\quad + \|\mathcal{K}_2^\alpha(z, u)(t_2) - \mathcal{K}_2^\alpha(z, u)(t_1)\|, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}_1^\alpha(z, u)(t_2) - \mathcal{K}_1^\alpha(z, u)(t_1)\| &\leq \|T(t_2) - T(t_1)\| \|z_0\| \\
&+ \int_0^{t_1} \|T(t_2 - s) - T(t_1 - s)\| \|\mathcal{L}(z, u)(s)\| ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \|T(t_2 - s)\| \|\mathcal{L}(z, u)(s)\| ds \\
&+ \int_0^{t_1} \|T(t_2 - s) - T(t_1 - s)\| \|F(s, (z, u)(s))\| ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \|T(t_2 - s)\| \|F(s, (z, u)(s))\| ds \\
&+ \sum_{0 < t_k < t_1} \|T(t_2 - t_k) - T(t_1 - t_k)\| \|I_k^e(t_k, (z, u)(t_k))\| \\
&+ \sum_{t_1 < t_k < t_2} \|T(t_2 - t_k) I_k^e(t_k, (z, u)(t_k))\|,
\end{aligned}$$

y

$$\|\mathcal{K}_2^\alpha(z, u)(t_2) - \mathcal{K}_2^\alpha(z, u)(t_1)\| \leq \|T^*(\tau - t_2) - T^*(\tau - t_1)\| \|(\alpha I + \mathcal{W})^{-1} \mathcal{L}(z, u)\|.$$

Por otro lado, dado que  $T(t)$  es un operador compacto para  $t > 0$ , se tiene que la función  $0 < t \rightarrow T(t)$  es uniformemente continua, ver Pazy [51]. Así,

$$\lim_{|t_2 - t_1| \rightarrow 0} \|T(t_2) - T(t_1)\| = 0, \quad t_2, t_1 > 0.$$

En consecuencia, si se toma una sucesión  $\{\phi_j : j = 1, 2, \dots\}$  sobre  $\mathcal{K}^\alpha(D)$ , esta sucesión es uniformemente acotada y equicontinua sobre el intervalo  $[0, t_1]$  y, por el teorema de Arzela, existe una subsucesión  $\{\phi_j^1 : j = 1, 2, \dots\}$  de  $\{\phi_j : j = 1, 2, \dots\}$ , la cual converge uniformemente sobre  $[0, t_1]$ .

Consideremos la sucesión  $\{\phi_j^1 : j = 1, 2, \dots\}$  sobre el intervalo  $(t_1, t_2]$ . En este intervalo la sucesión  $\{\phi_j^1 : j = 1, 2, \dots\}$  es uniformemente acotada y equicontinua, y por el mismo razonamiento, esta tiene una subsucesión  $\{\phi_j^2\}$  uniformemente convergente sobre  $[0, t_2]$ .

Continuando este procedimiento para los intervalos  $(t_2, t_3]$ ,  $(t_3, t_4]$ ,  $\dots$ ,  $(t_p, \tau]$ , obtenemos que la sucesión  $\{\phi_j^{p+1} : j = 1, 2, \dots\}$  converge uniformemente sobre el intervalo  $[0, \tau]$ . Esto significa que  $\overline{\mathcal{K}^\alpha(D)}$  es compacto, el cual implica que el operador  $\mathcal{K}^\alpha$  es compacto.

**Afirmación 3.**

$$\lim_{\|(z, u)\| \rightarrow \infty} \frac{\|\mathcal{K}^\alpha(z, u)\|}{\|(z, u)\|} = 0,$$

donde  $\| |(z, u)| \| = \|z\|_0 + \|u\|_0$  es la norma en el espacio  $PC([0, \tau]; Z) \times C(0, \tau; U)$ . En efecto, consideremos la estimación siguiente:

$$\|\mathcal{L}(z, u)\| \leq M_1 + M_2\{a_0\|z\|^{\alpha_0} + b_0\|u\|^{\beta_0} + \bar{c}_0\} + M_3 \sum_{0 < t_k < \tau} \{\bar{a}_k\|z\|^{\alpha_k} + \bar{b}_k\|u\|^{\beta_k} + \bar{c}_k\},$$

donde

$$M_1 = \|z_1\| + me^{-\mu\tau}\|z_0\|, \quad M_2 = \frac{m}{-\mu}(e^{-\mu\tau} - 1) \quad \text{and} \quad M_3 = me^{-\mu\tau}.$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_2^\alpha(z, u)\| &\leq M_3M_1\|(\alpha I + \mathcal{W})^{-1}\| + M_3M_2\|(\alpha I + \mathcal{W})^{-1}\|\{\bar{a}_0\|z\|^{\alpha_0} + \bar{b}_0\|u\|^{\beta_0} + \bar{c}_0\} \\ &\quad + M_3M_2\|(\alpha I + \mathcal{W})^{-1}\| \sum_{0 < t_k < \tau} \{\bar{a}_k\|z\|^{\alpha_k} + \bar{b}_k\|u\|^{\beta_k} + \bar{c}_k\}. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_1^\alpha(z, u)\| &\leq M_3\{\|z_0\| + M_1M_2\|(\alpha I + \mathcal{W})^{-1}\|\} \\ &\quad + M_2\{1 + M_2M_3\|(\alpha I + \mathcal{W})^{-1}\|\}\{\bar{a}_0\|z\|^{\alpha_0} + \bar{b}_0\|u\|^{\beta_0} + \bar{c}_0\} \\ &\quad + M_3\{1 + M_2M_3\|(\alpha I + \mathcal{W})^{-1}\|\} \sum_{0 < t_k < \tau} \{\bar{a}_k\|z\|^{\alpha_k} + \bar{b}_k\|u\|^{\beta_k} + \bar{c}_k\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}^\alpha(z, u)\| &= \|\mathcal{K}_1^\alpha(z, u)\| + \|\mathcal{K}_2^\alpha(z, u)\| \leq M_4 \\ &\quad + \{M_3M_2\|(\alpha I + \mathcal{W})^{-1}\|\{1 + \|B\|M_2\} + M_2\} \\ &\quad \{\bar{a}_0\|z\|^{\alpha_0} + \bar{b}_0\|u\|^{\beta_0} + \bar{c}_0\} \\ &\quad + \{M_3M_2\|(\alpha I + \mathcal{W})^{-1}\|\{1 + M_3\} + M_3\} \\ &\quad \sum_{0 < t_k < \tau} \{\bar{a}_k\|z\|^{\alpha_k} + \bar{b}_k\|u\|^{\beta_k} + \bar{c}_k\}, \end{aligned}$$

