

**XXVI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS  
EMALCA-VENEZUELA 2013**

---

**EL DESARROLLO DEL CONCEPTO  
DE FUNCIÓN CONVEXA**

**Nelson Merentes y Sergio Rivas**

**MÉRIDA, VENEZUELA, 1 AL 6 DE SEPTIEMBRE DE 2013**



XXVI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS  
EMALCA - VENEZUELA 2013

---

# EL DESARROLLO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN CONVEXA

Nelson J. Merentes D.

Universidad Central de Venezuela  
nmerucv@gmail.com

Sergio T. Rivas A.

Instituto Universitario de Tecnología Elías Calixto Pompa  
sergiorivasa@yahoo.com

Colaboradores Luis A. Azócar B. y Odalis M. Mejía G.

---

MÉRIDA, VENEZUELA, 1 AL 6 DE SEPTIEMBRE DE 2013

## XXVI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana. La XXVI Escuela Venezolana de Matemáticas recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Banco Central de Venezuela, el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CD-CHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) y Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA).

2010 Mathematics Subject Classification: 05D10, 22F05 05C55, 43A05, 22A05, 22F50

©Ediciones IVIC

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Rif: G-20004206-0

**El Desarrollo del Concepto de Función Convexa**

Nelson J. Merentes D., Sergio T. Rivas A.

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas

Preprensa e impresión: Gráficas Lauki C. A.

Depósito legal If66020135102423

ISBN 978-980-261-145-4

Caracas, Venezuela

2013

# Prefacio

Este libro lo hemos dividido en dos capítulos. El primero de ellos lo dedicamos al estudio clásico de las funciones convexas definidas en un intervalo de la recta, en un subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  y finalmente en un subconjunto convexo de un espacio normado.

En el segundo capítulo, tratamos distintos conceptos de funciones convexas que se han estudiados desde 1905 hasta nuestros días y que generalizan el concepto de convexidad dado por Jensen, culminando con el concepto de multifunción convexa. Al final del capítulo presentamos, de manera resumida, algunos campos del conocimiento, donde se aplica las funciones convexas. También exponemos, las definiciones de algunas variaciones del concepto de función convexa, estudiados en su mayoría, en años reciente. Finalmente, agregamos una sección donde se exponen algunas ideas de lo que usualmente se estudia cuando se define un concepto de función convexa.

Al final de cada capítulo, agregamos una lista de ejercicios y en la última sección enunciamos algunos problemas que pueden ser objeto de investigaciones futuras. Esperamos que este libro llene las expectativas de los lectores y sea de utilidad en el desarrollo de esta rama de la Matemática.

Queremos expresar nuestro agradecimiento a los profesores Luis Azócar, Odalis Mejía y José Luis Sánchez quienes nos prestaron una excelente ayuda con las correcciones de este material. En especial a la profesora Odalis Mejía quien realizó la invaluable, incansable y siempre agotadora labor de incorporar las correcciones de este libro y dar los retoques finales; y al profesor Azócar, quien a lo Borges posee la referencia bibliográfica de la biblioteca de Babel de las matemáticas y es una fuente

inagotable en la búsqueda de material para el crecimiento intelectual.

También expresamos nuestro agradecimiento al profesor Neptalí Romero, quien nos invitó a participar en la XXVI Escuela Venezolana de Matemática, que ha sido tradicionalmente, un punto de encuentro de matemáticos, estudiantes e investigadores, ligados a esta disciplina.

Por supuesto, nuestro reconocimiento a los Organizadores de la Escuela y al Banco Central de Venezuela, organismo que nos dió su apoyo incondicional.

*Gracias a todos*

N. Merentes y S. Rivas

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>iii</b>
<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1 Funciones Convexas</b>	<b>17</b>
1.1 Funciones Convexas en la Recta. . . . .	18
1.2 Continuidad de Funciones Convexas en la Recta Real. . .	22
1.3 Diferenciabilidad de Funciones Convexas en la Recta. . . .	24
1.4 Soporte de una Función Convexa. . . . .	28
1.5 Operaciones con Funciones Convexas. . . . .	30
1.6 Separación de Funciones por Funciones Convexas. . . . .	31
1.7 Funciones Convexas y Desigualdades Clásicas. . . . .	33
1.8 Funciones Convexas Definidas en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	39
1.8.1 Extremos de Funciones Convexas. . . . .	43
1.9 Funciones Convexas Definidas en un Espacio Normado. . .	45
1.9.1 Diferenciabilidad de Funciones Convexas en Espacios Normados. . . . .	48
1.10 Ejercicios. . . . .	49
<b>2 Otros Conceptos de Convexidad.</b>	<b>59</b>
2.1 Funciones Midconvexas . . . . .	60
2.2 Funciones $t$ -Convexas. . . . .	63
2.3 Funciones Cuasi Convexas. . . . .	65
2.3.1 Funciones Pseudo-Convexas. . . . .	74
2.3.2 Función Invex. . . . .	75
2.3.3 El Problema KKT. . . . .	76
2.4 Funciones $k$ -Convexas. . . . .	77

2.4.1	Funciones $(t_1, \dots, t_k)$ -Convexas. . . . .	81
2.5	$\varepsilon$ -Convexidad. . . . .	82
2.5.1	Funciones $(\varepsilon, \delta)$ -Convexas. . . . .	84
2.6	Funciones Wright Convexas. . . . .	85
2.7	Convexidad Generalizada (Familias de Parámetros). . . . .	88
2.8	$s$ -Convexidad. . . . .	89
2.8.1	$h$ -Convexidad. . . . .	91
2.9	$E$ -Convexidad. . . . .	93
2.10	Funciones Fuertemente Convexas. . . . .	96
2.11	Multifunciones . . . . .	106
2.12	Multifunciones Convexas. . . . .	108
2.13	Subdiferencial. . . . .	111
2.14	Algunos Contextos donde Aparece la Convexidad. . . . .	113
2.15	Más Conceptos de Convexidad. . . . .	120
2.16	¿Qué Investigar Sobre un Concepto de Convexidad? . . . . .	127
2.17	Ejercicios. . . . .	128
2.18	Problemas para Investigar. . . . .	133

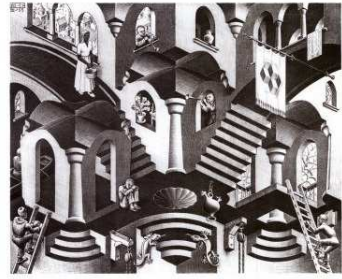
# Introducción

La Matemática, como ciencia, vive y crece con el intercambio de ideas entre los cultivadores de diferentes áreas del conocimiento y el desarrollo del quehacer de la vida del ser humano y su entorno; y por supuesto alimentada por investigaciones que se desarrollan día a día en distintos espacios de la actividad científica. El curso “El Desarrollo del Concepto de Función Convexa” enmarcado en la XXVI Escuela Venezolana de Matemática es un ejemplo de lo afirmado. El curso está diseñado para: hablar, reflexionar y pensar sobre convexidad, en especial convexidad de funciones y conjuntos. Hablar de convexidad es hablar de interdisciplinariedad. Convexidad es una noción básica en la geometría, pero también se usa ampliamente en otras áreas de las matemáticas. El uso de técnicas de convexidad aparece en muchas ramas de las matemáticas y las ciencias, tales como La Teoría de la Optimización y de La Teoría de las Desigualdades, del Análisis Funcional, La Programación Matemática y La Teoría de Juegos, La Teoría de Números, el Cálculo Variacional y su interrelación con estas ramas se muestra día a día más profunda y fructífera.

Además en los últimos años, varias extensiones y generalizaciones del concepto clásico de convexidad tanto de conjuntos como de funciones han sido estudiadas y existen, con regularidad, reuniones y conferencias de investigadores que trabajan en el área, como puede palpase revisando el sitio web: [Working Group Generalized Convexity](#). Lo que evidencia el interés en este tema.

La **convexidad** está muy presente en nuestras vidas, en la geometría de las hojas de los árboles, en la forma de las exquisitas frutas que consumi-

mos, en los utensilios de cocina, en el trazado de las avenidas y calles, en las iglesias y sitios de manifestación religiosas, en los objetos que comúnmente usamos como lentes, anteojos, entre otras cosas, en telescopios, en la poesía, en las obras de artes como las pinturas y las esculturas; y hasta en letras de canciones como “*Cóncavo y Convexo*” interpretada por el cantante autor brasileño Roberto Carlos, en los años 80 del siglo pasado.



*Concavo y Convexo*  
M. C. Escher, 1955

De todos es bien conocido que el siglo XX y lo que va del siglo XXI se ha caracterizado por un desarrollo deslumbrante de la matemática, en todas sus ramas y por supuesto la convexidad no escapa de este desarrollo. Es así que este concepto es muy útil para el desarrollo de muchas ramas de las matemáticas, como: Análisis Funcional, Análisis Complejo, Cálculos de Variaciones, Ecuaciones Diferenciales, Matemática Discreta, Geometría Algebraica, Teoría de Probabilidad, Teoría de Códigos, Teoría de Grafos y Cristalografía, pero además encuentra aplicaciones importante en otras áreas fuera de las matemáticas como la Medicina, Economía, Física, Química, Biología, Ingeniería, Arquitectura y otras áreas del conocimiento y el pensamiento.

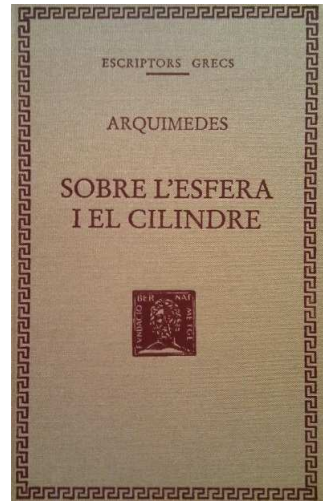


*Los Seis Libros 1era Ed. en español, 1576 Rodrigo Zamorano*

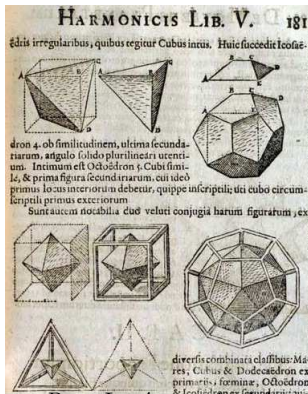
Desde épocas remotas la humanidad a pensado y estudiado esta noción, los griegos prestaron mucha atención a figuras convexas como polígonos y poliedros. Tanto es así que las denominaciones de estas figuras le son atribuidas. En el famoso tratado “Los Elementos de Euclides” (250 A.C) que consta de 13 libros y es el escrito más leído en el mundo después de la Biblia,

aparecen varias contribuciones a esta materia, relativas principalmente a propiedades de los polígonos y poliedros.

Sin embargo, fue Arquímedes (287-212 A.C.) el primero en dar una noción de lo que se entendía por una curva o una superficie convexa (en su libro “Sobre la esfera y el cilindro”). Entre las diferentes propiedades obtenidas por Arquímedes sobre convexidad, merecen especial mención los postulados y resultados referentes al centro de gravedad de conjuntos planos y su descripción de los 13 poliedros semiregular, también conocidos como sólidos arquimedianos (un poliedro convexo se dice semiregular si sus caras son polígonos regulares de al menos, dos tipos, y el grupo de isometrías es transitivo sobre los vértices);



*Sobre L'Esfera I el Cilindre*



*Pag. La Armonía del Mundo, J. Kepler*

los sólidos arquimedianos fueron redescubiertos muy posteriormente por J. Kepler (1571-1630) en su libro “Harmonices Mundi” (La Armonía del Mundo) en 1619 [139], quien demostró que, efectivamente, sólo podían existir 13. Sin embargo, es a finales del siglo XIX y durante el siglo XX cuando se realizó una intensa actividad de investigaciones de las funciones convexas y se obtuvieron resultados significativos en el campo del Análisis Funcional, Geometría Convexa, Economía Matemática y Análisis Convexo entre otras ramas.

En el año 1889 en [122], el matemático alemán, Otto Hölder consideró el concepto de convexidad ligado con las funciones reales que tienen segunda derivada no negativa. En el año 1893 el austriaco Otto Stolz demuestra que si una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y verifica la desigualdad

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x, y \in [a, b],$$

entonces tiene derivadas laterales. En ese mismo año el matemático

francés Jacques Hadamard en [104] obtiene una desigualdad entre integrales para funciones que tienen primera derivada creciente. Pero es el danés Johan L. W. Jensen [131, 132] a quien se le atribuye el concepto de función convexa. Él realizó un estudio detallado de estas clases de funciones demostrando que muchas desigualdades clásicas (Desigualdad de Hölder, Desigualdad de Minkowski) se derivan de la hoy denominada Desigualdad de Jensen. Jensen unifica en un concepto aquellas funciones que verifican ciertas propiedades, estudiadas por O. Hölder, O. Stolz, J. Hadamard y Ch. Hermite [122, 239, 104, 116]. Jensen le dio tanta importancia a esta noción que estimó que las funciones convexas deberían contar con un lugar en los textos elementales de Teoría de Funciones; de hecho esto es así.

El libro de G. H. Hardy, J. E. Littlewood y G. Pólya [110] titulado “Inequalities” influyó en el aumento de la investigación en el estudio de las funciones convexas, sus propiedades, caracterizaciones, desigualdades (desigualdades del tipo Jensen, del tipo Hermite-Hadamard) y de Fejér que generaliza la desigualdad de Hermite-Hadamard.

La convexidad es una de las hipótesis más frecuentemente utilizada en la teoría de optimización. Se utiliza por lo general para dar validez global para ciertas proposiciones, que de lo contrario solo serían verdaderas localmente. Por ejemplo, un mínimo local es también un mínimo global de una función convexa. Por otra parte, la convexidad también se emplea para obtener la suficiencia de condiciones que son sólo necesarias, como con el Teorema de Fermat clásico o con las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker [136] en programación no lineal. En la microeconomía, la convexidad juega un papel fundamental en la teoría del equilibrio general y en teoría de la dualidad.

A lo largo del tiempo han surgido varios problemas y aplicaciones que han dado origen a generalizaciones del concepto de función convexa, tales como: funciones midconvexas (J.W. Jensen 1905),  $t$ -convexas, cuasi convexas, pseudo convexas, Invex,  $k$ -convexas,  $\varepsilon$ -convexa,  $(k, h)$ -convexa, Wright convexa,  $s$ -convexa,  $h$ -convexa,  $E$ -convexa, fuertemente convexa y muchas otras como mostramos al final del libro.

En cuanto a las funciones midconvexas estas funciones corresponden a una clase más amplia, que incluye las funciones convexas y son iguales cuando se le impone la condición de continuidad.

Otros conceptos, como el de función cuasi convexa, introducido en 1928 en un trabajo sobre teoría de juegos, por el extraordinario matemático del siglo XX, Jhon Von Neuman [184], es de mucha utilidad en los estudios de problemas en la economía y optimización. Algunas propiedades de estas funciones y una variedad de ejemplos están expuestas en el libro de S. Boyd y L. Vandenberghe [41] y en una revisión que hacen de este tema H. J. Greenber y W.P. Pierskalla en [101].

Otra noción de utilidad es el concepto de función pseudo-convexa considerado por O. L. Mangasarian en el año 1965 [157]. Luego en 1981 M. H. Hanson [107] y M. Hanson y B. Mond en 1987 [108], introducen la definición de función Invex, aunque es B. D. Craven en 1981 en [61] quien le da el nombre de función Invex. En el año 2008, G. Giori y S. Mishar en [97] escriben un libro donde se estudia de manera amplia estas funciones.

La idea geométrica clásica, de las funciones convexas, reales definidas en un intervalo de la recta, es que el segmento que une dos puntos de su gráfica, está por encima de la gráfica de la función. Esta idea la generaliza el matemático estadounidense E. Beckenbach [27] en 1937, reemplazando los segmentos, por el gráfico de funciones continuas que pertenecen a una familia de funciones  $\mathcal{F}$  de dos parámetros. El lector interesado en estudiar la convexidad generalizada puede referirse a los trabajos de E. Beckenbach y por Z. Páles y K. Nikodem en [195] o al libro titulado *Convex Functions*, de A. W. Roberts, D. E. Varberg [223].

En 1966, el matemático ruso, B. T. Polyak [210] considera una subclase de funciones convexas, denominadas “funciones fuertemente convexas” que como es de esperarse, cumplen algunas propiedades de las funciones convexas, entre las que podemos citar: Teorema del sandwich, una desigualdad tipo Jensen y desigualdades del tipo Hermite-Hadamard.

Es importante señalar que mientras, entre cada dos puntos, la gráfica de la función convexa, se encuentra entre la recta que pasa por ellos y una

recta soporte; en el caso de las funciones fuertemente convexas en lugar de una recta soporte tenemos una parábola soporte.

Otra generalización de las funciones convexas, aún más reciente, es la de  $h$ -convexidad. Esta noción fue introducida en el año 2007 por S. Varošanec [246], de la forma siguiente:

*Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se dice  $h$ -convexa si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) \quad (1)$$

para todo  $x, y \in I$  y  $t \in (0, 1)$ . Donde  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo y  $h : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ .

Esta noción unifica y generaliza las clases de *funciones convexas*, *s-convexas*, las *funciones de Godunova-Levin* y las *P-funciones*, que se obtienen al considerar en (1) las funciones  $h(t) = t$ ,  $h(t) = t^s$ ,  $h(t) = \frac{1}{t}$  y  $h(t) = 1$ , respectivamente.

Las funciones  $h$ -convexas cumplen algunas propiedades, caracterizaciones y desigualdades de las funciones convexas, por ser una generalización de éstas. Entre las desigualdades importantes que las funciones  $h$ -convexas satisfacen, están: la desigualdad de Jensen y desigualdades del tipo Hermite-Hadamard.

