

**XXVII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA-VENEZUELA 2014**

**INTRODUCCIÓN A MECÁNICA
DE FLUIDOS Y MODELACIÓN**

**Said A. Kas-Danouche R.
y Franklin R. Astudillo V.**

MÉRIDA, VENEZUELA, 31 de agosto al 5 de septiembre de 2014

XXVII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA - VENEZUELA 2014

INTRODUCCIÓN A MECÁNICA DE FLUIDOS Y MODELACIÓN

Said A. Kas-Danouche R.

Lab. de Matemáticas Aplicadas a la Industria
Universidad de Oriente. Núcleo de Sucre
sak0525@gmail.com, skasdano@udo.edu.ve

Franklin R. Astudillo V.

Lab. de Matemáticas Aplicadas a la Industria
Universidad de Oriente. Núcleo de Sucre
fastudillo@udo.edu.ve

MÉRIDA, VENEZUELA, 31 DE AGOSTO AL 5 DE SEPTIEMBRE
DE 2014

XXVII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana. La XXVII Escuela Venezolana de Matemáticas recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Banco Central de Venezuela, el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) y Centre International de Mathematiques Pures et Appliquees (CIMPA).

2010 Mathematics Subject Classification: 76-01, 76A02, 76B07, 76B47, 76D05

© Ediciones IVIC

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Rif: G-20004206-0

Introducción a Mecánica de Fluidos y Modelación

Said A. Kas-Danouche R. y Franklin R. Astudillo V.

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas

Preprensa e impresión: Gráficas Lauki C.A.

Deposito legal: If66020145102246

ISBN: 978-980-261-153-9

Caracas, Venezuela

2014

*Al Dios de Abraham, de Isaac y de Jacob.
A mis hijos: Jorge Asaad, Said Alejandro y Yamil Andrés.
Said Antonio.*

*A la memoria de mi hermana Marisol del Valle.
Franklin Rafael.*

Índice general

Prefacio	IX
1. Modelos matemáticos del movimiento de fluidos	1
1.1. El modelo matemático	2
1.2. Algunas definiciones básicas	5
1.3. Ecuaciones de conservación	10
1.4. Conservación de masa	12
1.5. Conservación de momentum o ecuación de movimiento . .	15
1.6. La ecuación de Navier-Stokes	17
1.7. Condiciones de Frontera	19
1.7.1. Superficies Sólidas	19
1.7.2. Interfaces de fluidos	20
2. Flujos incompresibles	25
2.1. Fluido ideal	25
2.2. Flujos ideales	26
2.3. El número de Reynolds	26
2.4. Flujo incompresible restringido por paredes	28
2.5. Flujo completamente desarrollado	29
2.6. Flujo de Poiseuille	30
2.7. Flujo de Couette	31
2.8. Flujo laminar, incompresible y permanente entre placas paralelas e inclinadas	33
3. Movimiento irrotacional. Teoremas integrales	37
3.1. Vorticidad	37
3.2. El caso de fluido no viscoso	38

3.2.1.	La ecuación de Euler:	39
3.2.2.	Caso de flujo estacionario:	40
3.2.3.	Caso de flujo irrotacional:	41
3.2.4.	Caso de flujo estacionario e irrotacional:	41
3.3.	Flujo irrotacional y potencial de velocidad en tres dimensiones	42
3.3.1.	Analogía entre flujo de fluido irrotacional y electrostática	44
3.3.2.	Corriente uniforme en presencia de una fuente en el origen	47
3.4.	Circulación	51
3.5.	Teorema de circulación de Kelvin	52
4.	Flujos bidimensionales	53
4.1.	Función corriente	53
4.2.	Potencial complejo	55
4.3.	Aplicaciones conformales	59
4.4.	Potencial complejo para algunos flujos simples	61
4.4.1.	El campo de flujo uniforme	61
4.4.2.	Fuentes y sumideros	61
4.4.3.	Dipolo o doblete	62
4.4.4.	Vórtice potencial	64
4.5.	Superposición	65
4.6.	El método de las imágenes	67
4.7.	Flujo potencial que pasa una sección de un cilindro circular	69
4.8.	Flujo que pasa una sección de un cilindro circular con circulación	71
4.9.	Transformación de Joukowski	74
4.9.1.	Flujo que pasa un círculo	75
4.9.2.	Flujo que pasa un plato chato finito	77
4.9.3.	Flujo que pasa una ala de avión simétrica	79
4.10.	Transformación de Schwarz-Christoffel	82
4.10.1.	Una banda semi-infinita	82
4.10.2.	Una banda infinita	84
4.10.3.	Aplicando una banda sobre un círculo	87

5. Flujo de vórtices o flujo vorticoso	89
5.1. Teoremas relacionados con flujo de vórtices	89
5.2. Potencial complejo debido a vórtices	91
5.2.1. Un filamento vórtice	91
5.2.2. Dos filamentos vórtices	92
5.2.3. Un par vórtice	92
5.2.4. Filamento vórtice paralelo a un plano	92
5.2.5. Doble vórtice	93
5.2.6. Vórtices de igual esfuerzo, κ , ubicados en $(x, y) =$ $(ma, 0)$, con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots$	94
5.2.7. La calle vórtice de Kármán	95
6. Ondas acuáticas	97
6.1. Movimiento de onda	97
6.2. Condición cinemática en la superficie libre	99
6.3. Condición de presión en la superficie libre	100
6.4. Ondas viajeras	102
6.5. Ondas estacionarias	106

Índice de figuras

1.1. Flujo entre dos plataformas con la plataforma superior en movimiento.	6
1.2. (a) Flujo laminar. (b) Flujo turbulento.	7
1.3. Representación de las regiones de un flujo externo.	9
1.4. Representación de un flujo externo ideal.	10
1.5. Flujo externo que pasa un cuerpo con forma similar a las líneas de corriente.	10
1.6. Esquema de las coordenadas cilíndricas.	12
1.7. Flujo de fluido que cruza una superficie.	13
1.8. Vector normal a la superficie.	19
1.9. Superficie $z = \zeta(x, y, z)$	21
1.10. Radios de las circunferencias circunscritas en una superficie.	23
2.1. Tubo horizontal con un extremo inmerso en un embalse.	28
2.2. Flujo laminar completamente desarrollado entre paredes fijas.	29
2.3. Flujo laminar dentro de un cilindro circular.	30
2.4. Flujo de Couette entre dos placas paralelas.	32
2.5. Flujo de Couette entre dos placas paralelas inclinadas un ángulo θ respecto a la horizontal.	33
2.6. Flujo laminar entre dos placas paralelas inclinadas.	36
3.1. Dipolo: una fuente y un sumidero.	45
3.2. Relación entre las distancias radiales de una fuente y un sumidero.	46
3.3. Velocidad de corriente U_0	47
3.4. Corriente uniforme con una fuente en el origen.	48
3.5. Flujo de fluido no viscoso que pasa una esfera de radio r_0	50

4.1. Red de flujo.	56
4.2. Línea fuente bidimensional.	57
4.3. Mitad superior del plano ζ	59
4.4. Sector en el plano z que se obtiene al usar una transformación.	60
4.5. Fuente y sumidero para formar un dipolo.	62
4.6. Patrones de flujo de un dipolo.	63
4.7. Potencial de velocidad y función corriente de un vórtice.	65
4.8. Óvalo de Rankine.	66
4.9. Flujo producido por una fuente ubicada cerca de una pared.	68
4.10. Flujo uniforme que pasa sobre un cilindro circular.	70
4.11. Para $\Gamma^2 < (4\pi U_0 r_0)^2$: Dos puntos de estancamiento.	73
4.12. Para $\Gamma^2 = (4\pi U_0 r_0)^2$: Un punto de estancamiento.	73
4.13. Para $\Gamma^2 > (4\pi U_0 r_0)^2$: Un punto de estancamiento fuera del cilindro.	74
4.14. Transformación de Joukowski: de un círculo a una elipse.	76
4.15. Transformación de Joukowski: de las líneas de corriente alrededor de un círculo a alrededor de una elipse.	76
4.16. Flujo que pasa un plato chato finito.	77
4.17. Flujo que termina paralelo al plato chato finito.	78
4.18. Flujo que pasa una ala de avión simétrica.	79
4.19. Flujo que pasa un cuerpo bidimensional con sección transversal C	81
4.20. Transformación de Schwarz-Christoffel.	82
4.21. Banda semi-infinita en el plano z	83
4.22. Semiplano superior en ζ	84
4.23. Una banda infinita en el plano z	84
4.24. Plano ζ	85
4.25. Transformaciones entre el plano z y el plano ζ	86
4.26. Aplicando una banda sobre un círculo.	87
5.1. Circuito cerrado $C(t)$	90
5.2. Un par vórtice.	92
5.3. Filamento vórtice paralelo a un plano.	93
5.4. Doble vórtice.	94
5.5. La calle vórtice de Kármán.	96
6.1. Comparación del perfil de onda para dos tiempos diferentes.	98

6.2.	Diferencia de presiones en una superficie libre.	100
6.3.	Onda viajera progresiva.	102
6.4.	Frente de onda con rapidez v_p	103
6.5.	Vector fasor A^*	104
6.6.	Envolvente para una onda viajera progresiva.	106
6.7.	Onda estacionaria.	107

Prefacio

A través de los siglos, los seres humanos hemos usado las matemáticas para resolver problemas en múltiples áreas de la vida cotidiana. Es por ello que, las matemáticas tienen variadas perspectivas que van desde el desarrollo de complejas teorías intelectuales, hasta la modelación de fenómenos o situaciones que ocurren en nuestro entorno. Este desarrollo ha recibido sus aportes de destacados matemáticos, que en muchas ocasiones estaban resolviendo problemas físicos; podemos mencionar a algunos de ellos como Arquímedes, Newton, Euler, Navier, Stokes, entre otros. Ha habido una brecha entre lo artístico y la utilidad de las matemáticas, una brecha entre crear nuevas estructuras en el mundo matemático y, resolver, saber explicar y regular el mundo en el que estamos inmersos.

En el universo, o al menos en nuestro Sistema Solar, todo lo relativo a materia, que sigue las leyes de conservación de la Física, se podría clasificar como gas, líquido, sólido, o cualquier combinación entre ellos. En cuanto a lo que nos atañe en este curso, los seres humanos hemos coexistido siempre con los fluidos. El cómo hemos aprendido, además del cuándo iniciamos a usarlos, no se puede determinar.

Ahora bien, los modelos matemáticos para dinámica de fluidos involucran ecuaciones en derivadas parciales no lineales. Dichos modelos podrían estar constituidos por una sola ecuación, como por un sistema de varias ecuaciones acopladas y que, en general, conllevan gran dificultad y complejidad matemática.

Estas ecuaciones constituyen uno de los medios de cómo relacionar las matemáticas abstractas (fundamentadas en el análisis funcional y los

sistemas dinámicos) con el campo de sus aplicaciones, que tienen la finalidad de lograr las soluciones cuantitativas a problemas de la vida diaria. En mecánica de fluidos, se estudian diversos tipos de problemas; entre ellos cabe destacar el desarrollo y la resolución de modelos matemáticos para flujos centro-anulares, que es la especialización de los autores.

Es así como, hemos procurado en este libro establecer la teoría introductoria en la cual se basa la mecánica de fluidos para modelar problemas de flujos de fluidos, que pueden ser aplicados sin mayores complicaciones a flujos estratificados, entre los cuales están los centro-anulares inmiscibles.

Queremos agradecer a Neptalí Romero por habernos animado a proponer este curso y, por su puesto, a escribir este libro que lo acompaña. Ha sido una oportunidad muy apreciada por nosotros. Finalmente, agradecemos el apoyo de nuestras respectivas familias, quienes en ocasiones como éstas son las que más sienten nuestra ausencia, mientras nosotros dedicamos nuestros mejores esfuerzos para escribir.

Los Autores

Capítulo 1

Modelos matemáticos del movimiento de fluidos

Antes de abordar el tema de este libro, es importante entender lo que su propio título conlleva. Es una sencilla introducción a mecánica de fluidos para emprender el viaje del conocimiento a través de la modelación en esta área del saber. Así, iniciaremos mencionando que una sustancia, bajo la aplicación de un esfuerzo cortante o fuerza tangencial a la superficie [2], que se deforma continuamente se denomina fluido [10], [15], [14]. Incluye tanto a los líquidos como a los gases, los primeros cambian fácilmente de forma pero no de volumen, mientras que los últimos, los gases, cambian fácilmente tanto de forma como de volumen.

Por otro lado, la mecánica es el estudio, en reposo o en movimiento, de cuerpos bajo la acción de fuerzas [13]. Así, la mecánica de fluidos es la rama de las ciencias que se ocupa del estudio del comportamiento de los fluidos tanto en reposo como en movimiento. Particularmente, la dinámica es el estudio del movimiento de la materia. Así, dinámica de fluidos tiene que ver con el comportamiento de fluidos en movimiento.

Siempre la presencia de fuerzas tiene algún efecto en los materiales. Así, cuando una fuerza dada produce en un material una deformación permanente a pesar de eliminar tal fuerza, se denomina plasticidad; si la deformación definida desaparece cuando la fuerza se elimina, recibe el nombre de elasticidad; y si la deformación crece continuamente sin lími-

tes bajo la acción de fuerzas, aún pequeñas, se le denomina flujo [25].

En presencia de temperatura y presión constantes, un líquido posee un volumen definido y, bajo los efectos de la gravedad, adopta la forma de la parte inferior del envase que lo contiene; superiormente estará delimitado por una superficie libre completamente horizontal. En la mayoría de los casos los líquidos se conocen como fluidos incompresibles. Sin embargo, un gas llenará por completo todo el espacio que lo encierra y para al cual tiene acceso. Los gases se conocen como fluidos compresibles [33].

1.1. El modelo matemático

Como lo menciona Granger en [11]: “La modelación es un instinto humano,...” que se usa para entender y, posiblemente, interpretar el comportamiento del fenómeno en estudio. El mundo de los niños está repleto de modelos en su accionar diario mientras juegan; recuerdo que yo usaba las piezas del dominó para construir distribuidores de autopistas, circuitos cerrados de pistas para carros; además de crear objetos y pueblos con juegos de piezas en forma de bloques de diferentes tamaños y formas. La modelación, en esta época de la vida del ser humano, es clave para el desarrollo de la creatividad, hacer descubrimientos y expandir la imaginación.

En el mundo adulto y profesional, se usan los modelos como una herramienta para comprender el comportamiento de los fenómenos o problemas que se estudian y se quieren resolver. Es aquí donde las matemáticas tienen un papel primordial, pues los modelos matemáticos, aparte de poder aproximar las soluciones exactas de los problemas, permiten “jugar” con los diversos parámetros involucrados en el modelo, y que representan alguna característica física del problema que se está resolviendo, para luego vislumbrar un cuadro más amplio del comportamiento del mismo.

Un modelo matemático, en términos generales, es una ecuación o conjunto de ecuaciones matemáticas que dan solución a un problema matemático específico. Este problema, en muchos casos es la idealización del problema físico real planteado para ser resuelto. La idealización es

el proceso a través del cual se plantean suposiciones para simplificar el problema a resolver; esto se hace porque no es fácil dar con todas las ecuaciones involucradas, para modelar dicho problema, desde un sólo intento y de una sola vez.

Después de resolver el problema idealizado, se le añaden nuevas características, que se traducen en ecuaciones o condiciones, que forman parte del problema original, y se procura encontrar su modelo. Una vez resuelto este nuevo problema, se vuelve a añadir alguna otra condición, y así sucesivamente. Eventualmente, los nuevos modelos arrojarán resultados más cercanos a lo que se espera sea la realidad. De ahí que, uno de los principios de la modelación es ir de lo más simple a los más complejo.

Al tratar las relaciones del flujo de un fluido, con bases matemáticas o analíticas, para obtener un modelo matemático del fenómeno, al fluido no lo tratamos como conformado por partículas sencillas, sino que se considera la estructura molecular real como un medio continuo, conocido como **el continuo** [14], [33].

Al seleccionar algún punto del espacio en relación con algún sistema de coordenadas, a medida que pasa el tiempo, el fluido en ese punto continuamente se sustituye por fluido nuevo. Así, no se necesita mantener registro de alguna partícula determinada del fluido; sino más bien, se lleva registro histórico, en ese punto del espacio, sin importar la porción de fluido que esté en dicho punto en cualquier tiempo particular. Tal descripción del fluido se conoce como la “descripción euleriana”. Cuando se requiere mantener registro de una partícula individual, como en dinámica de cuerpos rígidos, se conoce como la “descripción lagrangiana”.

Al modelar flujos estratificados, hasta la actualidad se han considerado muchos regímenes diferentes, entre los cuales mencionamos los flujos de dos fluidos. Especialmente, aquellos de dos líquidos a través de un dominio de medio poroso [6], los cuales se clasifican en miscibles e inmiscibles. También, están los flujos de dos fluidos con configuración centro-anular. Son flujos de dos fluidos concéntricos, uno acumulado en el centro y el otro ocupando la región anular que envuelve al fluido central, y que

está en contacto con la pared del cilindro. Este tipo de flujo consiste en que ambos fluidos se encuentran viajando simultáneamente dentro del cilindro. Respecto a este tipo de problemas, podemos mencionar el artículo de Papageorgiou, Maldarelli y Rumschitzki [27], quienes trabajaron en flujos centro-anulares con un gradiente de presión constante analizando la estabilidad de la interfaz entre ambos fluidos; ellos trabajaron en dicho problema inspirados en el trabajo de Hammond [12], quien no consideró en su problema gradiente de presión externo, obteniendo una ecuación complicada en la que el término de mayor orden es no lineal.

En el año 2002, Kas-Danouche [17], Kas-Danouche, Papageorgiou y Siegel [19], [20], desarrollaron un nuevo modelo para un flujo de dos fluidos centro-anulares con surfactantes insolubles en la interfaz entre ambos fluidos basados en [27]; es decir, con un gradiente de presión constante. El modelo obtenido es un sistema de dos ecuaciones integro-diferenciales parciales no lineales y acopladas, obteniendo un comportamiento muy rico de soluciones que van desde ondas estacionarias modales, ondas viajeras modales, periódicas en tiempo hasta llegar a soluciones caóticas.

Inspirado en este último trabajo, Astudillo [3] desarrolló un modelo matemático para un flujo centro-anular con surfactantes insolubles, pero distribuidos no uniformemente en la interfaz entre los dos fluidos. Después, Lugo [23] estudia las rutas hacia el caos en el mismo problema de flujo centro-anular con surfactantes insolubles en [17].

Por otro lado, en el año 2007, Kas-Danouche publica en [18], un nuevo modelo matemático tomando como base el modelo de Hammond [12] y añadiendo surfactantes insolubles en la interfaz, el resultado fue un sistema de dos ecuaciones acopladas integro-diferenciales parciales, pero altamente no lineales con el término de mayor orden multiplicado por la función incógnita elevada al cubo. El desarrollo numérico de este último modelo lo realizó Rivas [30], y aún investigamos el comportamiento numérico de la influencia de los surfactantes en el modelo desarrollado por Kas-Danouche [18]. En el año 2012, Gallo y Kas-Danouche [9] publicaron una investigación relativa a la comparación entre métodos numéricos para resolver el problema que estudió Hammond en [12].

Para el año 2011, Astudillo [4], desarrolló un nuevo modelo añadiendo surfactantes solubles al problema resuelto por Kas-Danouche *et al.* en [20]. Obtuvo un sistema de tres ecuaciones acopladas, dos de las cuales son diferenciales parciales no lineales, y una de estas dos últimas ecuaciones, con un término integral. También desarrolló un esquema numérico para encontrar soluciones aproximadas del modelo.

Son muchas las ideas que se pueden desarrollar en esta área del saber; por ejemplo, la construcción de un prototipo de simulador para el modelo elaborado por Kas-Danouche [17] fue desarrollado por Mekhedjian [24], en el cual se puede observar, tridimensionalmente, cómo la interfaz entre ambos fluidos va evolucionando en el tiempo desde el inicio hasta el tiempo final; además de, la evolución de la concentración de surfactantes en dicha interfaz.

En la siguiente sección suministraremos algunas definiciones de propiedades básicas que poseen los fluidos, como presión, viscosidad, entre otros.

1.2. Algunas definiciones básicas

La **presión** se define como un esfuerzo normal, que es una fuerza superficial compresiva normal por unidad de área, que actúa sobre una superficie, en este caso, sumergida en el fluido [14], [26].

La **viscosidad** es una cantidad física con la cual se mide la resistencia que el fluido ejerce a un esfuerzo cortante o fuerza tangencial cuando éste se encuentra moviéndose.

El **esfuerzo cortante**, τ , se define como la fuerza tangencial por unidad de área necesaria para mover una superficie plana, ver Figura 1.1. Viene expresado por:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y},$$

donde μ , en general, se conoce como la viscosidad absoluta o viscosidad

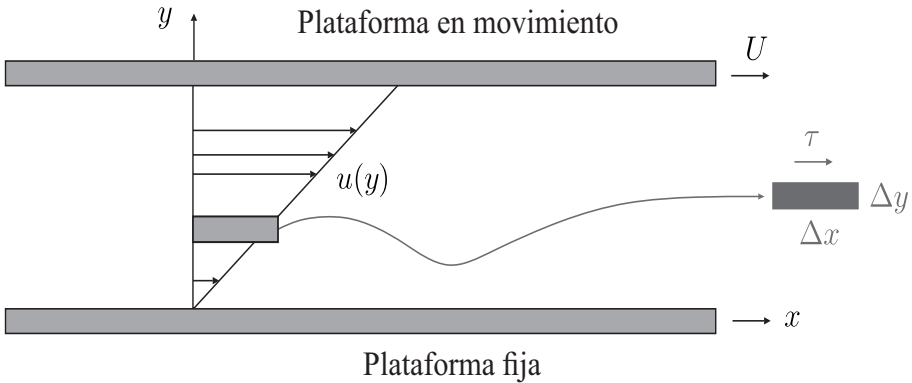


Figura 1.1: Flujo entre dos plataformas con la plataforma superior en movimiento.

dinámica, y es la constante de proporcionalidad entre el esfuerzo cortante y el gradiente de velocidad.

La **viscosidad cinemática**, ν , es la razón de la viscosidad absoluta, μ , con la densidad de masa ρ : $\nu = \mu/\rho$. La viscosidad (absoluta) de un líquido decrece cuando la temperatura crece, pero la viscosidad de los gases crece cuando la temperatura crece.

Un fluido que no tenga viscosidad y que no fluya en una manera turbulenta, recibe el nombre de **fluido ideal** o más correctamente el flujo se llama ideal. Realmente, ningún fluido es ideal, pero algunos fluidos, en ciertas regiones de flujo y bajo ciertas circunstancias, aproximan las condiciones ideales y se consideran como tal para el análisis. En el Capítulo 2 dedicamos una sección a este tema.

Flujo laminar y flujo turbulento

Un flujo puramente viscoso es un flujo de fluido que fluye por capas o láminas, de ahí que también se le denomine **flujo laminar**. Por otro lado, cuando en un flujo las componentes de velocidad tienen fluctuaciones aleatorias muy variadas sobre sus valores medios, se denomina **flujo turbulento**.

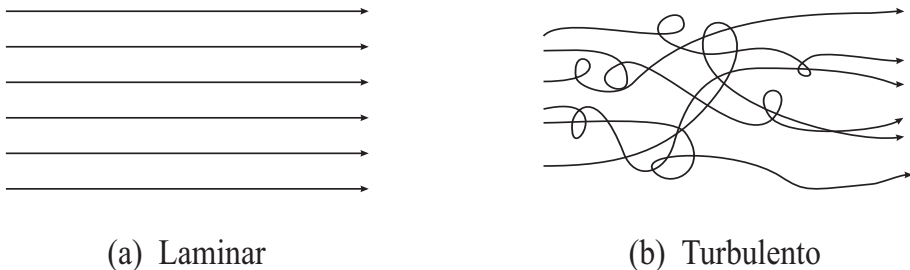


Figura 1.2: (a) Flujo laminar. (b) Flujo turbulento.

La **tensión superficial** es el esfuerzo aparente que existe en la capa superficial, de un líquido, que actúa como una membrana estirada, pudiendo generar una diferencia de presiones a través de la superficie líquida curva. La tensión superficial es una energía asociada con cualquier interfaz fluido-fluido.

En vista de que la superficie líquida se comporta como una membrana, las gotas de lluvia mientras caen toman, más o menos formas esféricas. A través de la superficie interfacial entre dos fluidos, la diferencia en presión Δp se balancea por la tensión superficial T . Esta membrana o capa especial en el líquido se puede entender que existe, en parte, por la atracción entre las moléculas del líquido debajo de la superficie.

La **densidad**, ρ , de un fluido se define como la cantidad de masa de fluido por cada unidad de volumen de dicho fluido. Además, es una propiedad termodinámica y depende del estado del fluido, de ahí la factibilidad de expresarla como función de temperatura y presión. Dicha expresión, fenomenológica o derivada de consideraciones microscópicas, se conoce como una ecuación de estado. Por ejemplo, para una gas ideal [14]: $p = \rho RT$, donde R es la constante del gas, se conoce como la ecuación de estado. Es bueno saber que hay ecuaciones de estado más complicadas que esta.

En flujos compresibles hay dos grupos mayoritarios en los cuales se pueden clasificar dependiendo de la velocidad del sonido. Un flujo que desarrolle velocidades menores que la velocidad del sonido, se denomina flujo subsónico; el flujo que desarrolle velocidades mayores que la del sonido,

se denomina flujo supersónico.

El número de Mach, M , es una medida de la rapidez relativa y se define como la relación de la rapidez del flujo de fluido con la rapidez del sonido local:

$$M = \frac{V}{a},$$

donde “ V ” es la rapidez del flujo de fluido y “ a ” es la rapidez del sonido local.

De esta manera, cuando $M < 1$ tenemos **flujos subsónicos** y cuando $M > 1$ tenemos **flujos supersónicos**. **Flujo transónico** ocurre cuando parte del cuerpo (avión, proyectil, etc) tiene fluido fluyendo sobre él con $M < 1$ y otra parte del cuerpo tiene fluido fluyendo sobre él con $M > 1$, así que en algún punto del cuerpo $M = 1$. ¿Cómo es que $M < 1$, $M > 1$ sobre el mismo cuerpo y al mismo tiempo? La velocidad del sonido y la velocidad del fluido varían sobre el cuerpo. En general, la temperatura en un cuerpo varía y de allí que la velocidad del sonido local varía también.

Cuando en un flujo las componentes de velocidad y las propiedades termodinámicas en cada punto del espacio no cambian con el tiempo, estamos en presencia de un **flujo estacionario**. Si en diferentes tiempos se toman fotos del fluido, éstas lucirán iguales sin importar el tiempo en que se hayan tomado. Además, es importante entender que un fluido puede tener una aceleración en un punto en el espacio aún en flujo estacionario.

De acuerdo a la estructura de los flujos, se pueden clasificar como: flujo subsónico-compresible, flujo compresible-supersónico, flujo laminar-compresible, flujo turbulento-incompresible, flujo laminar-incompresible, entre otros. Respecto a las regiones espaciales, básicamente hay dos tipos de configuraciones de los flujos: flujo interno y flujo externo.