donde  $M_4$  viene dado por:

$$M_4 = M_3\{\|z_0\| + (M_2 + 1)M_1\|(\alpha I + \mathcal{W})^{-1}\|\}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathcal{K}^\alpha(z, u)\|}{\| |(z, u)| \|} &\leq \frac{M_4}{\|z\| + \|u\|} \\ &\quad + \{M_3M_2\|(\alpha I + \mathcal{W})^{-1}\|\{1 + M_2\}\} \\ &\quad \times \{a_0\|z\|^{\alpha_0-1} + b_0\|u\|^{\beta_0-1} + \frac{\bar{c}_0}{\|z\| + \|u\|}\} \\ &\quad + \{M_3M_2\|(\alpha I + \mathcal{W})^{-1}\|\{1 + M_3\} + M_3\} \times \\ &\quad \sum_{0 < t_k < \tau} \left\{ \bar{a}_k\|z\|^{\alpha_k-1} + \bar{b}_k\|u\|^{\beta_k-1} + \frac{\bar{c}_k}{\|z\| + \|u\|} \right\}, \end{aligned}$$

y

$$\lim_{\| (z,u) \| \rightarrow \infty} \frac{\| \mathcal{K}^\alpha(z,u) \|}{\| (z,u) \|} = 0. \tag{5.78}$$

**Afirmación 4.** El operador  $\mathcal{K}^\alpha$  tiene un punto fijo. En efecto, dado  $0 < \rho < 1$  fijo, existe  $R > 0$  suficientemente grande tal que

$$\| \mathcal{K}^\alpha(z,u) \| \leq \rho \| (z,u) \|, \quad \| (z,u) \| = R.$$

Así, si se denota por  $B(0,R)$  la bola de centro cero y radio  $R > 0$ , se obtiene que  $\mathcal{K}^\alpha(\partial B(0,R)) \subset B(0,R)$ . En consecuencia,  $\mathcal{K}^\alpha$  es una aplicación compacta y envía la esfera  $\partial B(0,R)$  dentro del interior de la bola  $B(0,R)$ . Luego aplicando el teorema de punto fijo de Rothe 1.5.3, se obtiene la existencia de un punto fijo  $(z_\alpha, u_\alpha) \in B(0,R) \subset PC([0,\tau]; Z_1) \times C(0,\tau; U)$  tal que

$$(z_\alpha, u_\alpha) = \mathcal{K}^\alpha(z_\alpha, u_\alpha). \tag{5.79}$$

**Afirmación 5.** La sucesión  $\{(z_\alpha, u_\alpha)\}_{\alpha \in (0,1]}$  es acotada. En efecto, supongamos por reducción al absurdo que  $\{(z_\alpha, u_\alpha)\}_{\alpha \in (0,1]}$  no es acotada. Entonces, existe una subsucesión  $\{(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n})\}_{\alpha \in (0,1]} \subset \{(z_\alpha, u_\alpha)\}_{\alpha \in (0,1]}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| (z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n}) \| = \infty.$$

Por otro lado, de (5.78) se conoce que para todo  $\alpha \in (0,1]$  se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\| \mathcal{K}^\alpha(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n}) \|}{\| (z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n}) \|} = 0.$$

Particularmente, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\| \mathcal{K}^{\alpha_1}(z_{\alpha_1}, u_{\alpha_1}) \|}{\| (z_{\alpha_1}, u_{\alpha_1}) \|} & \frac{\| \mathcal{K}^{\alpha_1}(z_{\alpha_2}, u_{\alpha_2}) \|}{\| (z_{\alpha_2}, u_{\alpha_2}) \|} & \frac{\| \mathcal{K}^{\alpha_1}(z_{\alpha_3}, u_{\alpha_3}) \|}{\| (z_{\alpha_3}, u_{\alpha_3}) \|} & \dots & \frac{\| \mathcal{K}^{\alpha_1}(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n}) \|}{\| (z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n}) \|} & \rightarrow & 0. \\ \frac{\| \mathcal{K}^{\alpha_2}(z_{\alpha_1}, u_{\alpha_1}) \|}{\| (z_{\alpha_1}, u_{\alpha_1}) \|} & \frac{\| \mathcal{K}^{\alpha_2}(z_{\alpha_2}, u_{\alpha_2}) \|}{\| (z_{\alpha_2}, u_{\alpha_2}) \|} & \frac{\| \mathcal{K}^{\alpha_2}(z_{\alpha_3}, u_{\alpha_3}) \|}{\| (z_{\alpha_3}, u_{\alpha_3}) \|} & \dots & \frac{\| \mathcal{K}^{\alpha_2}(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n}) \|}{\| (z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n}) \|} & \rightarrow & 0. \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \frac{\| \mathcal{K}^{\alpha_k}(z_{\alpha_1}, u_{\alpha_1}) \|}{\| (z_{\alpha_1}, u_{\alpha_1}) \|} & \frac{\| \mathcal{K}^{\alpha_k}(z_{\alpha_2}, u_{\alpha_2}) \|}{\| (z_{\alpha_2}, u_{\alpha_2}) \|} & \frac{\| \mathcal{K}^{\alpha_k}(z_{\alpha_3}, u_{\alpha_3}) \|}{\| (z_{\alpha_3}, u_{\alpha_3}) \|} & \dots & \frac{\| \mathcal{K}^{\alpha_k}(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n}) \|}{\| (z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n}) \|} & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Ahora bien, aplicando el proceso de diagonalización de Cantor, se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\| \mathcal{K}^{\alpha_n}(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n}) \|}{\| (z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n}) \|} = 0,$$

y de (5.79) se sigue que

$$\frac{\| \mathcal{K}^{\alpha_n}(z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n}) \|}{\| (z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n}) \|} = 1,$$

lo cual es evidentemente una contradicción. Entonces, la afirmación es cierta y por tanto existe  $\gamma > 0$  tal que

$$\| (z_{\alpha_n}, u_{\alpha_n}) \| \leq \gamma, \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

Por lo tanto, sin perder generalidad, podemos suponer que la sucesión  $\mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha)$  converge a  $y \in Z$ . Así, si

$$u_\alpha = \Gamma_\alpha \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) = G^*(\alpha I + GG^*)^{-1} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha).$$

entonces,

$$\begin{aligned} Gu_\alpha &= G\Gamma_\alpha \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) = GG^*(\alpha I + GG^*)^{-1} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) \\ &= (\alpha I + GG^* - \alpha I)(\alpha I + GG^*)^{-1} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) \\ &= \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) - \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha). \end{aligned}$$