Así como estas funciones, existen otros tipos de funciones convexas, que han sido estudiadas por distintos investigadores y que verifican en algunos casos propiedades similares a las de las funciones convexas. Algunos de estos resultados los exponemos a lo largo del curso y gran parte de ellos están publicados en revistas y libros de reciente data. Nosotros omitimos muchas demostraciones porque nuestro interés radica en dar una panorámica del avance de este tema en el último siglo y en particular en las últimas dos o tres décadas.

El libro está estructurado en dos (2) capítulos. En las secciones 1.1 a 1.5 del primer capítulo daremos la definición de función convexa en la recta, para luego estudiar la continuidad y la diferenciabilidad. Se describen las operaciones con funciones convexas (suma, producto y composición

de funciones) y convergencia de sucesión de funciones convexas. En la sección 1.6 se dan las condiciones necesarias y suficientes para que exista una función convexa  $h$  entre dos funciones  $f$  y  $g$  (Teorema del Sandwich), obtenidas en 1994 por K. Baron, J. Matkowski y K. Nikodem en [26].

En la sección 1.7 se estudian desigualdades clásicas como las desigualdades Media Geométrica y Media Aritmética, Hölder, Cauchy-Schwartz, Jensen, Young, Hermite-Hadamard y Fejér. Además en la sección 1.8 y 1.9 consideramos las funciones convexas definidas en un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y de manera más general en un espacio vectorial  $\mathbb{X}$ . Exponemos resultados sobre continuidad, diferenciabilidad y existencia de extremos.

El segundo capítulo lo dedicamos en su mayor parte a estudiar algunas generalizaciones del concepto de función convexa.

- La sección 2.1 la destinamos al estudio de las funciones midconvexas consideradas por J. W. Jensen [131, 132]. Mostramos varios resultados sobre propiedades que deben cumplir estas funciones para que sean continuas, como los Teoremas de Bernstein-Doetsch, Blumber-Sierpiński y Ostrowski. Proseguimos en la siguiente sección, tratando el concepto de función  $t$ -convexa, el cual generaliza la noción de midconvexidad y finalizamos presentando una demostración de un teorema clave denominado Teorema de Kuhn.
- La sección 2.3 la dedicamos a las funciones cuasi convexas, que son de utilidad en el estudio de una variedad de problemas, en particular en el campo de la economía. Aquí también son expuestos algunos resultados de las funciones pseudo-convexas, invex y concluimos haciendo una discusión sobre el Problema KKT (Karush-Kuhn-Tucker) sobre programación convexa.
- En la sección 2.4 se da el concepto de función  $k$ -convexa introducido por T. Popoviciu [213, 214] y se exponen algunas propiedades de estas funciones.
- En la sección 2.5 se presentan algunas propiedades de las funciones  $\varepsilon$ -convexas que fueron definidas, en 1952 por D. H. Hyers y S. M. Ulam [128] y que han sido estudiadas por M. Kuczman [146] y generalizadas por Z. Páles en el 2002 [201].

- La sección 2.6 se destina a presentar la definición de funciones Wright convexa dada por W. E. Wright en 1954 [251] y a exponer algunas propiedades demostradas por C. T. Ng en 1987 [185] y C. T. Ng y K. Nikodem en 1993 [187]. En esta misma sección se da la definición de función  $k$ -Wright convexa estudiada por los matemáticos húngaros A. Gilangy y Z. Páles [95], quienes visitaron nuestro país el pasado mes de enero y dictaron conferencias sobre este tema y otros relacionados, en el Banco Central de Venezuela y en la Universidad Central de Venezuela, conjuntamente con el profesor K. Nikodem.
- Continuamos en la sección 2.7 con la definición de convexidad generalizada, en la que E. Beckenbach en 1937 [27], considera familias de dos parámetros.
- La siguiente sección (sección 2.8) se destina a la noción de  $s$ -convexidad en sus dos sentidos, estudiadas por Orlicz [198] y W. W. Breckner [42]. Además presentamos el concepto de función  $h$ -convexa de S. Varošanec [246], que generaliza el concepto de convexidad de W. W. Breckner. En el año 2009 P. Burai, A. Háyzy, T. Juhász [49, 50] generalizan nuevamente este concepto.
- La sección 2.9 se consagra al concepto de  $E$ -convexidad considerado por E. A. Youness [253] y se exponen algunas propiedades de estas funciones.
- En la sección 2.10 tratamos el concepto de funciones fuertemente convexas dado por B. T. Polyak [210]. También se incluyen las definiciones de funciones fuertemente midconvexas, fuertemente  $t$ -convexas,  $\varepsilon$ -fuertemente convexas, fuertemente cuasi convexas, fuertemente Wright convexa, fuertemente  $(\varepsilon, \delta)$ -convexas, fuertemente  $h$ -convexas; y se resumen en varios teoremas algunas propiedades de estas funciones, demostradas por N. Merentes y K. Nikodem [171], N. Merentes, K. Nikodem y S. Rivas [172], A. Azócar, J. Giménez, K. Nikodem y J. L. Sánchez [19], H. Angulo, J. Giménez, A. Moros y K. Nikodem [12] y A. Azócar, N. Nikodem y G. Roa [20].
- Las secciones 2.11 y 2.12 las dedicamos a introducir las multifunciones y en particular las multifunciones convexas y fuertemente

convexas. Adicionalmente exponemos algunos resultados obtenidos sobre estas últimas por H. Leiva, N. Merentes, k. Nikodem y J. L. Sánchez [151] este año. En la siguiente sección exponemos un concepto muy ligado a las multifunciones como es el de subdiferencial.

- En la sección 2.14 hacemos un resumen de algunos tópicos donde se utilizan las funciones convexas o algunas de sus variaciones. De esta manera queremos poner en evidencia la utilidad de estas funciones.
- Con la idea de mostrar que el tema sobre funciones convexas está en constante expansión, hemos querido agregar en la sección 2.15, otros conceptos que en su mayoría ha sido estudiados recientemente. por supuesto no son todos.
- Pretendemos que la sección 2.16 sirva de guía a los interesados en incursionar en este tema de las funciones convexas y sus distintas vertientes, en qué se investiga cuando nos enfrentamos a estos objetos matemáticos.

Al final de cada capítulo hemos agregado sendas secciones de ejercicios y en la última sección (2.18) incorporamos una “pequeña” lista de problemas que podrían servir para futuras investigaciones. También hemos dado una extensa referencia bibliográfica con la intención de dejar plasmada la riqueza de la noción de función convexa y sus generalizaciones; y que además sirva de un referente para futuras investigaciones. Para finalizar, queremos resaltar que el objetivo principal de este libro es presentar una introducción a la noción de funciones convexas y sus generalizaciones, mostrar sus diversos aspectos y algunas de las direcciones en las que han evolucionado. Además que la “convexidad generalizada” (funciones convexas y sus variantes, conjuntos convexos y variantes) es un área de investigación muy dinámica y prácticamente cada día aparecen resultados nuevos y contribuciones importantes al Análisis Convexo y áreas afines. Una muestra de este dinamismo es la gran cantidad de Simposios Internacionales sobre convexidad generalizada y monotonía que se realizan con cierta frecuencia. Por ejemplo, el XI simposio internacional sobre Convexidad Generalizada y monotonía se llevará a cabo en el Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA), en Río de

Janeiro, Brasil, del 25 al 30 de agosto del año 2014. Encuentros como este atraen a matemáticos, economistas, ingenieros y profesionales de otras disciplinas.

Esperamos que disfruten esta XXVI Escuela Venezolana de Matemática, que como siempre se realiza en esta hermosa ciudad de Mérida y que este curso sirva de motivación para que cada vez más personas se entusiasmen en la investigación sobre un área tan rica y apasionante como es el Análisis Convexo y en particular del estudio de la convexidad generalizada tanto de funciones como de conjuntos.

# Capítulo 1

## Funciones Convexas

En este capítulo expondremos la noción de función convexa y propiedades de las mismas.

A. Wayne Roberts y Dale E. Varberg en su clásico y excelente libro sobre funciones convexas [223] (ver también comentarios p.62 de [190]), indican que el concepto de función convexa se remonta a finales del siglo XIX, señalando que en 1889, el matemático alemán, Otto Hölder consideró este concepto ligado con las funciones reales que tiene segunda derivada no negativa [122], obteniendo en forma discreta, lo que se conoce hoy como Desigualdad de Jensen. Pocos años después, en 1893 el austriaco Otto Stolz [239] demuestra que si una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y verifica la desigualdad

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x, y \in [a, b],$$

entonces tiene derivadas laterales. Las funciones que cumplen la desigualdad anterior son conocidas hoy día como midconvexas.

Ese mismo año el matemático francés Jacques Hadamard [104] obtiene una desigualdad entre integrales para funciones que tienen primera derivada creciente.

Pero es el danés Johan. L. W. Jensen a quien se le atribuye la introducción del concepto de función convexa, porque a principios del siglo XX

hace un estudio bastante detallado de estas funciones, demostrando que muchas de las desigualdades clásicas se derivan de la hoy denominada Desigualdad de Jensen [131, 132].

La importancia que le da Jensen a estas funciones se manifiesta cuando afirma lo siguiente.

*La noción de función convexa es casi tan fundamental como la de función positiva o función creciente. Si no me equivoco esta idea debe encontrar un lugar en los textos elementales de la Teoría de Funciones Reales.*

*J. L. W. Jensen*

## 1.1 Funciones Convexas en la Recta.

Iniciamos esta sección con el concepto clásico de función convexa para funciones reales definidas en un intervalo de la recta. En lo que sigue denotamos por  $I$  a cualquier intervalo de la recta real.

**Definición 1.1.1.** *Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es **convexa** si*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y), \quad x, y \in I, t \in (0, 1). \quad (1.1)$$

*Si la desigualdad (1.1) es una desigualdad estricta para  $x, y \in I, t \in (0, 1)$  entonces se dice que la función  $f$  es estrictamente convexa. Si (1.1) se cumple en sentido opuesto se dice que  $f$  es cóncava y si se verifica en sentido estricto decimos que  $f$  es estrictamente cóncava.*

**Observación 1.1.1.** Geométricamente, la desigualdad (1.1) asegura que una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa en el intervalo  $I$ , si el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera  $(x, f(x)), (y, f(y))$  del gráfico de  $f$ , está por encima de la gráfica de la función  $f$  en el intervalo  $[x, y]$ , como lo muestra la Figura 1.1.

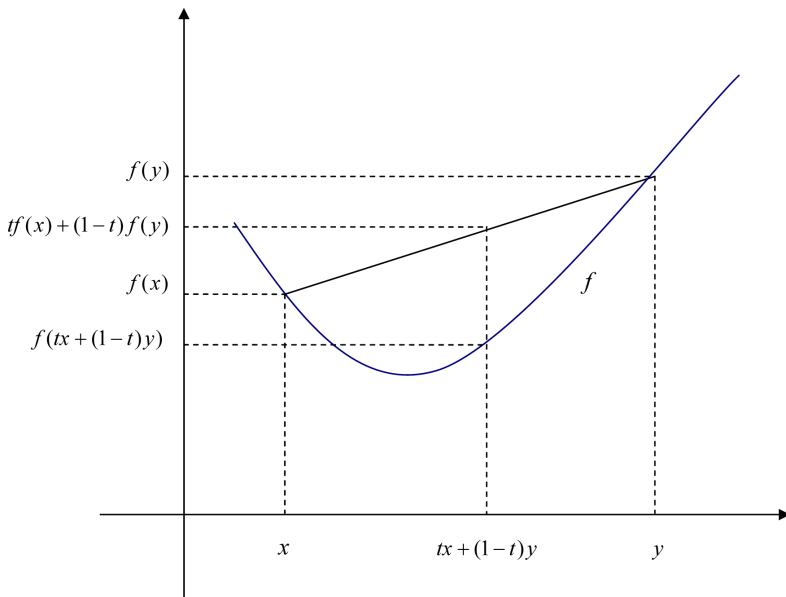


Figura 1.1: Función Convexa

En la siguiente proposición exponemos un resumen de relaciones que garantizan la convexidad de una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Estos resultados son de utilidad para extender la noción de convexidad para otros dominios de la función  $f$  (Ver por ejemplo Capitulo II).

**Proposición 1.1.1.**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si y sólo si se verifica alguna de las siguientes relaciones:

- a.  $f(x + t(y - x)) \leq f(x) + t(f(y) - f(x)), \quad t \in (0, 1), x, y \in I.$
- b.

$$f(sx + ty) \leq sf(x) + tf(y), \quad s, t \in (0, 1), s + t = 1. \quad (1.2)$$

- c. Si  $x, y, z \in I, x < z < y$

$$\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ y & f(y) & 1 \\ z & f(z) & 1 \end{vmatrix} = (y - z)f(x) + (x - y)f(z) + (z - x)f(y) \geq 0.$$

d. (Ver Proposición 2.4.1).

$$\begin{aligned} f[x, y, z] &:= \frac{f(x)}{(z-x)(y-x)} + \frac{f(z)}{(z-y)(z-x)} + \frac{f(y)}{(y-x)(y-z)} \\ &= \frac{(y-z)f(x) + (y-x)f(y) + (x-z)f(z)}{(z-y)(z-x)(y-x)} \geq 0. \end{aligned}$$

*Demostración.* Es inmediato que la ecuación (1.1) es equivalente a la desigualdad a.

(a.  $\Rightarrow$  b.) Es una consecuencia al considerar  $s = 1 - t$ .

(b.  $\Rightarrow$  c.) Sean  $x, y, z \in I$ ,  $x < z < y$ . Entonces existe  $t \in (0, 1)$ , tal que  $z = tx + (1 - t)y$ . Así tenemos que  $t = \frac{y-z}{y-x}$  y  $1 - t = \frac{z-x}{y-x}$  y de la desigualdad (1.1), obtenemos

$$f(z) \leq \frac{y-z}{y-x}f(x) + \frac{z-x}{y-x}f(y) \quad (1.3)$$

o equivalentemente  $(y-z)f(x) + (x-y)f(z) + (z-x)f(y) \geq 0$ .

(c.  $\Rightarrow$  d.) Basta dividir la última desigualdad que aparece en c. por el número positivo

$$(y-z)(y-x)(z-x).$$

(d.  $\Rightarrow$  a.) Se multiplica  $\frac{f(x)}{(z-x)(y-x)} + \frac{f(z)}{(z-y)(z-x)} + \frac{f(y)}{(y-x)(y-z)} \geq 0$  por  $(y-z)(y-x)(z-x)$  para obtener la desigualdad (1.3) y operando con ésta se deduce la desigualdad de la parte a. □

Usando el Principio de inducción matemática, podemos generalizar a más de dos elementos del intervalo I la desigualdad (1.1) y es lo que se conoce como Desigualdad de Jensen.

**Proposición 1.1.2** (Desigualdad de Jensen). *Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa, entonces*

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i), \quad (1.4)$$

$x_i \in I$ ,  $t_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tales que  $t_1 + \dots + t_n = 1$ .

Para los detalles de la demostración de esta desigualdad se puede consultar [223] o [228].

Una propiedad importante de las funciones convexas es que son acotadas en cualquier intervalo cerrado contenido en su dominio, como se manifiesta en la siguiente proposición.

**Proposición 1.1.3.** *Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa, entonces  $f$  es acotada en cualquier intervalo cerrado  $[a, b] \subset I$ .*

*Demostración.* Verificar que  $f$  es acotada superiormente es sumamente sencillo, ya que si  $x \in [a, b]$ , entonces existe  $t \in [0, 1]$ , tal que  $x = ta + (1 - t)b$ . Así

$$f(x) \leq tf(a) + (1 - t)f(b) \leq \max \{f(a), f(b)\}.$$

Por otra parte todo  $x \in [a, b]$  se puede escribir como  $\frac{a+b}{2} + t$ , para algún  $t \in [0, \frac{a+b}{2}]$ .

Como

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} - t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + t\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + t\right)\right]. \end{aligned}$$

Resulta que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) &\geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) \\ &\geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \max \{f(a), f(b)\}. \end{aligned}$$

Así concluimos que  $f$  es acotada.

□

## 1.2 Continuidad de Funciones Convexas en la Recta Real.

Las funciones convexas sobre un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  tienen propiedades que permiten el cálculo de límites y aplicación de teoremas de convergencia, en esta sección expondremos algunos de ellos. La primera es que dada una función convexa ella se puede extender a todo intervalo  $[a, b]$  de manera convexa (Proposición 1.3.4 de [190]).

**Proposición 1.2.1.** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa, entonces existen los límites laterales  $f(a^+)$  y  $f(b^-)$  y además la función  $\bar{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(a^+) & x = a \\ f(x) & x \in (a, b) \\ f(b^-) & x = b \end{cases}$$

*es convexa.*

En [190] se señala que H. Rademacher en [216], demostró que las funciones convexas verifican una condición de Lipschitz en cualquier intervalo cerrado contenido en el interior de su dominio, como se expone en la siguiente proposición.

**Proposición 1.2.2.** *Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexa, entonces  $f$  cumple una condición de Lipschitz en cualquier intervalo cerrado contenido en  $\overset{\circ}{I}$ .*

Los detalles de la demostración de esta proposición pueden verse en [221], [223] o [228].

De esta manera tenemos que si  $J$  es un intervalo cerrado  $J \subset \overset{\circ}{I}$  entonces existe una constante  $K > 0$ , tal que

$$|f(y) - f(x)| \leq K |y - x|, \quad x, y \in J.$$

Por tanto  $f$  es continua en  $\overset{\circ}{I}$ .

De las dos proposiciones que acabamos de enunciar se deduce que toda función convexa  $f$ , en un intervalo cerrado, se puede redefinir, en los

extremos de manera, que la nueva función obtenida  $\bar{f}$ , sea continua en todo el intervalo.