El **flujo externo** es el movimiento de un fluido sobre un objeto como en aerodinámica. La región donde fluye el fluido alrededor de un objeto se puede dividir en tres regiones. Lejos del cuerpo, donde el flujo es esencialmente ideal. Cerca del cuerpo, donde desarrolla una capa en

la cual actúa el esfuerzo cortante (ya que la velocidad debe ser cero en la superficie del cuerpo) la velocidad y/o la turbulencia se hacen importantes. Esta capa se conoce como **capa frontera** o **capa límite** (boundary layer) y puede ser laminar o turbulenta. Detrás del cuerpo, una tercera región se distingue, se conoce como la **estela**. Generalmente, es una región de alta turbulencia y baja presión.

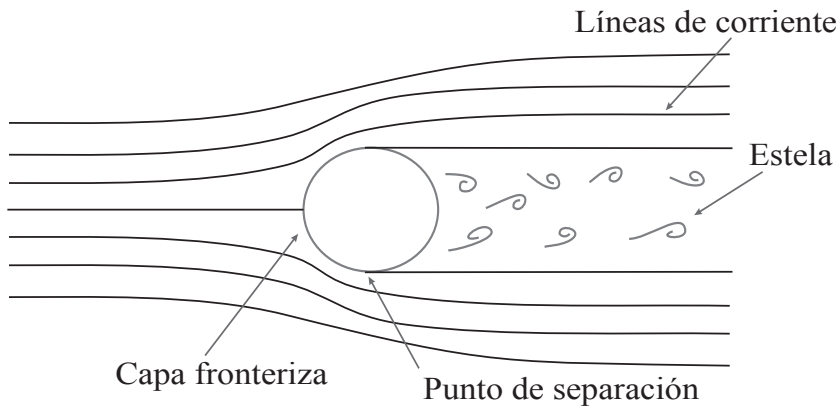


Figura 1.3: Representación de las regiones de un flujo externo.

La estela ocurre debido a la separación de la capa frontera de la superficie del cuerpo que, al mismo tiempo, se debe a la viscosidad del fluido. Si el fluido fuera absolutamente no viscoso, no tendríamos separación, y en consecuencia, ni estela.

Sin estela, el patrón del fluido (el cual sería ideal) sería simétrico desde el frente hasta la parte posterior del cilindro, y la presión sería la misma tanto en frente como detrás del cilindro. No habría arrastre de objetos insertados en el fluido en movimiento. Esta ausencia de arrastre contradice la experiencia; por lo tanto, concluimos que todos los fluidos tienen que tener alguna fricción interna; es decir, viscosidad.

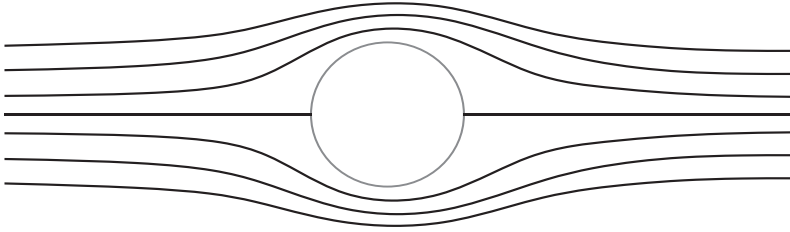


Figura 1.4: Representación de un flujo externo ideal.

Si un cuerpo tiene una forma similar a las líneas de corriente; digamos que, el extremo posterior termina gradualmente en un contorno suave hasta llegar a una punta, entonces la separación no ocurriría, pues la capa frontera cubrirá completamente el cuerpo. En estos casos, el flujo es ideal completamente alrededor del cuerpo, excepto por la capa frontera y una estela delgada.

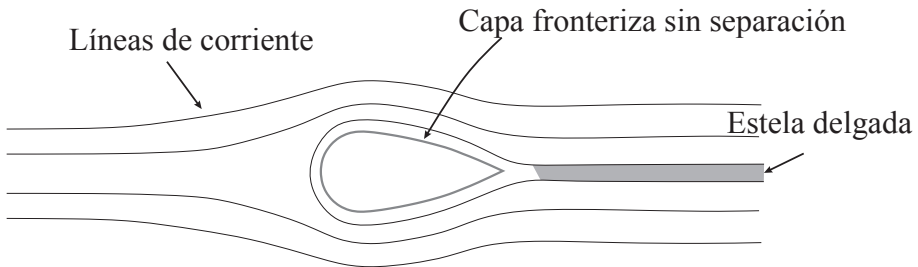


Figura 1.5: Flujo externo que pasa un cuerpo con forma similar a las líneas de corriente.

Un flujo es interno cuando el movimiento del fluido ocurre dentro de tubos, canales, boquillas, entre otros; es decir, el flujo está confinado por las paredes del cuerpo que lo contiene.

1.3. Ecuaciones de conservación

Antes de escribir las ecuaciones de conservación, es importante describir un punto espacial y la velocidad en dicho punto para un tiempo dado. Sean las componentes de velocidad escritas como $u_i(\underline{x}, t)$, con $i = 1, 2, 3$, y definidas en un tiempo t dado y en un punto $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ dado,

independientemente de la partícula que esté en \underline{x} en el tiempo t . Por lo cual, la aceleración

$$a_i \neq \frac{\partial u_i}{\partial t},$$

pues u_i también depende de \underline{x} . Así, tendríamos en realidad la siguiente expresión para la aceleración

$$a_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t};$$

pero, $u_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (\text{Convención para sumatoria}) \end{aligned}$$

A continuación, definimos la derivada sustancial (derivada material o derivada total) como

$$\frac{D}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_{\text{parte local}} + \underbrace{u_k \frac{\partial}{\partial x_k}}_{\text{parte convectiva}}$$

en coordenadas cartesianas. Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, entonces

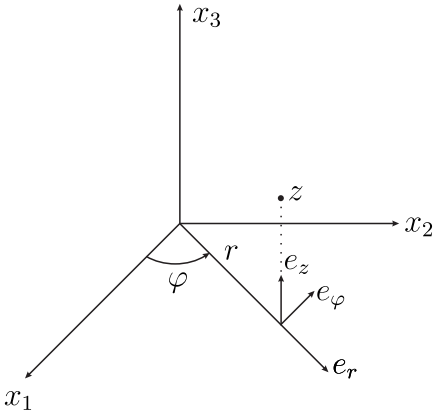
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad},$$

donde

$$\text{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Hay muchos problemas cuya configuración geométrica no permite que se apliquen las ecuaciones en representación cartesiana; por ejemplo, para un problema que involucra tuberías se requiere que las ecuaciones estén expresadas en coordenadas polares cilíndricas.

A continuación expresamos la derivada total en términos de las coordenadas cilíndricas:



$$\begin{aligned}\vec{x} &= (r, \varphi, z) \\ \vec{u} &= (u, v, w) \\ \text{grad} &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Figura 1.6: Esquema de las coordenadas cilíndricas.

Por lo tanto,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Las líneas de recorrido o de camino son trayectorias de las partículas. Las líneas de corriente son líneas por las cuales el vector velocidad es tangente en un instante particular.

En general,

$$\text{líneas de corriente} \neq \text{líneas de camino.}$$

Sin embargo, si el flujo es estacionario, entonces:

$$\text{líneas de corriente} = \text{líneas de camino.}$$

1.4. Conservación de masa

La densidad ρ es la masa por unidad de volumen $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$

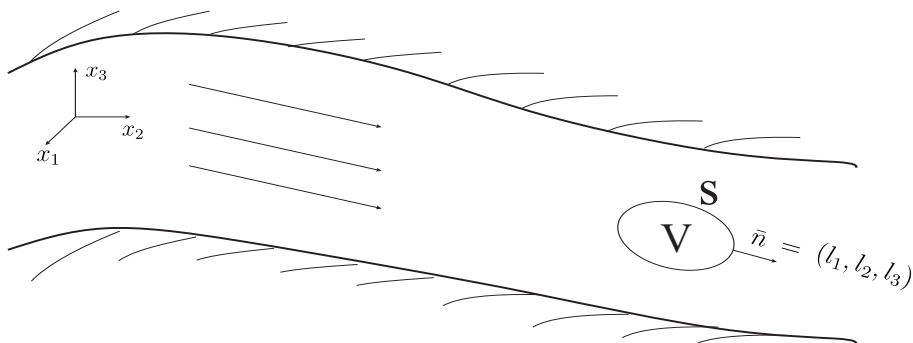


Figura 1.7: Flujo de fluido que cruza una superficie.

La cantidad de masa que entra menos la cantidad de masa que sale es igual a

$$- \int_s \rho u_i l_i ds,$$

donde $u_i l_i ds$ es la cantidad de fluido que cruza un diferencial de superficie, ds , por unidad de tiempo, y $u_i l_i = u_1 l_1 + u_2 l_2 + u_3 l_3 = \vec{u} \cdot \vec{n}$ (proyección de \vec{u} sobre la normal \vec{n}).

Teorema 1.4.1 (Teorema de Divergencia). *Sea Ω un dominio acotado en \mathbb{R}^3 que satisfice:*

- *La frontera $S = \partial\Omega$ de Ω consiste de un número finito de superficies suaves.*
- *Cualquier línea recta paralela a cualquiera de los ejes coordenados, o intersecta a S en un número finito de puntos o tiene un intervalo completo común a S .*

Sea $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ el vector unitario normal a S dirigido en la dirección exterior a Ω . Sea $\underline{V} = (P, Q, R)$ un campo vectorial definido en la clausura $\bar{\Omega}$ de Ω tal que cada una de la funciones componentes P, Q, R son $C^1(\Omega)$ y $C^0(\bar{\Omega})$ y suponemos que

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

es convergente. Entonces:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{V} \, d\Omega = \int_S \underline{V} \cdot \bar{n} \, ds.$$

Para una prueba de este teorema, véase [31]. El cambio de la masa en el tiempo es igual a la masa que entra menos la masa que sale a través de la frontera (superficie) del volumen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_V \rho dV}_{\text{masa de } V} &= - \int_S \rho \vec{u} \cdot \bar{n} ds \\ \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV &= - \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{u}) dV. \end{aligned}$$

La transformación en la integral de la izquierda se hace considerando que el volumen es fijo (no cambia en el tiempo) y en la integral del lado derecho, usamos el Teorema de la Divergencia. Así,

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] dV = 0, \quad \text{para todo } V.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{Conservación de Masa}). \quad (1.1)$$

También se conoce como la Ecuación de Continuidad, y otra forma de escribirla es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)}^{\text{representa sumatoria}} = 0.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} u_i}_{\parallel} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}}_{\operatorname{div} \vec{u}} &= 0. \end{aligned}$$

Un fluido es incompresible si $\frac{D\rho}{Dt} = 0$. Esto implica que

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (1.2)$$

1.5. Conservación de momentum o ecuación de movimiento

Iniciemos esta sección presentando de manera muy fundamental lo que es la ecuación de movimiento para un fluido. Es una expresión en la cual la razón de cambio de momentum de una porción de fluido y la suma de todas las fuerzas que actúan sobre dicha porción se igualan.

Consideremos un cuerpo de fluido con volumen V encerrado por una superficie S , el momentum [5] de este cuerpo se expresa como la integral, tomada sobre el volumen, del producto de la velocidad u del cuerpo por su densidad ρ ; lo cual escribimos como $\int u\rho dV$; es decir, la suma de los productos de masa y velocidad de cada porción de volumen. Por otro lado, la razón de cambio de este mismo cuerpo de fluido, viene expresada como

$$\int \frac{Du}{Dt} \rho dV,$$

observamos que es la suma de los productos de la aceleración por la masa en cada cada uno de los elementos que conforman el volumen V .

Cada una de las porciones de fluido tiene fuerzas, tanto de la superficie como del volumen, que actúan en él. Denotamos al vector resultante de las fuerzas de volumen por unidad de masa de fluido mediante \bar{F} . Así que, la fuerza total de volumen sobre una porción de fluido, dV es

$$\int \bar{F}\rho dV.$$

La i -ésima componente de la fuerza de contacto que se aplica a través de un elemento de superficie de área δS y el vector normal \bar{n} , se puede escribir como el siguiente producto $\sigma_{ij}n_j\delta S$, siendo σ_{ij} el tensor de esfuerzos; esta fuerza también se conoce como la fuerza superficial. De esta manera, la fuerza superficial total que ejerce la masa sobre la porción de fluido rodeada por la misma es $\int \sigma_{ij}\bar{n}_j dS$; pero, usando el Teorema de la Divergencia, tenemos que:

$$\int \sigma_{ij}\bar{n}_j dS = \int \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV.$$

En conclusión, el balance del momentum para una porción de fluido queda de la forma

$$\int \frac{Du_i}{Dt} \rho dV = \int F_i \rho dV + \int \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV,$$

para toda selección del volumen V . Por lo tanto,

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1.3)$$

en todos los puntos del fluido. Se puede observar que esta ecuación diferencial define la aceleración del fluido en términos de la fuerza de volumen local y del tensor de esfuerzos. Esta expresión se conoce como la **ecuación de movimiento**.

Cuando un fluido está en reposo, sólo se ejercen esfuerzos normales y el tensor de esfuerzos viene dado por la expresión

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij},$$

donde p es la presión del fluido estático, y dependerá solamente de la profundidad del fluido, la densidad del fluido y la aceleración de la gravedad. Cuando el fluido está en movimiento, no hay razones para considerar que lo anterior sea válido, pues los esfuerzos tangenciales, en general, no son cero, y la componente normal del esfuerzo que actúa a través de un elemento de superficie depende de la dirección de la normal al elemento (de superficie). En la mayoría de los casos de un fluido en movimiento, la noción de una presión que actúa de manera igual en todas las direcciones se pierde.

El valor promedio de las componentes del esfuerzo normal a un elemento de superficie [5] en la posición \underline{x} es

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} &= \frac{1}{3} \sigma_{ii} \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}). \end{aligned}$$

Por consiguiente, la presión en un punto de un fluido en movimiento se puede definir como el opuesto del promedio del esfuerzo normal

$$p = -\frac{1}{3} \sigma_{ii}.$$

El tensor de esfuerzos σ_{ij} lo podemos definir como la suma de una parte isotrópica (las propiedades en todas las direcciones son las mismas) $-p\delta_{ij}$, tomando la misma forma que el tensor de esfuerzos en un fluido en reposo (aunque el valor de p no sea el mismo para un fluido en movimiento), y una parte no isotrópica, d_{ij} digamos, que viene de los esfuerzos tangenciales y elementos diagonales

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij}. \quad (1.4)$$

La parte no isotrópica d_{ij} puede llamarse el tensor de esfuerzos deviatórico, o desviador como le dicen otros autores, y se debe al movimiento del fluido. En 1843 Saint-Venant y en 1845 Stoke, obtuvieron una expresión para d_{ij} [5]

$$d_{ij} = 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3}\Delta\delta_{ij} \right); \quad (1.5)$$

donde Δ denota e_{ii} . El parámetro μ depende del estado local del fluido, es la constante de proporcionalidad entre la razón de la fuerza cortante y la fuerza tangencial por unidad de área en presencia de capas planas de fluidos que se deslizan una sobre otra; a este parámetro se le conoce como la viscosidad del fluido. Además,

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

1.6. La ecuación de Navier-Stokes

Considerando la expresión (1.5) para el tensor de esfuerzos deviatórico, el esfuerzo total (1.4) toma la forma

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3}\Delta\delta_{ij} \right), \quad (1.6)$$

donde

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{y} \quad \Delta = e_{ii} \equiv \frac{\partial u_k}{\partial x_k}.$$

Substituyendo (1.6) en la ecuación de movimiento (1.3), obtenemos:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3}\Delta\delta_{ij} \right) \right],$$

que recibe el nombre de la ecuación de movimiento de Navier-Stokes. Entonces,

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right].$$

Hay casos para los cuales la viscosidad, μ , del fluido depende en gran manera de la temperatura. Si en el campo del flujo se aprecian diferencias de temperatura, necesariamente debemos considerar a μ como una función de posición. Ahora, también es cierto que en muchos casos tales diferencias de temperatura son suficientemente pequeñas, para los cuales μ se puede considerar como uniforme en todo el fluido. En tal caso

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \underline{u}) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \underline{u}) \right].$$

Por lo tanto,

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left[\nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \underline{u}) \right]. \quad (1.7)$$

Un fluido incompresible es un caso especial y de gran importancia que estudiaremos en este curso. La ecuación de conservación de masa (1.1), como vimos previamente, se reduce a

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0.$$

En consecuencia, la ecuación (1.7) se convierte en

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i.$$

Usando notación vectorial quedaría

$$\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = \rho \underline{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u},$$

que recibe el nombre de la ecuación de Navier-Stokes incompresible. Existen casos para los cuales la viscosidad es despreciable. En tales casos, se obtiene la ecuación de Euler incompresible:

$$\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = \rho \underline{F} - \nabla p.$$

Sin embargo, cuando el flujo es muy viscoso; en otras palabras, μ es muy grande, tenemos

$$\rho \underline{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} = 0,$$

que se conoce como la ecuación de Stokes.

1.7. Condiciones de Frontera

Para completar el planteamiento de un problema específico, se necesita saber (o suponer) el comportamiento del fluido en la frontera donde actúa el flujo; es decir, se requieren las descripciones del problema en las distintas partes de la frontera, sin las cuales no se podría resolver el problema específico. En esta sección tratamos los casos más comunes y clásicos de condiciones de frontera.

1.7.1. Superficies Sólidas

Este es uno de los tipos más comunes de frontera a la que se expone una región de fluido, se conoce como la pared rígida impermeable. La **condición de impermeabilidad** de una pared se refiere a que nada del fluido debería traspasar la pared. Si la velocidad con la cual se mueve la pared es \bar{U} y una partícula del fluido que toca la pared se mueve con velocidad \bar{u} , esta condición de frontera nos indica que las componentes normales de ambas velocidades deben ser iguales; así, se tiene que

$$\bar{u} \cdot \bar{n} = \bar{U} \cdot \bar{n}, \quad (1.8)$$

donde \bar{n} es el vector unitario normal a la superficie de la frontera.

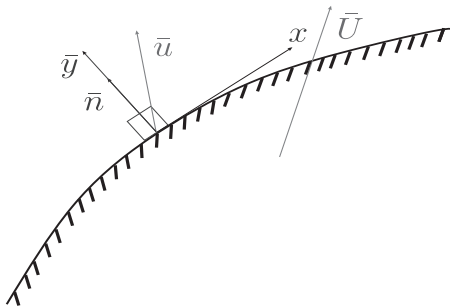


Figura 1.8: Vector normal a la superficie.

A menudo, se escoge un marco de referencia para el cual las fronteras quedan en reposo. Por lo tanto, $\bar{U} = \bar{0}$, y esta condición de frontera se convierte en

$$\bar{u} \cdot \bar{n} = 0.$$

En coordenadas cartesianas, con y normal a la pared y x y z en el plano tangencial local a la pared, se obtiene

$$v = 0.$$

La **condición de no deslizamiento** o **condición de adherencia** señala que entre una pared rígida y el fluido que entra en contacto con ella, no hay velocidad tangencial relativa a ambas, lo que nos indica que

$$\bar{u} \times \bar{n} = \bar{U} \times \bar{n}, \quad (1.9)$$

y en el caso cuando se escoge un marco de referencia para el cual la pared no se mueve; es decir, $\bar{U} = \bar{0}$, se tiene

$$\bar{u} \times \bar{n} = \bar{0}, \quad \text{ó} \quad u = v = w = 0.$$

Considerando ambas condiciones, (1.8) y (1.9), tenemos

$$\bar{u} = \bar{U}.$$

En coordenadas cartesianas y escogiendo un marco de referencia para el cual la pared no se mueve, obtenemos

$$u = v = w = 0.$$

La **condición de frontera total** se refiere a que no hay movimiento relativo entre un fluido y la pared con la cual entra en contacto.

1.7.2. Interfaces de fluidos

Aquí consideremos $z = \zeta(x, y, z)$ una superficie tridimensional como se muestra en la siguiente figura

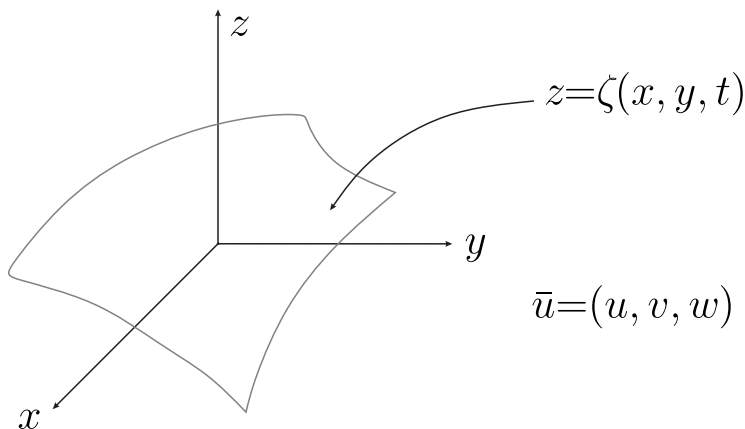


Figura 1.9: Superficie $z = \zeta(x, y, z)$.

Digamos que el fluido debajo de la superficie lo llamamos **fluido 1** y al que se encuentra por encima de la superficie lo llamamos **fluido 2**. Así, todo parámetro o variable con subíndice 1 corresponde al fluido 1 y con subíndice 2, al fluido 2. A continuación explicamos algunas condiciones relacionadas con $\zeta(x, y, z)$.

1. Condición cinemática:

Si la interfaz, $z = \zeta(x, y, t)$, está en movimiento, podemos describirla definiendo $F(x, y, z, t) = 0$, donde t representa tiempo, y F alguna función de tiempo y posición en coordenadas cartesianas, digamos $F \equiv z - \zeta(x, y, t)$ [8]. Como $F = 0$ en la interfaz para todos los tiempos, la derivada con respecto al tiempo siguiendo una partícula material en la interfaz (la derivada material) tiene que ser también cero. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{DF}{Dt} \\
 &= \frac{\partial F}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla F \\
 &= -\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u}(-\zeta_x, -\zeta_y, 1) \\
 &= -\frac{\partial \zeta}{\partial t} - u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w.
 \end{aligned}$$

Así se tiene,

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

La condición cinemática indica que no hay formación de cavidades en la interfaz.

2. Continuidad de las velocidades sobre ζ :

Esta condición indica que, aunque los perfiles de velocidades en el fluido 1 y en el fluido 2 son diferentes, ambos coinciden en la interfaz; es decir

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2.$$

3. Continuidad de los esfuerzos:

Cabe señalar que el balance de esfuerzos está caracterizado por

$$[\bar{n} \cdot \bar{\sigma}]_2^1 = \gamma \bar{n} (\nabla \cdot \bar{n}) - \nabla \gamma,$$

donde $[\cdot]_2^1$ representa la diferencia de la expresión encerrada por $[\cdot]$ del fluido 1 menos la del fluido 2; $\bar{\sigma} = (\sigma_{ij})$ representa el tensor de esfuerzos; γ representa la tensión interfacial; $\bar{n} \cdot \bar{\sigma}$ representa el esfuerzo (fuerza por unidad de área) que ejerce el fluido 2 sobre el fluido 1 y el que ejerce el fluido 1 sobre el fluido 2, según sea el caso (generalmente tendrá ambas componentes, la normal y la tangencial); $\gamma \bar{n} (\nabla \cdot \bar{n})$ representa la fuerza de la curvatura normal por unidad de área asociada con la curvatura local de la interfaz; $\nabla \gamma$ representa los esfuerzos tangenciales asociados con los gradientes en la tensión superficial. Esta ecuación recibe el nombre de **Ecuación del Balance de Esfuerzos**. Ahora bien, en la interfaz estos esfuerzos normales y tangenciales deben balancearse.

a) Balance de los Esfuerzos Normales (BEN ó NSB por sus siglas en inglés):

Aplicando el producto punto de la ecuación del balance de esfuerzos con la normal \bar{n} , se desarrolla el balance de los esfuerzos normales en la interfaz:

$$[\bar{n} \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{n}]_2^1 = -\gamma (\nabla \cdot \bar{n}),$$

donde el lado derecho representa la fuerza de curvatura por unidad de área. Así, tenemos

$$[\bar{n} \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{n}]_2^1 = -\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{sobre } z = \zeta(x, y, t),$$

donde γ es el coeficiente de tensión superficial y R_1^{-1} y R_2^{-1} son las curvaturas principales. R_1 y R_2 son los radios de circunferencias circunscritas a la interfaz.

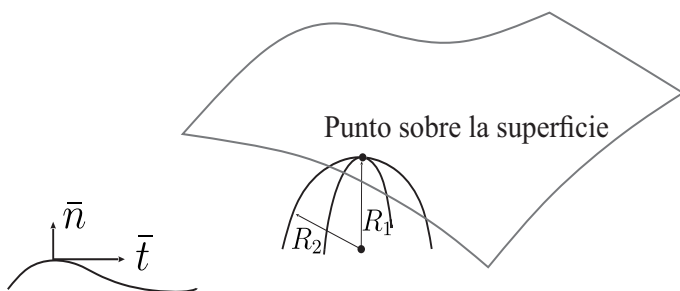


Figura 1.10: Radios de las circunferencias circunscritas en una superficie.

Los esfuerzos normales son las componentes normales de la fuerza superficial que actúa a través de un elemento de la superficie plana paralela a los planos coordenados. El salto en los esfuerzos normales que atraviesan la interfaz debe balancear la fuerza de curvatura por unidad de área. Observamos que una superficie con curvatura no cero expone un salto en los esfuerzos normales a través de la interfaz.

b) Balance de los Esfuerzos Tangenciales (BET ó TSB por sus siglas en inglés):

De manera similar que en BEN, tomamos el producto punto de la ecuación del balance de esfuerzos con el vector unitario tangente, \bar{t} , a la interfaz. De esta manera, se desarrolla el balance de los esfuerzos tangenciales en la interfaz:

$$[\bar{t} \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{n}]_2^1 = -\nabla_s \gamma \cdot \bar{t} \quad \text{a lo largo de la superficie,}$$

donde \bar{t} es el vector unitario tangencial (a la superficie) y ∇_s es el gradiente de superficie.

El lado izquierdo representa el salto en las componentes tangenciales del esfuerzo hidrodinámico en la interfaz, tiene sólo gradientes de velocidad, no hay presión; por lo cual si en el lado derecho se tiene un $\nabla_s \gamma$ no cero en la interfaz del fluido, esto conducirá a movimiento. El lado derecho representa los esfuerzos tangenciales asociados con gradientes en γ , como podría resultar de gradientes en temperatura o composición química en la interfaz.

Capítulo 2

Flujos incompresibles

En términos generales, un flujo de fluido es incompresible cuando su volumen no cambia en el tiempo; por ejemplo, los líquidos. Sin embargo, los gases cuando están expuestos a presión (posiblemente por la acción de reducir la superficie del envase que los contiene), cambian su volumen (en este caso se comprimen); por lo cual son compresibles. En este capítulo estudiaremos algunos flujos incompresibles como, por ejemplo, flujo laminar incompresible y confinado a dos capas, flujo no viscoso, entre otros. También dedicamos una sección para estudiar el número de Reynolds.