Luego,

$$Gu_\alpha + \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) = -\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha).$$

Para concluir la prueba de este teorema, es necesario demostrar que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{-\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha)\} = 0.$$

Pero del teorema 3.1.d se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha)\} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1} y \\ &+ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1} (\mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) - y) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1} (\mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) - y). \end{aligned}$$

Por otro lado, de la proposición 3.1, se sigue que

$$\| \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1} (\mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) - y) \| \leq \| \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) - y \|.$$

En consecuencia, ya que  $\mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha)$  converge a  $y$ , se sigue que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{-\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1} (\mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) - y)\} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{-\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha)\} = 0.$$

Entonces,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{Gu_\alpha + \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha)\} = 0.$$

En conclusión,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau - s)Bu_\alpha(s)ds + \int_0^\tau T(\tau - s)F(s, z_\alpha(s), u_\alpha(s))ds \\ + \sum_{0 < t_k < \tau} T(\tau - t_k)I_k^e(z_\alpha(t_k), u_\alpha(t_k))\} = z_1, \end{aligned}$$

■

**Teorema 5.4.9.** *El sistema semilineal con impulso (5.61) es aproximadamente controlable si para todo estado inicial  $z_0$  y un estado final  $z_1$  y  $\alpha \in (0, 1]$ , el operador  $\mathcal{K}^\alpha$  dado por (5.75)-(5.76) tiene un punto fijo y la sucesión  $\{\mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha)\}_{\alpha \in (0,1]}$  converge, es decir,*

$$(z_\alpha, u_\alpha) = \mathcal{K}^\alpha(z_\alpha, u_\alpha),$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{L}(z_\alpha, u_\alpha) = y \in Z.$$

### 5.4.2. Controlabilidad de la Ecuación de la Viga Perturbada

Consideremos la ecuación de la Viga con perturbación no lineal:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} &= 2\beta \Delta \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} - \Delta^2 y(t, x) + u(t, x) + f(t, y(t, x), y_t(t, x), u(t, x)), \\ y(t, x) &= \Delta y(t, x) = 0, \text{ sobre } (0, \tau) \times \partial\Omega, \\ y(0, x) &= y_0(x), \quad y_t(x) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{5.80}$$

donde  $\beta > 1$ ,  $\Omega$  es un dominio acotado suficientemente regular en  $\mathbb{R}^N$ , el control distribuido  $u$  pertenece a  $L^2([0, \tau]; U)$  ( $U = L^2(\Omega)$ ) y la función no lineal  $f : [0, \tau] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es suficientemente suave y existen números  $\eta, R, b, c \in \mathbb{R}$  con  $\frac{1}{2} \leq \eta \leq 1$  tal que

$$|f(t, y, v, u)| < b |u|^\eta + c, \quad \forall y, v, u \in \mathbb{R}, \tag{5.81}$$

Aquí el espacio estado es  $Z_1 = [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times L^2(\Omega) = D(-\Delta) \times L^2(\Omega)$  dotado con la norma del gráfico; esto es:

$$\left\| \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \right\|_{Z_1} = \sqrt{\|(-\Delta)y\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2},$$

donde

$$\|v\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\Omega} \|v(x)\|^2 dx}, \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

Bajo las condiciones anteriores se prueba que: El sistema no lineal (5.80) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$ . Más aún, se puede exhibir una sucesión de controles tal que la solución asociada al sistema satisface que parte de un estado inicial y finaliza en una vecindad de radio  $\epsilon$  del estado final, en un tiempo prefijado  $\tau$ .

Para ello, se hace uso del resultado preliminar siguiente:

**Proposición 5.4.4.** *Sea  $(X, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida con  $\mu(X) < \infty$  y  $1 \leq p < r < \infty$ . Entonces  $L_r(\mu) \subset L_p(\mu)$  y*

$$\|f\|_r \leq \mu(X)^{\frac{p-r}{rp}} \|f\|_p, \quad f \in L_p(\mu).$$

y del teorema 1.5.3 (Teorema de punto fijo de Rothe).

Sea  $Z = L^2(\Omega)$  y al igual que en los dos ejemplos anteriores consideremos el operador lineal no acotado  $A : D(A) \subset Z \rightarrow Z$  definido por  $A\phi = -\Delta\phi$ , donde

$$D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \quad (5.82)$$

Aquí, la ecuación (5.80) puede ser escrita como un sistema abstracto de ecuaciones diferenciales ordinarias en el espacio de Hilbert  $Z_1$  como sigue:

$$\begin{cases} y' = v, \\ v' = -A^2y - 2\beta Av + u + f(t, y, v, u). \end{cases} \quad (5.83)$$

Más aún, la ecuación (5.80) puede ser reescrita como un sistema de primer orden de ecuaciones diferenciales ordinarias en el espacio de Hilbert  $Z_1$  como sigue:

$$z' = \mathcal{A}z + Bu + F(t, z, u), \quad z \in Z_1, \quad t \geq 0 \quad (5.84)$$

donde  $u \in L^2([0, \tau]; U)$ ,  $U = Z = L^2(\Omega)$ ,

$$\begin{pmatrix} 0 & I_Z \\ -A^2 & -2\beta A \end{pmatrix} \quad (5.85)$$

es un operador lineal no acotado con dominio

$$D(\mathcal{A}) = \{y \in H^4(\Omega) : y = \Delta y = 0\} \times D(A),$$

es decir,

$$z = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}) \Leftrightarrow y \in \{y \in H^4(\Omega) : y = \Delta y = 0\} \quad \text{and} \quad v \in D(A).$$

$I = I_Z : Z = L^2(\Omega) \rightarrow Z$  es el operador identidad,  $B : U \rightarrow Z_1$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ I_Z \end{pmatrix}$  es un operador lineal acotado, y  $F(t, z, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t, y, v, u) \end{pmatrix}$  es suficientemente suave.