En la siguiente figura (Figura 1.2) mostramos que existen funciones convexas en un intervalo cerrado que no son continuas. Por supuesto, de acuerdo a la Proposición 1.2.2, las posibles discontinuidades están en los extremos de  $I$ .

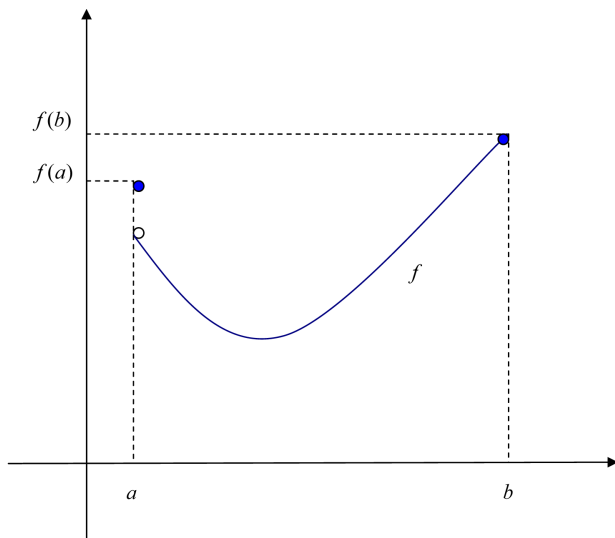


Figura 1.2:  $f$  es convexa pero no es continua.

A continuación presentamos la definición de función absolutamente continua estudiada por G. Vitali [250].

**Definición 1.2.1.** Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es **absolutamente continua**, si para cada número  $\varepsilon > 0$ , existe un número  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , tal que para cualquier colección finita de intervalos  $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$  disjuntos dos a dos incluidos en  $I$ , se verifica

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

**Observación 1.2.1.** De esta definición se obtiene inmediatamente que toda función absolutamente continua es continua y que una función Lipschitz en un intervalo es absolutamente continua.

Como consecuencia de la Proposición 1.2.2 y de la observación que acabamos de dar se obtiene el siguiente corolario.

**Corolario 1.2.1.** *Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexa, entonces  $f$  es absolutamente continua en cualquier intervalo cerrado contenido en  $\overset{\circ}{I}$ .*

### 1.3 Diferenciabilidad de Funciones Convexas en la Recta.

Otra propiedad de las funciones convexas en un intervalo  $I$  de la recta, es la existencia de derivadas laterales en cada punto del interior de  $I$ . En esta sección demostraremos esta propiedad y expondremos otras que verifican las funciones convexas diferenciables.

La siguiente proposición nos asegura que si  $x, y, z \in I$ ,  $x < y < z$  y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es una función convexa, entonces la pendiente del segmento que une los puntos  $(x, f(x))$  y  $(y, f(y))$  es menor o igual a la pendiente que une los puntos  $(x, f(x))$  y  $(z, f(z))$  y ésta última es menor o igual a la pendiente que une los puntos  $(y, f(y))$  y  $(z, f(z))$ , como se ilustra en la Figura 1.3.

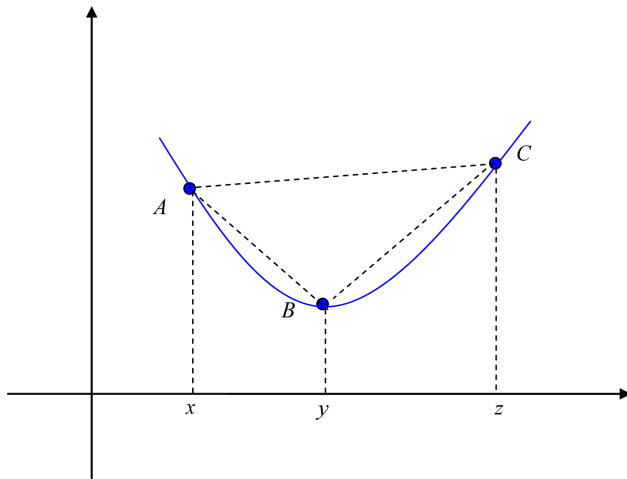


Figura 1.3: Pendiente  $AB \leq$  Pendiente  $AC \leq$  Pendiente  $BC$ .

**Proposición 1.3.1.** Sean  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa,  $x, y, z \in I$ , tales que  $x < y < z$ , entonces

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}. \quad (1.5)$$

*Demostración.* Para la primera desigualdad consideramos

$$y = x + \frac{y - x}{z - x}(z - x)$$

y se usa la parte a. de la Proposición 1.3. Para la segunda desigualdad se procede de manera similar considerando

$$z = x + \frac{z - x}{z - y}(z - y).$$

□

De las desigualdades (1.5) se obtiene el siguiente corolario.

**Corolario 1.3.1.** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa, entonces para cada  $x \in I$ , la función

$$t \in I - \{x\} \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

es creciente.

Usando la Proposición 1.3.1 y el Corolario 1.3.1 se comprueba que toda función convexa  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  posee derivadas laterales. Este resultado fue demostrado en la última década de siglo XIX, por el austriaco Otto Stolz en [239].

**Teorema 1.3.1** (Teorema de Stolz). Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa, entonces  $f$  posee derivadas laterales en cada punto de  $I$ , las derivadas laterales son crecientes y el conjunto  $E$  de los puntos de  $I$ , donde  $f$  no es derivable es numerable y  $f$  es continua en  $I - E$ .

*Demostración.* Sea  $x \in I$  y consideramos  $t, y \in I$ ,  $t < x < y$ , entonces de la desigualdad (1.5) tenemos que los cocientes  $\frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ ,  $t < x$  están acotados por  $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ .

Del Corolario 1.3.1 resulta que

$$f'_-(x) = \lim_{t \uparrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \sup_{t < x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}. \quad (1.6)$$

De manera similar se concluye que

$$f'_+(x) = \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \inf_{y > x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(t) - f(x)}{t - x}. \quad (1.7)$$

Las desigualdades (1.6) y (1.7) garantizan la existencia de las derivadas laterales de  $f$  en cada  $x$  del interior de  $I$  y que

$$f'_-(x) \leq f'_+(x).$$

Además si  $x < s < y$  la desigualdad (1.5) garantiza que

$$\frac{f(s) - f(x)}{s - x} \leq \frac{f(s) - f(y)}{s - y}$$

y de la continuidad de  $f$  en el interior de  $I$  se tiene

$$f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y). \quad (1.8)$$

Así

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y) \quad x < y.$$

En consecuencia las funciones derivadas laterales  $f'_-$  y  $f'_+$  y las derivadas laterales son crecientes y tienen límites laterales. Además de la monotonía de la derivada  $f'_+$ , la desigualdad (1.8) y la continuidad de  $f$  en  $\overset{\circ}{I}$  se concluye

$$f'_+(t) \leq \lim_{x \downarrow t} f'_+(x) \leq \lim_{x \downarrow t} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{f(y) - f(t)}{y - t}.$$

Como

$$\lim_{y \downarrow t} \frac{f(y) - f(t)}{y - t} = f'_+(t),$$

resulta

$$\lim_{x \downarrow t} f'_+(x) = f'_+(t). \quad (1.9)$$

Por otra parte  $x < y < t$ , entonces de la desigualdad (1.8), continuidad de  $f$  en el interior de  $I$  y obtenemos

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = \lim_{y \uparrow t} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \lim_{y \uparrow t} f'_+(y).$$

Como

$$f'_-(t) = \lim_{x \uparrow t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \leq \lim_{y \uparrow t} f'_+(y) \leq f'_+(t),$$

se tiene

$$\lim_{y \uparrow t} f'_+(y) = f'_-(t). \quad (1.10)$$

Como  $f'_-(t) \leq f'_+(t)$ , de las ecuaciones (1.9) y (1.10) se concluye que

$$f'_-(t) = \lim_{x \uparrow t} f'_+(x) \leq \lim_{x \downarrow t} f'_+(x) = f'_+(t).$$

De esta manera  $f'_-(t) = f'_+(t)$  en aquellos puntos  $t \in I$ , tales que  $\lim_{x \uparrow t} f'_+(x) = \lim_{x \downarrow t} f'_+(x)$ , es decir los puntos donde una función creciente es continua. En consecuencia el conjunto  $E$  de discontinuidades de  $f'_+$  es numerable (ver [13], [135] o [183]). Así se tiene que  $f'$  existe y es continua en  $I - E$ . □

En la siguiente figura (Figura 1.4) presentamos un ejemplo de una función convexa que no es diferenciable.

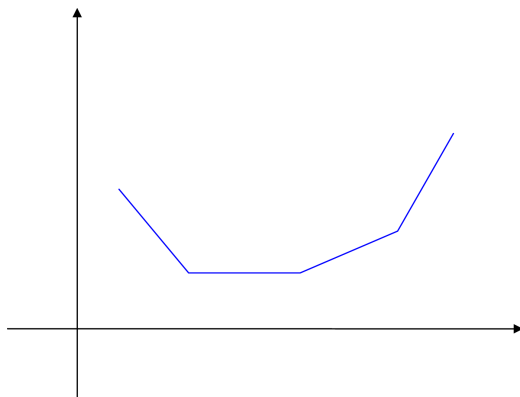


Figura 1.4: Función convexa no diferenciable.

En los dos resultados siguientes exponemos condiciones necesarias y suficientes que garantizan la convexidad de una función diferenciable en un intervalo abierto. Estos resultados son utilizados en los cursos clásicos de Cálculo, cuando se grafican funciones.

**Proposición 1.3.2.** *Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable, entonces  $f$  es convexa si y sólo si  $f'$  es creciente.*

**Corolario 1.3.2.** *Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  dos veces diferenciable, entonces  $f$  es convexa si y sólo si  $f''$  es no negativa.*

Para los detalles de las demostraciones ver [31], [223], [228], [238] o en libros de Cálculo Diferencial en una variable.

El siguiente resultado relaciona el concepto de convexidad con la integral de funciones crecientes.

**Proposición 1.3.3.** *Una función  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si y sólo si existe una función creciente  $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  y un punto  $c \in (a, b)$ , tal que:*

$$f(x) = f(c) + \int_a^c g(t)dt.$$

*Demostración.* Ver [223] o [228]. □

## 1.4 Soporte de una Función Convexa.

Geoméricamente, la idea de recta soporte de una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , en un punto  $(x_0, f(x_0))$  de su gráfica, es una recta que pasa por dicho punto y cuya gráfica está por abajo de la gráfica de la función. Es decir, existe un número  $m$ , tal que  $m(x - x_0) + f(x_0) \leq f(x)$ ,  $x \in I$ , como se ilustra en la Figura 1.5.

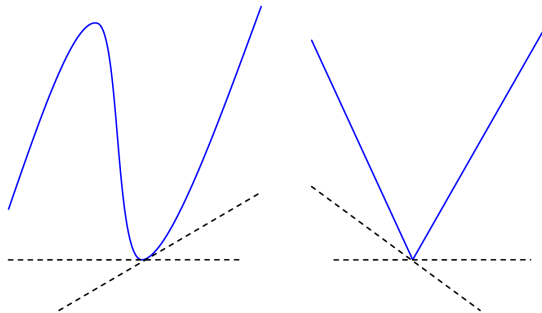


Figura 1.5: Rectas soporte.

En el caso de las funciones convexas existe una caracterización mediante rectas soportes (ver [223]).

**Proposición 1.4.1.**  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si y sólo si para cada punto  $x_0 \in (a, b)$  existe una recta soporte en  $(x_0, f(x_0))$ .

En la demostración de esta proposición se toma como recta soporte en  $(x_0, f(x_0))$  a cualquier recta que pase por dicho punto y cuya pendiente  $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ . Por ejemplo en el caso de la función  $f(t) = |t|$ ,  $t \in [0, 1]$ , podemos tomar como recta soporte a  $y = mx$ ,  $-1 \leq m \leq 1$ .

En la Figura 1.6 se presentan dos ejemplos de funciones convexas. Una que tiene una única recta soporte en cada punto de su gráfica, mientras que la otra tiene varias rectas soporte en un punto.

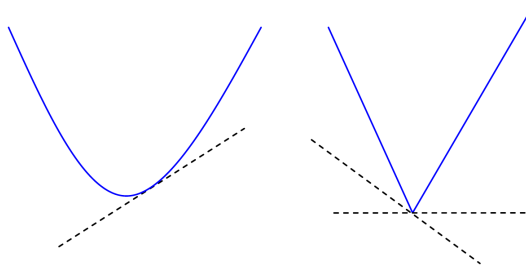


Figura 1.6: Rectas soporte.

En el caso que una función convexa  $f$  es diferenciable, existe una sola recta soporte, como se indica a continuación (ver [223, 228]).

**Proposición 1.4.2.** *Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  convexa. La función  $f$  es diferenciable en  $x_0 \in (a, b)$  si y sólo si*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

*es la única recta soporte de  $f$ .*

## 1.5 Operaciones con Funciones Convexas.

En esta sección presentamos un resumen de las operaciones que podemos hacer entre algunas funciones para que el resultado sea una función convexa. Para las demostraciones de las distintas proposiciones ver [223, 228, 238].

**Proposición 1.5.1.** *Sean  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  funciones convexas y  $c \geq 0$ , entonces*

- a.  $f + g$  y  $cf$  son funciones convexas.*
- b. Si  $f$  y  $g$  son funciones no negativas y crecientes (decrecientes), entonces el producto  $f \cdot g$  tiene las mismas propiedades.*

En la siguiente proposición se presentan propiedades que deben cumplir dos funciones  $f$  y  $g$  para que la composición  $g \circ f$  sea una función convexa o cóncava.

**Proposición 1.5.2.** *Sean  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces*

- a.  $\max\{f(x), g(x)\}$  es convexa.*
- b. Si  $f$  y  $g$  son convexas y  $g$  es creciente, entonces la función compuesta  $g \circ f$  es convexa.*
- c. Si  $f$  es cóncava y  $g$  es convexa y decreciente, entonces  $g \circ f$  es convexa.*
- d. Si  $f$  y  $g$  son cóncavas y  $g$  es creciente, entonces  $g \circ f$  es cóncava.*

e. Si  $f$  es convexa y  $g$  es cóncava y decreciente, entonces  $g \circ f$  es cóncava.

En las dos proposiciones siguientes se exponen resultados relacionados con familias de funciones convexas.

**Proposición 1.5.3.** Sea  $\{f_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}\}$  una familia de funciones convexas, entonces el conjunto  $J = \left\{x \in I : \sup_\alpha f_\alpha(x) < \infty\right\}$  es un intervalo y  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \sup_\alpha f_\alpha(x), \quad x \in J$$

es convexa.

**Proposición 1.5.4.** Sea  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ , una sucesión de funciones convexas que converge puntualmente a una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces  $f$  es convexa y la convergencia es uniforme sobre cualquier intervalo incluido en  $\overset{\circ}{I}$ .

Ahora exponemos un resultado donde se presentan condiciones para que la función inversa de una función convexa monótona sea cóncava o convexa.

**Proposición 1.5.5.** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función estrictamente monótona y  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  la función inversa de  $f$ . Entonces:

- a. Si  $f$  es convexa y creciente, entonces  $f^{-1}$  es cóncava o equivalentemente, si  $f$  es cóncava y creciente, entonces  $f^{-1}$  es convexa.
- b. Si  $f$  es convexa y decreciente, entonces  $f^{-1}$  es convexa o equivalentemente, si  $f$  es cóncava y decreciente, entonces  $f^{-1}$  es cóncava.

## 1.6 Separación de Funciones por Funciones Convexas.

En el año 1994 K. Baron, J. Matkowski y K. Nikodem [26] estudian el problema de determinar condiciones necesarias y suficientes para que exista una función convexa  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ , entre dos funciones  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Geométricamente

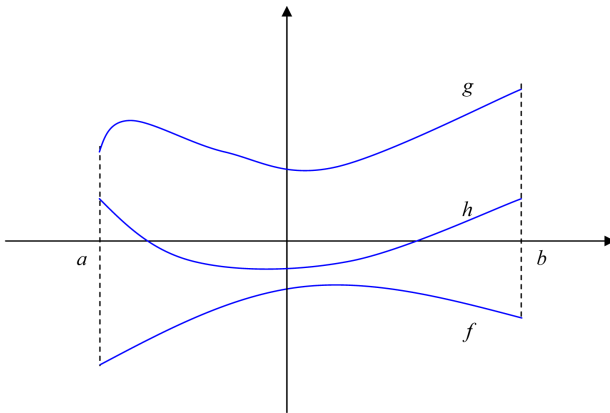


Figura 1.7:  $h$  es convexa y  $f \leq h \leq g$ .

Por supuesto que existen situaciones donde este problema no tiene solución, como se muestra en la Figura 1.8.

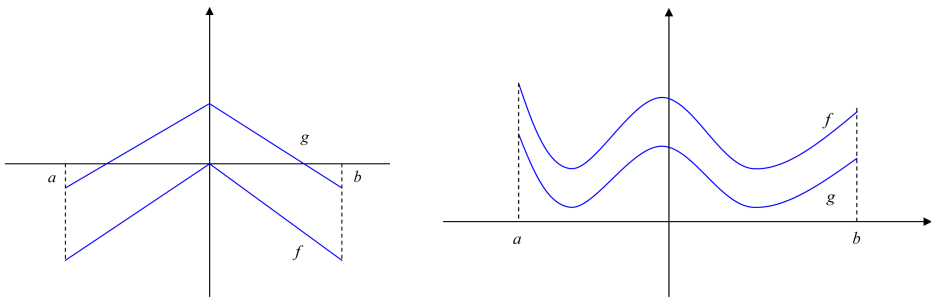


Figura 1.8: No existe  $h$  convexa tal que  $f \leq h \leq g$ .