2.1. Fluido ideal

Un **fluido ideal** es incompresible y no tiene fricción [33]. Suponer un fluido como ideal es útil cuando se analizan flujos en problemas que consideran grandes cantidades de fluido; por ejemplo, los mares. Un fluido ideal satisface las siguientes condiciones o ecuaciones [33]:

- (a) La ecuación de continuidad ó conservación de masa para fluidos incompresibles $\nabla \cdot \underline{u} = 0$, ó

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

- (b) La segunda ley del movimiento de Newton en cualquier punto y en cualquier instante. Esta ley no es más que la ecuación de Navier-

Stokes para fluidos con densidad constante:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{F}.$$

- (c) El flujo no puede penetrar ninguna frontera sólida, ni se pueden formar vacíos entre la frontera y el fluido.

2.2. Flujos ideales

Un flujo ideal es aquel flujo de un fluido ideal; en otras palabras, es el flujo de un fluido que se asume que no tiene viscosidad; es decir, no tiene fricción interna; por lo tanto, no soporta esfuerzos cortantes y fluye sin disipación de energía y, por consiguiente, no hay esfuerzos tangenciales entre dos capas vecinas. A este tipo de flujo también se le denomina **flujo no viscoso** ó **flujo perfecto**. Hay problemas que se simplifican mucho cuando se considera que el fluido bajo estudio es no viscoso o que su viscosidad es tan pequeña que puede ser despreciable. Sin embargo, hay que tener cuidado cerca de la frontera del fluido pues la capa fronteriza tiene una influencia importante.

Asumir que un flujo es no viscoso, por lo general, es válido en aquellos problemas en los cuales las fuerzas viscosas son pequeñas comparadas con las fuerzas inerciales. Cuando las fuerzas viscosas se consideran despreciables, las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican y se convierten en las ecuaciones de Euler:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{F}.$$

Un parámetro adimensional que aparece en la ecuaciones de Navier-Stokes, se conoce con el nombre de número de Reynolds y relaciona las fuerzas inerciales con las fuerzas viscosas del flujo de fluido. En la siguiente sección estudiaremos este parámetro y cómo se caracterizan a los flujos según el valor que tome.

2.3. El número de Reynolds

La naturaleza de un flujo dado de un fluido incompresible se caracteriza por su número de Reynolds. Determinar si el flujo es turbulento o

laminar, o si tiene una tendencia de turbulento a laminar o viceversa, dependerá del valor que tome el número de Reynolds asociado a ese flujo.

El irlandés Osborne Reynolds (1842-1912) realizó notables contribuciones en dinámica de fluidos, y a él es que se debe la existencia del número de Reynolds. Se graduó de matemático en la Universidad de Cambridge en 1867. Estudió las condiciones en las que un fluido confinado en un cilindro circular cambiaba de su estado laminar al régimen turbulento. El número de Reynolds llegó a conocerse en 1883 cuando se publica su artículo [29].

Reynolds llegó a la conclusión de que si se tienen dos problemas de flujo geoméricamente similares, éstos serían dinámicamente idénticos si ambos poseían ecuaciones diferenciales generales equivalentes. He aquí donde el número de Reynolds cobra importancia. Al re-escalar las unidades de longitud, de tiempo y de masa usando cantidades características del mismo problema dado, Reynolds obtuvo la expresión adimensional $ul\rho/\mu$ igual para ambos casos. La variable u es la velocidad característica que se describe usando la longitud y el tiempo característicos utilizados para hacer el re-escalamiento, ρ es la densidad de masa y μ es la viscosidad, ambas dadas por el problema. Esta expresión adimensional es la que se conoce como el número de Reynolds (R_e). Así, escribimos

$$R_e = \frac{ul\rho}{\mu}.$$

Cuando R_e toma valores grandes, significa que al menos uno de (podrían ser todos) los términos del numerador tendría(n) que ser grande(s) en comparación con el valor del denominador. Interpretando lo dicho previamente, del numerador tendríamos una gran extensión de fluido, altas velocidades y altas densidades; del denominador se induce que las viscosidades son extremadamente pequeñas, o combinaciones de tales cantidades. Las variables del numerador están relacionadas con las fuerzas inerciales, éstas son causadas por la aceleración o desaceleración del fluido. La variable en el denominador es el motivo de las fuerzas cortantes viscosas. De esta manera, el número de Reynolds puede considerarse como la relación entre las fuerzas inerciales y las viscosas.

En general, a medida que el número de Reynolds crece, la intensidad de la turbulencia aumenta. Cuando los efectos inerciales como los de la viscosidad son importantes, el número de Reynolds (R_e) toma valores intermedios. Por ejemplo, en cilindros circulares (para otras configuraciones, lo que sigue varía) si $R_e < 2100$ significa que el flujo es laminar, si $R_e > 3000$ significa que el flujo es turbulento. Para valores de R_e entre 2100 y 3000 decimos que el flujo está en régimen de transición, las capas se van ondulando variablemente en el tiempo pero no se mezclan.

En conclusión, el número de Reynolds provee una medida usando los resultados experimentales obtenidos con cierto flujo, para pronosticar el comportamiento de otros flujos de fluido. Sin embargo, todavía no se conoce a ciencia cierta el mecanismo y los motivos por los cuales un flujo es laminar o turbulento.

2.4. Flujo incompresible restringido por paredes

En esta sección se considera el caso de flujos delimitados por paredes donde la capa fronteriza puede tener efecto completamente a través de todo el flujo.

Supongamos que tenemos un flujo horizontal con un extremo inmerso en un embalse, como se muestra en la siguiente figura:

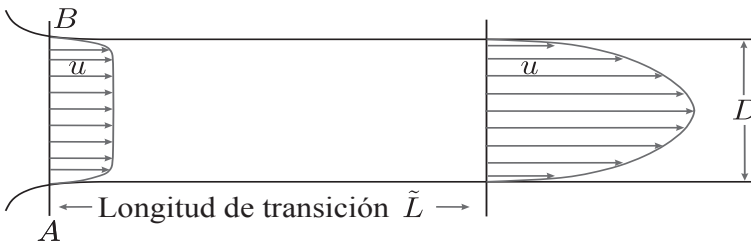


Figura 2.1: Tubo horizontal con un extremo inmerso en un embalse.

En la sección AB, cerca de la entrada, que sería en realidad la conexión con el embalse, la velocidad tiene un perfil, a través de la sección transversal, casi uniforme. En vista de que las moléculas del fluido que tocan

la pared, permanecen adheridas a ella, el esfuerzo cortante hace que el fluido se retarde cerca de la pared. Como consecuencia de la continuidad, después de cierta longitud, se puede observar que la velocidad es mayor en la región central. A partir de esa longitud que llamaremos ‘longitud de transición’ y denotaremos por \tilde{L} , el perfil de la velocidad deja de cambiar, pues ahí los efectos de la pared alcanzaron la línea central del cilindro.

La longitud de transición depende del número de Reynolds; por ejemplo, Langhaar [22] en su investigación logra desarrollar una fórmula, para un flujo estacionario en un tubo recto, en la cual relaciona la longitud de transición, \tilde{L} , con el número de Reynolds, R_e , como sigue:

$$\frac{\tilde{L}}{D} = 0,058R_e,$$

la cual coincide muy bien con los resultados observados.

2.5. Flujo completamente desarrollado

Son aquellos flujos que han alcanzado un estado en el cual su perfil de velocidad no cambia más a medida que pasa el tiempo; esto debido, principalmente, a que los efectos de las fronteras alcanzaron su límite.

A continuación consideremos el flujo laminar completamente desarrollado entre paredes fijas

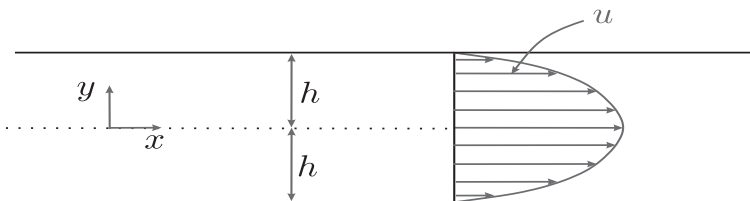


Figura 2.2: Flujo laminar completamente desarrollado entre paredes fijas.

Podemos observar que la velocidad sólo depende de y ; y, además, tiene un máximo en el centro y toma el valor cero en las paredes. La distri-

bución de velocidad es simétrica con respecto al eje x . La ecuación de movimiento, usando las ecuaciones de Navier-Stokes, viene dada por:

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right),$$

con $u = 0$ para $y = h$, y $\partial u / \partial y = 0$ para $y = 0$.

Integrando la ecuación anterior con respecto a y , obtenemos

$$\mu \frac{du}{dy} = \frac{dp}{dx} y + A,$$

y utilizando la condición de frontera $\partial u / \partial y = 0$ para $y = 0$, se obtiene $A = 0$. Volviendo a integrar con respecto a y , tenemos:

$$\mu u = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} y^2 + B,$$

y utilizando la condición de frontera que nos queda, $u(h) = 0$, se obtiene:

$$B = -\frac{1}{2} p_x h^2.$$

Así, la solución es:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - h^2).$$

2.6. Flujo de Poiseuille

El flujo de Poiseuille es un flujo laminar completamente desarrollado que puede ocurrir, bien sea entre dos placas rígidas fijas, o en un tubo de corte transversal circular. El caso de flujo laminar entre dos paredes fijas ya lo vimos en la sección anterior.

A continuación estudiaremos el caso del flujo laminar dentro de un cilindro circular, como se muestra en la siguiente figura:

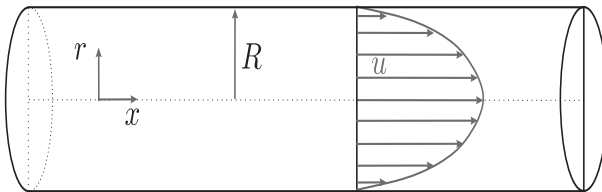


Figura 2.3: Flujo laminar dentro de un cilindro circular.

La ecuación de movimiento, usando las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas, en este caso viene dada por:

$$\frac{dp}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(-\mu r \frac{du}{dr} \right) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\mu \left[\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right] - \frac{dp}{dx} = 0,$$

considerando que la viscosidad, μ , es uniforme. Las condiciones de frontera vienen dadas por: $u(R) = 0$ y $(\partial u / \partial r)(0) = 0$. Integrando con respecto a r , obtenemos:

$$r \frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + A.$$

Usando la condición de frontera $(\partial u / \partial r)(0) = 0$, se obtiene $A = 0$, y la ecuación nos queda con la forma:

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} r.$$

Volviendo a integrar con respecto a r , tenemos:

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + B,$$

y usando la condición de frontera que nos queda, $u(R) = 0$, obtenemos

$$B = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2.$$

Así, la solución queda expresada como

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r^2 - R^2).$$

2.7. Flujo de Couette

Según la geometría del problema, el flujo de Couette se clasifica en dos tipos: flujo de Couette rotatorio y flujo de Couette plano [28]. En el primer caso, el flujo se encuentra entre dos cilindros concéntricos en los

cuales uno de ellos mantiene un movimiento rotatorio; el segundo ocurre entre placas paralelas donde una de ellas se mueve lateralmente en su propio plano. En este curso, trataremos sólo el caso de flujo de Couette entre placas paralelas.

Flujo de Couette plano: Consideremos un flujo laminar completamente desarrollado entre dos placas paralelas horizontales. Supongamos que la placa superior se mueve a una velocidad constante U y la placa inferior permanece fija.

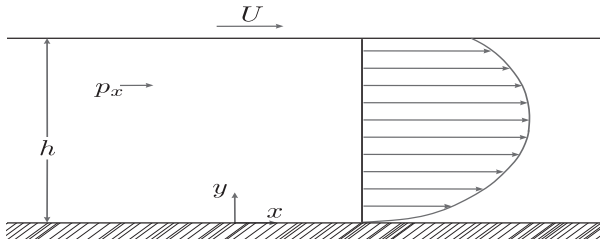


Figura 2.4: Flujo de Couette entre dos placas paralelas.

En este problema tenemos $\underline{u} = (u, 0, 0)$, con $u \neq 0$, que es la componente de velocidad en la dirección x y cambia dependiendo de y , como se puede ver en la Figura 2.4.

Usando las ecuaciones de Navier-Stokes, obtenemos la siguiente ecuación de movimiento para este problema:

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx},$$

con las siguientes condiciones de frontera: $u = 0$ para $y = 0$, y $u = U$ para $y = h$. Resolviendo, de manera similar a los problemas anteriores, obtenemos:

$$u = \frac{U}{h} y + \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy).$$

Si suponemos que $U = 0$, el problema se transforma en un problema para flujo de Poiseuille, con

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy),$$

mostrando claramente que el perfil de velocidad es una parábola.

Si, por otro lado, suponemos que no hay gradiente de presión; es decir, $dp/dx = 0$, entonces la distribución de la velocidad, u , toma la forma de una línea recta, como podemos ver a continuación:

$$u = \frac{U}{h}y.$$

2.8. Flujo laminar, incompresible y permanente entre placas paralelas e inclinadas

Consideremos un fluido que permanentemente fluye entre dos placas paralelas, inclinadas un ángulo θ con respecto al piso. Supongamos que el flujo es laminar, y que la placa superior se mueve a una velocidad constante U . El caso especial cuando ambas placas son fijas se obtiene cuando $U \equiv 0$.

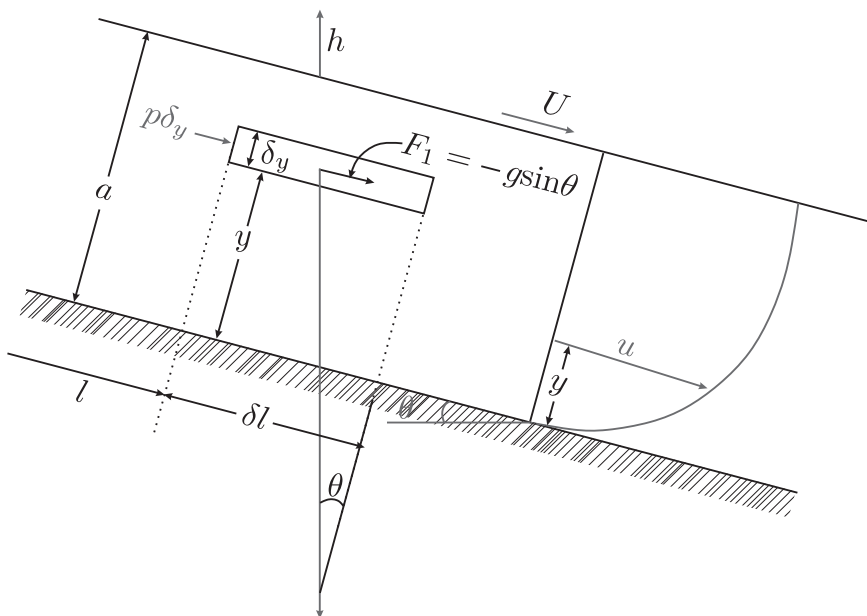


Figura 2.5: Flujo de Couette entre dos placas paralelas inclinadas un ángulo θ respecto a la horizontal.

Aquí, $\underline{u} = (u, 0, 0)$, con $u \neq 0$, representa el perfil de la velocidad en la dirección l y cambia según “ y ” cambia. También, $\underline{F} = (F_1, 0, 0)$, con $F_1 = g \sin \theta$; pero, de la figura, sabemos que: $\sin \theta = -\partial h / \partial l$. De esta manera, tenemos

$$\rho \underline{F} = \left(\rho g \sin \theta, 0, 0 \right) = \left(-\gamma \frac{\partial h}{\partial l}, 0, 0 \right),$$

donde $\gamma = \rho g$. Usando las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial l} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\rho g \frac{\partial h}{\partial l} - \frac{\partial p}{\partial l} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

obtenemos:

$$0 = -\gamma \frac{\partial h}{\partial l} - \frac{\partial p}{\partial l} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2};$$

pero, $p \equiv p(l)$ y $h \equiv h(l)$ únicamente, entonces:

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{d}{dl} (p + \gamma h).$$

Ahora, integrando con respecto a y , encontramos:

$$\mu \frac{du}{dy} = y \frac{d}{dl} (p + \gamma h) + A.$$

Integrando una vez más con respecto a y , obtenemos:

$$u = \frac{1}{2\mu} y^2 \frac{d}{dl} (p + \gamma h) + \frac{A}{\mu} y + B.$$

Ahora, considerando las condiciones de frontera: $u = 0$ para $y = 0$, y $u = U$ para $y = a$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= u(y=0) = 0 + 0 + B, & \Rightarrow & B = 0, \\ U &= u(y=a) = u = \frac{a^2}{2\mu} \frac{d}{dl} (p + \gamma h) + \frac{Aa}{\mu}, \\ A &= \frac{\mu}{a} U - \frac{a}{2} \frac{d}{dl} (p + \gamma h). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$u = \frac{U}{a}y - \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dl} (p + \gamma h)(ay - y^2),$$

encontrando lo que buscábamos.

Ahora, si quisiéramos conocer el caudal, Q , que pasa por medio de una sección transversal fija, lo que se hace es integrar a u con respecto a y considerando toda la distancia entre las placas; es decir

$$Q = \int_0^a u dy = \frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu} \frac{d}{dl} (p + \gamma h)a^3.$$

Por otro lado, para el caso cuando la placa superior no se mueve; es decir, $U = 0$, se tienen las condiciones de frontera: $u = 0$ tanto para $y = 0$ como para $y = a$. En este caso, obtenemos $B = 0$ y

$$A = -\frac{a}{2} \frac{d}{dl} (p + \gamma h).$$

Así,

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dl} (p + \gamma h)(y^2 - ay),$$

Ejemplo 2.8.1. Consideremos una placa que se mueve con respecto a la otra como se muestra en la figura 2.6. Aquí $\mu = 0,1 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ y $\rho = 925 \text{ Kg}/\text{m}^3$. Hallar el perfil de velocidades y el caudal.

Solución.

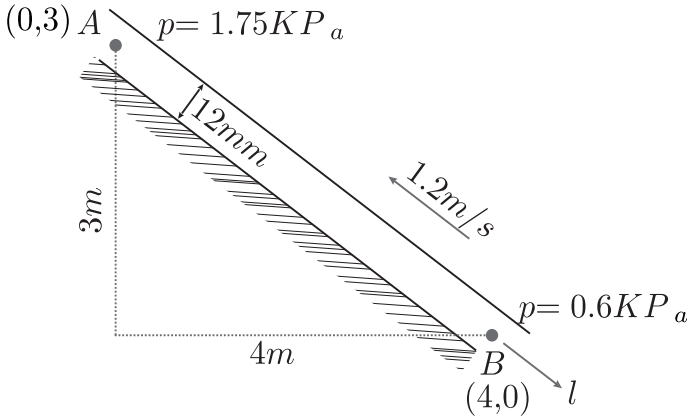


Figura 2.6: Flujo laminar entre dos placas paralelas inclinadas.

$$\text{En A : } p + \gamma h = 1750 + 925 * 9,806 * 3 = 29111,5$$

$$\text{En B : } p + \gamma h = 600 + 925 * 9,806 * 0 = 600,0$$

$$\frac{d}{dl}(p + \gamma h) = \frac{600 - 29111,5}{\sqrt{(0 - 4)^2 + (3 - 0)^2}} = \frac{-28511,5}{5} = -5702,3.$$

De la figura vemos que $a = 0,012 \text{ m}$, $U = -1,2 \text{ m/s}$, entonces:

$$\begin{aligned} u(y) &= \frac{U}{a}y - \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dl}(p + \gamma h)(ay - y^2) \\ &= \frac{-1,2}{0,012}y - \frac{1}{2 * 0,1}(-5702,3)(0,012y - y^2) \\ &= -100y + 342,138y - 28511,5y^2 \\ \therefore u(y) &= 242,138y - 28511,5y^2. \end{aligned}$$

En cuanto al caudal, calculamos la integral de u con respecto a y

$$Q = \int_0^{0,012} u dy = \left[121,069y^2 - 9503,833y^3 \right]_0^{0,012} = 0,0010113 \text{ m}^2/\text{s}.$$

Capítulo 3

Movimiento irrotacional. Teoremas integrales

En la atmósfera, bajo un régimen turbulento, se puede observar la existencia o aparición de conmoviones atmosféricas, tempestades y/o remolinos de escalas espaciales y temporales muy variadas. Por ejemplo, uno de estos fenómenos importantes es el ciclón, caracterizado por un centro de presión y vientos que giran a su alrededor. En este capítulo, se tratan dos cantidades físicas relacionadas con la rotación, éstas son la vorticidad y la circulación.

El hecho de que en un campo vectorial aparezcan estructuras rotantes, conduce a la introducción del operador vectorial rotacional. Si en una región de fluido, sus partículas rotan alrededor de un eje cualquiera, decimos que estamos en presencia de un flujo vórtice o que el flujo es rotacional. Si, por el contrario, las partículas no rotan decimos que el flujo es **irrotacional**. En mecánica de fluidos, al rotacional del campo de velocidades se llama vorticidad, que estudiaremos de inmediato.

3.1. Vorticidad

La vorticidad es una cantidad que ayuda a cuantificar localmente la rotación de un fluido. En matemáticas, la vorticidad, $\underline{\omega}$, de un fluido se

define como el *curl* del vector velocidad \underline{u} ; es decir,

$$\underline{w} = \text{curl } \underline{u} = \nabla \times \underline{u}.$$

En física, la vorticidad se representa mediante un vector que posee la misma naturaleza que el vector de velocidad angular. El producto $\nabla \times \underline{u}$ viene definido como

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{u} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k}. \end{aligned}$$

Claramente, las componentes de \underline{w} son:

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad w_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Muchos de los problemas a resolver corresponden a flujos rotacionales que se desarrollan dentro de cilindros o tuberías, en cuyos casos conviene usar coordenadas polares cilíndricas:

$$\begin{aligned} w_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} - \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \\ w_\phi &= \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ w_z &= \frac{u_\phi}{r} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

3.2. El caso de fluido no viscoso

En muchos casos prácticos el patrón general de un flujo está compuesto de dos regiones: la capa fronteriza, que es la región del flujo que contiene una parte en contacto con las paredes del objeto, y la región de flujo externo, que corresponde al flujo fuera de la capa fronteriza. En la capa fronteriza, las fuerzas viscosas cobran importancia, es en esta región donde la vorticidad está presente.

Una manera en la que se puede generar vorticidad es mediante el contacto del fluido con las fronteras sólidas, al considerar la condición de no deslizamiento. Por efectos de la viscosidad, la vorticidad se va difundiendo a medida que se va alejando de la frontera hacia la parte más interna del fluido; es decir, a medida que se aleja de la frontera sólida y a causa de los efectos de la viscosidad, la vorticidad se va apocando.

A pesar de que, desde el punto de vista teórico, es posible que en un fluido no viscoso exista vorticidad, generalmente, podemos identificar regiones con viscosidad despreciable y que satisfacen las condiciones de **flujo irrotacional** [21]; es decir, espacios del flujo donde la vorticidad \underline{w} llega a ser cero.

En la región de flujo externo, la viscosidad es despreciable y el flujo es casi irrotacional en carácter. En este capítulo, consideramos la región de flujo externo, donde las fuerzas viscosas son despreciables. Esto nos lleva a estudiar la ecuación de Euler en la siguiente sub-sección.

3.2.1. La ecuación de Euler:

En el capítulo 1, derivamos la ecuación de Euler (1.8), para el movimiento de un fluido no viscoso [32], la cual re-escribiremos a continuación:

$$\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \underline{F}. \quad (3.1)$$

Podemos expresar la fuerza corporal, \underline{F} , como el gradiente de un potencial escalar ψ ; así,

$$\underline{F} = -\nabla\psi,$$

y la ecuación de Euler toma la forma:

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla\psi - \frac{1}{\rho}\nabla p. \quad (3.2)$$

Por otro lado, si consideramos la identidad:

$$(\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u} = \frac{1}{2}\nabla(\underline{u}^2) - \underline{u} \times \text{curl } \underline{u}, \quad (3.3)$$

y en vista de que la vorticidad se define como $\underline{w} = \text{curl } \underline{u}$, la ecuación de Euler (3.2), usando (3.3) y la definición de derivada total

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u},$$

queda expresada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\underline{u}^2) - \underline{u} \times \underline{w} = -\nabla \psi - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (3.4)$$

En las tres siguientes sub-secciones analizaremos los casos de flujos: estacionario, irrotacional, y la combinación de ambos.

3.2.2. Caso de flujo estacionario:

Decimos que un flujo es estacionario cuando no cambia en el tiempo, lo que significa que su perfil de velocidad es siempre el mismo; así, se tiene $\partial \underline{u} / \partial t = 0$, y la ecuación (3.4) toma la expresión

$$\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \left(\frac{\underline{u}^2}{2} \right) + \nabla \psi = \underline{u} \times \underline{w}. \quad (3.5)$$

El producto $\underline{u} \times \underline{w}$ es una cantidad vectorial, que es siempre perpendicular al vector velocidad \underline{u} . Lo que nos indica que, si integramos la ecuación (3.5) a lo largo de una línea de corriente, siguiendo el movimiento del fluido, que en este caso está bajo condiciones de flujo estacionario, no obtendremos contribución alguna del lado derecho. Por lo tanto, al integrar (3.5) siguiendo una línea de corriente, resulta la siguiente ecuación

$$\int \frac{1}{\rho} dp + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + \psi = \text{constante}, \quad (3.6)$$

donde la *constante* se produce según la línea de corriente a lo largo de la cual se integre.

Supongamos que la fuerza corporal \underline{F} en la ecuación (3.1) corresponde a la fuerza provocada por la gravedad terrestre. En este caso, el potencial escalar ψ quedaría representado por gz , y (3.5) se transforma en la muy

conocida ecuación de Bernoulli para flujos no viscosos que se desarrollan a lo largo de una línea de corriente:

$$\int \frac{1}{\rho} dp + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + gz = \text{constante},$$

con la *constante* que viene de la línea de corriente que se sigue. Si, además, la densidad es constante, obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + gz = \text{constante}.$$

Es interesante saber qué sucede cuando no hay vorticidad en el sistema que se está estudiando. Esto es lo que estudiaremos en la siguiente subsección.

3.2.3. Caso de flujo irrotacional:

Un flujo es irrotacional cuando su vorticidad, \underline{w} , es cero en todos los puntos del fluido. Hay problemas que tienen vorticidad; pero, es tan pequeña que se desprecia y el flujo se considera irrotacional. En esta situación, la ecuación de movimiento de Euler, (3.4), se transforma en:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \nabla (\underline{u}^2) - \nabla \psi - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (3.7)$$

Si consideramos que tratamos con fluidos incompresibles; es decir, ρ es constante, la ecuación anterior se puede factorizar con respecto al operador ∇ y quedaría expresada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + \psi \right).$$

Hasta aquí hemos visto lo que sucede si el flujo es estacionario o si el flujo es irrotacional. Sin embargo, hay casos en los cuales el flujo es a la vez irrotacional y estacionario, esto es lo que estudiaremos a continuación.