**Proposición 5.4.5.** *Bajo la condición (5.81), la función  $F : [0, \tau] \times Z_1 \times U \rightarrow Z_1$  definida arriba satisface que  $\forall u, z \in Z = L^2(\Omega)$ :*

$$\|F(t, z, u)\|_{Z_1} \leq 2b\mu(\Omega)^{\frac{1-\eta}{2\eta}} \|u\|_Z^\eta + 2c\sqrt{\mu(\Omega)}, \quad \|u\| \geq R\sqrt{\mu(\Omega)}, \quad (5.86)$$

Demostración

$$\begin{aligned} \|F(t, z, u)\|_{Z_1} &= \left( \int_{\Omega} |f(t, y, v, u)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} (b |u(x)|^\eta + c)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} (4b^2 \|u(x)\|^{2\eta} + 4c^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2b \left\{ \left( \int_{\Omega} \|u(x)\|^{2\eta} \right)^{\frac{1}{2\eta}} \right\}^\eta + 2c\sqrt{\mu(\Omega)} \\ &= 2b\|u\|_{L^{2\eta}(\Omega)}^\eta + 2c\sqrt{\mu(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ahora bien, ya que  $\frac{1}{2} \leq \eta < 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2\eta < 2$ , aplicando la proposición 5.31, se obtiene que:

$$\|F(t, z, u)\|_{Z_1} \leq 2b\mu(\Omega)^{\frac{1-\eta}{2\eta}} \|u\|_Z^\eta + 2c\sqrt{\mu(\Omega)}, \quad \|u\| \geq R\sqrt{\mu(\Omega)}.$$

■

Por otro lado, haciendo uso del lema de 1.1.1 se tiene que el operador lineal no acotado  $\mathcal{A}$  dado por la ecuación lineal (5.85) genera un semigrupo compacto fuertemente continuo en el espacio  $Z_1$ , el cual decae exponencialmente a cero.

**Teorema 5.4.10.** *El operador  $\mathcal{A}$  es el generador infinitesimal de un semigrupo compacto fuertemente continuo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  representado por*

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\mathbb{A}_j t} P_j z, \quad z \in Z_1, \quad t \geq 0, \quad (5.87)$$

donde  $\{P_j\}_{j \geq 0}$  es una familia de proyecciones ortogonales completas en el espacio de Hilbert  $Z_1$  dadas por

$$P_j = \text{diag}(E_j, E_j), \quad (5.88)$$

y

$$\mathbb{A}_j = K_j P_j, \quad K_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_j^2 & -2\beta\lambda_j \end{pmatrix} \quad j \geq 1,$$

y el operador adjunto  $\mathbb{A}^*$  del operador  $\mathbb{A}$  viene dado por

$$\mathbb{A}_j^* = \tilde{K}_j P_j, \quad \tilde{K}_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \lambda_j^2 & -2\beta\lambda_j \end{pmatrix} \quad j \geq 1,$$

Más aún, los autovalores  $\sigma_1(j)$ ,  $\sigma_2(j)$ , de la matriz  $K_j$  son simples y se cumple que:

$$\sigma_1(j) = -\lambda_j \rho_1, \quad \sigma_2(j) = -\lambda_j \rho_2$$

donde  $0 < \rho_1 < \rho_2$  y dados por

$$\rho_1 = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \quad \text{and} \quad \rho_2 = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}; \quad \beta^2 > 1,$$

y este semigrupo decae exponencialmente a cero

$$\|T(t)\| \leq M e^{-\mu t}, \quad t \geq 0,$$

con  $\mu = \lambda_1 \rho_1$  y  $\|T(t)\| = \sup_{\|z\|=1} \|T(t)z\|$ .

El siguiente corolario se sigue como consecuencia del teorema anterior.

**Corolario 5.4.2.** *El operador  $\mathbb{A}$  es el generador infinitesimal de un semigrupo compacto fuertemente continuo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  representado por*

$$T(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\mathbb{A}_j t} P_j z, \quad z \in Z_1, \quad t \geq 0$$

donde  $\{P_j\}_{j \geq 0}$  es una familia de proyecciones ortogonales completas en el espacio de Hilbert  $Z_1$  dado por

$$P_j = \text{diag}(E_j, E_j), \quad (5.89)$$

y

$$\mathbb{A}_j = K_j P_j, \quad K_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_j^2 & -2\beta\lambda_j \end{pmatrix} \quad j \geq 1,$$

y el operador adjunto  $\mathbb{A}^*$  del operador  $\mathbb{A}$  viene dado por

$$\mathbb{A}_j^* = \tilde{K}_j P_j, \quad \tilde{K}_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \lambda_j^2 & -2\beta\lambda_j \end{pmatrix} \quad j \geq 1,$$

Más aún, los autovalores  $\sigma_1(j)$ ,  $\sigma_2(j)$ , de la matriz  $K_j$  son simples y vienen dados por:

$$\sigma_1(j) = -\lambda_j \rho_{1j}, \quad \sigma_2(j) = -\lambda_j \rho_{2j}$$

donde  $0 < \rho_{1j} < \rho_{2j}$  y vienen dados por

$$\rho_{1j} = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \quad \text{and} \quad \rho_{2j} = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}; \quad \beta^2 > 1,$$

y este semigrupo decae exponencialmente a cero

$$\|T(t)\| \leq M e^{-\mu t}, \quad t \geq 0,$$

con  $\mu = \lambda_1 \rho_{11}$  y  $\|T(t)\| = \sup_{\|z\|=1} \|T(t)z\|$ .

Ahora, describiremos la estrategia a seguir: Para probar la controlabilidad aproximada del sistema no lineal (5.80), se tomara las ideas consideradas por H. Leiva, N. Merentes y J.L. Sanchez, ver [41]. Esto es, la controlabilidad aproximada del sistema (5.80) se sigue de la controlabilidad del sistema lineal, la compacidad del semigrupo generado por el

operador  $\mathcal{A}$ , el acotamiento (5.81) que satisface el término no lineal  $F$  y aplicando el teorema de punto fijo de Rothe.

En efecto, para todo  $z_0 \in Z_1$  y  $u \in L^2([0, \tau]; U)$  el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z'(t) = \mathcal{A}z(t) + Bu(t), & z \in Z_1, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (5.90)$$

admite una única solución moderada dada por

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t+s)Bu(s)ds; \quad t \in [0, \tau]. \quad (5.91)$$

**Definición 5.4.8.** *Para el sistema (5.90) se definen los siguientes conceptos:*

*El operador de controlabilidad (para  $\tau > 0$ )  $G : L^2([0, \tau]; U) \rightarrow Z_1$  es definido como*

$$Gu = \int_0^\tau T(\tau-s)Bu(s)ds, \quad (5.92)$$

*cuyo operador autoadjunto  $G^* : Z_1 \rightarrow L^2([0, \tau]; U)$  viene dado por*

$$(G^*z)(s) = B^*T(\tau-s)z, \quad \forall s \in [0, \tau], \quad \forall z \in Z_1. \quad (5.93)$$

El lema siguiente es trivial

**Lema 5.4.4.** *La ecuación (5.90) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$  si, y sólo si,  $\text{Rang}(G) = Z_1$ .*

El teorema a continuación es una caracterización de la controlabilidad del sistema (5.90):