Más precisamente, el resultado a que hemos hecho referencia, expresa lo siguiente.

**Teorema 1.6.1** (Teorema del Sandwich). *Sean  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces  $f$  y  $g$  verifican la desigualdad*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y), \quad t \in [0, 1] \quad (1.11)$$

*si y sólo si existe una función convexa  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f \leq h \leq g$ .*

*Demostración.* Ver [26, 83].

□

En [26, 83] se presenta un ejemplo donde se muestra que este resultado no puede generalizarse para funciones reales definidas en  $D \subset \mathbb{R}^n$  considerando en la Desigualdad (1.11) combinaciones convexas de  $n$  elementos de  $\mathbb{R}^n$ .

En [26] consideran tres raíces  $z_1, z_2, z_3$  diferentes de la unidad y las funciones  $f, g : B(0, 2) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por:

$$f(z) := \begin{cases} 0 & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}, \quad g(z) := \begin{cases} 0 & z \in \{z_1, z_2, z_3\} \\ 1 & z \notin \{z_1, z_2, z_3\} \end{cases}.$$

Y demuestran que  $f$  y  $g$  cumplen la desigualdad (1.11) y no existe  $h : B(0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  convexa verificando  $f \leq h \leq g$ .

La generalización que establecen K. Baron, J. Matkowski y K. Nikodem del Teorema 1.6.1 en [26] se manifiesta en el siguiente resultado.

**Teorema 1.6.2.** *Sean  $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces  $f$  y  $g$  verifican la desigualdad*

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_{n+1}x_{n+1}) \leq t_1g(x_1) + \cdots + t_{n+1}g(x_{n+1}), \quad (1.12)$$

para  $n+1$  puntos  $x_1, \dots, x_{n+1} \in D$  y  $n+1$  números  $t_1, \dots, t_{n+1} \in [0, 1]$  tales que  $t_1 + \dots + t_{n+1} = 1$ , si y sólo si existe una función convexa  $h : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f \leq h \leq g$ .

## 1.7 Funciones Convexas y Desigualdades Clásicas.

A partir de la Desigualdad de Jensen (Desigualdad (1.4)) se deducen otras desigualdades que son de uso frecuente en el Análisis Matemático. Esta sección la dedicaremos a presentar las mismas, exponiendo en algunos casos ideas para las demostraciones. En todo caso los detalles se pueden hallar en [190, 204, 223, 228, 238].

De la desigualdad  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ , se obtiene que si  $x$  e  $y$  son números no negativos, entonces

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Esta desigualdad asegura que la media geométrica de dos números es menor o igual que su media aritmética. La siguiente proposición generaliza este resultado.

**Proposición 1.7.1** (Media Geométrica-Media Aritmética [190], [223]). Sean  $\{x_i\}_{i=1}^n, \{t_i\}_{i=1}^n$  números reales, tales que  $x_1 \geq 0, t_i > 0 \ i = 1, \dots, n$  y  $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ . Entonces:

$$x_1^{t_1} x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n} \leq t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n. \quad (1.13)$$

*Demostración.* La idea es aplicar la Desigualdad de Jensen a la función  $f(x) = \exp(x)$ , tomando  $x = t_1 \ln x_1 + \cdots + t_n \ln x_n$ .

□

**Observación 1.7.1.** En el caso particular que  $p > 1, q > 1$  sean números tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Al tomar  $x_1 = x^p, x_2 = y^p$  la desigualdad (1.2), se transforma en:

$$x y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \quad (1.14)$$

En [190] hay una demostración de esta desigualdad bastante interesante.

Esta desigualdad es también consecuencia directa de la convexidad de la función exponencial, ya que usando la desigualdad (1.1) o (1.2), se tiene:

$$xy = e^{\ln xy} = e^{\frac{1}{p} \ln x^p} + e^{\frac{1}{q} \ln y^q} \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

**Proposición 1.7.2** (Desigualdad de Hölder [146], [223]). Sean  $\{x_i\}_{i=1}^n$  y  $\{y_i\}_{i=1}^n$  números no negativos;  $p > 1, q > 1$ , tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Entonces:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q}. \quad (1.15)$$

*Demostración.* Se aplica la desigualdad (1.14) tomando

$$x = \frac{x_1}{\left(\sum_{i=1}^n x_1^p\right)^{1/p}}, \quad y = \frac{y_1}{\left(\sum_{i=1}^n y_1^q\right)^{1/q}}$$

y haciendo la suma sobre  $i$ . □

En el caso que  $p = q = 2$ , la desigualdad de Hölder se transforma en la **Desigualdad de Cauchy-Schwarz** [146].

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2},$$

que es cierta independientemente de los valores de  $x_i, y_i, i = 1, \dots, n$ . Otra desigualdad de uso frecuente se establece en la siguiente proposición.

**Proposición 1.7.3** (Desigualdad de Minkowski [223]). *Sean  $\{x_i\}_{i=1}^n$  y  $\{y_i\}_{i=1}^n$  números no negativos y  $p \geq 1$ . Entonces:*

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n (y_i)^p\right)^{1/p}. \quad (1.16)$$

*Demostración.* La idea es escribir

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^n x_i (x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n y_i (x_i + y_i)^{p-1}$$

y aplicar la desigualdad de Hölder a cada una de las sumas de la derecha  $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$ . □

Ahora presentamos algunas desigualdades donde intervienen integrales.

**Proposición 1.7.4** (Desigualdad de Hölder para integrales [59], [146], [190]). *Sean  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $p > 1, q > 1$  números, tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Si  $f^p$  y  $g^q$  son integrables, entonces  $f \cdot g$  es integrable y*

$$\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b (|g(t)|^q dt)\right)^{1/q}. \quad (1.17)$$

*Demostración.* Si  $\|f\|_p = 0$  o  $\|g\|_q = 0$  el resultado es inmediato. Ahora considerar  $x = \frac{f(t)}{\|f\|_p}$ ,  $y = \frac{g(t)}{\|g\|_q}$  en la Desigualdad (1.14) e integrar en ambos lados de la desigualdad.  $\square$

### Observación 1.7.2.

- a. En [190] se afirma que la Desigualdad de Hölder fue demostrada en 1888 por L. J. Rogers [225] de manera ligeramente diferente a la demostración dada por O. Hölder un año después en [122]. Por esta razón esta desigualdad es conocida como Desigualdad de Rogers-Hölder. En [159] L. Maligranda relata el desarrollo histórico de la demostración de esta desigualdad.
- b. En el caso  $p = q = 2$  la Desigualdad (1.17) se obtiene la versión de la *Desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales*

$$\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \left( \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_a^b (|g(t)|^2 dt) \right)^{1/2}. \quad (1.18)$$

También se obtiene la desigualdad de Minkowski para integrales de funciones  $f, g$   $p$ -integrables con  $p \geq 1$ .

**Proposición 1.7.5** (Desigualdad de Minkowski para integrales [59], [190]). Sean  $f, g : (a, b) \rightarrow [0, \infty)$  y  $p > 1$ . Si  $f^p$  y  $g^p$  son integrables, entonces  $(f + g)^p$  es integrable y

$$\left( \int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left( \int_a^b |g(t)|^p dt \right)^{1/p}. \quad (1.19)$$

Otro resultado de gran utilidad es la Desigualdad de Jensen para integrales.

**Proposición 1.7.6** (Desigualdad de Jensen para integrales [146]). Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  convexa y  $\varphi : [c, d] \rightarrow (a, b)$  integrable. Si  $\alpha : [c, d] \rightarrow [0, \infty)$  verifica  $\int_a^b \alpha(t) dt = 1$ , entonces:

$$f \left( \int_c^d \alpha(t) \varphi(t) dt \right) \leq \int_c^d \alpha(t) f(\varphi(t)) dt. \quad (1.20)$$

Por supuesto que son ciertas las respectivas versiones de estos tres últimos resultados (Desigualdades (1.17), (1.19) y (1.20)) en un espacio medible  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  y  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , cambiando básicamente la integrales por  $\int_{\Omega}$ . (ver por ejemplo [106, 118, 145]).

Otra desigualdad muy conocida, demostrada por el matemático inglés W. H. Young el año 1912 en [256], donde aparecen las funciones convexas, es la siguiente:

**Proposición 1.7.7** (Desigualdad de Young [190]). *Sea  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  una  $\varphi$ -función estrictamente creciente, es decir:  $\varphi = 0$ ,  $\varphi$  es convexa,  $\varphi(0) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ . Denótese por:*

$$f(x) = \int_0^x \varphi(s) ds \quad , \quad f^*(y) = \int_0^y \varphi^{-1}(s) ds, \quad x, y \in [0, \infty).$$

Entonces:

$$ab \leq f(a) + f^*(b), \quad a, b \in [0, \infty). \quad (1.21)$$

*Demostración.* La demostración, puede verse en [190] o [228]. □

**Observación 1.7.3.** Podemos notar que la desigualdad (1.14) es un caso particular de la Proposición 1.7.7, considerando  $f(x) = x^{p-1}$ ,  $x \geq 0$ .

Por último exponemos la desigualdad de Hermite-Hadamard [104, 116] cuya demostración puede verse en la p.53 de [190].

**Proposición 1.7.8** (Desigualdad de Hermite-Hadamard [190]). *Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexa, entonces:*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{y-x} \int_x^y f(s) ds \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad x, y \in I, x < y. \quad (1.22)$$

En la p. 65 de [190] hacen un relato sobre las demostraciones de Ch. Hermite y J. S. Hadamard de esta desigualdad.

Una ilustración geométrica de esta desigualdad se obtiene multiplicando cada miembro de la desigualdades (1.22) por  $y - x$ .

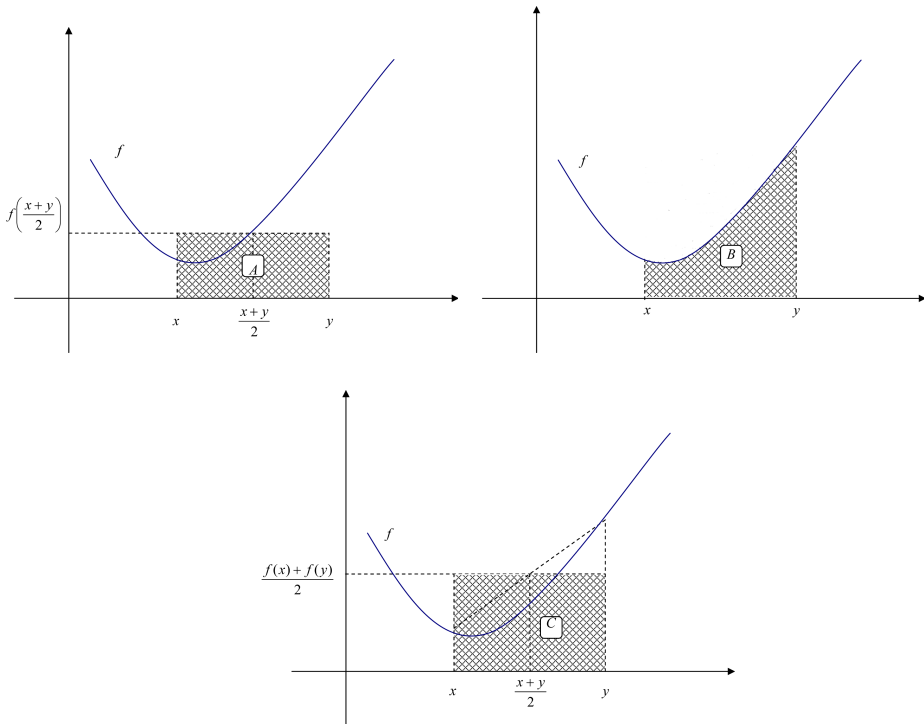


Figura 1.9: Regiones A, B y C

En la Figura 1.9 se tiene que

$$\text{Área}(A) \leq \text{Área}(B) \leq \text{Área}(C),$$

donde  $A, B$  y  $C$  son las regiones sombreadas.

En 1905 el matemático húngaro Lepold Fejér [85] generaliza la Desigualdad de Hermite-Hadamard como sigue:

**Proposición 1.7.9** (Desigualdad de Fejér). *Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa y  $g : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  una función de densidad simétrica*

( $g(a + b - x) = g(x)$ ,  $x \in [a, b]$  y  $\int_a^b g(x)dx = 1$ ). Entonces

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \int_a^b f(s)g(s)ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x, y \in I, \quad x < y. \quad (1.23)$$

#### Observación 1.7.4.

- Considerando en la Desigualdad (1.23)  $g(s) = \frac{1}{y-x}$ ,  $s \in [x, y]$ , se obtiene la Desigualdad de Hermite-Hadamard.
- Sobre las Desigualdades de Hermite-Hadamard y Fejér existen varias generalizaciones para una gran variedad de funciones convexas estudiadas en el Capítulo II de este libro (Ver [9, 10, 20, 72, 75, 76, 81, 82, 150, 171, 174, 175, 233]).
- En los libros [21, 47, 110, 204] se pueden revisar otras desigualdades relacionadas con la Desigualdad de Jensen.

## 1.8 Funciones Convexas Definidas en $\mathbb{R}^n$ .

La definición de convexidad para funciones  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , es la misma Definición 1.1.1, pero para que tenga sentido la expresión de la izquierda de la Desigualdad de Jensen (Desigualdad (1.1)), debemos suponer que el conjunto  $D$  es convexo, es decir:

**Definición 1.8.1.** *Un subconjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  es **convexo** si el segmento que une dos puntos cualesquiera de  $D$  está totalmente incluido en  $D$ , en otras palabras, se verifica*

$$x, y \in D \Rightarrow tx + (1-t)y \in D, \quad t \in (0, 1).$$

En lo que sigue cuando nos referimos a un conjunto  $D$ , suponemos que es un subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$ ; salvo que se advierta otra condición.

En la Figura 1.10 mostramos un ejemplo donde (a) es un conjunto convexo y (b) no lo es.

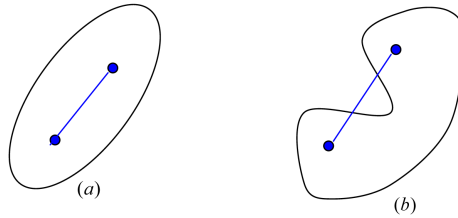


Figura 1.10: (a) y (b)

En la siguiente proposición exponemos algunas propiedades de los conjuntos convexos.

**Proposición 1.8.1.** *Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo. Entonces*

a. *Si  $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset$ ,  $\overset{\circ}{D}$  es convexo.*

b.  *$\overline{D}$  es convexo.*

c. *Si  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función afín, entonces  $A(D)$  es convexo.*

*Demostración.* Ver [25, 31, 79, 100, 223, 238, 245]. □

La bibliografía sobre conjuntos convexos es extensa. Para revisar algunos resultados concernientes a estos conjuntos se pueden consultar [1, 63, 79, 100, 222, 223, 238]. En [78] R. J. Dvilewicz hace una exposición histórica sobre los conjuntos convexos. También es interesante revisar [102] donde se estudian aspectos de Convexidad Discreta, Convexidad Estocástica y Convexidad Geométrica.

El concepto de convexidad para una función  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es exactamente el mismo que el dado en la Definición 1.1.1. De esta manera tenemos:

**Definición 1.8.2.**  *$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es **convexa** si y sólo si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad x, y \in D, t \in (0, 1). \quad (1.24)$$

Otra definición equivalente de funciones convexas la podemos dar a través de lo que se conoce como el Epígrafo de una función.

**Definición 1.8.3.** *Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . El **epígrafo** de la función  $f$  o abreviadamente  $\text{epí}(f)$  se define como el subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*

$$\text{epí}(f) := \{(x, \alpha) \in D \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}. \quad (1.25)$$

Geoméricamente el epígrafo de una función son los puntos de su gráfica y los que están por encima de la gráfica, como se ilustra en la Figura 1.11.

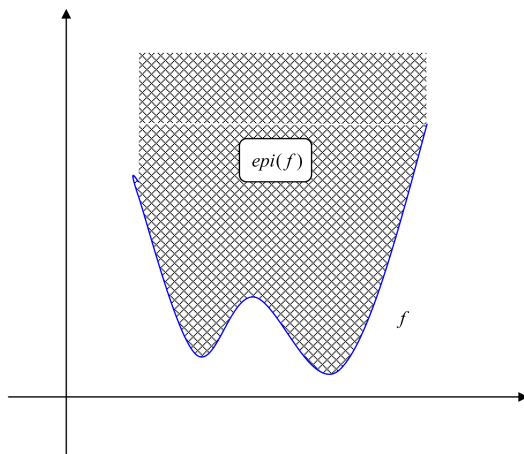


Figura 1.11: Epígrafo de la función  $f$

En 1953 el matemático alemán Moritz Werner Fenchel en [86] da la siguiente caracterización de función convexa a través de su epígrafo.

**Proposición 1.8.2.** *Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces  $f$  es convexa si y sólo si  $\text{epi}(f)$  es un conjunto convexo.*

La demostración de este resultado es sumamente sencilla, usando los respectivas definiciones.

**Observación 1.8.1.** Algunos autores como en [1, 222] consideran las funciones definidas en  $\mathbb{R}^n$  y a valores en  $\mathbb{R}$  extendido es decir  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ . Haciendo algunas consideraciones con las operaciones con  $-\infty$  y  $\infty$  similares a las que ocurren cuando se trabaja con límites de funciones reales, como por ejemplo:

- $-\infty < x < \infty$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- $\infty + \infty = \infty$ ,  $-\infty - \infty = -\infty$ .
- $x \cdot \infty = \infty$ ,  $x \in (0, \infty]$ ,  $x \cdot \infty = -\infty$ ,  $x \in [-\infty, 0)$ .
- $x \cdot (-\infty) = -\infty$ ,  $x > 0$ ,  $x \cdot (-\infty) = \infty$ ,  $x < 0$ .
- No se define  $\infty + (-\infty)$ .