3.2.4. Caso de flujo estacionario e irrotacional:

Ya hemos dicho que un flujo es estacionario cuando no cambia en el tiempo; es decir, su perfil de velocidad es siempre el mismo, y es

irrotacional cuando su vorticidad, \underline{w} , es cero en todos los puntos del fluido. Bajo estas consideraciones, la ecuación de Euler (3.4) toma la forma:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \left(\frac{1}{2} \underline{u}^2 \right) + \nabla \psi = 0.$$

Si, además, el fluido es incompresible, la ecuación de puede factorizar con respecto al operador ∇ , quedando:

$$\nabla \left(\frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + \psi \right) = 0. \quad (3.8)$$

El paso siguiente es integrar la ecuación (3.8), lo que resulta en la ecuación para flujo irrotacional incompresible estacionario

$$\frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + \psi = \text{constante}, \quad (3.9)$$

donde la *constante* en este caso es la misma para todas las líneas de corriente. Y una vez más, si la fuerza corporal es producida sólo por la gravedad, entonces el potencial escalar ψ sería igual a gz y (3.9) se transforma en la famosa ecuación de Bernoulli:

$$\frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + gz = \text{constante},$$

donde la *constante* es la misma para todas las líneas de corriente.

3.3. Flujo irrotacional y potencial de velocidad en tres dimensiones

Aquí se estudia la relación que hay entre un flujo irrotacional y la existencia de un potencial de velocidad. Para ello definimos, a continuación, lo que es un campo vectorial conservativo.

Definición 3.3.1. *Un campo vectorial \underline{u} se describe en términos matemáticos como conservativo si el vector \underline{u} se puede expresar como el gradiente de un potencial escalar ϕ cuyo valor depende sólo del vector posición \underline{r} .*

No es difícil probar que si $\underline{u} = \nabla\phi$, entonces $curl \underline{u} = 0$, y viceversa. Así, cuando estudiamos un flujo irrotacional, donde tenemos $curl \underline{u} = 0$ por definición, entonces la velocidad la podemos definir como el gradiente de un potencial ϕ de velocidad. En general, por conveniencia introducimos un signo negativo tal que cuando un gradiente decae produce un valor positivo para la velocidad \underline{u} , y así definimos el potencial velocidad como

$$\underline{u} = -\nabla\phi. \quad (3.10)$$

De esta manera, la ecuación de continuidad para flujo incompresible, $div \underline{u} = 0$ ó $\nabla \cdot \underline{u} = 0$, se convierte en la ecuación

$$div \nabla\phi = 0.$$

Esta ecuación se puede re-escribir, usando la notación $div \nabla = \nabla^2$, como $\nabla^2\phi = 0$, la cual es muy difundida y ampliamente conocida y aplicada, la ecuación de Laplace.

Entonces, ¿en qué consiste hacer un análisis matemático de un flujo irrotacional? Consiste en encontrar soluciones a la ecuación de Laplace que satisfaga ciertas condiciones de fronteras que estén bien especificadas en el problema a resolver. Por ejemplo, se podría considerar la aplicación de la condición de frontera en la cual, para todos los puntos de una superficie sólida, la componente de velocidad del fluido, normal a la superficie del mismo, sea cero; pero, con esta condición no podemos satisfacer el requisito de no deslizamiento en la superficie sólida.

Es así como, al resolver la ecuación de Laplace, lo que realmente hacemos es hallar una distribución de velocidad que satisfaga la ecuación de continuidad que conlleva en sí vorticidad igual a cero.

Si queremos encontrar o calcular la distribución de presión en el fluido, entonces lo que hay que hacer es resolver usando la ecuación de Euler o de Bernoulli.

En física matemática, la ecuación de Laplace aparece en muchas ocasiones pues es la ecuación básica que gobierna la distribución espacial del potencial en la teoría electrostática, magnetismo y campos gravitacionales newtonianos.

3.3.1. Analogía entre flujo de fluido irrotacional y electrostática

Para lograr entender mejor los flujos irrotacionales, se ha observado que existe una fuerte analogía entre éstos y la electrostática, que estudia las interrelaciones entre cargas eléctricas en reposo. Para ello se introduce el concepto de un punto fuente lo cual es el equivalente a un punto de carga.

En vista de que la masa, normalmente no se puede crear o destruir, entonces un punto fuente o sumidero no podría, normalmente, existir en el mundo físico real. Así que, el enfoque más próximo a un punto fuente, en el ámbito de ingeniería, sería un capilar de diámetro infinitesimal a través del cual sale fluido bajo presión a un pequeño distribuidor esférico y sumergido en el fluido; sin embargo, este concepto presenta algunas dificultades obvias. A pesar de ello, si se asume que tal fuente pudiera existir con una razón de flujo de volumen $Q \text{ m}^3/\text{s}$ y que se tiene simetría esférica, la velocidad radial con la que la fuente emite el fluido tendría la expresión

$$u_r = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad (3.11)$$

donde la variable r corresponde a la distancia radial que se mide desde el punto fuente. Por cierto, este resultado viene debido a que el área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.

Como, bajo condiciones de flujo irrotacional, la velocidad está relacionada con el gradiente del potencial mediante la definición (3.10), la ecuación para la velocidad radial, (3.11), puede ser re-escrita como sigue:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{Q}{4\pi r^2}. \quad (3.12)$$

Ahora, para obtener el potencial, ϕ , integramos (3.12) con respecto a r , y obtenemos

$$\phi = \frac{Q}{4\pi r} + C,$$

donde C es la constante de integración. Considerando el potencial de velocidad igual a cero cuando el radio es infinito, se llega a la conclusión

de que $C = 0$; así, tenemos que el potencial de velocidad para un punto fuente viene expresado por

$$\phi = \frac{Q}{4\pi r}. \quad (3.13)$$

En la teoría de electrostática se obtiene un resultado muy similar, pero reemplazando la cantidad $Q/(4\pi)$ con la carga electrostática e . Si seguimos la analogía, la cantidad $Q/(4\pi)$ en la ecuación (3.13) se conocería como la fuerza de la fuente.

Si en la ecuación del potencial de velocidad para un punto fuente (3.13), se introduce un signo negativo, obtenemos la función potencial para un punto sumidero. Las fuentes y los sumideros se pueden comparar, en electrostática, con las cargas positivas y negativas; la combinación de una fuente y un sumidero, a una distancia pequeña δ_x entre ambos, es similar a un dipolo. En electrostática, el momento de un dipolo se define como el producto de la carga e y la distancia de separación δ_x . De manera similar, la magnitud m de un dipolo o doblete en un flujo de fluidos la podemos definir como el producto $\frac{Q\delta_x}{4\pi}$.

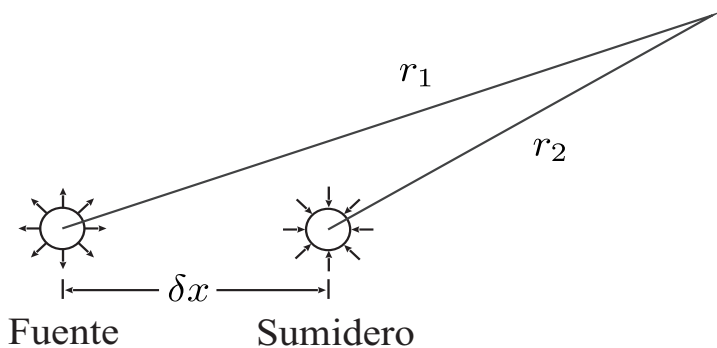


Figura 3.1: Dipolo: una fuente y un sumidero.

Ahora, es importante poder definir la función potencial para un dipolo. Se puede representar por la suma del potencial de la fuente más el

potencial del sumidero, y se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_1 + \phi_2 \\ &= \frac{Q}{4\pi r_1} + \left(-\frac{Q}{4\pi r_2}\right) = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \\ &= \frac{m}{\delta_x} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).\end{aligned}$$

Observando en la siguiente figura, encontramos que $r_2 = r_1 - \delta_x \cos \theta$,

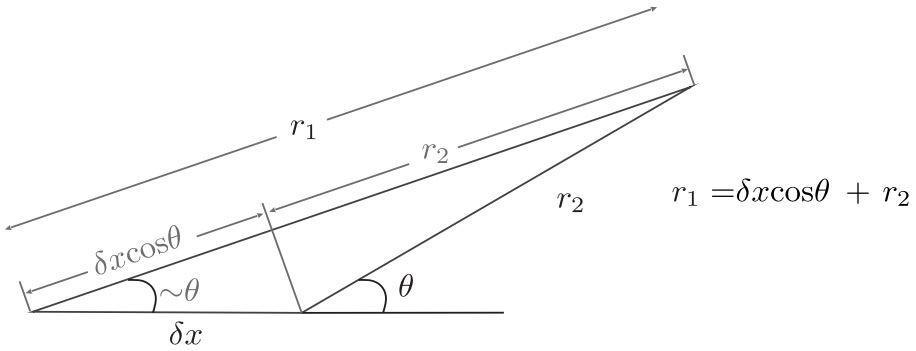


Figura 3.2: Relación entre las distancias radiales de una fuente y un sumidero.

Si a medida que hacemos decrecer δ_x , incrementamos Q de tal forma que el valor de m permanezca constante, se tiene que la función potencial para un dipolo se puede transformar en

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{m}{\delta_x} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \\ &= \frac{m}{(r_1 - r_2)/\cos \theta} \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}\right) \\ &= -m \cos \theta \left(\frac{1}{r_1 r_2}\right),\end{aligned}$$

si, además, suponemos que $r = r_1 = r_2$, entonces obtenemos

$$\phi = -\frac{m}{r^2} \cos \theta,$$

y ϕ también recibe el nombre de función potencial para un doblete de momento m que se encuentra ubicado en el origen.

Patrones de flujo axisimétrico tridimensional

En esta sección se estudia cómo, combinando fuentes, sumideros y dobletes con movimientos de corriente uniforme paralelos al eje, pueden construirse gráficamente ciertos patrones de flujos axisimétricos tridimensionales.

La función potencial para una corriente uniforme de izquierda a derecha paralela al eje x se representa, sin pérdida de generalidad, como $\phi = -U_0x$, donde U_0 es la velocidad de la corriente.

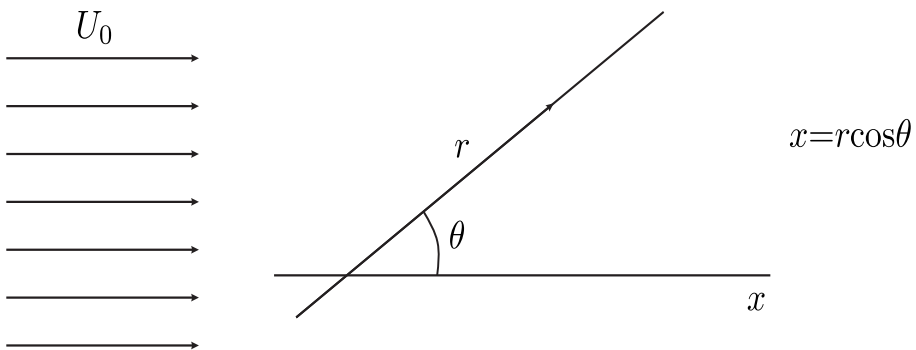


Figura 3.3: Velocidad de corriente U_0 .

De esta manera, $\phi = -U_0r \cos \theta$.

3.3.2. Corriente uniforme en presencia de una fuente en el origen

Consideremos un flujo uniforme que se mueve hacia el origen, punto en el cual se encuentra con una fuente, como se ilustra mediante la siguiente figura,

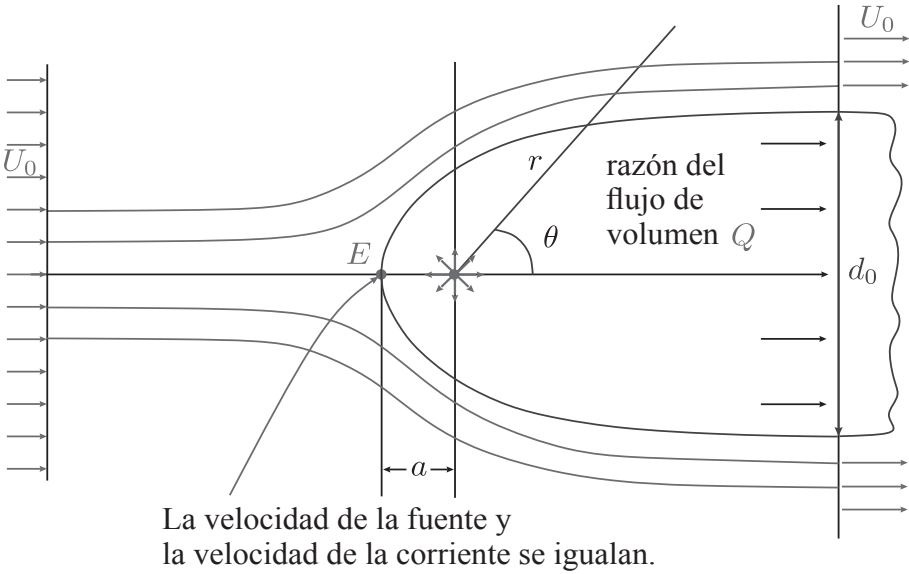


Figura 3.4: Corriente uniforme con una fuente en el origen.

Esta combinación de una corriente uniforme con una fuente, nos da un potencial de velocidad que se puede expresar mediante la fórmula

$$\phi = -U_0 r \cos \theta + \frac{Q}{4\pi r}.$$

De ahí que, la componente radial de la velocidad, u_r , en un punto definido por las coordenadas esféricas r, θ , quedaría expresado, después de derivar con respecto a r , de la siguiente forma

$$u_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = U_0 \cos \theta + \frac{Q}{4\pi r^2}. \quad (3.14)$$

Observando con cuidado en la Figura 3.4, en el punto E , tenemos

$$U_0 = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi r^2} \Big|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

$$\therefore a = \sqrt{\frac{Q}{4\pi U_0}}.$$

En la misma figura, $\theta = 0$ define el eje de simetría para puntos a la derecha del origen y $\theta = \pi$ define el eje de simetría para puntos a la

izquierda del origen. Así, si evaluamos u_r , usando la ecuación (3.14), en el punto E ; es decir, evaluamos la velocidad radial en el punto E , que se encuentra ubicado sobre el eje de simetría determinado por $\theta = \pi$ y $r = a$, se obtiene:

$$u_r(r = a, \theta = \pi) = U_0 \cos \pi + \frac{Q}{4\pi a^2}$$

$$u_r(a, \pi) = -U_0 + \frac{Q}{4\pi \frac{Q}{4\pi U_0}} = -U_0 + U_0 = 0,$$

resultado que coincide con lo que se esperaba.

Si volvemos a la Figura 3.4, notaremos que se forma una envolvente con las líneas de corriente separadas. Esta envolvente separa el flujo de volumen asociado con la corriente uniforme del flujo de volumen que se origina de la fuente. En vista de que no puede haber flujo que traspase la envolvente, en teoría, esta superficie se podría reemplazar por una frontera sólida y asumiendo que la condición de no deslizamiento en la frontera no se satisface.

Por otro lado, podemos calcular el diámetro, d_0 , de la envolvente; observemos que a cierta distancia suficiente corriente abajo, las líneas de corriente comienzan a ser nuevamente paralelas; dentro de la envolvente, la velocidad del fluido debe ser igual a la velocidad U_0 de la corriente principal, que es la que está fuera de la envolvente. Es así como se tiene

$$d_0 = 2R \sin \theta'.$$

Así, para obtener el patrón de flujo teórico para otros problemas, es posible usar un procedimiento similar. Por ejemplo, lograr obtener el patrón de flujo para una corriente uniforme que fluye pasando un cuerpo de revolución de forma ovalada. Esto es posible lograrlo si combinamos el potencial de velocidad para una fuente y el potencial de velocidad para un sumidero, localizados a una distancia de separación finita sobre el eje, con el potencial de velocidad para una corriente uniforme.

Si hacemos tender a cero la distancia entre la fuente y el sumidero, el problema se convierte en el problema límite de un flujo de corriente

uniforme con un doblete de magnitud m en el origen y para el cual la función potencial es

$$\phi = -U_0 r \cos \theta - \frac{m}{r^2} \cos \theta. \quad (3.15)$$

De esta manera, la componente radial de velocidad, $u_r = -\partial\phi/\partial r$, se puede hallar usando la expresión para ϕ en (3.15), obteniendo

$$\begin{aligned} u_r &= -\left(-U_0 \cos \theta + \frac{2m}{r^3} \cos \theta\right) \\ &= \left(U_0 - \frac{2m}{r^3}\right) \cos \theta, \end{aligned}$$

para cualquier punto (r, θ) en el flujo. En términos generales, u_r será cero cuando $U_0 - 2m/r^3 = 0$; es decir, cuando

$$r \equiv r_0 = \left(\frac{2m}{U_0}\right)^{1/3}.$$

La interpretación de lo anterior indica que a través de la superficie esférica de radio r_0 , el flujo es nulo; por lo tanto, el potencial de velocidad para un doblete que hallamos, y que está dado por (3.15), se cumple o se satisface para valores de r mayores que r_0 ; en otras palabras, corresponde al potencial de velocidad para el flujo de una corriente de fluido no viscoso ideal que pasa una esfera de radio r_0 . En la siguiente figura se ilustra el patrón de dicho flujo

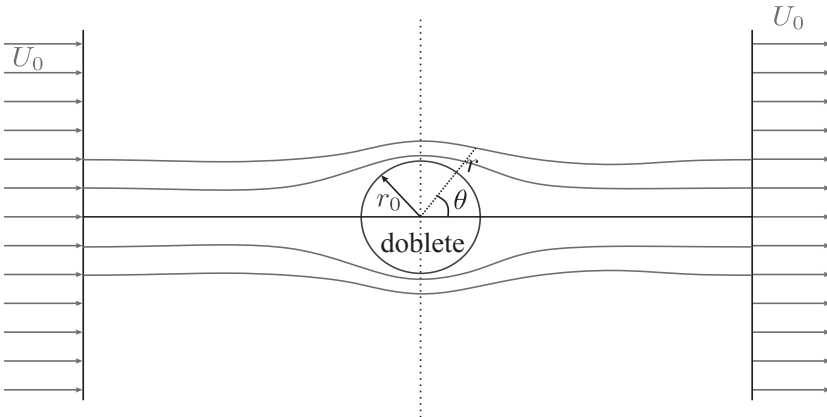


Figura 3.5: Flujo de fluido no viscoso que pasa una esfera de radio r_0 .

Al sustituir $m = \frac{U_0 r_0^3}{2}$, en la ecuación (3.15), obtenemos:

$$\begin{aligned}\phi &= -U_0 r \cos \theta - \frac{U_0 r_0^3}{2r^2} \cos \theta \\ &= -U_0 r \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_0^3}{r^3} \right) \cos \theta.\end{aligned}$$

Para flujos de fluido con número de Reynolds grande y que pasan una esfera, la expresión en la ecuación anterior es un modelo que genera líneas de corriente, cuyo patrón coincide muy bien con las líneas de corriente observadas sobre la mitad frontal de dicha esfera.

3.4. Circulación

En dinámica de fluidos, la circulación es el flujo en torno a una curva cerrada. En términos físico-matemáticos, se puede definir como la integral de la velocidad a todo lo largo de la curva e integrada alrededor del circuito que encierra el área por donde pasa el fluido; en otras palabras, es la integral de línea, tomada alrededor de la curva que acota el área del fluido, de la componente de la velocidad tangente a la curva; y usualmente, se denota por Γ . Entonces, alrededor de cualquier ciclo cerrado en el fluido, la circulación se define como

$$\Gamma = \oint \underline{u} \cdot d\underline{l} = \int \text{curl } \underline{u} \cdot d\underline{s} = \int \underline{w} \cdot d\underline{s}.$$

Esta integral, por convención, se lleva a cabo en el sentido antihorario; es decir, contrario al de las agujas del reloj. Si se realiza en el sentido de las agujas del reloj, entonces a la integral se le agrega un signo menos.

Rotación, como la especifica la vorticidad, corresponde a cambiar la orientación en espacio de la partícula del fluido y no el movimiento de una partícula sobre un camino cerrado. Puede ocurrir que cada partícula de un fluido se mueva alrededor de un camino circular; pero, su vorticidad sea cero. Otro caso es que, cada partícula del fluido se mueva en una línea recta pero teniendo vorticidad.

La existencia de líneas de corriente cerradas en un patrón de flujo implica que hay ciclos para los cuales $\Gamma \neq 0$; así, el flujo no es irrotacional en todas partes. Sin embargo, un flujo sin líneas de corriente cerradas puede envolver circulación. Esquemáticamente tenemos:

$$\begin{aligned} \text{líneas de corriente cerradas} &\Rightarrow \text{circulación} \\ \text{circulación} &\not\Rightarrow \text{líneas de corriente cerradas} \end{aligned}$$

3.5. Teorema de circulación de Kelvin

La circulación alrededor de un ciclo lo definimos por la ecuación

$$\Gamma = \oint \underline{u} \cdot d\underline{l}.$$

Podemos considerar un ciclo que consiste continuamente de las mismas partículas de fluido; es decir, cada elemento $d\underline{l}$ se está moviendo con el fluido. Tal ciclo lo llamamos un ciclo material. El teorema de circulación de Kelvin asegura que para cualquier flujo gobernado por la ecuación de Euler, la circulación alrededor de un ciclo material se conserva. Esto se puede escribir como

$$\frac{D}{Dt} \oint \underline{u} \cdot d\underline{l} = 0,$$

donde el significado del operador diferencial $\frac{D}{Dt}$ ha sido ligeramente extendido de su aplicación en un simple punto a indicar que cada punto del ciclo se está moviendo con el fluido. Hay que resaltar que, en un fluido viscoso la circulación alrededor de un ciclo material no necesariamente se conserva.

Capítulo 4

Flujos bidimensionales

En la naturaleza que nos rodea, nos movemos en el espacio tridimensional y, por supuesto, por este motivo los flujos son básicamente tridimensionales; sin embargo, en ingeniería hay muchos casos en los cuales el flujo tiene un carácter que razonablemente se podría considerar aproximadamente bidimensional. Es aquí donde se hace uso del análisis complejo con todas sus aplicaciones posibles para resolver la ecuación de Laplace en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0,$$

lo que nos dice que ϕ es armónica. Recordemos que esta ecuación proviene de la ecuación de continuidad cuando los flujos son incompresibles; es decir, $\text{div } \underline{u} = 0$ para $\underline{u} = -\text{grad } \phi$, donde ϕ es el potencial de velocidad.

4.1. Función corriente

En esta sección introducimos la función corriente para entender el patrón de un flujo. Así que, primero definamos la **función corriente**, ψ , como aquella que satisface las igualdades siguientes:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{y} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Bajo estas condiciones, la función función corriente satisface la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0,$$

sin importar si el flujo es irrotacional o no. Considerando que el flujo sea irrotacional, la vorticidad debe ser cero en cada punto; así, tenemos

$$w_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

para el caso bidimensional. Con esto, concluimos que, si el flujo es irrotacional,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

ψ es armónica, lo que indica que está gobernada por la bien conocida ecuación de Laplace. Esta función toma un valor constante a lo largo de una línea corriente, y por esta relación que tiene con las líneas de corriente es que recibe el nombre de función corriente.

Dibujando líneas que concuerden con la dirección que tienen los vectores en cada punto del campo de velocidad, en un instante de tiempo t , obtenemos precisamente un conjunto de líneas de corriente. Sabemos que, por definición, ningún flujo puede atravesar una línea de corriente.

El dibujo obtenido de las líneas de corriente para un tiempo particular t nos presentará el patrón del flujo instantáneo, el cual cambia a medida que el tiempo cambia, a menos que el flujo sea estacionario; y para este caso en particular, el patrón de las líneas de corriente se mantiene idéntico con el paso del tiempo. La ecuación básica para una línea de corriente [33] es

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}.$$

Si el flujo es estacionario, la fotografía de las líneas de corriente permanece sin cambio al pasar el tiempo y las líneas de camino de elementos

individuales del fluido coincidirán con las líneas de corriente.

Entonces, aquí obtenemos

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow vdx = udy.$$

Así, a lo largo de una línea de corriente tenemos que:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = vdx + (-u)dy = 0;$$

es decir, ψ es constante. Además, obtenemos las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

que, en coordenadas polares (r, θ) , toman la forma

$$v_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Como la vorticidad en cualquier punto en el flujo debe ser perpendicular a la línea de potencial constante ϕ que pasa por tal punto, las líneas de corriente y las líneas equipotenciales deben formar un conjunto ortogonal de curvas que se intersectan unas a otras en ángulos rectos. En la siguiente sección, nos introduciremos en los números complejos con la finalidad de definir el potencial complejo.

4.2. Potencial complejo

A partir de este momento es necesario introducir un cambio de notación. En este capítulo estaremos tratando exclusivamente con flujos bidimensionales. Así que, no usaremos la letra z como la tercera coordenada cartesiana, sino que la designaremos para representar al número complejo definido por

$$z = x + iy, \tag{4.1}$$

donde el símbolo i denota la raíz cuadrada de menos uno, ($i = \sqrt{-1}$). En coordenadas polares sería

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}. \tag{4.2}$$

Con el fin de visualizar las distribuciones de las funciones de corriente y del potencial de velocidad, se acostumbra crear una red de flujo compuesta por una familia de líneas (o niveles) de ϕ constante y líneas (o niveles) de ψ constante.

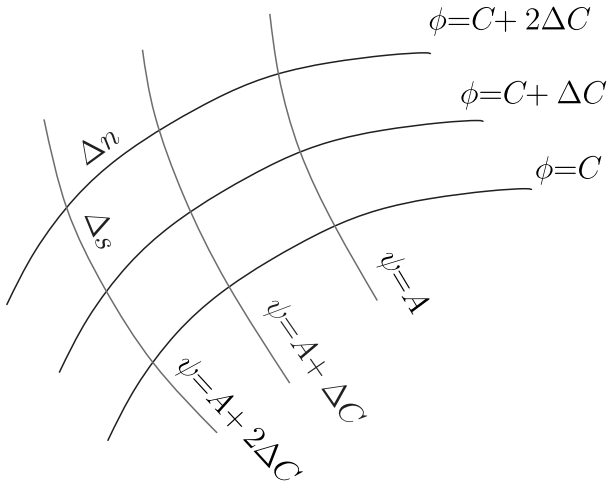


Figura 4.1: Red de flujo.

Una línea (o nivel) de ϕ constante se conoce como una línea equipotencial. Una línea (o nivel) de ψ constante es tangente al vector velocidad en cualquier punto y siempre intersectará una línea equipotencial formando ángulos rectos.

Definamos el **potencial complejo** de un flujo, bajo condiciones de flujo irrotacional bidimensional, como:

$$W = \phi + i\psi,$$

que es una función analítica del número complejo z definido por (4.1) ó (4.2).