**Teorema 5.4.11.** *(Curtain, Pritchard y Zwart ([11],[18]), Leiva, Merentes y Sanchez ([38], [39])) El sistema (5.90) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$  si, y sólo si, cada una de las condiciones siguientes se tienen:*

- a)  $\overline{\text{Rang}(G)} = Z_1$ .
- b)  $\text{Ker}(G^*) = \{0\}$ .
- c)  $B^*T^*(s)z = 0, \quad \forall s \in [0, \tau] \implies z = 0$ .
- d)  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}z = 0$ .

e)  $\langle GG^*z, z \rangle > 0$ ,  $z \neq 0$  en  $Z$ .

f) Para todo  $z \in Z_1$  se tiene que  $Gu_\alpha = z - \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}z$ , donde

$$u_\alpha = G^*(\alpha I + GG^*)^{-1}z, \alpha \in (0, 1].$$

Así,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} Gu_\alpha = z$  y el error  $E_\alpha z$  de esta aproximación viene dado por

$$E_\alpha z = \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}z, \alpha \in (0, 1].$$

**Observación 5.4.8.** El teorema 5.4.11 implica que la familia de operadores lineales

$$\Gamma_\alpha z = B^*T^*(\cdot)(\alpha I + GG^*)^{-1}z = G^*(\alpha I + GG^*)^{-1}z,$$

es una inversa aproximada por la derecha del operador  $G$  en el sentido que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} G\Gamma_\alpha = I$$

en la topología fuerte.

**Proposición 5.4.6.** Si el  $\overline{\text{Rang}(G)} = Z_1$ , entonces

$$\sup_{\alpha > 0} \|\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}\| \leq 1.$$

En consecuencia, se concluye con el siguiente resultado.

**Teorema 5.4.12.** El sistema (5.90) es aproximadamente controlable.

Para finalizar se proba el principal resultado, la controlabilidad de la ecuación de la Viga semilineal dada por (5.80), lo cual es equivalente a probar la controlabilidad aproximada del sistema (5.84). Para ello, dado  $z_0 \in Z_1$  y  $u \in L^2([0, \tau]; U)$  el problema de valor inicial

$$\begin{cases} z'(t) = Az + Bu + F(t, z, u), & t \geq 0, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (5.94)$$

admite una única solución moderada dada por (Ver Goldstein [27], pg. 90)

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds + \int_0^t T(t-s)F(s, z, u)ds, \quad t \in [0, \tau]. \quad (5.95)$$

**Observación 5.4.9.** (Ver H. Leiva [36] y [37]) La función  $F$  es suficientemente suave si:

- La solución moderada  $z(u) = z_u$  del problema (5.94) es única.
- La solución moderada  $z(u) = z_u$  depende continuamente de  $u$ .

**Observación 5.4.10.** La controlabilidad aproximada del sistema (5.94) consiste en:

Dado dos estados  $z_0, z_1 \in Z_1$ , encontrar un control  $u \in L^2([0, \tau]; U)$  tal que la correspondiente solución moderada (5.55)  $z = z_u = z(u)$  satisfice:

$$z_1 \approx T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds + \int_0^\tau T(\tau - s)F(s, z_u, u)ds.$$

es decir,

$$z_1 - T(\tau)z_0 \approx \int_0^\tau T(\tau - s)Bu(s)ds + \int_0^\tau T(\tau - s)F(s, z_u, u)ds.$$

esto es,

$$z_1 - T(\tau)z_0 \approx F_B(u) + \int_0^\tau T(\tau - s)F(s, z_u, u)ds.$$

o equivalentemente,

$$F_B(u) \approx z_1 - T(\tau)z_0 - \int_0^\tau T(\tau - s)F(s, z_u, u)ds.$$

**Observación 5.4.11.** Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el estado inicial  $z_0$  es fijo.

Estas observaciones nos motivan a dar la siguiente definición:

**Definición 5.4.9.** Dado el sistema (5.94) se definen los siguientes conceptos: El operador de controlabilidad no lineal (para  $\tau > 0$ )  $G_F : L^2([0, \tau]; U) \rightarrow Z_1$  definido por

$$G_F u = \int_0^\tau T(t - s)Bu(s)ds + \int_0^\tau T(t - s)F(t, z, u)ds = F_B(u) + H(u)$$

donde  $H : L^2([0, \tau]; U) \rightarrow Z_1$  es el operador no lineal dado por

$$H(u) = \int_0^\tau T(t - s)F(s, z, u)ds.$$

El lema siguiente es trivial:

**Lema 5.4.5.** *El sistema (5.94) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$  si, y sólo si,  $\overline{\text{Rang}(G_F)} = Z_1$ .*

**Definición 5.4.10.** *La ecuación que se define a continuación es llamada ecuación de controlabilidad asociada al sistema no lineal (5.94)*

$$u = \Gamma_\alpha(z - H(u)) = G^*(\alpha I + GG^*)^{-1}(z - H(u)), \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

Ahora bien, probaremos el principal resultado de este ejemplo, el cual es demostrar que la ecuación de la Viga semilineal (5.94) es aproximadamente controlable.

**Teorema 5.4.13.** *El sistema (5.94) es aproximadamente controlable sobre  $[0, \tau]$ . Más aún, la sucesión de controles vienen dados*

$$u_\alpha(t) = B^*T^*(\tau - t)(\alpha I + GG^*)^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0 - H(u_\alpha)),$$

y el error de esta aproximación  $E_\alpha$  viene dada por

$$E_\alpha = \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}(z_1 - T(\tau)z_0 - H(u_\alpha)).$$

Demostración

Para cada  $z \in Z_1$  fijo, pero arbitrario, consideremos la siguiente familia de operadores no lineales

$K_\alpha : L^2([0, \tau]; U) \rightarrow L^2([0, \tau]; U)$  dada por

$$K_\alpha(u) = \Gamma_\alpha(z - H(u)) = G^*(\alpha I + GG^*)^{-1}(z - H(u)), \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

En primer lugar, probemos que para todo  $\alpha \in (0, 1]$  el operador  $K_\alpha$  tiene un punto fijo  $u_\alpha$ . En efecto, ya que  $F$  es suave y satisface (5.86), y el semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  es compacto, entonces el operador  $H$  es compacto (proposición 2.3. Artículo de Leiva, Merentes y Sanchez, ver ([41]). Más aún,

$$\overline{\lim}_{\|u\|_Z \rightarrow \infty} \frac{\|K_\alpha(u)\|_Z}{\|u\|_Z} = 0. \tag{5.96}$$