Además se denomina **Dominio Efectivo** de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  al conjunto

$$\text{dom } f := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < \infty\}.$$

y si  $f$  no toma el valor  $-\infty$  se dice que  $f$  es una **Función Propia**.

Con estas consideraciones para definir función convexa se asume que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es una función propia que  $\text{dom } f \neq \emptyset$  que verifica la Desigualdad 1.24. Obsérvese que si  $f(x) = \infty$  o  $f(y) = \infty$  esta desigualdad siempre se cumple y además  $\text{dom } f$  es un conjunto convexo.

Si  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa entonces  $\overline{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , definida como:

$$\overline{f}(x) := \begin{cases} f(x) & , \quad x \in D \\ \infty & , \quad x \notin D \end{cases}$$

también es convexa y si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es convexa entonces  $f|_{\text{dom } f}$  es convexa.

Sin embargo, como la mayor parte de los artículos y libros que hacemos referencia no toman en cuenta estas consideraciones, asumimos que las funciones que manipulamos toman valores en  $\mathbb{R}$ , salvo las multifunciones que trataremos en un sección al final.

Gran parte de los resultados obtenidos para funciones convexas definidas en un intervalo, son ciertas para funciones en un subconjunto convexo  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ ; por supuesto haciendo las correspondientes adaptaciones. En lo que sigue presentamos un resumen de esos resultados (ver [146, 223, 222, 228]).

**Teorema 1.8.1.** *Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*a.  $f$  es convexa si y sólo si  $f$  verifica la Desigualdad de Jensen (Desigualdad (1.4)) para  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ .*

*b. Si  $f$  es convexa, entonces  $f$  es continua en  $\overset{\circ}{D}$ .*

*c.  $f$  es diferenciables c.s. en  $\overset{\circ}{D}$ . Además si  $A$  es el conjunto de puntos donde  $f$  no es diferenciable, entonces  $f$  es continuamente diferenciable en  $\overset{\circ}{D} - A$ .*

d. Si  $f$  es convexa, entonces es diferenciable en  $x \in \overset{\circ}{D}$ , si y sólo si, existen todas las derivadas parciales de  $f$  en  $x$ .

e. (O. Mangasarian [157]) Si  $f$  es diferenciable en  $\overset{\circ}{D}$ , entonces  $f$  es convexa, si y sólo si

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)(y - x), \quad y \in \overset{\circ}{D}.$$

f. (W. Fenchel [86]) Si  $f$  es dos veces diferenciable en  $\overset{\circ}{D}$ , con derivadas parciales de segundo orden continuas en  $D$  entonces  $f$  es convexa si y sólo si la matriz Hessiana

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

es semidefinida positiva para cada  $x \in \overset{\circ}{D}$ . Es decir  $y^T H_f(x) y \geq 0$ ,  $x \in \overset{\circ}{D}$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Ver [63, 100, 223, 228]. □

### 1.8.1 Extremos de Funciones Convexas.

En esta sección hacemos un resumen del estudio de extremos de funciones convexas  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Este es uno de los puntos más relevantes de estas funciones porque permite trazar un camino para la re-solución de problemas de optimización. Es conocido de cursos de Cálculo que cualquier función continua sobre un compacto alcanza sus extremos y que si es diferenciable tiene derivadas parciales nulas (derivada nula en el caso real) en cualquier extremo local del interior de  $D$ . En el caso de funciones convexas, la situación es más sencilla y la exponemos a continuación.

**Teorema 1.8.2.** Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexa.

a. Si  $f$  tiene un mínimo local en  $x$ , entonces  $x$  es un mínimo global (W. Fenchel [86]). El conjunto de los mínimos locales es convexo. Si  $f$  es estrictamente convexa sólo hay un mínimo local.

b. Si  $x \in \overset{\circ}{D}$  y  $\nabla f(x) = 0$ , entonces  $f$  tiene un mínimo global en  $x$ .

c. Si  $f$  alcanza un máximo global en  $x \in \overset{\circ}{D}$ , entonces  $f$  es constante en  $D$ .

d. Si  $D$  es compacto y  $f$  es continua en  $D$ , entonces  $f$  alcanza su máximo en un punto de la frontera de  $D$ , que no se puede escribir como combinación convexa de otros puntos distintos de  $D$ .

*Demostración.* a. Supongamos que  $f$  tiene un mínimo local en  $x$ . Como  $D$  es convexo, si  $y \in D$ , entonces  $tx + (1-t)y \in D$ ,  $t \in (0, 1)$ . Tomando  $t$  suficientemente pequeño y usando la convexidad de  $f$ , resulta que:

$$f(x) \leq f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Entonces  $(1-t)(f(y) - f(x)) \geq 0$  y así  $f(y) \geq f(x)$ . Lo que garantiza que  $x$  es un mínimo global.

La demostración de las otras partes de a. son sumamente sencillas.

b. Es consecuencia del Teorema 1.8.1 parte e.

c. Si existe  $y \in D$ , entonces como  $x \in \overset{\circ}{D}$ , existe  $t > 1$  tal que  $z = tx + (1-t)y \in D$ . Entonces  $x = \frac{1}{t}z + \frac{t-1}{t}y$ . Luego

$$f(x) \leq \frac{1}{t}f(z) + \frac{t-1}{t}f(y) < \frac{1}{t}f(x) + \frac{t-1}{t}f(y) = f(y).$$

Lo que es una contradicción.

d. Es consecuencia de la parte c. □

**Observación 1.8.2.** Los puntos de un conjunto convexo  $D$  que no se pueden escribir como combinación convexa de otros dos puntos de  $D$ , es lo que se conoce en la literatura como *Puntos Extremos* de  $D$ . La parte d. del Teorema anterior es el famoso Teorema de Krein Milman [143] (ver por ejemplo [25, 32, 59, 238]). Este resultado es utilizado para garantizar la existencia de soluciones de un problema de Programación

Lineal. (Maximizar un funcional lineal sobre un poliedro).

Existen una variedad de trabajos donde se estudia el uso de las funciones convexas en problemas de optimización (ver por ejemplo [23, 35, 41, 53, 58, 62, 63, 68, 91, 191, 222, 223, 240, 259]). En este sentido es importante resaltar lo que indican S. K. Mishra, S. Y. Wang y K. K. Lai en [177]:

“La convexidad es una de las hipótesis más frecuentemente utilizada en la teoría de optimización. Se utiliza por lo general para dar validez global a ciertas proposiciones, que de lo contrario sólo serían verdaderas localmente. Por ejemplo, un mínimo local de una función convexa es también un mínimo global. Por otra parte, la convexidad también se emplea para obtener la suficiencia de condiciones que sólo son necesarias, como con el Teorema de Fermat clásico o con las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker en programación no lineal. En la microeconomía, la convexidad juega un papel fundamental en la teoría del equilibrio general, y en teoría de la dualidad”.

## 1.9 Funciones Convexas Definidas en un Espacio Normado.

En esta sección  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  denota un espacio vectorial real normado. Por supuesto el concepto de Conjunto Convexo de la Definición 1.8.1 no depende de que  $D$  sea un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  (ni siquiera de que  $\mathbb{X}$  sea normado). La definición es exactamente la misma si  $D \subset \mathbb{X}$ . En lo que sigue al referirnos a un conjunto  $D \subset \mathbb{X}$  entenderemos que es convexo. También son ciertas las propiedades de la Proposición 1.8.1 La definición de Epígrafo (Definición 1.8.3) es la misma para espacios normados y la Proposición 1.8.2 y la parte a. de la Proposición 1.8.1 son ciertas y las respectivas demostraciones son exactamente iguales que en el caso  $\mathbb{R}^n$ . Algunos libros donde se puede consultar tópicos de convexidad en espacios normados son [23, 39, 79, 238].

En cuanto a la continuidad debemos resaltar que en el caso de espacios de dimensión infinita no podemos garantizar la continuidad de las funciones convexas, como es el caso de los espacios de dimensión finita (ver parte b. del Teorema 1.8.1). Esta situación la ilustramos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.9.1.** Consideremos el espacio normado  $\mathbb{X}$  de las sucesiones  $\{a_n\}_{n \geq 1}$ , tales que la serie  $\sum |a_n|$  converge, con la norma  $\|\{a_n\}\| := \sup |a_n|$ . Podemos definir  $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , por  $T(\{a_n\}) = \sum_n a_n$ . Entonces  $T$  es una transformación lineal y por tanto  $T$  es una función convexa. Para la sucesión  $a = \{1, 1, \dots, 1, 0, \dots\}$  cuyos primeros  $n$  términos son iguales a 1 y el resto iguales a 0, tenemos que

$$\|a\| = 1 \quad , \quad |T(a)| = n.$$

De esta manera tenemos que  $T$  no es una transformación lineal acotada y por lo tanto no es continua.

A pesar de que esta situación podría resultar incómoda, el siguiente Teorema aclara la situación en cuanto a la continuidad de las funciones convexas  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.9.1.** *Sea  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa.*

*a. Si  $f$  es acotada superiormente en un entorno de un punto de  $D$ , entonces es acotada inferiormente en ese entorno.*

*b. Si  $f$  es acotada superiormente en un entorno de un punto de  $D$ , entonces es localmente acotada en  $\overset{\circ}{D}$ .*

*c. Si  $f$  es acotada superiormente en un entorno de un punto de  $D$ , entonces es localmente Lipschitz en  $\overset{\circ}{D}$  y por lo tanto Lipschitz en cualquier compacto contenido en  $\overset{\circ}{D}$ . En particular  $f$  es continua en  $\overset{\circ}{D}$ .*

*d. Si  $f$  alcanza un máximo global en  $\overset{\circ}{D}$  entonces  $f$  es constante en  $D$ .*

*Demostración.* *a.* Supongamos que  $f$  es acotada superiormente por  $M > 0$  en la bola  $B = B(x_0, \varepsilon)$ .

Sea  $x \in B$ , entonces,  $2x_0 - x \in B$  y como  $x_0 = \frac{x}{2} + \frac{2x_0 - x}{2}$ , usando la convexidad de  $f$ , resulta

$$f(x) \geq 2f(x_0) - f(2x_0 - x) \geq 2f(x_0) - M, \quad x \in B.$$

Demostremos ahora la parte *b.* Sea  $y \in \overset{\circ}{D} - x_0$ . Entonces podemos escoger  $t_0 > 0$ , tal que  $t_0 y \in \overset{\circ}{D}$ . De esta manera para  $x \in B$ , tenemos

que

$$f\left(\left(1 - \frac{1}{t_0}\right)x + y\right) = f\left(\left(1 - \frac{1}{t_0}\right)x + \frac{1}{t_0}t_0y\right) \leq M + f(t_0y).$$

De esta forma resulta que  $f$  es acotada superiormente en la bola

$$B\left(y, \left(1 - \frac{1}{t_0}\right)\varepsilon\right).$$

La demostración de la parte *c*. la tomamos de [190]. Supongamos que  $f$  es acotada por  $M$  en la bola  $B(x_0, 2\varepsilon)$ . Veamos que  $f$  es Lipschitz en la bola  $B(x_0, \varepsilon)$ .

Sean  $x, y \in B(x_0, \varepsilon)$ ,  $x \neq y$ . Consideremos

$$z = y + \frac{\varepsilon}{\|y - x\|}(y - x).$$

Entonces  $z \in B(x_0, 2\varepsilon)$  y

$$y = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \|y - x\|}x + \frac{\|y - x\|}{\varepsilon + \|y - x\|}z.$$

De esta manera, resulta

$$f(y) \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \|y - x\|}f(x) + \frac{\|y - x\|}{\varepsilon + \|y - x\|}f(z).$$

De donde se obtiene:

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\leq \frac{\|y - x\|}{\varepsilon + \|y - x\|}(f(z) - f(x)) \\ &\leq \frac{\|y - x\|}{\varepsilon}(f(z) - f(x)) \\ &\leq \frac{2M}{\varepsilon}\|y - x\|. \end{aligned}$$

La demostración se concluye intercambiando los papeles de  $x, y$ .

d. Ver [190].

□

### 1.9.1 Diferenciabilidad de Funciones Convexas en Espacios Normados.

En esta sección exponemos un resumen de algunos aspectos sobre la diferenciabilidad de funciones convexas  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ . Denotamos por  $\mathbb{X}^*$  el espacio vectorial normado de las funciones lineales y continuas  $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , con la norma

$$\|T\| = \sup_{0 < \|x\| \leq 1} |T(x)|.$$

**Definición 1.9.1.** Sea  $U \subset \mathbb{X}$  un subconjunto abierto  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  es **diferenciable** (o *diferenciable Fréchet*) en  $x_0 \in U$  si existe una transformación lineal continua  $df(x_0) : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)|}{\|x - x_0\|} = 0$$

o equivalentemente si existe  $\omega : U \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\omega(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 0$  y

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + \omega(x) \|x - x_0\|, \quad x \in U.$$

Una función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  es *diferenciable Gâteaux* en  $x_0 \in U$  si existe la derivada direccional

$$f'(x_0, v) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}, \quad v \in \mathbb{X}.$$

**Observación 1.9.1.** La función  $df(x_0)$  es llamada *diferencial de  $f$  en  $x_0$* . En el caso  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$  la diferencial  $df(x_0)$  se puede calcular haciendo el producto escalar del gradiente de  $f$  en  $x_0$  por el vector  $x$ . Es decir:

$$df(x_0)(x) = \langle \nabla f(x_0), x \rangle,$$

donde

$$\nabla f(x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) e_k$$

y  $e_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  son los vectores de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $f$  es diferenciable para cada  $x \in U$  y la función  $df : U \rightarrow \mathbb{X}^*$  es diferenciable en  $x_0 \in U$ , se dice que  $f$  es dos veces diferenciable y la diferencial de  $df$  la denotamos por  $d^2f(x_0)$ . Esta función  $d^2f$  asocia a cada elemento  $x_0 \in U$  un funcional lineal continuo  $d^2f(x_0) : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}^*$ .

**Teorema 1.9.2.** Sea  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$

a. Si  $f$  es diferenciable en  $\overset{\circ}{D}$ , entonces  $f$  es convexa si y sólo si

$$f(y) - f(x) \geq df(x_0)(y - x), \quad x, y \in \overset{\circ}{D}.$$

b. Si  $f$  es diferenciable en  $x, y \in \overset{\circ}{D}$ , entonces  $f$  es convexa si y sólo si

$$(df(y) - df(x))(y - x) \geq 0, \quad x, y \in \overset{\circ}{D}.$$

c.  $d^2f(x_0)(v)(v) \geq 0, \quad v \in \mathbb{X}$ .

*Demostración.* Ver [100, 190, 223, 228]. □

Concluimos el Capitulo I con la sección 1.10 donde sugerimos al lector hacer los siguientes ejercicios.

## 1.10 Ejercicios.

1. Demostrar usando la definición de función convexa que las siguientes funciones son convexas:

a)  $f : I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ .

b)  $f : I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ .

c)  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ .

2. Demostrar que la función  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & , \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

no es convexa

3. Demostrar utilizando la definición que  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = Lnx$  es cóncava.

4. Demostrar que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa y cóncava si y sólo si  $f$  es afín.
5. Demostrar que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si y sólo si  $-f$  es cóncava.
6. Demostrar que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si y sólo si verifica la Desigualdad de Jensen (Desigualdad (1.4)).
7. Determinar analíticamente el conjunto  $A$  de la Figura 1.12 y determinar si la siguiente afirmación es cierta:  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si y sólo si la región  $A$  es un conjunto convexo.

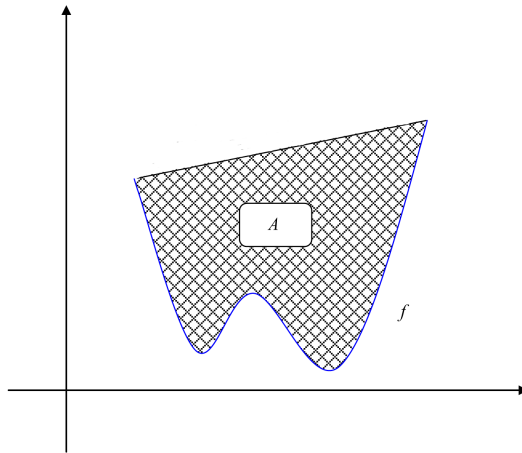


Figura 1.12: Región A

8. Demostrar la siguiente versión de la Desigualdad de Jensen.  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si y sólo si

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n t_i x_i}{\sum_{i=1}^n t_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n t_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n t_i},$$

$x_i \in I, t_i > 0, i = 1, \dots, n.$

9. Dar una fórmula explícita de una función convexa  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  que no sea continua.

10. Demostrar que si  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es convexa y  $f(0) = 0$ , entonces:

(a)  $f(tx) \leq tf(x)$ ,  $x \geq 0$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

(b)  $f(tx) \geq tf(x)$ ,  $x \geq 0$ ,  $1 \leq t$ .

(c) La función  $t > 0 \rightarrow \frac{f(t)}{t}$  es creciente.

11. Hacer la gráfica de una función convexa que no sea derivable y dar una fórmula explícita de una función convexa  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  que tenga sólo tres puntos donde no es derivable o que tenga una cantidad numerable de discontinuidades.

12. Sean  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa y  $x, y, z \in I$ . Demostrar que:

$$2 \left[ f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{x+z}{2}\right) \right] \\ \leq f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x+y+z}{2}\right),$$

$x, y, z \in I$ . Tratar de generalizar este resultado.