En consecuencia, W tiene una única derivada con respecto a z en regiones donde las condiciones de Cauchy-Riemann se satisfacen. Si tomamos

Δz paralelo al eje y , entonces $\Delta z = i\Delta y$ y, por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dz} &= \frac{\partial\phi}{i\partial y} + i\frac{\partial\psi}{i\partial y} = -i\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ &= -(u - iv).\end{aligned}$$

Por otro lado, si tomamos Δz paralelo al eje x , entonces $\Delta z = \Delta x$ y, por tanto

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = -(u - iv).$$

Luego, la rapidez está dada por

$$q = \sqrt{u^2 + v^2} = \left| \frac{dW}{dz} \right|$$

Ejemplo 4.2.1.

Consideremos el caso de una línea fuente bidimensional

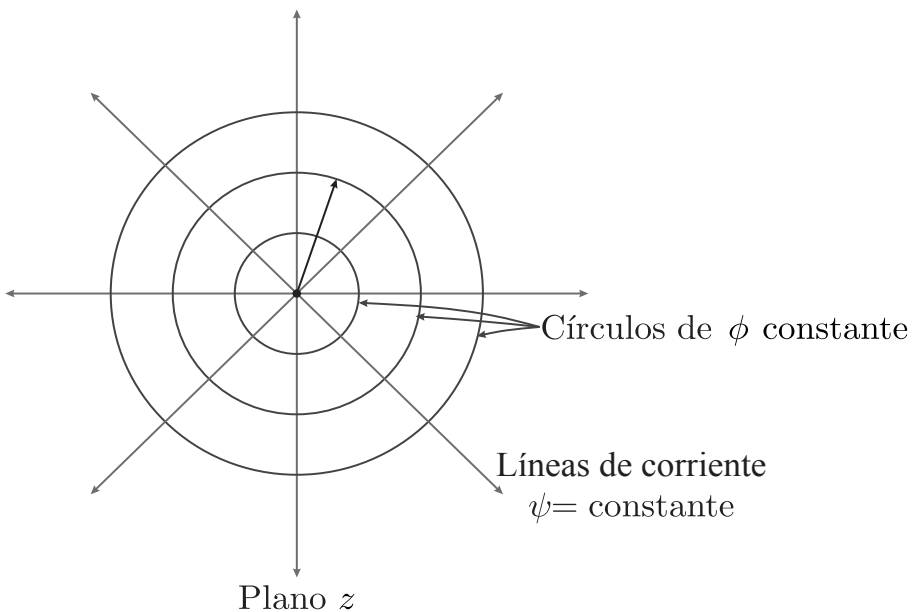


Figura 4.2: Línea fuente bidimensional.

La línea fuente localizada en el origen en el plano z se asume que emite un flujo de volumen, por unidad de longitud, de $Q \text{ m}^2/\text{s}$. Así, la velocidad radial en el radio r , u_r , por la longitud de arco del círculo de radio r es igual al flujo de volumen por unidad de longitud $Q = 2\pi r u_r$; por lo tanto,

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r} \equiv u_r = \frac{Q}{2\pi r}.$$

Esto lo podemos integrar directamente notando, de la simetría del diagrama, que ϕ es una función de r sólomente, así:

$$\begin{aligned}\phi &= -\frac{Q}{2\pi} \ln r + C \\ \phi(r=r_0) &= \phi_0 \Rightarrow C = \phi_0 + \frac{Q}{2\pi} \ln r_0 \\ \phi_0 - \phi &= \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right),\end{aligned}$$

y si hacemos $\phi(r=r_0) = 0$, el potencial de velocidad estaría dado por:

$$\phi = -\frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right).$$

Podemos extender este resultado expresando el potencial complejo W como la función equivalente de la variable compleja $z = re^{i\theta}$; es decir,

$$W = -\frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{z}{r_0}\right)$$

y, por lo tanto

$$\phi + i\psi = -\frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{re^{i\theta}}{r_0}\right) = -\frac{Q}{2\pi} \left(\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + i\theta\right).$$

Ahora, si igualamos las partes reales obtenemos lo que ya teníamos antes:

$$\phi = -\frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right),$$

para el potencial de velocidad y, si igualamos las partes imaginarias, obtenemos para la función corriente ψ :

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi} \theta,$$

lo que confirma que las líneas de corriente son líneas radiales que emanan de la fuente como se ve en la Figura 4.2.

4.3. Aplicaciones conformales

Consideraremos que el plano complejo z representa el plano físico en el cual el flujo se desarrolla; es decir, el plano donde las líneas de corriente $\psi = \text{constante}$ corresponden a curvas en el plano complejo $z = (x, y)$. Consideremos ahora, el plano F , donde $F = (\phi, \psi) = \phi + i\psi$; aquí, como se puede notar, ϕ y ψ forman una red rectangular. Ahora surge la pregunta: ¿Será posible pasar del plano z a otro plano, mediante una transformación que resguarde la naturaleza ortogonal de ϕ y ψ ? Supongamos una transformación que lleva elementos del plano z al plano $\zeta = \eta + i\xi$, y que tenga la forma

$$\zeta = f(z). \tag{4.3}$$

Por supuesto que, si se buscan transformaciones con las cuales se puedan lograr flujos con patrones complicados a partir de flujos con patrones sencillos y conocidos, facilitaría la descripción en el plano del flujo más complicado. Así, digamos que hallamos funciones apropiadas de la forma (4.3) con las cuales, a partir de $F(z)$ con un patrón más sencillo, se logra describir en el plano ζ un flujo $F(\zeta)$ cuyos patrones son más complicados. Ilustraremos lo anterior con el siguiente ejemplo: consideremos la transformación descrita en la Figura 4.3

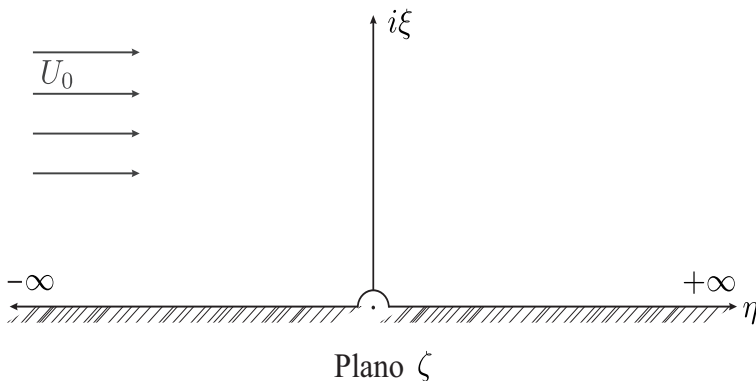


Figura 4.3: Mitad superior del plano ζ .

Se puede observar que, mediante la transformación

$$\zeta = z^\alpha,$$

donde el origen está excluido, se puede transformar la mitad superior del plano ζ en un sector del plano z , como se puede observar en la Figura 4.4.

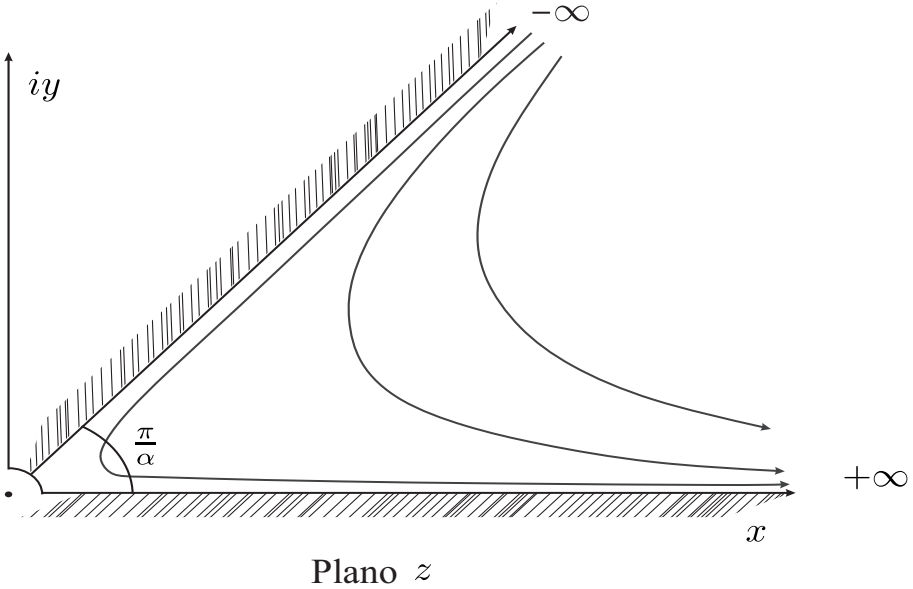


Figura 4.4: Sector en el plano z que se obtiene al usar una transformación.

Ahora, consideremos la existencia de un flujo uniforme que viaja de izquierda a derecha en el plano ζ , lo que indica que

$$F = -U_0\zeta = -U_0(\eta + i\xi) = -U_0\eta - iU_0\xi;$$

pero también se tiene que, en el plano z

$$\begin{aligned} F &= -U_0\zeta = -U_0z^\alpha = -U_0r^\alpha e^{i\alpha\theta} \\ &= -U_0r^\alpha \cos(\alpha\theta) - i - U_0r^\alpha \sin(\alpha\theta) \\ &= x + iy \end{aligned}$$

y sería como se muestra en la Figura 4.4, que representa a un flujo que pasa por una esquina.

4.4. Potencial complejo para algunos flujos simples

En la teoría de flujo potencial, una de las herramientas más poderosas la constituye el método de variables complejas. Este método forma la base de aerodinámica subsónica. A través de transformaciones sucesivas de patrones de flujos simples en patrones de flujos más complejos, con frecuencia es posible elaborar el flujo alrededor de objetos tales como cilindros, alas de avión, entre otros.

Algunos potenciales complejos de relevancia serán mencionados en esta sección, presentando descripciones de sus patrones de flujo. Cabe destacar que, los potenciales complejos se pueden superponer para obtener o generar varios patrones de flujos.

4.4.1. El campo de flujo uniforme

El potencial complejo para un flujo uniforme U_0 ya lo hemos establecido previamente; tiene la forma:

$$F = -U_0\zeta = -U_0z^\alpha = -U_0(x + iy) = \phi + i\psi,$$

donde se considera que el flujo uniforme U_0 va paralelo al eje x y de izquierda a derecha. Igualando las partes imaginarias y reales, correspondientemente, tenemos

$$\phi = -U_0x \quad \text{y} \quad \psi = -U_0y.$$

4.4.2. Fuentes y sumideros

Supongamos que una fuente tiene esfuerzo Q , entonces su potencial complejo viene expresado como

$$\begin{aligned} F &= -\frac{Q}{2\pi} \ln z = -\frac{Q}{2\pi} \ln (re^{i\theta}) \\ &= -\frac{Q}{2\pi} (\ln r + i\theta). \end{aligned}$$

De esta manera, correspondientemente tenemos

$$\phi = -\frac{Q}{2\pi} \ln r \quad \text{y} \quad \psi = -\frac{Q}{2\pi} \theta.$$

En el caso de un sumidero, las expresiones son iguales al caso con una fuente, sólo que cambian de signo; así, tenemos

$$F = \frac{Q}{2\pi} \ln z = \frac{Q}{2\pi} \ln r e^{i\theta} = \frac{Q}{2\pi} (\ln r + i\theta).$$

Por consiguiente, obtenemos

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad \text{y} \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta.$$

4.4.3. Dipolo o doblete

Para estudiar este caso, inicialmente consideremos que en el punto A , ubicado en $z = ae^{i\alpha}$, hay una fuente de esfuerzo Q y en el punto B , ubicado en $z = -ae^{i\alpha}$, hay un sumidero de esfuerzo $-Q$, como se muestra en la Figura 4.5

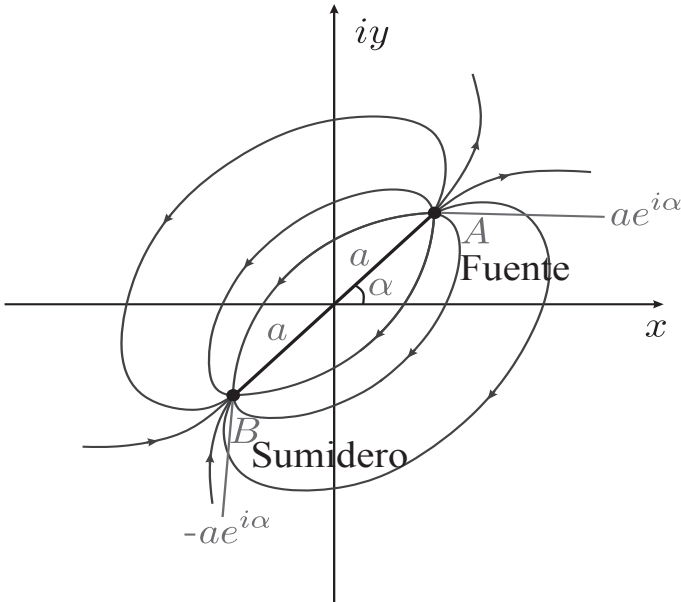


Figura 4.5: Fuente y sumidero para formar un dipolo.

Aquí, el potencial complejo para el flujo superpuesto de fuente y sumidero viene expresado como la suma de los potenciales complejos de la

fuente y del sumidero

$$F = -\frac{Q}{2\pi} \ln(z - ae^{i\alpha}) + \frac{Q}{2\pi} \ln(z + ae^{i\alpha}).$$

Ahora, cuando A y B se van aproximando el uno al otro, el flujo límite cuando $a \rightarrow 0$; es decir, cuando A y B coinciden, es

$$F = \frac{me^{i\alpha}}{z},$$

donde $m = Qa/\pi = \text{constante}$ aún cuando $a \rightarrow 0$. Cuando $a \rightarrow 0$, $Q \rightarrow \infty$ y

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{Qa}{\pi} = m,$$

el esfuerzo del dipolo.

Los patrones del flujo son círculos anidados (o encajados) tanto para líneas de corriente ψ como para el potencial de velocidad ϕ , como se puede observar en la Figura 4.6

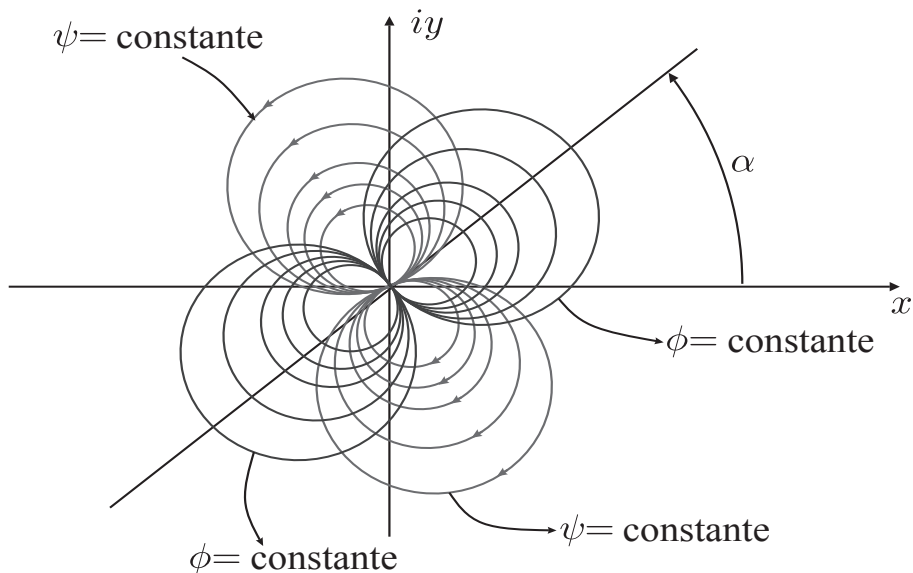


Figura 4.6: Patrones de flujo de un dipolo.

Ahora,

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{me^{i\alpha}}{z} = \frac{m \cos \alpha + im \sin \alpha}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} \\
 &= \frac{m(\cos \alpha + i \sin \alpha)(x - iy)}{x^2 + y^2} \\
 &= \frac{mx \cos \alpha + my \sin \alpha + im(x \sin \alpha - y \cos \alpha)}{x^2 + y^2};
 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\phi = \frac{m(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}{x^2 + y^2} \quad y \quad \psi = \frac{m(x \sin \alpha - y \cos \alpha)}{x^2 + y^2}.$$

Aquí, ϕ y ψ representan círculos tangentes al origen. Si suponemos que el ángulo de inclinación es cero, $\alpha = 0$, obtenemos

$$\phi = \frac{mx}{x^2 + y^2} \quad y \quad \psi = -\frac{my}{x^2 + y^2}.$$

4.4.4. Vórtice potencial

Primero, revisemos algunas definiciones:

Definiciones 4.4.1. Una **línea de vórtice** se define como una línea dibujada en el fluido tal que la tangente en cualquier punto tiene la misma dirección del vector vorticidad en ese punto. Una línea de vórtice mantiene una relación con el vector vorticidad \underline{w} como una línea de corriente con el vector velocidad \underline{u} .

Si a través de cada punto de una curva cerrada pequeña dibujamos la línea de vórtice correspondiente, formamos un tubo el cual llamamos **tubo de vórtice**.

El fluido contenido dentro de un tubo vórtice cuya área del corte transversal es infinitesimal constituye lo que se llama un **filamento de vórtice**.

Para el **vórtice potencial**, el potencial de velocidad y la función de corriente vienen dadas por

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta \quad y \quad \psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$$

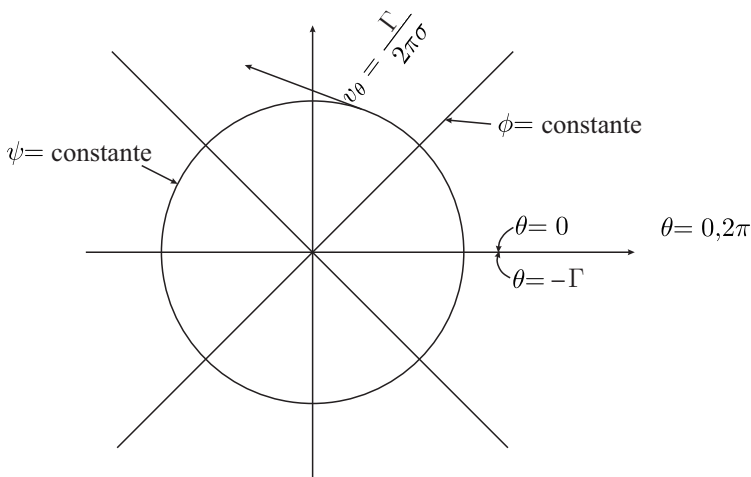


Figura 4.7: Potencial de velocidad y función corriente de un vórtice.

El término $\Gamma/2\pi$ se conoce como el esfuerzo del vórtice. Así que, de manera similar, el vórtice potencial complejo es

$$\begin{aligned}
 F &= i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{r_0} = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r e^{i\theta}}{r_0} \\
 &= i \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\ln \frac{r}{r_0} + i\theta \right) \\
 &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta + i \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\ln \frac{r}{r_0} \right).
 \end{aligned}$$

4.5. Superposición

Una de las propiedades útiles de los flujos potenciales sería aquella que nos permitiera, mediante el uso de flujos potenciales simples, analizar flujos potenciales complicados. Ésta se llama la propiedad de superposición [16], y consiste en la combinación de varios flujos potenciales para obtener uno nuevo que seguirá siendo un flujo potencial. Como ejemplo de superposición de dos o más flujos potenciales examinaremos el flujo

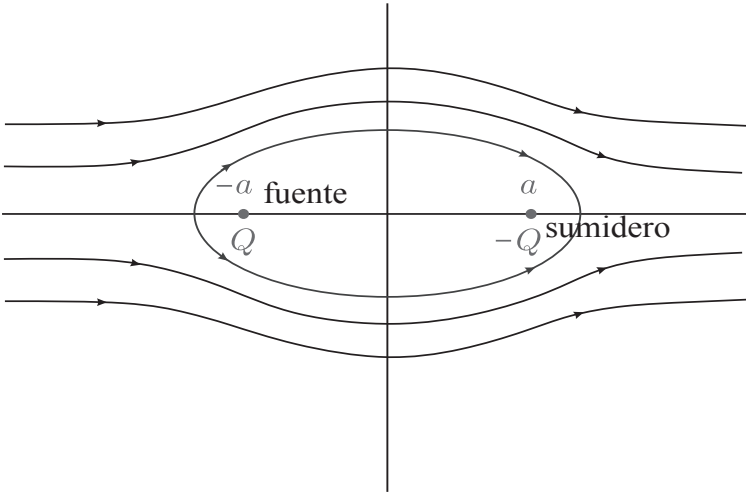


Figura 4.8: Óvalo de Rankine.

llamado **óvalo de Rankine**. Una fuente y un sumidero de igual esfuerzo se colocan equidistantes del origen sobre el eje x en un flujo uniforme $U_0\hat{x}$; aquí $\hat{x} = (0, 0, 1)$. Todo el fluido que emana de la fuente lo absorbe el sumidero, y hay una línea de corriente divisoria definida entre el fluido de corriente uniforme y el fluido que se transfiere de la fuente al sumidero.

Esta línea de corriente divisoria se puede considerar como la superficie de la sección transversal de un cilindro de forma ovalada. La superposición de estos flujos nos dará el flujo externo alrededor de un cilindro ovalado. Combinando muchas fuentes y sumideros podríamos obtener el flujo aproximado alrededor de un cilindro con forma arbitraria, simétrico alrededor del eje x .

Para el caso del óvalo de Rankine, tenemos:

$$\begin{aligned}\phi &= -U_0x - \frac{Q}{2\pi} \ln r_1 + \frac{Q}{2\pi} \ln r_2 \\ \psi &= -U_0y - \frac{Q}{2\pi} \theta_1 + \frac{Q}{2\pi} \theta_2.\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}\phi &= -U_0x - \frac{Q}{2\pi} \left[\ln \left((x+a)^2 + y^2 \right)^{1/2} - \ln \left((x-a)^2 + y^2 \right)^{1/2} \right] \\ &= -U_0x - \frac{Q}{4\pi} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}, \\ \psi &= -U_0y - \frac{Q}{2\pi} \left[\arctan \left(\frac{y}{x+a} \right) - \arctan \left(\frac{y}{x-a} \right) \right].\end{aligned}$$

En la siguiente sección estudiaremos un procedimiento para estudiar superposiciones, se denomina el método de las imágenes.

4.6. El método de las imágenes

Si en un flujo pudiéramos hacer coincidir una línea de corriente constante, ψ , con una frontera, entonces podríamos especificar el flujo a lo largo de dicha frontera. Además, cuando se tiene un flujo sobre un objeto, la superficie del objeto es una línea de corriente constante ψ . Bajo estas suposiciones, podríamos considerar que una línea de corriente pueda ser una frontera sólida [11].

Generalizando, con frecuencia es posible crear una línea de corriente ψ constante que coincida con una pared o frontera, superponiendo varios patrones sencillos de flujo. Un ejemplo útil de este método es el método de las imágenes. Considerar dos flujos idénticos separados por un plano en el medio de ellos; el plano no debe tener flujo que lo cruce, de ahí se puede pensar como una frontera sólida.

Precisamente con el método de las imágenes [14], [1], se superponen flujos mediante la reflexión con respecto a una frontera sólida a través de la cual el flujo no pasa. De esta manera, una gran cantidad de flujos complejos se pueden sintetizar usando este método. Por ejemplo, consideremos el flujo desde una fuente (o sumidero) cerca a una pared (el eje x) como se muestra en la Figura 4.9

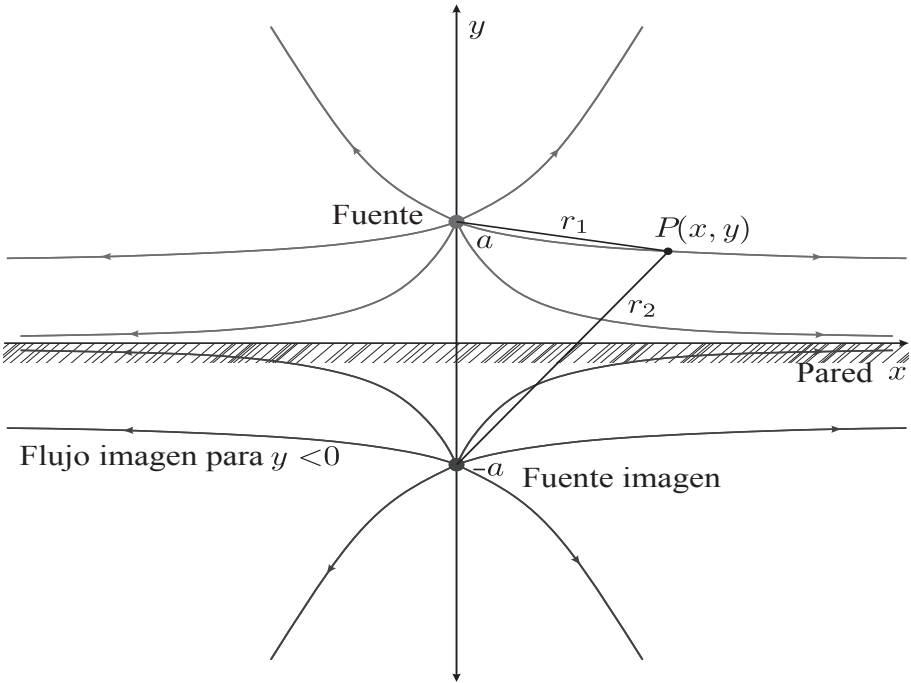


Figura 4.9: Flujo producido por una fuente ubicada cerca de una pared.

Construimos el flujo producido por una fuente en $y = a$ y una fuente imagen en $y = -a$; el eje x es una línea de corriente divisoria o pared. Las funciones ϕ y ψ son

$$\begin{aligned}\phi &= -\frac{Q}{2\pi} \ln r_1 - \frac{Q}{2\pi} \ln r_2 \\ &= -\frac{Q}{4\pi} \ln [(x^2 + (y - a)^2)(x^2 + (y + a)^2)] \\ \psi &= -\frac{Q}{2\pi} \theta_1 - \frac{Q}{2\pi} \theta_2 \\ &= -\frac{Q}{2\pi} \left[\arctan \left(\frac{y - a}{x} \right) + \arctan \left(\frac{y + a}{x} \right) \right].\end{aligned}$$

tal que la componente normal de velocidad en la pared ($y = 0$) es cero ($v(y = 0) = 0$.)

En la siguiente sección trataremos con el potencial complejo para un flujo bidimensional que pasa una sección cilíndrica circular de radio fijo.

4.7. Flujo potencial que pasa una sección de un cilindro circular

En esta sección analizamos el flujo potencial bidimensional para el caso cuando se introduce un cilindro cuyo corte transversal es circular [35]. Para ello, estableceremos uno de los resultados más importantes relacionado con el desarrollo de esta teoría, el teorema de Milne-Thomson.