En efecto, sean  $B = 2b\mu(\Omega)^{\frac{\eta}{2\eta-1}}$  y  $C = 2c\sqrt{\mu(\Omega)}$ . De la definición del operador  $H(u)$ , proposición 5.4.4 y (5.65), para  $u \in L^2(0, \tau; U)$ , se sigue

la siguiente estimación

$$\begin{aligned}
\|H(u)\|_{Z_1} &= \left\| \int_0^\tau T(t-s)F(s, z, u)ds \right\|_{Z_1}, \\
&\leq \int_0^\tau M e^{\mu(\tau-s)} \|F(s, z, u)\|_{Z_1} ds \\
&\leq \left( \int_0^\tau M^2 e^{2\mu(\tau-s)} ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^\tau \|F(s, z_u(s), u(s))\|_{Z_1}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= N \left( \int_0^\tau \|F(s, z_u(s), u(s))\|_{Z_1}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq N \left( \int_0^\tau (B\|u(s)\|^\eta + C)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq N \left( \int_0^\tau (4B^2\|u(s)\|^{2\eta} + 4C^2) ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2NB \left( \int_0^\tau \|u(s)\|^{2\eta} \right)^{\frac{1}{2}} + 2NC\sqrt{\tau} \\
&\leq 2NB \left\{ \left( \int_0^\tau \|u(s)\|^{2\eta} \right)^{\frac{1}{2\eta}} \right\}^\eta + 2NC\sqrt{\tau} \\
&= 2BN\|u\|_{L^{2\eta}}^\eta + 2NC\sqrt{\tau}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, ya que  $\frac{1}{2} \leq \eta < 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2\eta < 2$ , de la proposición 5.4.4 se obtiene que:

$$\|H(u)\|_{Z_1} \leq 2BN\tau^{\frac{1-\eta}{2\eta}} \|u\|_Z^\eta + 2NC\sqrt{\tau}.$$

Por lo tanto,

$$\overline{\lim}_{\|u\|_Z \rightarrow \infty} \frac{\|H(u)\|_{Z_1}}{\|u\|_Z} = 0.$$

En consecuencia,

$$\overline{\lim}_{\|u\|_Z \rightarrow \infty} \frac{\|K_\alpha(u)\|}{\|u\|_Z} = 0.$$

**Afirmación 1.** El operador  $K_\alpha$  tiene un punto fijo. En efecto, de la condición (5.96) se obtiene que, si  $0 < \rho < 1$  fijo, entonces existe  $R_\alpha$  tal que

$$\|K_\alpha(u)\|_Z \leq \rho\|u\|_Z, \quad \|u\|_Z = R_\alpha.$$

En consecuencia, si se denota por  $B(0, R_\alpha)$  la bola de centro cero y radio  $R_\alpha > 0$ , entonces se tiene que  $K_\alpha(\partial B(0, R_\alpha)) \subset B(0, R_\alpha)$ . Ya que  $K_\alpha$  es compacto y envía la esfera de  $\partial B(0, R_\alpha)$  dentro del interior de la bola  $B(0, R_\alpha)$ , se puede aplicar el teorema de punto fijo de Rothe para obtener la existencia de un punto fijo  $u_\alpha \in L^2(0, \tau; U)$  tal que

$$u_\alpha = K_\alpha u_\alpha = \Gamma_\alpha(z - H(u_\alpha)) = G^*(\alpha I + GG^*)^{-1}(z - H(u_\alpha)), \quad (0 < \alpha \leq 1). \tag{5.97}$$

**Afirmación 2.** La sucesión  $\{u_\alpha\}_{0 < \alpha \leq 1}$  es acotada. En efecto, supongamos por reducción al absurdo que existe una subsucesión  $\{u_{\alpha_n}\}_{n \geq 1} \subset \{u_\alpha\}_{0 < \alpha \leq 1}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{\alpha_n}\|_Z = \infty.$$

Por otro lado, de (2.33) se tiene que para todo  $\alpha \in (0, 1]$  fijo se cumple:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\|K_\alpha(u_{\alpha_n})\|}{\|u_{\alpha_n}\|_Z} = 0.$$

En consecuencia,

$$\begin{array}{cccccc} \frac{\|K_{\alpha_1}(u_{\alpha_1})\|}{\|u_{\alpha_1}\|_Z} & \frac{\|K_{\alpha_1}(u_{\alpha_2})\|}{\|u_{\alpha_2}\|_Z} & \frac{\|K_{\alpha_1}(u_{\alpha_3})\|}{\|u_{\alpha_3}\|_Z} & \dots & \frac{\|K_{\alpha_1}(u_{\alpha_n})\|}{\|u_{\alpha_n}\|_Z} & \longrightarrow 0 \\ \frac{\|K_{\alpha_2}(u_{\alpha_1})\|}{\|u_{\alpha_1}\|_Z} & \frac{\|K_{\alpha_2}(u_{\alpha_2})\|}{\|u_{\alpha_2}\|_Z} & \frac{\|K_{\alpha_2}(u_{\alpha_3})\|}{\|u_{\alpha_3}\|_Z} & \dots & \frac{\|K_{\alpha_2}(u_{\alpha_n})\|}{\|u_{\alpha_n}\|_Z} & \longrightarrow 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\|K_{\alpha_n}(u_{\alpha_1})\|}{\|u_{\alpha_1}\|_Z} & \frac{\|K_{\alpha_n}(u_{\alpha_2})\|}{\|u_{\alpha_2}\|_Z} & \frac{\|K_{\alpha_n}(u_{\alpha_3})\|}{\|u_{\alpha_3}\|_Z} & \dots & \frac{\|K_{\alpha_n}(u_{\alpha_n})\|}{\|u_{\alpha_n}\|_Z} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ahora bien, aplicando el proceso de diagonalización de Cantor, se obtiene que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\|K_{\alpha_n}(u_{\alpha_n})\|}{\|u_{\alpha_n}\|_Z} = 0,$$

y de (5.97) se tiene que

$$\frac{\|K_{\alpha_n}(u_{\alpha_n})\|}{\|u_{\alpha_n}\|_Z} = 1,$$

lo cual es evidentemente una contradicción. Por lo tanto, la afirmación es cierta y en consecuencia existe  $\gamma > 0$  tal que

$$\|u_{\alpha_n}\| \leq \gamma, \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