13. Demostrar la Proposición 1.3.2 y su corolario.

14. Demostrar que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa, entonces alcanza máximo en  $a$  o  $b$ .

15. Demostrar la Proposición 1.3.3.

16. Demostrar las Proposiciones 1.4.1 y 1.4.2

17. Construir ejemplos que ilustren las Proposiciones 1.5.1, 1.5.2, 1.5.3, 1.5.4 y 1.5.5.

18. Resolver los problemas de las páginas 7, 13, 14, 15, 19, 20, 21 y 22 de [223].

19. Demostrar la Proposición 1.8.2.

20. Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa y  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  nula fuera de un compacto  $K \subset \mathbb{R}$ . Demuestre que la función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \varphi(t) dt$$

es convexa (ver [52]).

21. Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es log-convexa si

$$f(tx + (1-t)y) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}, \quad x, y \in I, t \in (1, 1).$$

22. Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  alcanza un mínimo local en  $x \in D$ . Demostrar que si  $y \in D$ , existe  $t_0 \in (0, 1)$  tal que

$$f(x) \leq f(tx + (1-t)y), \quad 1 < t < t_0.$$

- a) Demostrar que  $f$  es log-convexa si y sólo es positiva y  $x \rightarrow \ln f(x)$  es convexa. Dar ejemplos de funciones log-convexas e investigar qué operaciones se puede hacer entre ellas, para que el resultado sea log-convexa (suma, producto, límite de sucesiones).
- b) Si  $f > 0$ , entonces  $f$  es log-convexa si y sólo si  $g(x) := e^{ax} f(x)$ ,  $x \in I$ ,  $a \in \mathbb{R}$  es convexa.
- c) Si  $f$  es log-convexa, entonces es convexa. Para el recíproco tomar  $f(x) = \sqrt{x^3}$ ,  $x > 0$ .
23. Sean  $I = [a, b]$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f$  es continua en la primera variable para cada  $x \in D$  y convexa en la segunda variable para cada  $t \in I$ . Demostrar que  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$F(x) := \int_a^b f(t, x) dt, \quad x \in D$$

es convexa y construir ejemplos de funciones tipo  $F$ .

24. Sean  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  convexa y  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  creciente. Verificar que si  $f(D) \subset I$ , entonces  $g \circ f$  es convexa.

25. (Ver p.71 de [190]) *Función Gamma*. La función gamma se define como:

$$\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Demostrar que:

a)  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ,  $x > 0$ .

b)  $\Gamma(1)=1$ .

c)  $\Gamma$  es log-convexa.

d)  $\Gamma(k+1) = k!$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

e)  $x \rightarrow x\Gamma(x)$ ,  $x > 0$  es convexa y tiende a 1 cuando  $x \rightarrow 0^+$ .

f) La función  $\Gamma$  es la única función real definida en  $(0, 1)$ , que verifica a., b. y c. (ver [190]).

g)  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

Para buscar más propiedades de esta función revisar [190].

26. *Función Beta*. La función beta se define como:

$$B : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x, y > 0.$$

Demostrar que:

a)  $B(x, y) = B(y, x)$ .

b)  $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$ .

c)  $B(x, y)$  es log-convexa en  $x$ , para  $y$  fijo.

d)  $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ .

27. Sea  $f \in C[0, 1]$ . Para cada número  $p > 0$ , se define:

$$N_p(f) := \left( \int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Demostrar que si  $p > 1$ ,  $N_p : C[0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  es una función convexa (ver [52], p.51).

28. Demostrar que cualquier norma en un espacio vectorial  $\mathbb{X}$  es una función convexa.

29. Sean  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espacio real normado y  $D \subset \mathbb{X}$ . Verificar que la función

$$f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) := d(x, D)$$

es convexa.

30. Sea  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Demostrar que el conjunto de nivel

$$L_\alpha = \{x : f(x) \leq \alpha\}$$

es convexo.

31. Sea  $D \subset \mathbb{X}$  convexo tal que  $0 \in D$ . Consideremos el funcional de Minkowski asociado a  $D$ ,  $p_D : \mathbb{X} \rightarrow [0, \infty)$ , definido por:

$$p_D(x) := \inf \{\lambda > 0 : x \in \lambda D\}, \quad x \in \mathbb{X}.$$

Demostrar que:

a)  $p_D$  es un funcional sublineal. Es decir  $p_D(x + y) \leq p_D(x) + p_D(y)$ ,  $p_D(tx) = tp_D(x)$ ,  $x, y \in D$ ,  $t \geq 0$ .

b)  $p_D(x) = 0$ , si y sólo si,  $\{tx : x \in D\} \subset D$ .

c)  $D = \{x : p_D(x) = 1\}$ .

d)  $\overset{\circ}{D} = \{x : p_D(x) < 1\} \subset D \subset \{x : p_D(x) \leq 1\} = \overline{D}$ .

32. Demostrar que  $BC[a, b] \subset BV_2[a, b]$ .

33. Sea  $\mathbb{X}$  un espacio vectorial

a) Demostrar que la intersección de conjuntos convexos de  $\mathbb{X}$  es un conjunto convexo pero la reunión no necesariamente es un conjunto convexo.

b) Verificar que en general si  $A \subset \mathbb{X}$  no necesariamente  $A + A = 2A$ . Demostrar que  $A$  es convexo si y sólo si  $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$ .

- c) Sean  $\mathbb{Y}$  un espacio vectorial,  $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  una transformación afín y  $D \subset \mathbb{X}$  un conjunto convexo. Demostrar que  $T(D)$  es convexo.
- d) Si  $A \subset \mathbb{X}$  se define la Cápsula Convexa de  $A$  como la intersección de los conjuntos convexos que contienen al conjunto  $A$  y se denota por  $Conv A$ . Construir la cápsula convexa de algunos subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ .
- e) Si  $A \subset \mathbb{X}$  una Combinación Convexa de elementos de  $A$  es cualquier combinación lineal de elementos de  $A$   $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k$ , tales que  $\alpha_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, k$  y  $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$ . Demostrar que  $Conv A$  es igual al conjunto de las combinaciones convexas de  $A$ .
- f) Demostrar que si  $A$  y  $B$  son subconjuntos convexos de  $\mathbb{X}$ , entonces

$$Conv(A \cup B) = \bigcup_{t \in [0,1]} (tA + (1-t)B).$$

Generalizar este resultado para una cantidad finita de conjuntos convexos.

- g) Hay un resultado muy importante cuando se estudian los conjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$  demostrado por C. Carathéodory en 1911 [55], que enunciamos a continuación.

**Teorema 1.10.1** (Teorema de Carathéodory). *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ , entonces todo elemento de  $A$  es la combinación convexa de a lo sumo  $n + 1$  elementos de  $A$ .*

Este resultado es de vital importancia en la Teoría de Conjuntos Convexos. Su demostración se encuentra en muchos textos, por ejemplo ver [1, 190, 222, 245]. Usar este resultado para demostrar que si  $A$  es compacto entonces  $Conv A$  es compacto y si  $A$  es abierto entonces  $Conv A$  es abierto.

Otro resultado de interés en el siguiente teorema, demostrado por Eduard Helly en 1913 y publicada diez años después [115]. En [65] se hace un estudio extenso de este teorema.

**Teorema 1.10.2** (Teorema de Helly). *Sea  $C = \{C_i\}_{i \in I}$  una familia, de al menos  $n+1$  subconjuntos convexos no vacíos de  $\mathbb{R}^n$ . Si la intersección de cualquier colección de  $n+1$  miembros de  $C$  es no vacía, entonces la intersección de los miembros de la familia  $C$  es no vacía.*

La demostración de este teorema se puede ver en [1, 35, 222].

1. Sean  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  funciones convexas y consideremos la familia de desigualdades:

$$D : f_1(x) < 0, \dots, f_k(x) < 0, f_{k+1}(x) \leq 0, \dots, f_m(x) \leq 0.$$

Demostrar que si todo sistema de  $n + 1$  desigualdades del sistema  $D$  tiene solución, entonces el sistema  $D$  también tiene solución.

2. Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  con la propiedad que cada tres puntos de  $A$  están contenidos en un disco de radio 1. Demostrar que existe un disco de radio 1 que contiene a  $A$ .
3. Consideremos una familia segmentos “paralelos” de  $\mathbb{R}^2$ , tal que cada tres segmentos son cortados por una recta vertical a ellos. Demostrar que todos los segmentos de la familia son cortados por una recta vertical a todos.

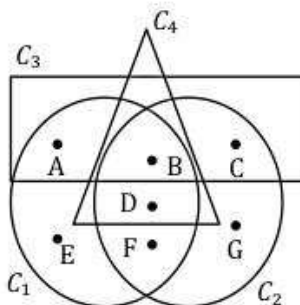


Figura 1.13: Ilustración del Teorema de Helly

En la figura anterior se ilustra el Teorema de Helly para una familia  $C$  de cuatro conjuntos en el plano el cual está constituida por los conjuntos:

$$C_1 := \{A, B, D, E, F\} \quad , \quad C_2 := \{B, C, D, F, G\} \quad ,$$

$$C_3 := \{A, B, C\} , C_4 := \{B, D\} .$$

La intersección de tres ( $n + 1 = 3$ ) de estos conjuntos es no vacía. En efecto:

$$C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \{B\} , C_1 \cap C_2 \cap C_4 = \{B, D\} ,$$

$$C_1 \cap C_3 \cap C_4 = \{B\} , C_2 \cap C_3 \cap C_4 = \{B\} .$$

Entonces el Teorema de Helly garantiza que  $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \neq \emptyset$ . En este caso esa intersección es igual a  $\{B\}$ .

En la Figura 1.14 se considera una familia  $\mathcal{C}$  de tres conjuntos, tales que la intersección de dos de ellos es no vacía.

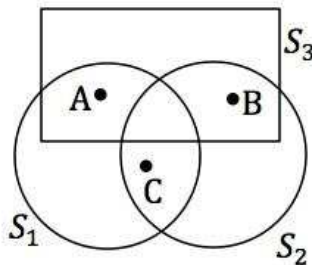


Figura 1.14: La intersección de  $A$ ,  $B$  y  $C$  es vacía

En este caso la familia  $\mathcal{C}$  está constituida por los tres conjuntos:

$$S_1 := \{A, C\} , S_2 := \{B, C\} , S_3 := \{A, B\} .$$

La intersección de dos cualesquiera de ellos es no vacía y la intersección de los tres si lo es. Este ejemplo muestra que la condición “ $n + 1$ ” en el Teorema de Helly no se puede debilitar.

- Sean  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  funciones convexas y consideremos la familia de desigualdades:

$$D : f_1(x) < 0, \dots, f_k(x) < 0, f_{k+1}(x) \leq 0, \dots, f_m(x) \leq 0 .$$

Demostrar que si todo sistema de  $n + 1$  desigualdades del sistema  $D$  tiene solución, entonces el sistema  $D$  también tiene solución.

Existe otro teorema que tiene mucha relación con este tema, conocido como Teorema de Radon (Ver [217]).

**Teorema 1.10.3** (Teorema de Radon). *Para cualquier subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  con  $n + 2$  elementos, se puede construir una partición de dos conjuntos  $A$  y  $B$ , tales que*

$$\text{Conv } A \cap \text{Conv } B \neq \emptyset.$$

Observemos que si consideramos tres ( $3 < n + 2$ ) puntos colineales en  $\mathbb{R}^2$ , entonces si  $A$  está conformado con dos de esos puntos y  $B$  con el tercero, necesariamente  $\text{Conv } A \cap \text{Conv } B = \emptyset$ . Con este ejemplo constatamos que la condición “ $n + 2$  elementos” del Teorema de Radon, no puede debilitarse.

Una relación interesante de estos tres teoremas es que cualquiera de los tres se deduce de los otros dos (ver [65]). En [65] están las demostraciones de estos tres teoremas.

La Figura 1.15 ilustra el Teorema de Radon para dos conjuntos de 4 puntos en el plano.

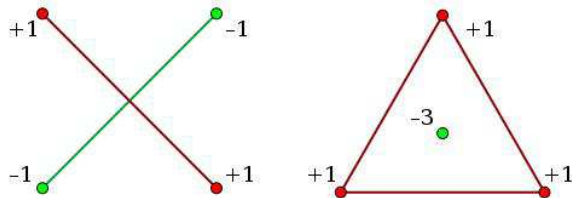


Figura 1.15: Teorema de Radon

## Capítulo 2

# Otros Conceptos de Convexidad.

Este capítulo lo dedicamos a estudiar algunas “variantes” del concepto de función convexa, que han conducido a nuevas definiciones y que se han desarrollado desde 1905-06 cuando L. W. Jensen realizó el estudio del concepto clásico de función convexa en [131, 132].

Por supuesto, hay varias opciones que podemos seguir para modificar el concepto dado en la Definición 1.1.1 para funciones  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , como enumeramos a continuación.

1. Cambiar el dominio de la función  $f$ . Algunas opciones pueden ser sustituir el intervalo  $I$  por un subconjunto convexo  $D \subset \mathbb{R}^n$  o por un subconjunto convexo de un espacio vectorial o normado. De hecho en el Capítulo 1 tratamos estas situaciones.
2. Cambiar el rango  $\mathbb{R}$  de la función  $f$ . Por ejemplo podemos considerar un espacio vectorial  $\mathbb{Y}$ . Sin embargo, para que tenga sentido la Desigualdad (1.1) es necesario que en  $\mathbb{Y}$  tengamos definido un orden. Un caso particular de esta situación es el conjunto de partes  $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$  de un espacio vectorial  $\mathbb{Z}$ .
3. Alteraciones la Desigualdad (1.1).
4. Hacer combinaciones de las opciones anteriores.

Básicamente en este capítulo nos dedicaremos al punto 3. presentando algunos resultados importantes en cada caso.

## 2.1 Funciones Midconvexas

En 1905 J. W. Jensen [131] introduce el concepto de función midconvexa (también se conoce como convexa en el punto medio o Jensen-convexa).

El libro escrito por el polaco Marek Kuczman en 1985 [146] contiene un excelente material sobre el tópico que tratamos en esta sección.

**Definición 2.1.1.** *Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es midconvexa si*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x, y \in I. \quad (2.1)$$

Si la desigualdad (2.1) se verifica en sentido contrario se dice que la función  $f$  es midcóncava.

Por supuesto, la definición anterior la podemos considerar para funciones  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  o más general  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Es claro que toda función convexa es midconvexa. Basta considerar  $t = \frac{1}{2}$  en la Desigualdad (1.1). Sin embargo es legítimo preguntarse cuáles son las condiciones que debe cumplir un función midconvexa para que sea convexa.

Un resultado interesante en esta dirección es el siguiente.

**Teorema 2.1.1.** *Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función midconvexa, entonces*

- a.  $f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in I.$
- b.  $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad t \in \mathbb{Q}, x, y \in I.$

*Demostración.* Ver [146, 224] □

De la parte b. del Teorema 2.1.1 se obtiene que toda función midconvexa continua es convexa y por tanto cumplen las propiedades estudiadas en el Capítulo 1.

El siguiente Teorema asegura que una función midconvexa es localmente acotada en un conjunto abierto y convexo si es acotada por arriba en un punto del conjunto.

**Teorema 2.1.2.** Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y convexo y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  midconvexa.

a. Si  $f$  es localmente acotada por arriba (abajo) en un punto de  $D$ , entonces es localmente acotada por arriba (abajo) en  $D$ .

b. Si  $f$  es localmente acotada por arriba en un punto de  $D$ , entonces es localmente acotada en  $D$ .

*Demostración.* Ver [146] p.148-150 o [223] . □

El Teorema 1.8.1 asegura que toda función convexa es continua en el interior de su dominio. Esta situación no ocurre con las funciones midconvexas.

De hecho si consideramos una función aditiva discontinua  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces la función

$$f(x) = \exp a(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

es midconvexa y discontinua.

La demostración de la existencia de una función aditiva discontinua fue un problema abierto por muchos años y fue resuelto en 1905 por el matemático alemán Georg Hamel en [109]. En las p.129-130 de [146] Marek Kuczman expone este resultado. También se puede revisar [224].

Otro problema de interés es determinar que condiciones debe cumplir una función midconvexa para que sea continua. El siguiente Teorema aclara esta situación y fue demostrado por los alemanes Felix Bernstein y Gustav Doetsch en 1915 [32].

**Teorema 2.1.3** (Teorema Bernstein-Doetsch). Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y convexo y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  midconvexa. Si  $f$  es localmente acotada por arriba en un punto de  $D$ , entonces  $f$  es continua en  $D$ .

*Demostración.* Ver [146] p.155-157 donde se presentan tres demostraciones de este resultado. □

Como consecuencia de este Teorema tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.1.1.** *Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y convexo y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  midconvexa. Entonces  $f$  es continua en  $D$  o es discontinua en todos los puntos de  $D$ .*

Otros resultados que garantizan la continuidad de una función midconvexa fueron demostrados en el siglo XX.

En el año 1920, Waclaw Sierpiński en [237] demuestra el siguiente resultado para funciones  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Teorema 2.1.4** (Teorema de Blumberg-Sierpiński). *Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y convexo y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  midconvexa. Si  $f$  es medible, entonces  $f$  es continua en  $D$ .*

En [223] A. W. Robert y D. E. Varberg señalan que aparentemente este resultado fue demostrado por H. Blumberg en 1919 [36]. La misma afirmación se hace en [190]. Sin embargo, la demostración hecha por W. Sierpiński [237] es un resultado independiente.

En el año 1929 el ucraniano Alexander Ostrowski demuestra en [199] el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.5** (Teorema de Ostrowski). *Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  midconvexa. Si  $f$  es acotada por arriba en  $D$  y la medida de Lebesgue de  $D$  es positiva, entonces  $f$  es continua en  $D$ .*

Las demostraciones de los Teoremas 2.1.4 y 2.1.5 pueden revisarse en [146, 224]. Otros resultados que garantizan la continuidad de una función midconvexa son mencionados en las p. 220-221 de [223] y los resumimos en el siguiente Teorema.