Teorema 4.7.1 (Círculo de Milne-Thomson). *Consideremos un flujo bidimensional irrotacional de fluido viscoso incompresible en el plano z . Supongamos que no hay fronteras rígidas y sea $f(z)$ el potencial complejo del flujo, donde las singularidades de $f(z)$ están todas a una distancia mayor que a desde el origen. Si un cilindro circular tipificado por su sección transversal, el círculo $C : |z| = a$, se introduce en el campo de flujo, el potencial complejo viene a ser*

$$W = f(z) + \overline{f\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}.$$

Seguidamente, buscamos una expresión para el potencial complejo de un flujo bidimensional que pasa por un cilindro con sección transversal circular de radio r_0 ; viene representado por el Teorema 4.7.1) (Teorema de Milne-Thomson), de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W &= -U_0 \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) \\ &= -U_0 \left(r e^{i\theta} + \frac{r_0^2}{r} e^{-i\theta} \right) \\ &= -U_0 r \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta - i U_0 r \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta. \end{aligned}$$

Haciendo algunas manipulaciones algebraicas, obtenemos:

$$\phi = -U_0 x \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \quad \text{y} \quad \psi = -U_0 y \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\phi &= -U_0x - \frac{U_0r_0^2x}{x^2 + y^2} \\ \psi &= -U_0y + \frac{U_0r_0^2y}{x^2 + y^2};\end{aligned}$$

así, se muestra que el flujo que pasa sobre un cilindro circular viene a ser como la superposición de un flujo uniforme sobre un dipolo de esfuerzo $-r_0^2U_0$.

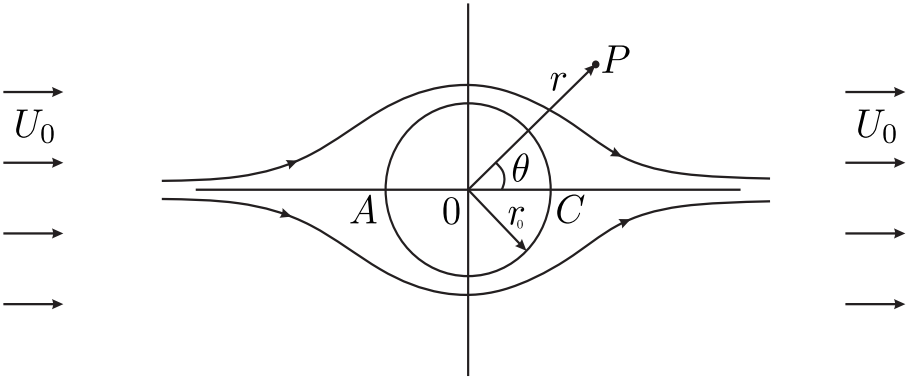


Figura 4.10: Flujo uniforme que pasa sobre un cilindro circular.

En $r = r_0$, el contorno del cilindro debe coincidir con una línea de corriente. Esta afirmación es cierta, ya que $\psi(r = r_0) = 0$.

Por otro lado, si estamos interesados en el campo de velocidad, éste se puede calcular usando

$$-\frac{dW}{dz} = u - iv,$$

el cual se puede expresar en coordenadas polares

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dz} &= -U_0 + \frac{U_0r_0^2}{z^2} = -U_0 + \frac{U_0r_0^2e^{-2i\theta}}{r^2} \\ &= U_0 \left(\frac{r_0^2}{r^2} \cos(2\theta) - 1 \right) + iU_0 \frac{r_0^2}{r^2} \sin(2\theta).\end{aligned}$$

Por lo tanto, el campo de velocidad viene expresado como:

$$\begin{aligned} u &= -U_0 \left(\frac{r_0^2}{r^2} \cos(2\theta) - 1 \right) \\ v &= -U_0 \frac{r_0^2}{r^2} \sin(2\theta). \end{aligned}$$

4.8. Flujo que pasa una sección de un cilindro circular con circulación

En esta sección, consideramos la superposición de un flujo de vórtice potencial con circulación y un flujo uniforme que pasan sobre un cilindro circular [14]. Así, podemos escribir el potencial complejo total para un flujo bidimensional con velocidad no perturbada uniforme U_0 , que pasa una sección circular de un cilindro de radio r_0 con circulación Γ [21], como sigue:

$$\begin{aligned} W &= -U_0 \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{z}{r_0} \right) \\ &= -U_0 \left(r e^{i\theta} + \frac{r_0^2}{z} e^{-i\theta} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{r e^{i\theta}}{r_0} \right) \\ &= -U_0 \left(r + \frac{r_0^2}{r} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - i \left(U_0 \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \phi &= -U_0 r \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi &= -U_0 r \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right). \end{aligned}$$

La velocidad tangencial u_θ se puede encontrar como

$$\begin{aligned} u_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \left[U_0 r \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \right] \\ &= -U_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}. \end{aligned}$$

En la superficie del cilindro ($r = r_0$), tenemos

$$u_\theta = -2U_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}.$$

Notamos que la velocidad tangencial o circunferencial es cero para valores de θ tales que

$$\sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi U_0 r_0}.$$

Por lo general, habrá dos valores para θ que satisfacen la ecuación anterior y que especificarán los puntos de estancamiento.

La velocidad compleja en cualquier punto del flujo es

$$-u + iv = \frac{dW}{dz} = -U_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi z}.$$

Los puntos de estancamiento se consiguen resolviendo la ecuación

$$U_0 \left(\frac{r_0^2}{z^2} - 1 \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi z} = 0,$$

multiplicando por $-z^2$

$$U_0 z^2 - i \frac{\Gamma}{2\pi} z - U_0 r_0^2 = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{i \frac{\Gamma}{2\pi} \pm \sqrt{-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 4U_0^2 r_0^2}}{2U_0} \\ &= r_0 \left[i \frac{\Gamma}{4\pi U_0 r_0} \pm \sqrt{1 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 U_0^2 r_0^2}} \right]. \end{aligned}$$

Hay tres casos: $\Gamma^2 < (4\pi U_0 r_0)^2$, $\Gamma^2 = (4\pi U_0 r_0)^2$ y $\Gamma^2 > (4\pi U_0 r_0)^2$.

- (i) Si $\Gamma^2 < (4\pi U_0 r_0)^2$, entonces $z_{1,2} = r_0(\pm\alpha + i\beta)$, $\alpha < 1$ y $-1 < \beta < 0$, ($\Gamma < 0$). Así, hay dos puntos de estancamiento.

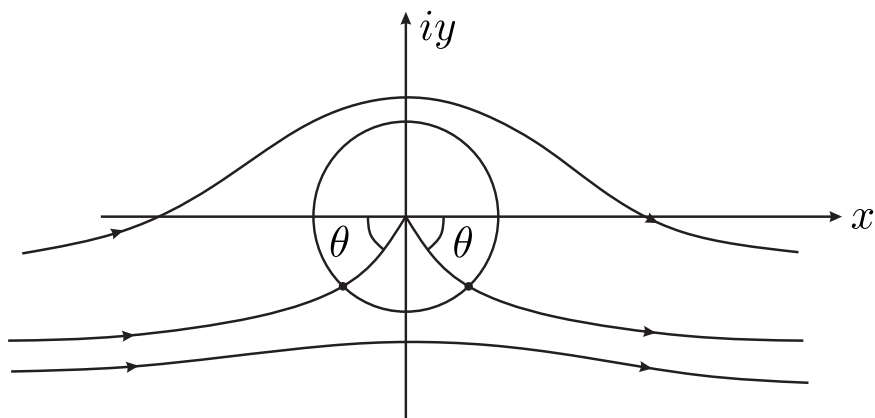


Figura 4.11: Para $\Gamma^2 < (4\pi U_0 r_0)^2$: Dos puntos de estancamiento.

- (ii) Si $\Gamma^2 = (4\pi U_0 r_0)^2$, entonces $z = -ir_0$, pues $\Gamma < 0$. Así, hay un solo punto de estancamiento ubicado en el fondo de la circunferencia.

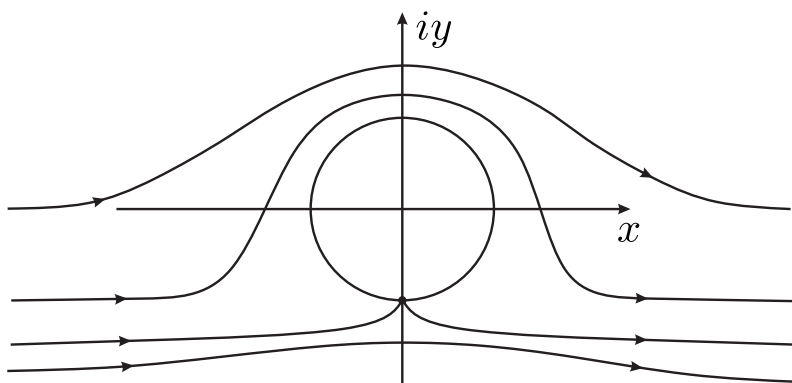


Figura 4.12: Para $\Gamma^2 = (4\pi U_0 r_0)^2$: Un punto de estancamiento.

- (iii) Si $\Gamma^2 > (4\pi U_0 r_0)^2$, entonces $z = ir_0\gamma$, donde

$$\gamma = \frac{\Gamma}{4\pi U_0 r_0} - \sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 U_0^2 r_0^2} - 1}$$

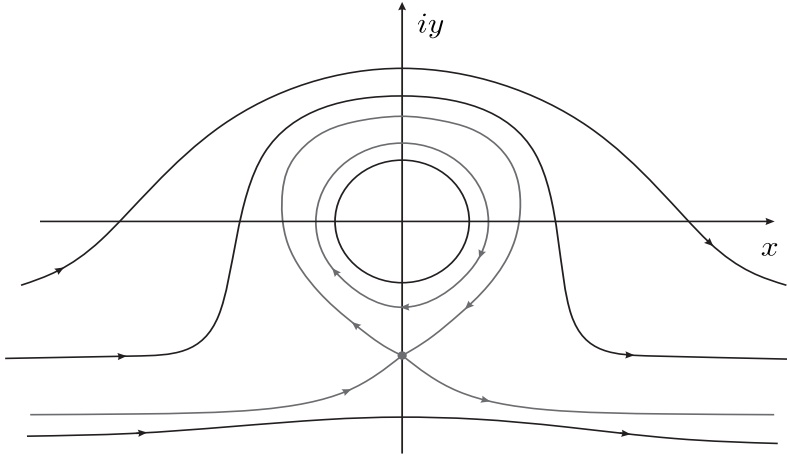


Figura 4.13: Para $\Gamma^2 > (4\pi U_0 r_0)^2$: Un punto de estancamiento fuera del cilindro.

4.9. Transformación de Joukowski

Esta es una de las transformaciones más importantes aplicadas a flujos bidimensionales, y viene expresada como:

$$\zeta = z + \frac{c^2}{z}.$$

Por medio de esta transformación podemos aplicar el plano z en el plano ζ , y viceversa [25].

$$f(z) = z + \frac{c^2}{z}, \quad f(z) \rightarrow z \text{ para } z \text{ grande}$$

$$f'(z) = 1 - \frac{c^2}{z^2}, \quad f''(z) = 2\frac{c^2}{z^3}.$$

Por lo tanto,

$$f'(\pm c) = 0 \text{ y } f''(\pm c) \neq 0.$$

La transformación inversa es

$$z = \frac{1}{2}\zeta + \left(\frac{1}{4}\zeta^2 - c^2\right)^{1/2}$$

Tomamos el signo + tal que $z \sim \zeta$ para valores grandes de $|\zeta|$.

$$z = \frac{1}{2}\zeta + \left(\frac{1}{4}\zeta^2\right)^{1/2} = \zeta \quad \text{para } \zeta \text{ grande;}$$

así, el flujo sigue siendo uniforme en el infinito.

4.9.1. Flujo que pasa un círculo

En esta sección consideramos el **efecto de $\zeta = z + \frac{c^2}{z}$ sobre un círculo de radio a , cuya expresión viene dada por $z = ae^{i\theta}$, y donde $0 \leq c \leq a$,**

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi + i\eta = ae^{i\theta} + \frac{1}{a}c^2e^{-i\theta} \\ &= \left(a + \frac{c^2}{a}\right) \cos \theta + i \left(a - \frac{c^2}{a}\right) \sin \theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\xi = \left(a + \frac{c^2}{a}\right) \cos \theta \quad \text{y} \quad \eta = \left(a - \frac{c^2}{a}\right) \sin \theta.$$

Luego,

$$\frac{\xi^2}{\left(a + \frac{c^2}{a}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(a - \frac{c^2}{a}\right)^2} = 1. \quad (4.4)$$

Así, el círculo en el plano z se transforma en una elipse en el plano ζ .

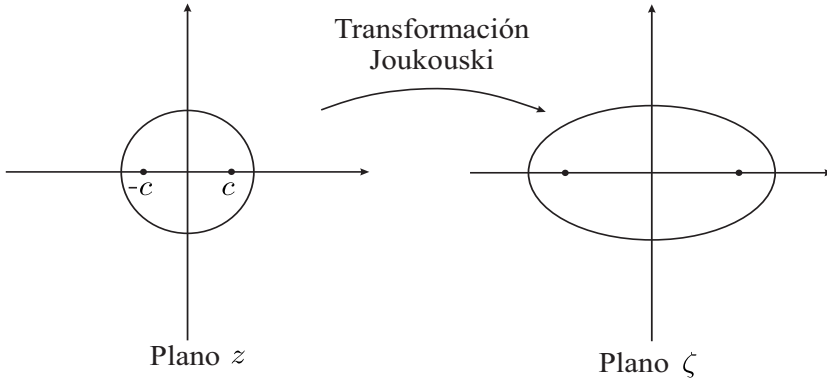


Figura 4.14: Transformación de Joukowski: de un círculo a una elipse.

El potencial complejo de un flujo que pasa un cilindro circular en el plano z es

$$W(z) = U \left(ze^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z.$$

Sustituye $z = \frac{1}{2}\zeta + \left(\frac{1}{4}\zeta^2 - c^2\right)^{1/2}$ para obtener

$$\mathcal{W}(\zeta) = \Phi + i\Psi.$$

EJERCICIO 4.9.1. Obtenga Φ y Ψ .

Las líneas de corriente sin circulación

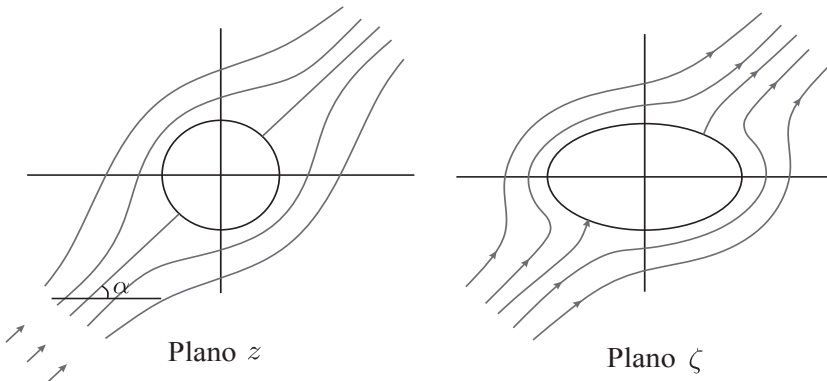


Figura 4.15: Transformación de Joukowski: de las líneas de corriente alrededor de un círculo a alrededor de una elipse.

4.9.2. Flujo que pasa un plato chato finito

Si escogemos $c = a$, tal que

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z},$$

la elipse (4.4) colapsa a un plato chato de longitud $4a$. Consideramos las componentes de velocidad u_* y v_* en el plano ζ

$$\begin{aligned} u_* - iv_* &= \frac{dW}{d\zeta} = \frac{dW/dz}{d\zeta/dz} \\ &= \frac{Ue^{-i\alpha} - Ue^{i\alpha} \frac{a^2}{z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi z}}{1 - \frac{a^2}{z^2}}. \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo $z = \frac{1}{2}\zeta + (\frac{1}{4}\zeta^2 - c^2)^{1/2}$ obtenemos u_* y v_* .

EJERCICIO 4.9.2. Obtenga u_* y v_* .

La rapidez del flujo en general es infinita en los extremos del plato ($\zeta = \pm 2a$) que corresponde a los puntos $z = \pm a$. Estos puntos se llaman puntos singulares en las puntas del plato.

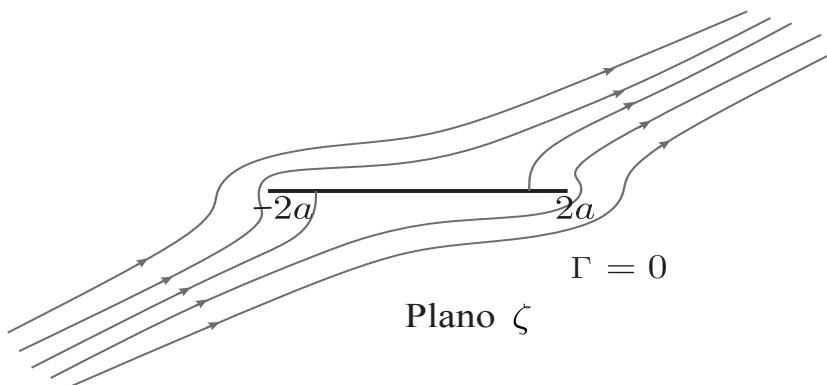


Figura 4.16: Flujo que pasa un plato chato finito.

Sin embargo, la singularidad en la punta de la cola $\zeta = 2a$ (i.e $z = a$) se puede eliminar si la circulación Γ se escoge de tal manera que el numerador

$$Ue^{-i\alpha} - Ue^{i\alpha} \frac{a^2}{z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi z}$$

sea cero en dicha punta. Así, si

$$Ue^{-i\alpha} - Ue^{i\alpha} \frac{a^2}{z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi z} = 0,$$

se tiene que

$$\Gamma = -4\pi Ua \sin \alpha.$$

Si z toma el valor de $a + \varepsilon$ tanto en el numerador como en el denominador de la siguiente expresión

$$u_* - iv_* = \frac{Ue^{-i\alpha} - Ue^{i\alpha} \frac{a^2}{z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi z}}{1 - \frac{a^2}{z^2}},$$

demuestre que tomando el límite cuando $\xi \rightarrow 0$, encontramos que

$$u_* \rightarrow U \cos \alpha, \quad v_* \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \zeta \rightarrow 2a,$$

tal que el flujo deja la punta $\zeta = 2a$ de manera suave y paralela al plato como se ve en la siguiente figura

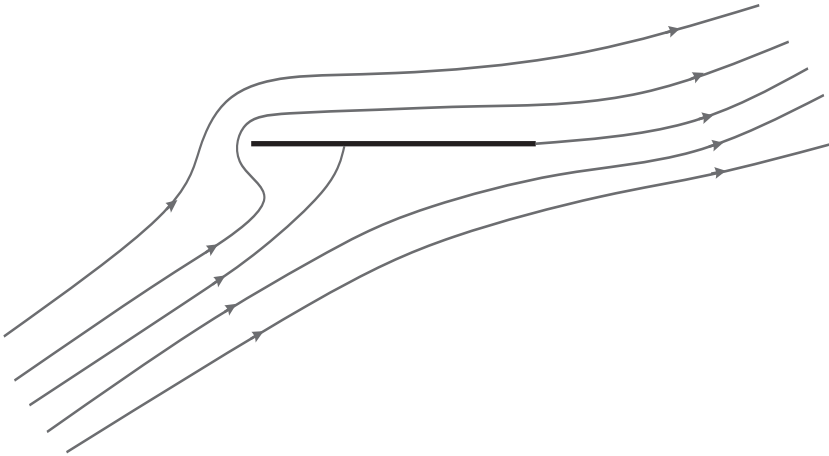


Figura 4.17: Flujo que termina paralelo al plato chato finito.

El sentido de la circulación está en el sentido de las agujas del reloj para $\alpha > 0$. Por supuesto, la presencia de esta circulación sigue permitiendo una singularidad en el campo de velocidad en la punta frontal del plato.

4.9.3. Flujo que pasa una ala de avión simétrica

Si usamos $\zeta = z + \frac{a^2}{z}$, sobre un círculo en el plano z que pasa por $z = a$, pero encierra $z = -a$, obtenemos una ala de avión con una nariz redondeada pero una cola puntiaguda, como se puede observar en la siguiente figura

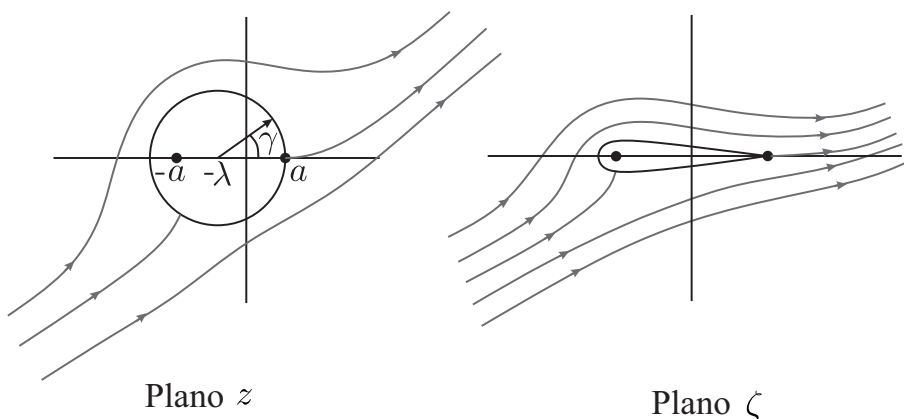


Figura 4.18: Flujo que pasa una ala de avión simétrica.

Si el centro del círculo está sobre el eje real en el plano z , en el punto $z = -\lambda$ digamos, la ala del avión es simétrica y viene dada en términos del parámetro γ por

$$\zeta = -\lambda + (a + \lambda)e^{i\gamma} + \frac{a^2}{-\lambda + (a + \lambda)e^{i\gamma}}.$$

El círculo en el plano z viene expresado como

$$\begin{aligned} z + \lambda &= (a + \lambda)e^{i\gamma} \\ z &= -\lambda + (a + \lambda)e^{i\gamma}, \quad \gamma \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \zeta &= z + \frac{a^2}{z} \\ &= -\lambda + (a + \lambda)e^{i\gamma} + \frac{a^2}{-\lambda + (a + \lambda)e^{i\gamma}}. \end{aligned}$$

El potencial complejo correspondiente a un flujo uniforme que pasa un círculo a un ángulo de incidencia (o ataque) α con centro en el origen es

$$W(z) = U \left(ze^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{z}{a} \right);$$

así, si trasladamos el centro del círculo al punto $(-\lambda, 0)$, el potencial complejo sería

$$W(z) = U \left[(z + \lambda)e^{-i\alpha} + \frac{(a + \lambda)^2}{z + \lambda} e^{i\alpha} \right] - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{z + \lambda}{a + \lambda} \right).$$

Sustituyendo $z = \frac{1}{2}\zeta + \left(\frac{1}{4}\zeta^2 - a^2\right)^{1/2}$, obtenemos $\mathcal{W}(\zeta)$, el potencial complejo correspondiente a un flujo uniforme que pasa la ala de un avión con un ángulo de incidencia α .

La velocidad en el plano ζ es

$$\begin{aligned} u_* - iv_* &= \frac{dW}{d\zeta} = \frac{dW/dz}{d\zeta/dz} \\ &= \frac{U \left[e^{-i\alpha} - \left(\frac{a + \lambda}{z + \lambda} \right) e^{i\alpha} \right] - i \frac{\Gamma}{2\pi(z + \lambda)}}{1 - \frac{a^2}{z^2}}. \end{aligned}$$

Las singularidades, nuevamente ocurren en $z = \pm a$. La singularidad $z = -a$ se transforma en un punto dentro de la ala, por lo que no nos interesa. sin embargo, en el punto $z = a$ la singularidad se transforma en un punto donde termina la cola de la ala $\zeta = 2a$, y este punto si nos interesa. Hacemos lo mismo que hicimos para el caso del plato plano:

$$U \left[e^{-i\alpha} - \left(\frac{a + \lambda}{z + \lambda} \right) e^{i\alpha} \right] - i \frac{\Gamma}{2\pi(z + \lambda)} \Big|_{z=a} = 0$$

Por lo tanto,

$$\Gamma = -4\pi U(a + \lambda) \sin \alpha.$$

Así, escogiendo la circulación como $\Gamma = -4\pi U(a + \lambda) \sin \alpha$, el flujo es suave y libre de singularidades en todas partes.

Teorema 4.9.1 (Blasius). *Se tiene un cilindro fijo colocado en un líquido que se mueve estacionariamente e irrotacionalmente. Sean F_x y F_y las componentes netas de la fuerza (presión) que actúa sobre el cuerpo y \mathcal{N} el momento alrededor del origen de la fuerza que actúa sobre el cuerpo. Entonces, despreciando fuerzas externas*

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2}i\rho \oint \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz, \quad y$$

$$\mathcal{N} = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2}\rho \oint z \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz \right],$$

donde W es el potencial complejo, ρ la densidad, y las integrales se toman alrededor del contorno del cilindro.

Para una demostración revisar *Theoretical Hydrodynamics* por L.M Milne-Thomson páginas 173-174.

Teorema 4.9.2 (Levantamiento de Kutta-Joukowski). *Consideremos un flujo estacionario que pasa un cuerpo bidimensional con sección transversal C , una curva cerrada simple*

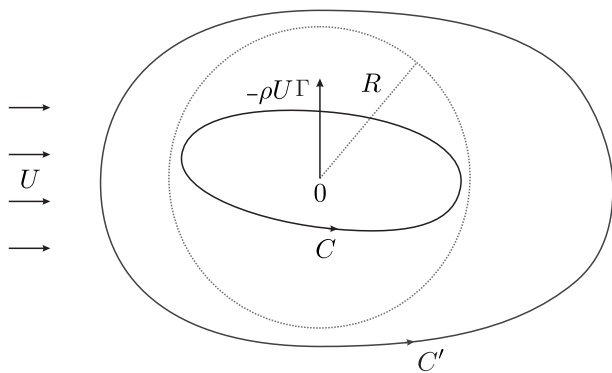


Figura 4.19: Flujo que pasa un cuerpo bidimensional con sección transversal C .

Sea en flujo uniforme en el infinito, con rapidez U en la dirección del eje x , y sea Γ la circulación alrededor del cuerpo. Entonces

$$F_x = 0, \quad F_y = -\rho U \Gamma.$$

Para una demostración, revisar *Elementary Fluid Dynamics* por D.J. Acheson, páginas 143-45.

4.10. Transformación de Schwarz-Christoffel

Sean a, b, c, \dots, n puntos sobre el eje real en el plano ζ tal que $a < b < c < \dots$. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ángulos interiores de un polígono cerrado simple de n vértices, tal que $\alpha + \beta + \gamma + \dots = (n - 2)\pi$.