Así, sin perder generalidad podemos suponer que la sucesión  $H(u_\alpha)$  converge a  $y \in Z$ . Luego, si

$$u_\alpha = \Gamma_\alpha(z - H(u)) = G^*(\alpha I + GG^*)^{-1}(z - H(u_\alpha)).$$

entonces,

$$\begin{aligned} Gu_\alpha &= G\Gamma_\alpha(z - H(u)) = GG^*(\alpha I + GG^*)^{-1}(z - H(u_\alpha)) \\ &= (\alpha I + GG^* - \alpha I)(\alpha I + GG^*)^{-1}(z - H(u_\alpha)) \\ &= z - H(u_\alpha) - \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}(z - H(u_\alpha)) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$Gu_\alpha + H(u_\alpha) = z - \alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}(z - H(u_\alpha)).$$

Para concluir la prueba de este teorema, es necesario probar que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{-\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}(z - H(u_\alpha))\} = 0$$

Del teorema 5.4.11.d se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{-\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}(z - H(u_\alpha))\} &= -\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{-\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}H(u_\alpha)\} \\ &= -\lim_{\alpha \rightarrow 0} -\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}y \\ &\quad - \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}(H(u_\alpha) - y) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}(H(u_\alpha) - y). \end{aligned}$$

Por otro lado, de proposición 5.4.6, se obtiene que

$$\|\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}(H(u_\alpha) - y)\| \leq \|(H(u_\alpha) - y)\|.$$

Ahora bien, ya que  $H(u_\alpha)$  converge a  $y$ , se concluye que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{-\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}(H(u_\alpha) - y)\} = 0.$$

En consecuencia,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{-\alpha(\alpha I + GG^*)^{-1}(z - H(u_\alpha))\} = 0$$

Luego, haciendo  $z = z_1 - T(\tau)z_0$  y usando (5.95), se obtiene el resultado:

$$z_1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ T(\tau)z_0 + \int_0^\tau T(\tau-s)Bu_\alpha(s)ds + \int_0^\tau T(\tau-s)F(s, z_{u_\alpha}, u_\alpha)ds \right\}.$$

■

# Bibliografía

- [1] R. Agarwal, *Difference Equations and Inequalities Theory, Methods and Applications*. Marcel Dekker, 2000.
- [2] A.E. Bashirov, N. Mahmudov, N. Semi and H. Etikan, *On Partial Controllability Concepts*. International Journal of Control, **80**, N 1, (2007), 1-7.
- [3] D. Barcenás, H. Leiva y Z. Sivoli, *A Broad Class of Evolution Equations are Approximately Controllable, but Never Exactly Controllable*. IMA J. Math. Control Inform. **22**, N 3, (2005), 310–320.
- [4] S. Barnett, *Introduction to Mathematical Control Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1975.
- [5] K. Balachandran y J.P. Dauer, *Controllability of nonlinear Systems Via fixed-point Theorems*. Journal of Optimization Theory and Applications. **12**, N 3, (1987), 345-352.
- [6] K. Balachandran, J. P. Dauer, *Controllability of Perturbed Nonlinear Delay Systems*. IEEE Trans. Auto. Cont., **AC-32**, (1987), 172-174.
- [7] K. Balachandran, J. P. Dauer, S. Sangeetha, *Controllability of Nonlinear Evolution Delay Integrodifferential Systems*. Appl. Math. Comput., **139**, (2003), 63-84.
- [8] K. Balachandran y J. Y. Park, *Existence of Solution and Controllability of Nonlinear Integrodifferential Systems in Banach Spaces*. Mathematical Problems in Engineering. **2** (2003), 65-79.

- [9] A. Carrasco, H. Leiva y J. Sanchez, *Controllability of the Semilinear Beam Equation*. Journal of Dynamical and Control Systems. **19**, N 3, (2013).
- [10] S. N. Chow y H. Leiva, *Existence and Roughness of the Exponential Dichotomy for linear skew-product Semiflows in Banach Spaces*. J. Differential Equations. **120**, (1995), 429-477.
- [11] R. F. Curtain y A. J. Pritchard, *Infinite Dimensional Linear Systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. **8**. Springer Verlag, Berlin, 1978.
- [12] E. N. Chukwu, *Stability and Time-Optimal Control of Hereditary Systems*, Mathematics in Science and Engineering, **188**, Academic Press, INC., 1992.
- [13] E. N. Chukwu, *Nonlinear Delay Systems Controllability*. Math. Anal. Appl., **162**, (1991), 564-576.
- [14] E. N. Chukwu, *Global Null Controllability of Nonlinear Delay Equations with Controls in a Compact Set*, Optim. Theo. Appl., **53**, (1987), 43-57.
- [15] E. N. Chukwu, *Controllability of Delay Systems with Restrained Controls*, Optim. Theo. Appl., **29**, (1979), 301-320.
- [16] E. N. Chukwu, *On the Null-Controllability of Nonlinear Delay Systems with Restrained Controls*. Math. Anal. Appl. **76**, (1980), 283-296.
- [17] J.M. Coron, *Control and Nonlinearity*. Mathematical Surveys and Monographs. **136**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [18] R.F. Curtain y H.J. Zwart, *An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory*. Tex in Applied Mathematics. **21**. Springer Verlag, New York, 1995.
- [19] J.P. Dauer, *Nonlinear Perturbation of Quasilinear Control Systems*. J. Math. Anal. Appl., **54**, N 3, (1976), 717-725.

- [20] V.N. Do, *Controllability of Semilinear Systems*. J. Optim. Theory Appl., **65**, N 1, (1990), 41-52.
- [21] G. Isac, *On Rothe's Fixed Point Theorem in General Topological Vector Space*, An. St. Univ. Ovidius Constanta, **12**, N 2, (2004), 127-134.
- [22] Luiz A. F. De Oliveira, *On Reaction-Diffusion Systems*. E. Journal of Differential Equations. **1998**, N 24, (1998), 1-10.
- [23] D.L. Lukes, *Global Controllability of Nonlinear Systems*. SIAM J. Control Optim. **10**, N 1, (1972), 112-126.
- [24] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*. Springer, Third Edition, 2005.
- [25] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, **19**, AMS, 1999.
- [26] G. Isac, *On the Rothe's Fixed Point Theorem in General Topological Vector Space*. An. St. Univ. Ovidius Constanta, **12**, N 2, (2004), 127-134.
- [27] J. A. Goldstein, *Semigroups of Linear Operators and Applications*. Oxford Mathematical Monographs, New York, 1985.
- [28] S. Hansen y B. Y. Zhang, *Boundary Control of a Linear Thermoelastic Beam*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. **210**, (1997), 182-205.
- [29] D. Henry, *Geometry Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Lectures Notes in Mathematics, **840**. Berlin: Springer, 1981.
- [30] J. Klamka, *Schauder's fixed point theorem in nonlinear Controllability problems*. Control and Cybernetics. **29**, N 1, (2000), 153-165.
- [31] C. Kesavan, *Topics in: Functional Analysis and Applications*. John Wiley and Sons, 1989.
- [32] V. Lakshmikanthan y D. Trigiante, *Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications*. Mathematics in Science and Engineering, **181**, 1988.