**Teorema 2.1.6.** *Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  midconvexa. Entonces  $f$  es continua y por tanto convexa si*

a.  *$f$  es acotada por arriba en un conjunto  $M$  tal que la medida  $m_*(M + M) > 0$ . (S. Kurepa 1956 [149]).*

b.  *$f$  es acotada por arriba en un conjunto  $M$  tal que para algún entero positivo  $n$ ,  $m_* \left( \sum_{k=1}^n M \right) > 0$ . (J. H. B. Kemperman 1957 [138], S. Marcus 1957 [160, 161]).*

*c.  $f$  es acotada por arriba en un conjunto  $M$ , tal que*

$$m_* \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} M \right) > 0.$$

*(M. Kuczman 1959).*

*d.  $f$  es acotada por arriba en un conjunto de segunda categoría (Mehdi 1964).*

*e.  $f$  es acotada por arriba en un conjunto  $M$ , tal que toda función aditiva acotada por arriba en  $M$  es continua (M. Kuczman 1970).*

En [92] R. Ger hace algunas observaciones sobre estos resultados. En el año 1984 el profesor polaco Kazimierz Nikodem [192] propone el siguiente problema.

Sean  $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones midconvexa y midcóncava, respectivamente, tales que  $f \leq g$  en  $D$ . ¿Existen funciones  $a, h : D \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  aditiva tal que  $f = h + a$ ?

En el año 1988, el matemático C. T. Ng [186] resuelve este problema como se muestra en el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.7.** *Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y convexo y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

*a.  $f$  es midconvexa y localmente acotada por arriba por una función midcóncava en un punto de  $D$ .*

*b.  $f = g + a$  en  $D$ , donde  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa y  $a$  es un función aditiva.*

*c.  $f$  es midconvexa y es localmente acotada por arriba en cada punto de  $D$  por una función afín.*

## 2.2 Funciones $t$ -Convexas.

El concepto de función midconvexa (Definición 2.1.1) se refiere a aquellas funciones  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  que verifican la desigualdad

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad x, y \in I,$$

para  $t = \frac{1}{2}$ .

Pero en lugar de tomar este valor de  $t$ , es natural plantearse la misma definición para un valor de  $t$  fijo en  $(0, 1)$ , como se expone en la siguiente definición.

**Definición 2.2.1.** Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es  $t$ -convexa si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad x, y \in I, \quad (2.2)$$

donde  $t$  es un número fijo del intervalo  $(0, 1)$ .

Por supuesto, toda función convexa es  $t$ -convexa para todo  $t \in (0, 1)$ , pero el recíproco no necesariamente es cierto.

En el año 1984 N. Kuhn [147] demuestra que toda función  $t$ -convexa para algún  $t \in (0, 1)$  es  $t$ -convexa para todo  $t \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ .

A continuación exponemos la demostración dada en [66] por Zoltán Daróczy y Zsolt Páles en el año 1987.

**Teorema 2.2.1** (Teorema de Kuhn). Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $t$ -convexa para algún  $t \in (0, 1)$  entonces es midconvexa y por tanto  $r$ -convexa para  $r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ .

*Demostración.* Sean  $x, y \in D$ , entonces

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(t\left(t\frac{x+y}{2} + (1-t)x\right) + (1-t)\left(ty + (1-t)\frac{x+y}{2}\right)\right) \\ &\leq tf\left(t\frac{x+y}{2} + (1-t)x\right) + (1-t)f\left(ty + (1-t)\frac{x+y}{2}\right) \\ &\leq (t^2 + (1-t)^2)f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2t(1-t)\frac{f(x) + f(y)}{2}. \end{aligned}$$

De donde resulta que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad x, y \in D.$$

□

Este resultado nos permite afirmar que las funciones  $t$ -convexas tienen las mismas propiedades que las funciones midconvexas que hemos reseñado en la sección anterior.

## 2.3 Funciones Cuasi Convexas.

Esta sección la dedicamos al estudio de algunas propiedades de las funciones cuasi convexas, que son utilizadas en problemas de investigación de operaciones, programación cuasi convexa, teoría de juegos, organización industrial, teoría general de equilibrio, modelos de toma de decisiones, etc. En [53, 70, 90, 155, 177] se hace un estudio extenso de este tema.

Algunas propiedades de estas funciones y una variedad de ejemplos de ellas están desarrolladas en libro de S. Boyd y L. Vandenberghe [41] y en una revisión que hacen de este tema H. J. Greenber y W. P. Pierskalla en [101].

**Definición 2.3.1.** Una función  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es **cuasi convexa** si

$$f(tx + (1-t)y) \leq \max \{f(x), f(y)\}, \quad t \in (0, 1). \quad (2.3)$$

*Y  $f$  es cuasi cóncava si*

$$f(tx + (1-t)y) \geq \max \{f(x), f(y)\}, \quad t \in (0, 1). \quad (2.4)$$

**Observación 2.3.1.**

- a. De la Definición 2.3.1 tenemos que una función es cuasi convexa si y sólo si  $-f$  es cuasi cóncava.
- b. La Desigualdad (2.3) afirma que  $f$  es cuasi convexa si el máximo de  $f$  en cada segmento lo alcanza en los extremos del mismo.
- c. Toda función convexa o monótona es cuasi convexa.

**Ejemplo 2.3.1.** La siguiente función es cuasi convexa y no es convexa ni monótona (Ver Figura 2.1).

$$f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & , \quad -2 \leq x < 0 \\ x^2 & , \quad 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

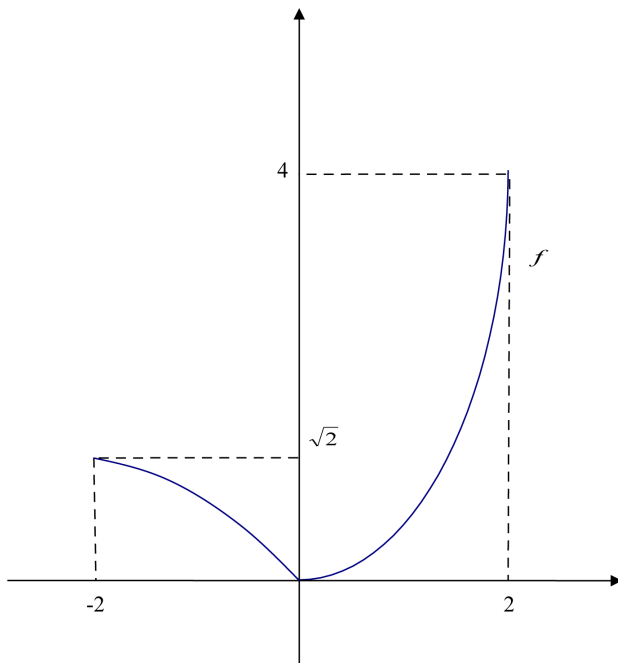


Figura 2.1:  $f$  es cuasi convexa y no es convexa ni monótona.

**Ejemplo 2.3.2.** La siguiente función es monótona, cuasi convexa y no es convexa porque tiene una discontinuidad en el interior de su dominio (Ver Figura 2.2).

$$f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , 0 \leq x < 1 \\ 2x & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

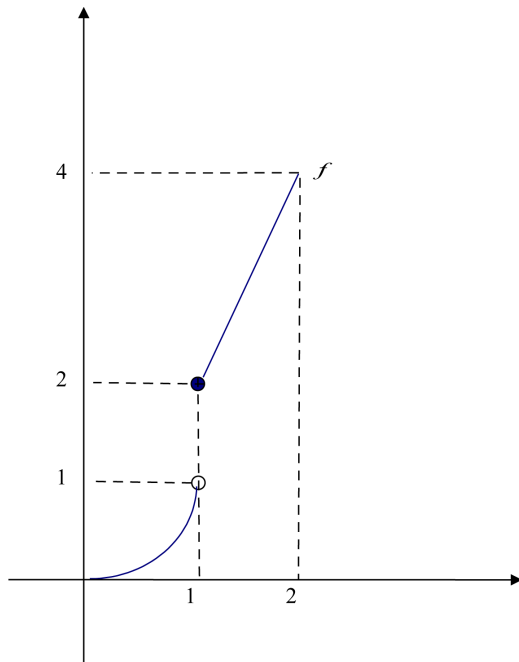


Figura 2.2:  $f$  es cuasi convexa, monótona y no es convexa.

Es importante hacer referencia al trabajo de A. Guerraggio y E. Molho publicado en [103] en el año 2004, donde realizan un estudio de los orígenes del concepto de cuasi convexidad.

Guerraggio y Molho señalan que:

“Tradicionalmente el concepto de cuasi convexidad se le atribuye a Bruno de Finetti por su publicación del año 1949 [87] donde utiliza estas funciones y a Werner Fenchel quien en [86] emplea por primera vez la denominación de cuasi convexa. Sin embargo, una formalización apareció 20 años antes en una famosa obra sobre teoría de juegos, donde se plantea el denominado Teorema de Minimax, publicada en 1928 por el húngaro John von Neumann [184]. Uno de los grandes matemáticos del siglo XX, quien realizó contribuciones en distintas ramas de la Matemática y Física.”

En el siguiente resultado se expone una caracterización de las funciones cuasi convexa en términos de los conjuntos de nivel.

**Proposición 2.3.1.** *Una función  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es cuasi convexa si y sólo si*

$$f^{-1}(-\infty, \alpha] = \{x : f(x) \leq \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

*es un conjunto convexo.*

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es cuasi convexa y sean  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $x, y \in L_\alpha(f) = \{x : f(x) \leq \alpha\}$ , entonces

$$f(tx + (1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq \alpha, \quad t \in (0, 1).$$

Así resulta que  $L_\alpha(f)$  es convexo.

Recíprocamente, asumamos que  $L_\alpha(f)$  es convexo para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  y consideremos  $x, y \in \mathbb{X}$ , entonces  $x, y \in L = L_{\max\{f(x), f(y)\}}(f)$ , luego  $tx + (1-t)y \in L$ ,  $t \in (0, 1)$ . De donde resulta que  $f$  es cuasi convexa.  $\square$

Para una función  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , los conjuntos  $L_\alpha(f)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  se denominan **conjuntos de nivel**.

**Ejemplo 2.3.3.** Conjunto de nivel de la función  $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$ .

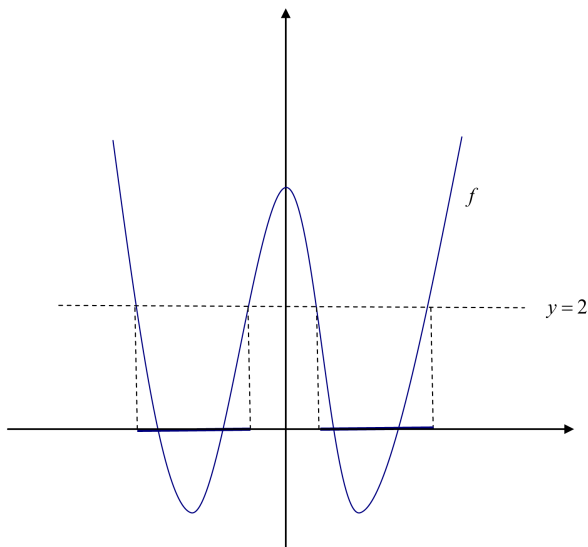


Figura 2.3:  $L_2(f)$  no es convexo

**Ejemplo 2.3.4.**

$$f : B(0, 4) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) := \begin{cases} x^2 + y^2 & , \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4 & , \quad 0 < y \\ 2 & , \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 & , \quad y \leq 0 \\ x^2 + y^2 & , \quad 2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4 & , \quad y \leq 0 \end{cases} .$$

Esta función no es continua en el segmento que une los puntos  $(\sqrt{2}, 0)$  y  $(-\sqrt{2}, 0)$  y por lo tanto no es convexa, pero es cuasi convexa y los conjuntos de nivel de  $f$  son

$$L_\alpha(f) = \begin{cases} \emptyset & , \quad \alpha < 0 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \alpha, y > 0\} & , \quad 0 \leq \alpha < 2 \\ \frac{B(0, \alpha)}{B(0, \alpha)} & , \quad \alpha \geq 2 \end{cases} .$$

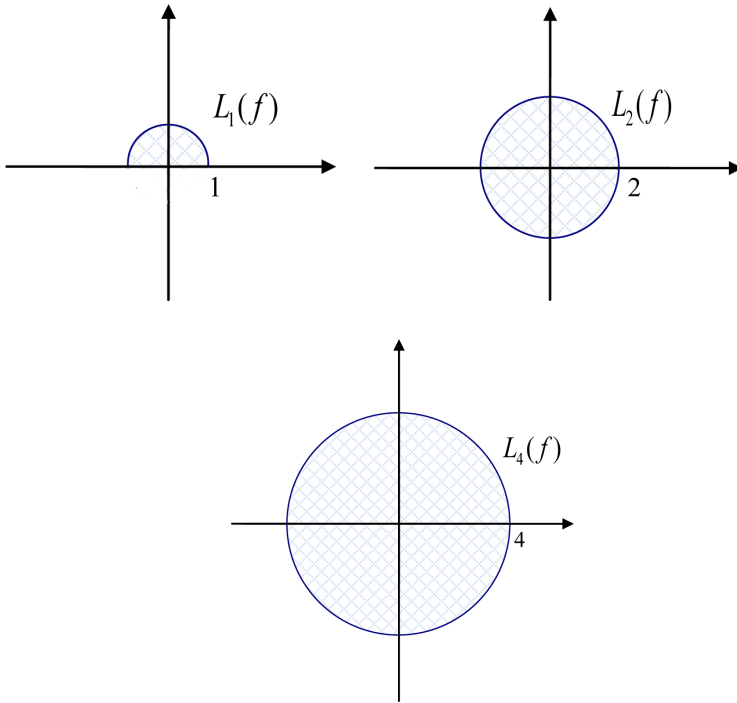


Figura 2.4:  $L_1(f)$ ,  $L_2(f)$  y  $L_4(f)$ .

Otro resultado de interés es la siguiente caracterización de las funciones cuasi convexa diferenciables, demostrado por uno de los premios Nobel de economía del año 1972, K. J. Arrow y A. C. Enthoven en [14].

**Teorema 2.3.1.** Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y convexo y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable,  $f$  es cuasi convexa si y sólo si

$$f(y) - f(x) \leq 0, x, y \in D \Rightarrow \nabla f(x)(y - x) \leq 0.$$

*Demostración.* Ver [53, 223].

□

En el caso en que una función cuasi convexa sea dos veces diferenciables se tienen los siguientes resultados.

**Proposición 2.3.2.** *Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y convexo. Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función dos veces diferenciable.  $f$  es cuasi convexa si y sólo si*

$$u^t \nabla f(x) = 0, x \in D, u \in \mathbb{R}^n \implies u^t H_f(x) u \geq 0$$

donde  $H_f(x)$ ,  $x \in D$  es la matriz Hessiana de  $f$  en  $x$ . Además esta matriz tiene un autovalor positivo.

Por otra parte, si consideramos la matriz *Hessiana Orlada*

$$\bar{H}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \nabla f(x) \\ (\nabla f(x))^t & H_f(x) \end{pmatrix}$$

y denotamos  $|\bar{H}_k(x)|$  los menores de orden  $k = 1, \dots, n$ , de la matriz  $\bar{H}(x)$ ; tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.3.** *Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y convexo y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función dos veces diferenciable. Si  $f$  es cuasi convexa, entonces  $|\bar{H}_k(x)| \leq 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ .*

*Demostración.* Las demostraciones de estas últimas proposiciones pueden verse en [53].

□

A continuación presentamos la traducción de un cuadro comparativo de las propiedades de las funciones convexas y cuasi convexas, tomado de [223], donde hemos hecho algunos pequeños cambios.

Convexidad	Cuasi convexidad
1a. $f$ es convexa $\Leftrightarrow \text{epi}(f)$ es un conjunto convexo.	1b. $f$ es cuasi convexa $\Leftrightarrow L_\alpha$ es un conjunto convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2a. $f$ es continua en $\overset{\circ}{D}$ .	2b. $f$ es continua c.t.p. $\overset{\circ}{D}$ .
3a. Existen las derivadas parciales de $\overset{\circ}{D}$ .	3b. Existen las derivadas parciales c.t.p. de $\overset{\circ}{D}$ .
4a. Si $f \in C^2$ , $f$ es convexa en $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow H(x)$ es definida no negativa en $\mathbb{R}^n$ .	4b. Si $f \in C^2$ , $f$ es cuasi convexa en $\mathbb{R}_+^n$ , entonces $ \bar{H}_j(x)  \leq 0$ para $j = 1, \dots, n$ . Si $ \bar{H}_j(x)  < 0$ para $j = 1, \dots, n$ entonces $f$ es cuasi convexa en $\mathbb{R}_+^n$ .
5a. $f \in C^1$ , $f$ es convexa en $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)(y - x)$ .	5b. $f \in C^1$ , $f$ es cuasi convexa en $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow f(y) \leq f'(x)(y - x) \leq 0$ .
6a. $\sup_{x \in D} f(x) = \sup_{x \in E} f(x)$ si $D$ es compacto y $E$ son puntos extremos.	6b. $\sup_{x \in D} f(x) = \sup_{x \in E} f(x)$ si $D$ es compacto y $E$ son puntos extremos.
7a. Todo mínimo local es un mínimo global.	7b. Todo mínimo local es un mínimo global o $f$ es constante en una vecindad del punto mínimo local.
8a. El conjunto de los puntos de mínimos globales es convexo.	8b. El conjunto de los puntos de mínimos globales es convexo.
9a. Las condiciones de restricción de Karush-Kuhn-Tucker se satisfacen para	9b. Las condiciones de restricción de Karush-Kuhn-Tucker se satisfacen para
$\{x : g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\}$	$\{x : g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\}$
si existe $x$ tal que $g_j(x) < 0, j = 1, \dots, m$ .	si $\nabla g_j(x) \neq 0$ para $j$ tal que $g_j(x) = 0 j = 1, \dots, m$ .