La transformación del plano ζ al plano z , definida por:

$$\frac{dz}{d\zeta} = K(\zeta - a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1} \cdot (\zeta - b)^{\frac{\beta}{\pi}-1} \cdot (\zeta - c)^{\frac{\gamma}{\pi}-1} \dots$$

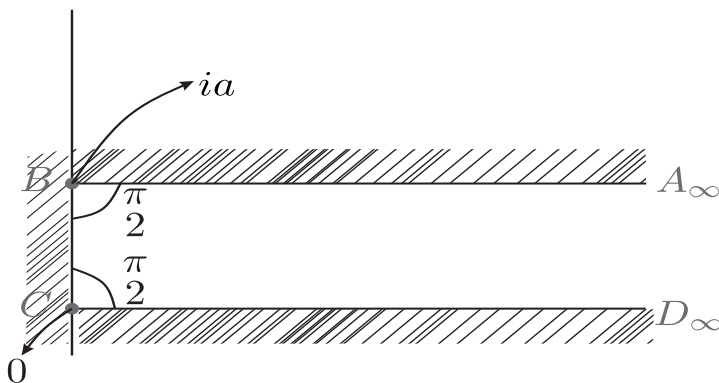
transforma el eje real en el plano ζ en la frontera de un polígono cerrado en el plano z en tal forma que los vértices del polígono corresponden a los puntos a, b, c, \dots , y los ángulos interiores del polígono son $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Además, cuando el polígono es simple, el interior se aplica por medio de la transformación sobre el semiplano superior del plano ζ . K es una constante que puede ser compleja.



Figura 4.20: Transformación de Schwarz-Christoffel.

4.10.1. Una banda semi-infinita

Consideremos una banda semi infinita $A_\infty B C D_\infty$, como se muestra en la siguiente figura



Plano z

Figura 4.21: Banda semi-infinita en el plano z .

Aplicaremos A_∞, B, C sobre los puntos $\zeta(= -\infty), \zeta = -1, \zeta = 1$ del eje real en el plano ζ . Si nosotros abrimos la frontera y la hacemos coincidir con el eje real del plano ζ , es evidente que el vértice coincidirá con $\zeta = \infty$. Así, de acuerdo con la transformación de Schwarz-Christoffel, los únicos ángulos interiores que aparecerán en la transformación son aquellos en B y C , los cuales son $\pi/2$ y $\pi/2$, así

$$\frac{dz}{d\zeta} = K(\zeta + 1)^{-1/2}(\zeta - 1)^{-1/2}.$$

Entonces,

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{K}{\sqrt{\zeta^2 - 1}},$$

e integrando con respecto a ζ , obtenemos

$$z = K \cosh^{-1} \zeta + L.$$

Para $\zeta = 1$ tenemos que $z = 0$ (por construcción de $\frac{dz}{d\zeta}$, ver gráfica)

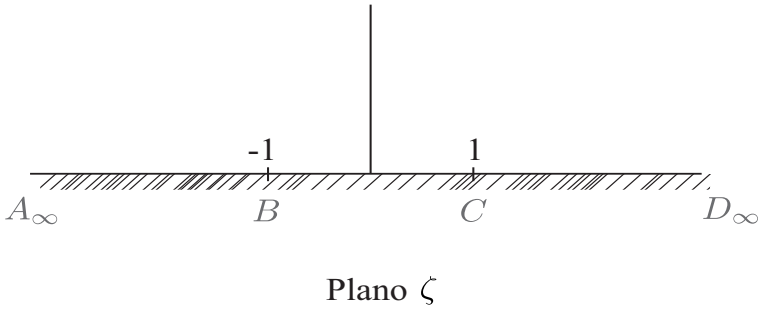


Figura 4.22: Semiplano superior en ζ .

Por lo tanto,

$$0 = K \cosh^{-1}(1) + L \Rightarrow L = 0.$$

También por construcción para $\zeta = -1$ tenemos $z = ia$, así

$$ia = K \cosh^{-1}(-1) = K(i\pi) \Rightarrow K = \frac{a}{\pi}.$$

Así,

$$z = \frac{a}{\pi} \cosh^{-1} \zeta \quad \text{ó} \quad \zeta = \cosh \left(\frac{\pi}{a} z \right).$$

4.10.2. Una banda infinita

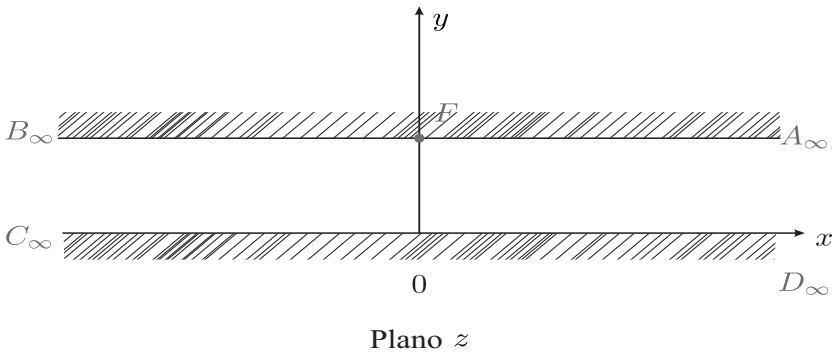


Figura 4.23: Una banda infinita en el plano z .

Entonces D_∞ evidentemente corresponderá a $\zeta = \infty$. El ángulo en $B_\infty C_\infty$ es cero y, por lo tanto,

$$\frac{dz}{d\zeta} = K\zeta^{-1},$$

integrando con respecto a ζ , obtenemos:

$$z = K \ln \zeta + L.$$

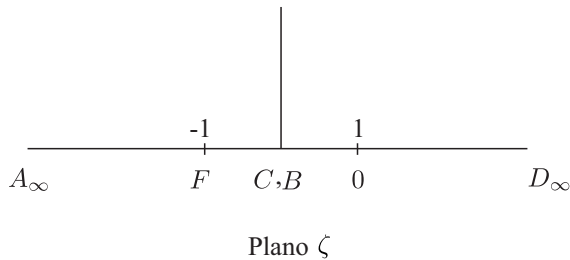


Figura 4.24: Plano ζ .

Así, para $\zeta = 1$, tenemos $z = 0$ y para $\zeta = -1$, tenemos $z = ia$.

$$\begin{aligned} z(\zeta = 1) = 0 &\Rightarrow 0 = K \ln(1) + L \Rightarrow L = 0; \\ z(\zeta = -1) = ia &\Rightarrow ia = K \ln(-1) = K \ln(i^2) = 2K \ln(i) = iK\pi \\ &\Rightarrow K = \frac{a}{\pi}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$z = \frac{a}{\pi} \ln \zeta \quad \text{ó} \quad \zeta = e^{\frac{\pi z}{a}}.$$

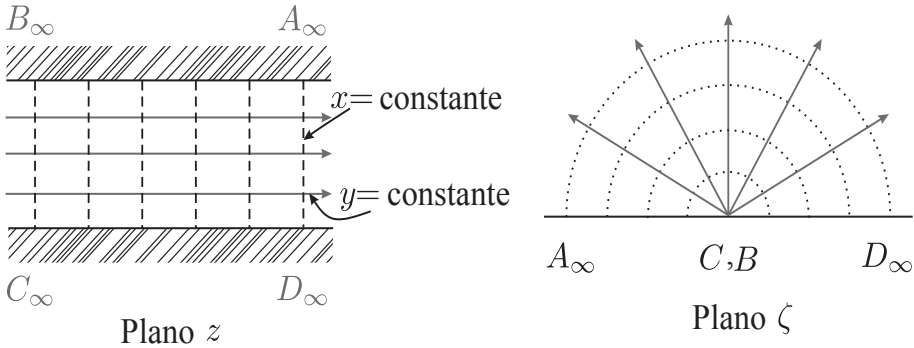


Figura 4.25: Transformaciones entre el plano z y el plano ζ .

Para $x = \text{constante}$

$$\zeta = e^{\frac{\pi x}{a}} e^{i \frac{\pi y}{a}} \Rightarrow |\zeta| = \text{constante. Son círculos.}$$

Para $y = \text{constante}$

$$\zeta = e^{\frac{\pi x}{a}} e^{i \frac{\pi y}{a}},$$

donde el segundo factor es una constante y corresponde al rayo ángulo $\frac{\pi y}{a}$.

EJERCICIO 4.10.1. Si aplicamos A_∞, D_∞ sobre $\zeta = 0$, demuestre que $\zeta = -e^{-\frac{\pi z}{a}}$.

Además, en algunos casos es conveniente tomar el origen en el plano z en el punto medio E entre las paredes. Demuestre que la transformación correspondiente viene dada por $z = \frac{a}{\pi} \log \zeta - i \frac{a}{2}$, o $\zeta = i e^{\frac{\pi z}{a}}$.

Teorema 4.10.1 (Schwarz-Christoffel para el círculo). *La misma fórmula*

$$\frac{dz}{d\zeta} = K(\zeta - a)^{\frac{\alpha}{\pi} - 1} \cdot (\zeta - b)^{\frac{\beta}{\pi} - 1} \cdot (\zeta - c)^{\frac{\gamma}{\pi} - 1} \dots,$$

aplica la parte interna del polígono sobre el interior del círculo unitario, $|\zeta| \leq 1$, donde los puntos a, b, c, \dots , vértices del polígono, están ahora sobre la circunferencia

$$a = e^{iA}, b = e^{iB}, \dots \zeta = e^{i\eta},$$

y, como antes,

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = (n - 2)\pi,$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ son los ángulos interiores del polígono cerrado, que se corresponden con los vértices del mismo.

4.10.3. Aplicando una banda sobre un círculo

Aplicamos la banda de ancho $2a$ sobre el círculo unitario en el plano ζ tal que A_∞, B_∞ se aplican sobre $\zeta = -1, \zeta = 1$, respectivamente, y $z = 0$ sobre $\zeta = 0$, como lo muestran las figuras

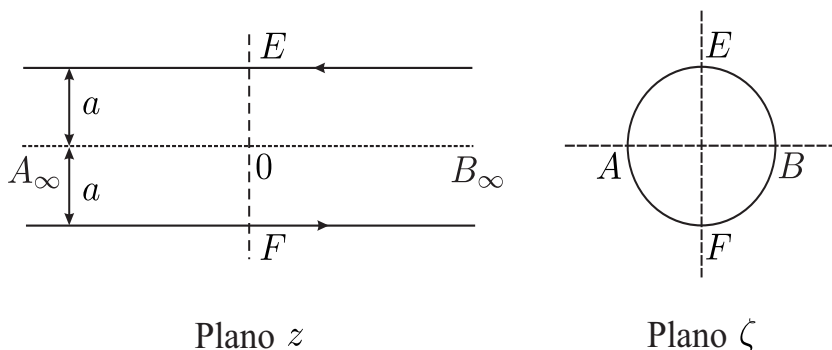


Figura 4.26: Aplicando una banda sobre un círculo.

Los ángulos en A_∞ y B_∞ son cero, así

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} &= K(\zeta - 1)^{-1} \cdot (\zeta + 1)^{-1} = K \left[-\frac{1/2}{1 - \zeta} - \frac{1/2}{1 + \zeta} \right] \\ &= \frac{K}{2} \left[-\frac{1}{1 - \zeta} - \frac{1}{1 + \zeta} \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto, integrando con respecto a ζ

$$\begin{aligned} z &= \frac{K}{2} [\ln(1 - \zeta) - \ln(1 + \zeta)] + L \\ &= \frac{K}{2} \ln \left(\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} \right) + L. \end{aligned}$$

Para $z = 0$ tenemos $\zeta = 0$

$$0 = \frac{K}{2} \ln(1) + L \quad \Rightarrow \quad L = 0.$$

Para $z = ia$ tenemos $\zeta = i$

$$\begin{aligned} ia &= \frac{K}{2} \ln\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = \frac{K}{2} \ln\left(\frac{e^{-i\pi/4}}{e^{i\pi/4}}\right) \\ &= \frac{K}{2} \ln\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = -i\frac{K\pi}{4} \\ \therefore K &= -\frac{4a}{\pi}. \end{aligned}$$

Así,

$$z = \frac{2a}{\pi} \ln\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) \quad \Rightarrow \quad \zeta = \tanh\left(\frac{\pi z}{4a}\right).$$

Capítulo 5

Flujo de vórtices o flujo vorticoso

Todo lo que nos rodea está permeado por flujos de vórtices, desde el viento que sopla a nuestro alrededor, hasta las investigaciones en aerodinámica, específicamente al observar la formación de estos flujos en las puntas de las alas de un avión. Desde revolver un líquido para disolver en él alguna otra sustancia, usando una cuchara o una licuadora, hasta quitar el tapón de una bañera. Incluso, este concepto se ha usado en la historia, el vórtice ha sido un asunto sobre el cual se ha filosofado, y hasta ha llegado a ser utilizado en la mitología, cuentos y novelas.

En este capítulo, estudiaremos la dinámica de vorticidad, enunciaremos, por segunda vez en este libro, el Teorema de Circulación de Kelvin, y presentaremos los Teoremas de Helmholtz.

5.1. Teoremas relacionados con flujo de vórtices

Antes de enunciar los teoremas, iniciamos esta sección con algunas definiciones claves. Una **línea de vórtice** es una línea en el fluido tal que la tangente a ella en cada punto está en la misma dirección del vector vorticidad en dicho punto[14]. Las líneas vórtices son la solución de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}.$$

Un **tubo vórtice** es un tubo que se obtiene al dibujar las líneas vórtice que pasan a través de cada punto de una curva cerrada. Cuando el área de la sección transversal de un tubo vórtice es de dimensiones infinitesimales, decimos que es un **filamento vórtice** [21].

Teorema 5.1.1 (Circulación de Kelvin). *Consideremos un fluido incompresible no viscoso de densidad constante. El fluido está en movimiento en presencia de una fuerza corporal conservativa $g = -\nabla\phi$ por unidad de masa. Sea $C(t)$ un circuito cerrado que consiste de las mismas partículas del fluido mientras el tiempo transcurre, como se muestra en la Figura 5.1.*

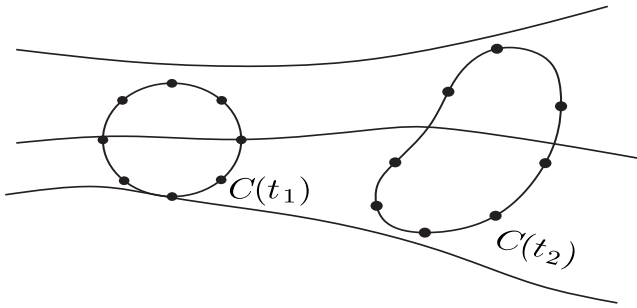


Figura 5.1: Circuito cerrado $C(t)$.

Entonces, la **circulación** Γ , que viene expresada por

$$\Gamma = \int_{C(t)} \underline{u} \cdot d\underline{x},$$

alrededor de $C(t)$, es **independiente del tiempo**.

En la siguiente sección iniciaremos con las mismas hipótesis de este teorema, para enunciar los Teoremas de Helmholtz.

Teoremas de Helmholtz para vórtices

Supongamos que tenemos un fluido incompresible, no viscoso, de densidad constante, que se mueve en presencia de una fuerza corporal conservativa (tal que el teorema de circulación de Kelvin 5.1.1 es aplicable). Entonces:

1. Los elementos del fluido que están sobre una línea vórtice en algún instante continúan estando sobre una línea vórtice; es decir, las líneas vórtices se mueven con el fluido.

Una consecuencia inmediata de esto es: los tubos vórtices se mueven con el fluido en una forma parecida.

2. La cantidad

$$\Gamma = \int_S \underline{w} \cdot \underline{n} dS$$

es la misma para todas las secciones transversales S de un tubo vórtice. Por lo tanto, Γ es independiente del tiempo.

Helmholtz proporcionó por primera vez estos teoremas en 1858 [1]; sin embargo, no fue sino hasta 1867 que Kelvin obtuvo y publicó su teorema sobre circulación. Es claro entonces, que Helmholtz tomó un camino distinto para crear sus teoremas.

5.2. Potencial complejo debido a vórtices

En esta sección estaremos describiendo el potencial complejo para distintos casos relacionados con vórtices:

5.2.1. Un filamento vórtice

El potencial complejo debido a un filamento vórtice [25], de esfuerzo κ situado en el punto z_0 , es

$$W = i\kappa \log(z - z_0).$$

El esfuerzo κ es positivo cuando la circulación alrededor del filamento es contraria al movimiento de las agujas del reloj.

Un filamento vórtice rectilíneo se representa por un punto en el plano del movimiento, justo como se representa una fuente bidimensional. Podemos referirnos a tal filamento como un vórtice punto, o simplemente un vórtice cuando no hay ambigüedades.

5.2.2. Dos filamentos vórtices

Consideremos dos filamentos vórtices, uno ubicado en el punto A_1 , y el otro en A_2 . Estos filamentos tienen esfuerzos κ_1 y κ_2 , respectivamente. Si z_1 y z_2 son las coordenadas de los puntos A_1 y A_2 , respectivamente, entonces el potencial complejo de estos dos filamentos es

$$W = i\kappa_1 \log(z - z_1) + i\kappa_2 \log(z - z_2).$$

5.2.3. Un par vórtice

Se define un par vórtice como el conjunto de dos vórtices en los cuales cada uno posee un esfuerzo κ ; pero, tienen rotaciones opuestas. Consideremos la ubicación de tal par vórtice, el que tiene esfuerzo κ en el punto A , y el otro con esfuerzo $-\kappa$ en el punto B , donde la distancia del segmento AB es igual a $2a$. Tomemos el eje x de tal manera que bisecte a AB en ángulos rectos. Entonces, el potencial complejo es

$$W = i\kappa \log \left(\frac{z - a_i}{z + a_i} \right),$$

donde el origen O es el punto medio de AB .

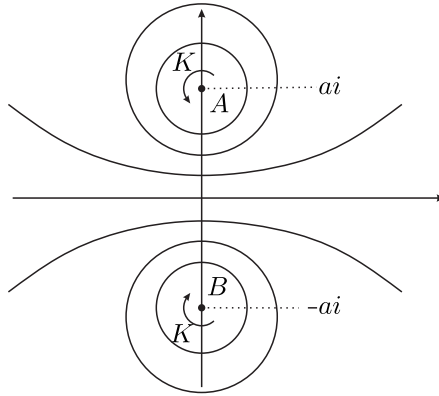


Figura 5.2: Un par vórtice.

5.2.4. Filamento vórtice paralelo a un plano

Sea un filamento vórtice ubicado en el punto A , a una distancia a del plano OX ; así, tenemos: $AO = a$. Queremos obtener una expresión para

el potencial complejo, W , de ese filamento. Para ello, tomamos en cuenta lo que hicimos para un par vórtice en la sección anterior.

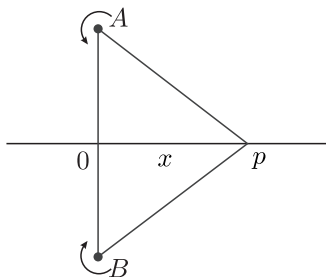


Figura 5.3: Filamento vórtice paralelo a un plano.

Sea κ el esfuerzo del filamento, si ahora ubicamos un segundo filamento en el punto B , de tal manera que $AB = 2a$ y, si al mismo tiempo, permitimos que el fluido esté presente en el lado del plano donde se encuentra el punto B , entonces estamos en el caso de un par vórtice. Como sabemos, este par vórtice no permite flujo que atraviese el plano OX . Así que, este plano se puede eliminar y el vórtice en B es la imagen del vórtice en A . Como el par se mueve paralelo a OX , se concluye que el vórtice A en la presencia del plano se moverá paralelo al plano. De esta manera, el potencial complejo es

$$W = i\kappa \log \left(\frac{z - a_i}{z + a_i} \right).$$

5.2.5. Doble vórtice

Consideremos un par vórtice, uno con esfuerzo κ y ubicado en $ae^{i\alpha}$; el otro con esfuerzo $-\kappa$ y ubicado en $-ae^{i\alpha}$. Si permitimos que $a \rightarrow 0$ y $K \rightarrow \infty$ de tal manera que $2aK = \mu$, obtenemos un doblete vórtice con un ángulo de inclinación α con respecto al eje x .

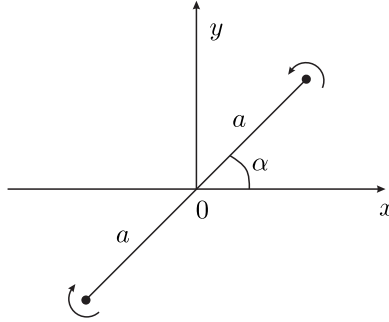


Figura 5.4: Doblete vórtice.

La dirección del doblete se estima del vórtice de rotación negativa al vórtice de rotación positiva. El potencial complejo se expresa como sigue:

$$\begin{aligned}
 W &= \lim_{a \rightarrow 0} i\kappa (\log(z - ae^{i\alpha}) - \log(z + ae^{i\alpha})) \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} i\kappa \left(-\frac{ae^{i\alpha}}{z} + \frac{a^2 e^{2i\alpha}}{2z^2} - \dots - \frac{ae^{i\alpha}}{z} - \frac{a^2 e^{2i\alpha}}{2z^2} \right) \\
 &= -\frac{i\mu e^{i\alpha}}{z} = -\frac{i\mu e^{i\alpha}}{r e^{i\theta}} = -i\frac{\mu}{r} e^{i(\alpha - \theta)} \\
 &= -\frac{i\mu}{r} \cos(\alpha - \theta) + \frac{\mu}{r} \sin(\alpha - \theta).
 \end{aligned}$$

De esta manera, la función corriente es

$$\psi = -\frac{\mu}{r} \cos(\alpha - \theta).$$

5.2.6. Vórtices de igual esfuerzo, κ , ubicados en $(x, y) = (ma, 0)$, con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots$

Consideremos una fila infinita de vórtices, cada uno con esfuerzo κ en los puntos $0, \pm a, \pm 2a, \dots, \pm na, \dots$. El potencial complejo de los $2n + 1$

vórtices más cercanos al origen es

$$\begin{aligned}
 W_n &= i\kappa \log z + i\kappa \log(z - a) + \cdots + i\kappa \log(z - na) + \\
 &\quad + i\kappa \log(z + a) + \cdots + i\kappa \log(z + na) \\
 &= i\kappa \log \{z(z^2 - a^2)(z^2 - 2^2a^2) \cdots (z^2 - n^2a^2)\} \\
 &= i\kappa \log \left\{ \frac{\pi z}{a} \frac{a}{\pi} a^2 \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) 2^2 a^2 \left(1 - \frac{z^2}{2^2 a^2}\right) \cdots n^2 a^2 \left(1 - \frac{z^2}{n^2 a^2}\right) (-1)^n \right\} \\
 &= i\kappa \log \left\{ \frac{\pi z}{a} \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2 a^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{n^2 a^2}\right) \right\} + \\
 &\quad + i\kappa \log \left(\frac{a}{\pi} \cdot a^2 \cdot 2^2 a^2 \cdots n^2 a^2 \right) + i\kappa \{\log(-1)^n\}.
 \end{aligned}$$

La función $\sin x$ se puede expresar como

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) \cdots$$

Omitiendo los términos constantes y tomando el límite de W_n cuando $n \rightarrow \infty$, obtenemos

$$W = i\kappa \log \left\{ \sin \left(\frac{\pi z}{a} \right) \right\}.$$

5.2.7. La calle vórtice de Kármán

Cuando un flujo pasa en dirección normal alrededor de un cilindro; por ejemplo, de corte transversal circular, forma patrones de flujo de los cuales consideraremos aquellos que forman estela. Para $R_e > 40$ el flujo en la estela se vuelve no estacionario y la inestabilidad se desarrolla hasta exhibir un fenómeno bien interesante. Aparecen regiones con vórtices distribuidos de manera regular y alternadamente en dos filas paralelas casi rectas [5], [28] formando lo que llamamos una **calle vórtice**. La Figura 5.5 muestra un esquema en el cual se pueden observar regiones de fluido con una rotación muy rápida; es decir, regiones de vorticidad localmente alta.

Una **calle vórtice de Kármán** consiste de dos filas infinitas paralelas con vórtices igualmente espaciados, digamos a una distancia a entre sí. Todos los vórtices de un lado rotan en el mismo sentido, mientras

que todos los del otro lado rotan en sentido opuesto a éstos. Los de un lado con esfuerzo κ y los del otro lado con esfuerzo $-\kappa$, arreglados longitudinalmente de tal forma que cada vórtice de la fila superior está directamente arriba del punto medio de la línea que conecta dos vórtices de la fila inferior, como se puede observar en la Figura 5.5.

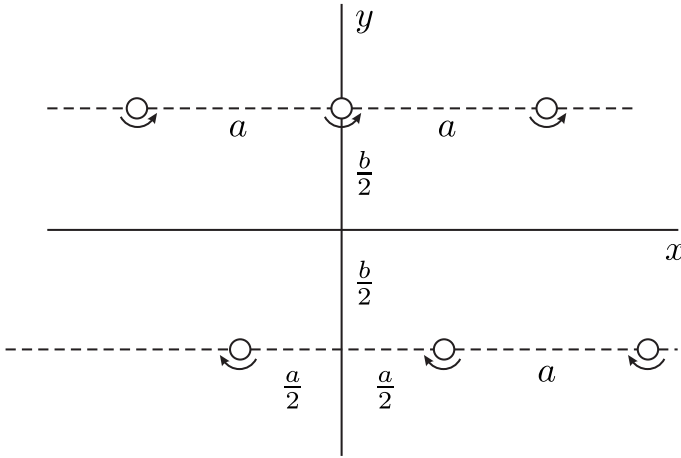


Figura 5.5: La calle vórtice de Kármán.

Tomando la configuración en el tiempo $t = 0$, ubicamos los ejes como se muestra en la Figura 5.5, el eje x queda en la mitad entre, y paralelo a, las dos filas que se encuentran a una distancia b una de la otra. En este instante los vórtices en la fila superior están en los puntos $ma - \frac{1}{2}ib$, y aquellos en la fila inferior en los puntos $(m + \frac{1}{2}a) - \frac{1}{2}ib$, donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

De esta manera, el potencial complejo en el instante $t = 0$ de esta calle vórtice de Kármán, queda expresado como:

$$W = i\kappa \log \left(\sin \left[\frac{\pi}{a} \left(z - \frac{ib}{2} \right) \right] \right) - i\kappa \log \left(\sin \left[\frac{\pi}{a} \left(z - \frac{a}{2} + \frac{ib}{2} \right) \right] \right).$$

Capítulo 6

Ondas acuáticas

El mundo que nos rodea está repleto de ejemplos relacionados con ondas acuáticas. Muchos de ellos ocurren de manera natural, y otros tantos son inducidos por nuestras propias acciones que, sin ningún problema, pueden incluir juegos infantiles o de adultos; por ejemplo, al lanzar una piedra en un pequeño cúmulo de agua, se observa que desde el punto en el agua donde la piedra toca, se forman ondas circulares que se van expandiendo hacia todos los lados y que se generan sucesivamente hasta que se pierde el efecto del impacto que la piedra hace con la superficie del agua.

Por supuesto, hay casos en los cuales los efectos son catastróficos, como por ejemplo, los tsunamis; saber su origen, cómo se forman, entre otras preguntas, resulta de gran valor para la humanidad. De allí la importancia de estudiar este tema.

6.1. Movimiento de onda

Para analizar lo que es un movimiento de onda, en esta sección estudiaremos los elementos básicos que lo conforman. Un movimiento de onda de un líquido que actúa por gravedad y que tiene una superficie libre es un movimiento en el cual la elevación de la superficie libre, por encima de algún plano horizontal fijo escogido, varía.