- [33] H. Larez, H. Leiva y J. Uzcategui, *Controllability of Block Diagonal Systems and Applications*. International Journal of Systems, Control and Communications. **3**, N 1 (2011), 64-81.
- [34] E. B. Lee, L. Markus, *Foundations of Optimal Control Theory*. Wiley, New York, 1967.
- [35] H. Leiva, *A Lemma on  $C_0$ -Semigroups and Applications PDEs Systems*. Quaestiones Mathematicae, **26**, (2003), 247-265.
- [36] H. Leiva, *A necessary and sufficient algebraic condition for the controllability of thermoelastic plate equation*. IMA Journal of Control and Information, **20**, (2003), 1-18.
- [37] H. Leiva, *Exact controllability of the suspension bridge model proposed by Lazer and McKenna*. J. Math. Anal. Appl, **309**, (2005), 404-419.
- [38] H. Leiva, N. Merentes y J.L. Sanchez, *Interior Controllability of the  $nD$  Semilinear Heat Equation*. African Diaspora Journal of Mathematics, Special Vol. in Honor of Profs. C. Corduneanu, A. Fink, and S. Zaidman. **12**, N 2, (2011), pp. 1-12.
- [39] H. Leiva, N. Merentes y J. Sanchez, *Approximate Controllability of Semilinear Reaction Diffusion*. Mathematical Control and Related Fields, **2**, N 2, (2012).
- [40] H. Leiva, N. Merentes y J. Sanchez, *A Characterization of Semilinear Dense Range Operators and Applications*. por aparecer en Abstract and Applied Analysis.
- [41] H. Leiva, N. Merentes y J. Sanchez, *Approximate Controllability of Semilinear Heat Equation*. International Journal of Partial Differential Equations, **2013**, (2013).
- [42] H. Leiva y W. Pereira, *Interior Controllability of the Linear Beam Equation*. A. Diaspora J. of Mathematics, **14**, N 1, pp.30-38, (2012).
- [43] H. Leiva y J. Uzcategui, *Controllability of Linear Difference Equations in Hilbert Spaces and Applications*. IMA Journal of Mathematical Control and Information, **25**, (2008), 323-340.

- [44] H. Leiva y J. Uzcátegui, *Exact controllability for semilinear difference equation and application*. Journal of Difference Equations and Applications, **14**, N 7, (2008), 671-679.
- [45] H. Leiva and J. Uzcátegui, *Approximate Controllability of Semilinear Difference Equations and Applications*, Journal Mathematical Control Science and Applications (JMCSA), **14**, N 1, (2011), 9-19.
- [46] H. Leiva y H. Zambrano, *Rank condition for the controllability of a linear time-varying system*. International Journal of Control, **72**, (1999), 920-931.
- [47] M. Megan, A. L. Sasu y B. Sasu, *Discrete Admissibility and Exponential Dichotomy for Evolution Families*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, **9** N 2, March,(2003), 383-397.
- [48] K. B. Mirza, B. F. Womack, *On the Controllability of Nonlinear Time-Delay Systems*. IEEE Trans. Auto. Cont. Short Papers, (1972), 812-814.
- [49] A. S. C. Sinha, *Null-Controllability of Non-Linear Infinite Delay Systems with Restrained Controls*. Int. J. Cont., **42**, (1985), 735-741.
- [50] J.J. Nieto, C. Tisdell, *On exact controllability of first-order impulsive differential equations*. Advances in Difference Equations, **2010**, N 136504, 9 pages.
- [51] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1983.
- [52] A. L. Sasu, *Stabilizability and controllability for systems of difference equations*. Journal of Difference Equations and Applications, **12**, N 8, (2006), 821-826.
- [53] B. Sasu y A.L. Sasu, *Stability and stabilizability for linear systems of difference equations*. Journal of Difference Equations and Applications, **10**, N 12, (2004), 1085-1105.

- [54] A. S. C. Sinha, C. F. Yokomoto, *Null Controllability of a Nonlinear System with Variable Time Delay*. IEEE Trans. Auto. Cont., **AC-25**, (1980), 1234-1236.
- [55] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer, New York, NY, USA, 2nd edition, 1998.
- [56] M. Vidyasager, *A Controllability Condition for Nonlinear Systems*. IEEE Trans. Automat. Control. **AC-17**, N 5, (1972), 569-570.
- [57] X. Zhang, *A remark on null exact controllability of the heat equation*. SIAM J. Control Optim. **40**, N 1, (2001), 39-53.
- [58] E. Zuazua, *Exact controllability for semilinear wave equations in one space dimension*. Ann. Inst. Henri Poincaré, **10**, (1993), 109-129.
- [59] Zhi-Qing Zhu y Qiug-Wen Lin, *Exact Controllability of Semilinear Systems with Impulses*. Bulletin of Math. Anal. and Appl., **4**, N 1, (2012), 157-167.
- [60] E. Zuazua, *Controllability of Partial Differential Equations*. Notas del autor en su página web: <http://www.bcamaath.org/zuazua>, 2005.



## **Asociación Matemática Venezolana**

Presidente: Pedro Berrizbeitia

### **Consejo Directivo Nacional**

Pedro Berrizbeitia  
Capítulo Capital

Alexander Carrasco  
Capítulo de Centro Occidente

Oswaldo Araujo  
Capítulo de Los Andes

Said Kas-Danouche  
Capítulo de Oriente

Oswaldo Larreal  
Capítulo Zuliano

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela.

Asociación Matemática Venezolana  
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela  
<http://amv.ivic.gob.ve>

Consejo Directivo  
Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC)

Director  
Eloy Sira

Subdirector  
Alexander Briceño

Representantes del Ministerio del Poder Popular para Educación  
Universitaria, Ciencia y Tecnología

Guillermo Barreto  
Juan Luis Cabrera  
Jesús Manzanilla

Gerencia General  
Martha Velásquez

Comisión Editorial  
Eloy Sira (coordinador)  
Lucía Antillano  
Horacio Biord  
Jesús Eloy Conde  
María Teresa Curcio  
Rafael Gassón  
Pamela Navarro  
Héctor Suárez  
Erika Wagner



Gobierno **Bolivariano**  
de Venezuela

Ministerio del Poder Popular  
para Educación **Universitaria**, Ciencia y Tecnología