Tomando el eje x como horizontal y el eje y como vertical, definimos

una **onda progresiva armónica simple** como aquel movimiento en el cual la ecuación de la sección vertical de la superficie libre en el tiempo t tiene la forma

$$y = a \sin(mx - nt), \tag{6.1}$$

donde a, m, n son constantes.

En el tiempo $t = 0$, el perfil de la superficie libre (6.1) se describe por medio de la curva senosoidal $y = a \sin mx$. La ecuación (6.1) la podemos re-escribir como

$$y = a \sin m \left(x - \frac{nt}{m} \right).$$

Observamos que el perfil para algún tiempo t tiene exactamente la misma forma que el el perfil para el tiempo $t = 0$; lo que hay que hacer es simplemente trasladar el origen a O' para recuperar la forma original del perfil, como podemos ver en la Figura 6.1.

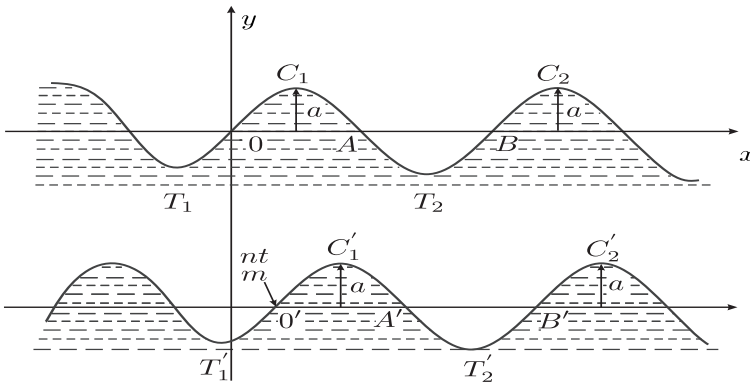


Figura 6.1: Comparación del perfil de onda para dos tiempos diferentes.

Concluimos que, la ecuación (6.1) representa un movimiento de onda en el cual la curva

$$y = a \sin mx,$$

se mueve en la dirección del eje x con velocidad $c = n/m$, que recibe el nombre de **rapidez de propagación de la onda**. Por otro lado, si

$a = 0$, el perfil del líquido es $y = 0$, que representa el nivel medio.

Basados en [25], la cantidad a se llama la **amplitud de onda** y mide el máximo desplazamiento vertical, desde el nivel medio, de la superficie libre actual. Los puntos C_1, C_2, \dots correspondientes a la máxima elevación, se denominan **crestas**, los puntos T_1, T_2, \dots de máxima depresión se llaman **batea** o **canal de la onda**. La distancia entre crestas sucesivas se llama la **longitud de onda** λ . De esta manera, tenemos:

$$\lambda = \frac{2\pi}{m}.$$

El perfil de la superficie libre es exactamente el mismo en los tiempos t y $t + \frac{2\pi}{n}$. El tiempo

$$t = \frac{2\pi}{n}.$$

se llama **período de onda**. El recíproco del período $\frac{n}{2\pi}$, se denomina la **frecuencia**. El ángulo $mx - nt$ se llama **ángulo de fase**, y el número n convenientemente se puede llamar la **razón de fase**. Podemos escribir la siguiente relación $\lambda = ct$. Entonces, la ecuación del perfil se puede escribir en la forma

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct).$$

6.2. Condición cinemática en la superficie libre

Para describir la condición cinemática, consideremos una masa de agua de profundidad h . Supongamos que en ella se propagan ondas con una altura $\eta = \eta(x, t)$ sobre el nivel medio; es decir, η se mide desde el nivel no perturbado, y el eje x se toma a lo largo del fondo en dirección de la propagación. Entonces, la ecuación de superficie libre toma la forma:

$$y - \eta - h = 0.$$

Observemos que $\partial\eta/\partial t$ es el cambio en el tiempo, t , de la altura, η , de la superficie, y que $u\partial\eta/\partial x$ es la velocidad tangencial a la superficie. Así, la suma de estas dos expresiones modela el movimiento de las partículas de agua en la superficie. Ahora bien, para que no haya cavitación, esta

suma que describimos previamente debe ser igual a la componente de la velocidad en la dirección y ; es decir, v . Así, la superficie se mueve con el fluido de tal manera que:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = v. \quad (\text{Condición cinemática})$$

De no indicarse lo contrario, estaremos trabajando con la teoría linealizada; ésta consiste en despreciar todos los términos no lineales como cuadrados y productos de partes variables de todas las cantidades y sus coeficientes diferenciales. En particular, $\partial \eta / \partial x$, el cual mide la pendiente del perfil, se tomará como pequeño. Entonces, obtenemos en la superficie libre

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{6.2}$$

donde ψ es la función corriente. Esta es la condición cinemática de la superficie para perfiles de onda de altura y pendiente pequeñas.

6.3. Condición de presión en la superficie libre

La ecuación de presión para un fluido incompresible es

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 + g\eta - \frac{\partial \phi}{\partial t} = B(t).$$

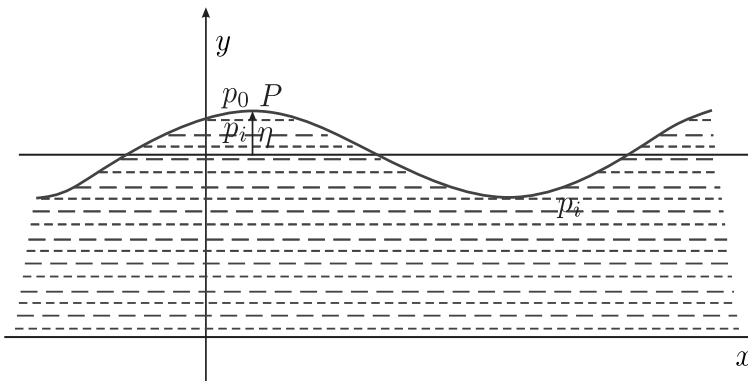


Figura 6.2: Diferencia de presiones en una superficie libre.

Sea p_i la presión justo dentro del líquido en el punto P y p_0 la presión fuera del líquido en el punto P . Asumiremos, una vez más, que el movimiento es irrotacional como de hecho es el caso para ondas que comienzan, en un líquido no viscoso, por fuerzas naturales. La ecuación de presión [25], despreciando el término $\frac{1}{2}q^2$, entonces es

$$p_i = \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - g\eta \right) + C(t),$$

y $C(t)$ se puede tomar independiente del tiempo t incorporando sus términos dependientes de t en $\frac{\partial \phi}{\partial t}$. Así,

$$p_i - p_0 = \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - g\eta \right) - p_0 + \text{constante}.$$

Ahora, si suponemos que la presión atmosférica es constante (cosa que no es cierta; pero, que necesitamos asumir para poder simplificar), podríamos re-escribir la ecuación anterior, mediante un ajuste adecuado de ϕ , quedando de la siguiente forma:

$$p_i - p_0 = \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - g\eta \right). \quad (6.3)$$

Observamos que p_i y p_0 difieren por una cantidad pequeña, entonces $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ debería ser pequeño. Es así como (6.3) representa la condición de presión de la superficie libre, de ondas irrotacionales con alturas pequeñas.

Si ahora asumimos que la tensión superficial es muy pequeña de forma que la podemos despreciar, ($\sigma = 0$), entonces $p_i - p_0 = \sigma/R = 0$, donde R es el radio de la curvatura, obtenemos,

$$\begin{aligned} g\eta - \frac{\partial \phi}{\partial t} &= 0 \\ g\eta &= \frac{\partial \phi}{\partial t}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

que es la condición de presión superficial. Observamos que (6.4) proporciona la elevación de la superficie cuando se conoce ϕ .

Si combinamos la condición cinemática (6.2) y la condición de presión superficial (6.4), logramos

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

Es así como obtenemos la ecuación en función de ϕ y ψ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \text{para } y = h.$$

6.4. Ondas viajeras

En muchos problemas de ondas acuáticas aparecen como soluciones ondas viajeras. Por ello, en esta sección estudiaremos un poco acerca de ondas viajeras.

Seguidamente, analizaremos el caso de ondas viajeras monocromáticas; es decir, de una frecuencia simple. Para estudiar formas de ondas más complejas, lo que se hace es superponer ondas monocromáticas para obtenerlas. Las ondas periódicas de cualquier forma se pueden representar por serie de Fourier, y las ondas no periódicas por integrales de Fourier [14]. Una onda viajera monocromática se puede representar por una función senoidal.

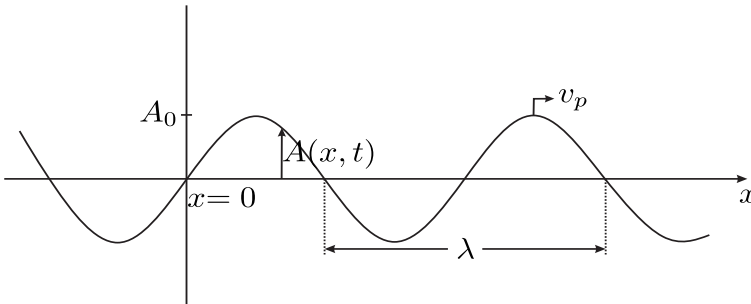


Figura 6.3: Onda viajera progresiva.

La **magnitud** de una onda en cualquier posición x y tiempo t es $A(x, t)$, la cual puede representar cualquier variable tal como presión, densidad, componente de velocidad, entre otras cantidades físicas.

La **amplitud** es A_0 , y la onda puede viajar en la dirección positiva de x , en cuyo caso recibe el nombre de **onda viajera progresiva**, o en la dirección negativa de x , y recibe el nombre de **onda viajera regresiva**. La Figura 6.3 muestra una onda viajera progresiva. Hay que señalar que

la cantidad v_p es la **velocidad de fase** o **rapidez de onda** y representa la rapidez con la cual la onda progresiva, en este caso, se está moviendo en la dirección positiva de x .

A continuación revisaremos lo que sucede en el caso de un surfista. Un observador estacionario se representa en el marco de referencia como un valor fijo de x , él ve cómo la onda varía en el tiempo. Tomando fotos en diferentes tiempos, observaría cómo la onda varía en desplazamiento a medida que el tiempo avanza.

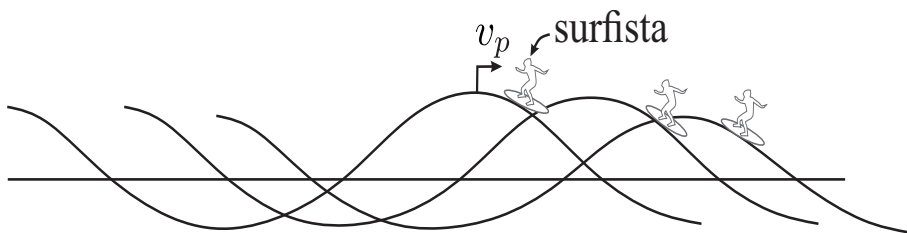


Figura 6.4: Frente de onda con rapidez v_p .

En la Figura 6.4, el surfista se presenta sobre un frente de onda que se mueve con una rapidez v_p . El surfista siempre ve el mismo valor del esfuerzo de onda A mientras se mueve. Se debe enfatizar que la rapidez de onda v_p no es la rapidez del fluido. Las partículas del fluido pueden ir de arriba a abajo y de abajo hacia arriba mientras la onda pasa, pero el fluido no se mueve con el frente de onda.

Supongamos que tenemos una onda que se mueve a través de un fluido que está en reposo. La onda representa una perturbación que se propaga a través del fluido, y de hecho el fluido se puede comportar como un movimiento que va de arriba hacia abajo y de abajo hacia arriba mientras la onda pasa, pero es sólo un movimiento oscilatorio, y no ocurre ningún movimiento neto del fluido. La cresta de la onda y el surfista se mueven con la onda y no con el fluido.

La manera de representar matemáticamente una onda plana, es como sigue:

$$A(x, t) = \mathcal{R} \left\{ A^* e^{i(\omega t - kx)} \right\}, \quad (6.5)$$

donde el símbolo \mathcal{R} representa la parte real de la expresión entre llaves y A^* es un número complejo llamado **fasor**. Ahora bien, observando la Figura 6.5, notamos que A^* se puede escribir como

$$A^* = |A^*|e^{i\varphi} = A_0e^{i\varphi} = A_r^* + iA_i^*,$$

donde $|A^*|$ es la magnitud de A^* que es igual a A_0 y, A_r^* y A_i^* son las partes real e imaginaria de A^* , respectivamente.

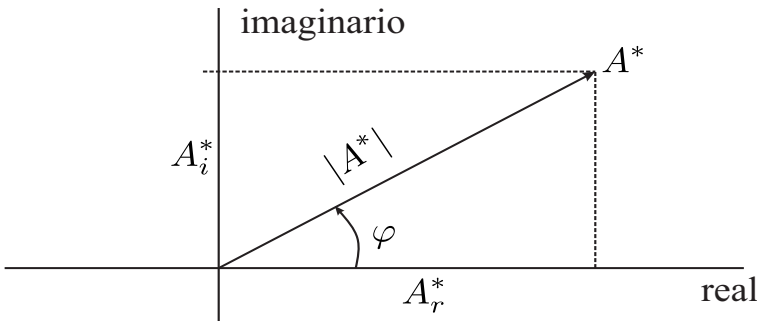


Figura 6.5: Vector fasor A^* .

La amplitud $|A^*|$, o A_0 , se puede escribir como

$$|A^*| = \sqrt{A_r^{*2} + A_i^{*2}}.$$

Por propiedades de los números complejos, sabemos que $|A^*| = A^*\overline{A^*}$, donde $\overline{A^*}$ es el conjugado complejo de A^* .

En realidad, no es necesario escribir el símbolo \mathcal{R} , ya que siempre se ha entendido que sólo y únicamente la parte real de la expresión final para $A(x, t)$ tiene significado físico; sin embargo, todo análisis antes de llegar a la expresión final debe estar en término de las variables complejas completas, pues la parte real de un producto no es el producto de las partes reales, y por ello deben realizarse todas las operaciones y manipulaciones algebraicas en todo y cada uno de los pasos intermedios antes de tomar la parte real de la expresión definitiva.

La frecuencia angular, ω , (expresada en radianes por segundo) se toma aquí como un número real positivo. k es la constante de propagación, la

cual en general puede ser compleja, con parte real k_r y parte imaginaria k_i . La parte real, k_r , frecuentemente se llama el número de onda, y k_i es la constante de atenuación. La frecuencia f (ciclos por segundo) está relacionada con ω mediante $\omega = 2\pi f$. La longitud de onda λ se relaciona con el número de onda k_r mediante $k_r = \frac{2\pi}{\lambda}$.

En vista de que $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$, la ecuación (6.5) se puede re-escribir y tomar su parte real como sigue

$$\begin{aligned} A(x, t) &= \mathcal{R} \left\{ |A^*| e^{i\varphi} e^{i(\omega t - k_r x)} e^{k_i x} \right\} \\ &= |A^*| e^{k_i x} \cos(\omega t - k_r x + \varphi). \end{aligned} \quad (6.6)$$

El término coseno representa la onda viajera con un traslado de fase, φ , del origen ($x = 0$ y $t = 0$). Analicemos qué sucede cuando tenemos una onda progresiva, si la parte imaginaria de k , k_i , es positiva, la onda crece a medida que se propaga en la dirección positiva de x , y si k_i fuese negativa, entonces la onda se atenuaría mientras se propaga en esa misma dirección. Si la onda viaja en la dirección negativa de x , entonces ocurre todo lo contrario. Ahora, k_r es positiva para una onda viajera progresiva, y es negativa para una onda viajera regresiva.

En lo que sigue, necesitamos encontrar el valor del número complejo k , teniendo a ω como un dato conocido. En los problemas de movimiento de ondas, el problema principal es encontrar k dado ω , además de determinar los valores de las amplitudes (del fasor) de cada parámetro para una señal de entrada. La ecuación que relaciona k con ω se conoce como la ecuación de dispersión, $k = k(\omega)$.

En la ecuación (6.6), observamos que la onda viajera tiene una envolvente dada por $e^{k_i x}$. En la Figura 6.6 se muestra la envolvente para una onda viajera progresiva, considerando los dos casos: la gráfica a la izquierda para k_i positivo y la gráfica a la derecha para k_i negativo.

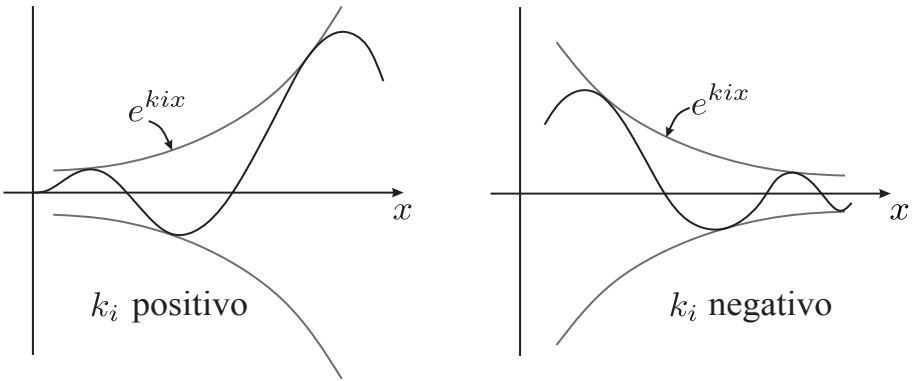


Figura 6.6: Envolvente para una onda viajera progresiva.

Revisando detenidamente el caso k_i positivo, ya notamos que la onda viajera progresiva crece; pero, también se puede interpretar como atenuación o decaimiento de una onda regresiva. Si se tiene el caso k_i negativo, entonces ocurre todo lo contrario.

6.5. Ondas estacionarias

En esta sección asumimos que onda senoidal no tiene dispersión, ni atenuación, ni decaimiento; es decir, k es un número real y v_p es constante. Supongamos que a una onda viajera progresiva, con k_r como su rapidez de fase, se le superimpone una onda viajera regresiva, con $-k_r$ como su rapidez de fase, teniendo ambas ondas la misma amplitud, entonces el resultado es una **onda estacionaria**.

Una onda estacionaria no viaja en espacio. Los nodos (lugares donde la amplitud es siempre cero) permanecen fijos en el espacio, y de donde una onda de amplitud B_0 surge como se puede observar en la siguiente figura

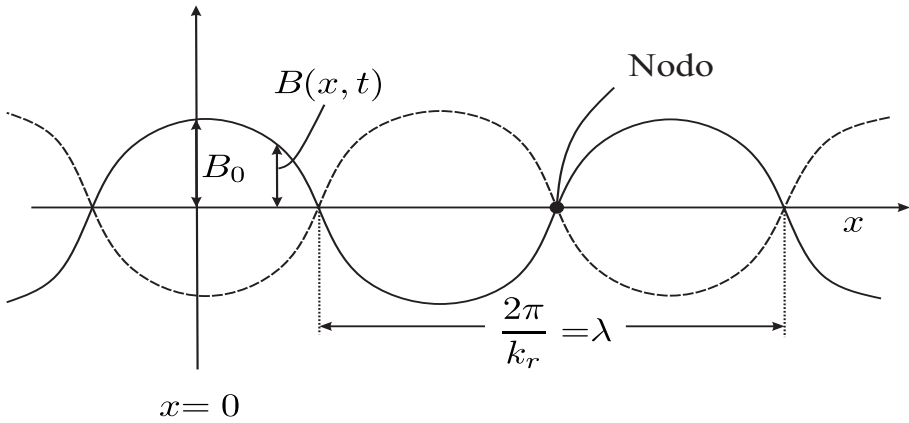


Figura 6.7: Onda estacionaria.

Se puede ver que la onda oscila, a medida que pasa el tiempo, entre la línea sólida y la punteada.

Una manera de poder expresar una onda estacionaria es mediante la suma de ondas viajeras de la forma $|A| \cos(\omega t - k_r x)$, donde k_r es positiva para la onda viajera en la dirección positiva de x y k_r es negativa para la onda en la dirección negativa de x . Asumiendo que k_r es positiva, tenemos

$$B(x, t) = |A| \cos(\omega t - k_r x) + |A| \cos(\omega t + k_r x);$$

pero sabemos que $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$, entonces

$$B(x, t) = 2|A| \cos(\omega t) \cos(k_r x),$$

con esto observamos que la amplitud en la Figura 6.7 anterior es $B_0 = 2|A|$.

Bibliografía

- [1] D.J. Acheson, *Elementary fluid dynamics*, Oxford University Press, 1990.
- [2] J. Aguirre, I. Florez y E. Macagno, *Mecánica de fluidos*, Consejo de Publicaciones ULA, 2000.
- [3] F.R. Astudillo, *Un modelo matemático para un flujo centro-anular con surfactantes insolubles distribuidos no uniformemente en la interfaz entre los dos fluidos*, Trabajo de Grado, Universidad de Oriente, 2007.
- [4] F.R. Astudillo, *Estabilidad interfacial no lineal de flujos centro-anulares con surfactantes solubles*, Tesis de Maestría en Matemáticas, Universidad de Oriente, 2011.
- [5] G.K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Second paperback, Cambridge University Press, 1999.
- [6] J. Bear, *Dynamics of fluids in porous media*, Dover Publications, Inc., 1988.
- [7] V.N. Constantinescu, *Laminar viscous flow*, Spinger-Verlag, 1995.
- [8] A.C. Fowler, *Mathematical Models in the applied sciences*, Cambridge University Press, 1997.
- [9] R. Gallo y S.A. Kas-Danouche, *Numerical solutions for core-annular fluids in a circular cylinder*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. **XIX(1)**, (2012), 19-46.

- [10] P.M. Gerhart, R.J. Gross y J.I. Hochstein, *Fundamentos de mecánica de fluidos*, Addison-Wesley Iberoamericana, S.A., 1995.
- [11] R.A Granger, *Fluid mechanics*, Dover Publications, Inc., 1995.
- [12] P.S. Hammond, *Nonlinear adjustment of a thin annular film of viscous fluid surrounding a thread of another within a circular cylinder pipe*, Journal of Fluid Mechanics, **137**, (1983), 363-384.
- [13] R.C. Hibbeler, *Mecánica vectorial para ingenieros. DINÁMICA*, Décima edición, Pearson Prentice-Hall Inc., 2004.
- [14] W.F. Hughes y J.A. Brighton, *Fluid dynamics*, Third edition, Schaum's Outlines Series, McGraw-Hill Companies, Inc., 1999.
- [15] W.S. Janna, *Introduction to fluid mechanics*, Third edition, PWS Publishing Company, 1993.
- [16] J.E.A. John y W.L. Haberman, *Introduction to fluid mechanics*, Second edition, Prentice-Hall, Inc., 1980.
- [17] S.A. Kas-Danouche, *Nonlinear interfacial stability of core-annular film flows in the presence of surfactants*, Ph.D. Dissertation At New Jersey Institute of Technology and Rutgers University, NJ, USA, 2001.
- [18] S.A. Kas-Danouche, *A mathematical model for core-annular fluids with surfactants*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, **XIV(1 y 2)**, (2007), 27-39.
- [19] S.A. Kas-Danouche, D.T. Papageorgiou y M. Siegel, *A mathematical model for core-annular flows with surfactants*, Divulgaciones Matemáticas, **12(2)**, (2004), 117-138.
- [20] S.A. Kas-Danouche, D.T. Papageorgiou y M. Siegel, *Nonlinear interfacial stability of core-annular film flows in the presence of surfactants*, Journal of Fluid Mechanics, **626**, (2009), 415-448.
- [21] J.M. Kay y R.M. Nedderman, *Fluid mechanics and transfer processes*, Cambridge University Press, 1990.

- [22] H.L. Langhaar, *Steady flow in the transition length of a straight tube*, J. Appl. Mech., **9**, (1942), 55-58.
- [23] A. Lugo, *Rutas a caos en un flujo centro-anular con surfactantes insolubles*, Tesis de Maestría en Matemáticas, Universidad de Oriente, 2009.
- [24] J.A. Mekhedjian, *Prototipo para la simulación de un flujo centro-anular con surfactantes insolubles en la interfaz entre ambos fluidos*, Trabajo de Grado, Universidad de Oriente, 2012.
- [25] L.M. Milne-Thomson, *Theoretical hydrodynamics*, Fifth edition, Dover Publications, Inc., 1996.
- [26] Y. Nakayama y R.F. Boucher, *Introduction to fluid mechanics*, Butterworth-Heinemann, A division of Reed Educational and Professional Publishing, Ltd., 2000.
- [27] D.T. Papageorgiou, C. Maldarelli, y D.S. Rumschitzki, *Nonlinear interfacial stability of core-annular film flows*, Physics of Fluids A, **2(3)**, (1990), 340-352.
- [28] M.C. Potter y D.C. Wiggert, *Mechanics of fluids*, Second edition, Prentice-Hall, Inc., 1997.
- [29] O. Reynolds, *An Experimental Investigation of the Circumstances which Determine Whether the Motion of Water in Parallel Channels shall be Direct or Sinuous and of the Law of Resistance in Parallel Channels*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **174**, (1883), 935-982.
- [30] J. Rivas, *Una discretización de un modelo matemático para el ajuste no lineal de fluidos centro-anulares con surfactantes insolubles*, Tesis de Maestría en Matemáticas, Universidad de Oriente, 2012.
- [31] H.M. Schey, *Div, grad, curl, and all that: An informal text on vector calculus*, Third edition, W.W. Norton & Company, Inc., 1996.
- [32] J.C. Slattery, *Advanced transport phenomena*, Cambridge University Press, 1999.

- [33] V.L. Streeter, E.B. Wylie y K.W. Bedford, *Mecánica de fluidos*, Novena edición, McGraw-Hill Interamericana, S.A., 2000.
- [34] D.J. Tritton, *Physical fluid dynamics*, Second edition, Oxford University Press, 1994.
- [35] M. Van Dyke, *Perturbation methods in fluid mechanics*, Annotated edition, The Parabolic Press, 1978.

Asociación Matemática Venezolana

Presidente: Rafael Sánchez Lamonedá

Consejo Directivo Nacional

Rafael Sánchez Lamonedá
Capítulo Capital

Alexander Carrasco
Capítulo de Centro Occidente

Oswaldo Araujo
Capítulo de Los Andes

Said Kas-Danouche
Capítulo de Oriente

Oswaldo Larreal
Capítulo Zuliano

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela.

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela
<http://www.ciens.ucv.ve/ciens/amv/>

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Consejo Directivo

Director

Eloy Sira

Subdirector

Alexander Briceño

Representantes del Ministerio del Poder Popular para la Ciencia, Tecnología e Innovación

Guillermo Barreto

Juan Luis Cabrera

Representante del Ministerio del Poder Popular para la Educación Universitaria

Jesús Manzanilla

Gerencia General

Martha Velásquez

Comisión Editorial

Eloy Sira (Coordinador)

Lucía Antillano

Horacio Bior

Jesús Eloy Conde

María Teresa Curcio

Rafael Gassón

Pamela Navarro

Héctor Suárez

Erika Wagner



Gobierno **Bolivariano**
de Venezuela

Ministerio del Poder Popular
para **Ciencia, Tecnología e Innovación**