Convexidad	Cuasi convexidad
10a. $f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$ , $\lambda \in [0, 1]$ si $f(0) \leq 0$ .	10b. $f(\lambda x) \leq f(x)$ , $\lambda \in [0, 1]$ si $f(x) \geq f(0)$ .
11a. $g(\lambda) = f(\lambda x)/\lambda$ es creciente, $\lambda > 0$ si $f(0) = 0$ .	11b. $g(\lambda) = f(\lambda x)$ es creciente, $\lambda > 0$ si $f(x) \geq f(0)$ .
12a. $g(\lambda) = f[\lambda x + (1 - \lambda)y]$ es convexa, $\lambda \in [0, 1]$ para todo $x, y \in \overset{\circ}{D} \Leftrightarrow f$ es convexa.	12b. $g(\lambda) = f[\lambda x + (1 - \lambda)y]$ es cuasi convexa, $\lambda \in [0, 1]$ para todo $x, y \in \overset{\circ}{D} \Leftrightarrow f$ es cuasi convexa.
13a. $g(x) = \sup_{\alpha \in \Gamma} f_{\alpha}(x)$ es convexa.	13b. $g(x) = \sup_{\alpha \in \Gamma} f_{\alpha}(x)$ es cuasi convexa.
14a. $g(x) = F(f(x))$ es convexo si $F$ es convexa y creciente.	14b. $g(x) = F(f(x))$ es cuasi convexa si $F$ es convexa y creciente.

Es importante presentar el siguiente teorema de separación de funciones por funciones cuasi convexas, cuasi cóncavas y monótonas, demostrado en el año 1996 por W. Förg-Rob, K. Nikodem y Z. Páles en [88].

**Teorema 2.3.2.** Sean  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

- a. Existe una función monótona  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f \leq h \leq g$ .
- b. Existen funciones  $h_1, h_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_1$  cuasi cóncava y  $h_2$  cuasi convexa, tales que
 
$$f \leq h_1 \leq g \quad , \quad f \leq h_2 \leq g.$$
- c. Existen funciones  $h_1, h_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_1$  cuasi cóncava y  $h_2$  cuasi convexa, tales que  $f \leq h_1 \leq h_2 \leq g$ .

d. Para cada  $x, y \in I$ ,  $t \in [0, 1]$  se verifican las siguientes desigualdades:

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \max \{g(x), g(y)\},$$

$$\min \{f(x), g(y)\} \leq g(tx + (1 - t)y).$$

Otra situación interesante es considerar la siguiente definición (Ver [194]).

**Definición 2.3.2.** Sean  $t \in (0, 1)$  y  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  es  $t$ -cuasi convexa si

$$f(tx + (1-t)y) \leq \max \{f(x), f(y)\}.$$

En relación a este concepto K. Nikodem y M. Nikodem [194] demuestran un Teorema tipo Kuhn, que enunciamos a continuación.

**Teorema 2.3.3.** Sea  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  una función estrictamente  $t$ -cuasi convexa para algún  $t \in (0, 1)$ . Entonces:

a.  $f$  es  $\frac{1}{2}$ -cuasi convexa.

b.  $f$  estrictamente  $t$ -cuasi convexa,  $t \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ .

Además demuestran que la condición estrictamente  $t$ -cuasi convexa no puede sustituirse por  $t$ -cuasi convexidad, considerando la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x = \frac{k}{3^n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 1 & , \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La cual es  $\frac{1}{3}$ -cuasi convexa y no es  $\frac{1}{2}$ -cuasi convexa.

### 2.3.1 Funciones Pseudo-Convexas.

En esta sección presentamos el concepto de función pseudo-convexa, introducido por O. L. Mangasarian en [158] en el año 1969.

**Definición 2.3.3.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y abierto. Una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable es **pseudo-convexa** si

$$f(y) < f(x) \quad x, y \in D, \quad x \neq y \implies \nabla f(x)(y - x) < 0.$$

#### Observación 2.3.2.

a. De acuerdo al Teorema 2.3.1 es claro que toda función cuasi convexa es pseudo-convexa. En realidad las funciones pseudo-convexas son las funciones cuasi convexas diferenciables.

b. De manera similar a como hemos hecho para los casos de funciones cóncavas y cuasi cóncavas, una función es pseudo-cóncava si  $-f$  es pseudo-convexa.

En las siguientes proposiciones presentamos un resumen de algunas propiedades de las funciones pseudo convexas.

**Proposición 2.3.4.** Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y abierto y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  un función pseudo-convexa.

a. Si  $x$  es un punto crítico de  $f$ , entonces  $x$  es mínimo global.

b. Si  $\nabla f(x) \neq 0$ ,  $x \in D$ , entonces  $f$  es cuasi convexa.

*Demostración.* Ver [53]. □

**Observación 2.3.3.** La parte a. de esta proposición asegura que para determinar los puntos donde una función pseudo-convexa alcanza su valor mínimo absoluto debemos resolver la ecuación  $\nabla f(x) = 0$ .

**Proposición 2.3.5.** Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y abierto y  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ , tales que  $g(x) > 0$ ,  $x \in D$ . Sea  $z : D \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $z(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ,  $x \in D$ . Entonces si se verifica cualquiera de las siguientes condiciones, la función  $z$  es pseudo-convexa.

a. Si  $f$  es convexa y  $g$  es afín.

b. Si  $f$  es convexa no negativa y  $g$  es positiva y cóncava.

*Demostración.* Ver [53]. □

Para algunas aplicaciones de estos conceptos en el campo de la economía puede revisarse [53].

### 2.3.2 Función Invex.

El Teorema 1.8.1 garantiza que si  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D$  abierto y convexo) es diferenciable en  $D$ , entonces

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)(y - x), \quad x, y \in D.$$

La idea de este resultado fue considerada en los años 1981 y 1984 por M. A. Hanson y B. Mond [107, 108] para introducir la siguiente definición.

**Definición 2.3.4.** Una función  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable es denominada **invex** respecto a la función  $\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x) \cdot \eta(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

**Observación 2.3.4.** Según el Teorema 1.8.1 toda función convexa diferenciable  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función invex respecto a  $\eta(x, y) = y - x$ ,  $x, y \in D$ .

La denominación función invex fue dada por B. D. Craven en 1981 en [61].

**Teorema 2.3.4** (Ver [97]). Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función invex, entonces todo punto crítico de  $f$  es un máximo global.

En el año 2008, G. Giordi y S. Mishar [97] escriben un libro donde se estudia de manera amplia estas funciones. Ambos investigadores tienen varias publicaciones sobre este tema. Algunos trabajos de este tema y sobre funciones preinvex y conjuntos invex se pueden revisar en [29, 73, 98, 178, 179, 203, 215, 257].

### 2.3.3 El Problema KKT.

A pesar de que durante muchos años se habían tratado problemas de optimización en los que se requiere maximizar o minimizar funciones sujetas a ciertas restricciones, el término Programación Lineal fue utilizado por primera vez en 1951 por W. Kuhn y A. W. Tucker en [148] donde estudian las condiciones que debe cumplir las soluciones del problema

$$P : \text{mín } f(x), \quad x \in S = \{x \in U \subset \mathbb{R}^n : g_k(x) \leq 0, k = 1, \dots, m\},$$

donde  $f, g_k : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k = 1, \dots, m$ . El conjunto  $S$  se denomina conjunto de *soluciones factibles*. Si  $x \in S$ , denotamos por  $I(x) = \{k = 1, \dots, m : g_k(x) = 0\}$ .

Si las funciones  $f, g_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  son lineales se dice que el problema  $P$  es un problema de Programación Lineal y si son convexas de Programación Convexa; y otras denominaciones dependiendo de las características de esas funciones.

En el año 1939 W. Karush [136] obtuvo un resultado en relación a la solución del problema  $P$ . El cual también fue obtenido 12 años después, independientemente por W. Kuhn y A. W. Tucker [148]. En 2012, R. W. Cottle [60] hace una reseña histórica de este tema y presenta una biografía de W. Karush. El resultado del Problema KKT (Karush-Kuhn-Tucker) lo enunciamos en el siguiente Teorema.

**Teorema 2.3.5** (Problema KKT). *Supongamos que  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto,  $x$  una solución factible del problema  $P$ , las funciones  $f, g_k, k \in I(x)$  son diferenciables en  $x$  y que  $g_k, k \notin I(x)$  son continuas en  $x$ . Si  $x$  es un mínimo local de  $P$ , existen números  $\lambda_k \geq 0, k \in I(x)$ , tales que*

$$\nabla f(x) + \sum_{k \in I(x)} \lambda_k \nabla g_k(x) = 0. \quad (2.5)$$

De esta manera tenemos que las posibles soluciones del problema  $P$  están entre las soluciones de la ecuación (2.5).

A continuación formulamos una versión del Teorema 2.3.5 cuando la función  $f$  es pseudo-convexa y las funciones  $g_k, k = 1, \dots, m$  son cuasi convexas.

**Teorema 2.3.6.** *Supongamos que  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto y convexo,  $x$  una solución factible del problema  $P$ ,  $f$  es pseudo-convexa en  $x$  y que  $g_k, k = 1, \dots, m$  son cuasi convexas en  $x$ . Si existen  $\lambda_k \geq 0, k = 1, \dots, m$ , tales que*

$$\nabla f(x) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \nabla g_k(x) = 0 \quad , \quad \lambda_k g_k(x) = 0, k = 1, \dots, m,$$

*entonces  $x$  es una solución del problema  $P$ .*

Hay una versión similar del Teorema 2.3.6 si las funciones  $f, g_k, k = 1, \dots, m$  son funciones invex.

La demostración de este resultado y de los Teoremas 2.3.5 y 2.3.6 pueden verse en [53].

## 2.4 Funciones $k$ -Convexas.

**Definición 2.4.1** (Diferencias Divididas. ver [51, 129]). *Dada una función  $f : S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dados  $x_1, \dots, x_{k+1}$  puntos distintos de  $S$  se definen*

las **diferencias divididas** de orden  $0, 1$  y  $k \in \mathbb{N}$ , respectivamente, como

- $f[x_1] := f(x)$  - orden  $0$  -
- $f[x_1, x_2] := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  - orden  $1$ -
- $f[x_1, \dots, x_{k+1}] := \frac{f[x_2, \dots, x_{k+1}] - f[x_1, \dots, x_k]}{x_{k+1} - x_k}$  - orden  $k$  -

Algunos autores usan la notación  $Q_k(f, x_1, \dots, x_{k+1})$  para denotar la diferencia dividida  $f[x_1, \dots, x_{k+1}]$ . En la siguiente proposición exponemos algunas propiedades de las diferencias divididas.

**Proposición 2.4.1** (Ver [51, 129]). Sean  $f, g : S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  y  $x_1, \dots, x_{k+1}$  puntos distintos de  $S$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$a. f[x_1, \dots, x_{k+1}] = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} (x_j - x_i)}.$$

b. El valor de  $f[x_1, \dots, x_{k+1}]$  es independiente del orden en que se tomen los puntos  $x_1, \dots, x_{k+1}$ .

$$c. (u + \alpha v)[x_1, \dots, x_{k+1}] = u[x_1, \dots, x_{k+1}] + \alpha v[x_1, \dots, x_{k+1}].$$

d. Si  $S = [a, b]$  y  $f \in C^k[a, b]$ , existe  $\xi$  combinación convexa de los puntos  $x_1, \dots, x_{k+1}$ , tal que

$$f[x_1, \dots, x_{k+1}] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}.$$

**Observación 2.4.1.** Utilizando la definición de diferencias divididas obtenemos que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces

a.  $f[x] \geq 0$ ,  $x \in [a, b]$  si y sólo si  $f$  es no negativa en  $[a, b]$ .

b.  $f[x, y] \geq 0$ ,  $x, y \in [a, b]$ ,  $x \neq y$  si y sólo si es creciente en  $[a, b]$ .

c.  $f[x, y, z] = \frac{f(x)}{(x-z)(x-y)} + \frac{f(y)}{(z-y)(z-x)} + \frac{f(z)}{(y-x)(y-z)} \geq 0$ , donde  $x, y, z$  son puntos distintos de  $[a, b]$  si y sólo si  $f$  es convexa (ver Proposición 1.1.1).

**Observación 2.4.2.** En virtud de la parte c. de la observación anterior, T. Popoviciu [214] introduce el concepto de función  $k$ -convexa.

**Definición 2.4.2.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es  $k$ -convexa ( $k \in \mathbb{N}$ ) si  $f[x_1, \dots, x_{k+1}] \geq 0$ , para cualquier colección de  $k + 1$  puntos  $x_1, \dots, x_{k+1} \in [a, b]$ .

De acuerdo a esta Definición y la Observación 2.4.1 Las funciones 2-convexas son las funciones convexas, las 1-convexas son las funciones crecientes y las 0-convexas son las funciones no negativas.

En el año 1881, el matemático francés C. Jordan [133] introduce el concepto clásico de variación de una función, como sigue.

**Definición 2.4.3** (Variación). Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tiene **variación acotada** si

$$V(u; [a, b]) := \sup_{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \infty,$$

donde el supremo se considera sobre las particiones  $\pi : a = x_1 < \dots < x_n = b$  del intervalo  $[a, b]$ .

El espacio vectorial de estas funciones es denotado por  $BV[a, b]$ .

El concepto de variación dado por Jordan ha sido generalizado en muchas direcciones. En la introducción de [220] se hace una exposición de muchas de las generalizaciones hasta la fecha.

P. S. Bullen [46] demuestra que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es  $k$ -convexa si y sólo si para cada  $k + 1$  puntos de  $[a, b]$ , la gráfica de  $f$  se alterna por arriba y por abajo del gráfica del único polinomio de grado  $k$  que pasa por esos puntos, entre los intervalos consecutivos que generan dichos puntos.

En 1908, Charles Jean de la Vallée Poussin en [69] generaliza el concepto de variación de Jordan de la manera siguiente.

**Definición 2.4.4** (Segunda Variación). Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tiene **segunda variación acotada** en el sentido de la Vallée Poussin si

$$V_2(u; [a, b]) := \sup_{\pi} \sum_{k=1}^{n-2} \left| \frac{f(x_{k+2}) - f(x_{k+1})}{x_{k+2} - x_{k+1}} - \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \right| < \infty,$$

donde el supremo se considera sobre las particiones  $\pi$  del intervalo  $[a, b]$ .

El espacio vectorial de estas funciones es denotado por  $BV_2[a, b]$ .

Estas funciones son las funciones que tiene derivada en “forma discreta” con variación acotada.

En 1911 F. Riesz [219] demuestra que:

$$u \in BV_2[a, b] \iff \exists v \in BV[a, b] \ni u(t) = u(a) + \int_a^t v(t) dt.$$

En 1950, A. D. Aleksandrof [6] estudia el espacio vectorial  $BC[a, b]$  de las funciones que se descomponen como diferencia de funciones convexas que tienen derivadas laterales en  $a$  y  $b$  finita.

No es difícil demostrar que las funciones de  $BC[a, b]$  se pueden representar mediante una integral indefinida (Ver [223]). De esta manera queda establecido que

$$BC[a, b] \subset BV_2[a, b].$$

Los conceptos de variación y segunda variación fueron generalizados por el matemático rumano T. Popoviciu [213, 214] como sigue.

**Definición 2.4.5** (*k*-Variación). *Dado un número entero  $k \geq 1$ , una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tiene **k-variación acotada** en el sentido de Popoviciu si*

$$V_k(u; [a, b]) := \sup_{\pi} \sum_{k=1}^{n-2} |f[x_2, \dots, x_{k+1}] - f[x_1, \dots, x_k]| < \infty,$$

donde el supremo se toma sobre las particiones  $\pi$  del intervalo  $[a, b]$ .

El espacio vectorial de estas funciones es denotado por  $BV_k[a, b]$ .

Estos tres espacios tienen una estructura de álgebra de Banach [?, 231], con la norma

$$\|f\|_k := |f(a)| + |f'_+(a)| + \dots + |f_+^{(k-1)}(a)| + V_k(f; [a, b]), \quad f \in B_k[a, b].$$

Las funciones de estos espacios se han caracterizado por un teorema tipo *Descomposición de Jordan* como se muestra a continuación.

**Teorema 2.4.1.** *Dado un número entero  $k \geq 1$  y  $f \in B_k[a, b]$ , entonces*

*a. Si  $k = 1$ ,  $f$  se puede descomponer como diferencia de dos funciones crecientes (C. Jordan [133]).*

*b. Si  $k > 1$ ,  $f$  se puede descomponer como diferencia de dos funciones  $k$ -convexas (A. M. Russell. [230]).*

**Observación 2.4.3.**

a. G. Brown [45] considera la Definición 2.4.5 utilizando particiones  $\pi : a = x_1 < \dots < x_n = b$ ,  $x_{k+1} - x_k = h$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$ . Es decir las longitudes de cada subintervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$  es constante y obtiene el resultado de la parte b. del Teorema 2.4.1.

b. A. M. Russell en [229] considera el concepto de segunda variación (Definición 2.4.4) tomando en los denominadores los valores  $u(t_{k+2}) - u(t_{k+1})$ ,  $u(t_{k+1}) - u(t_k)$ , donde  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función creciente y demuestra que estas nuevas funciones se pueden descomponer como diferencia de lo que se denomina funciones  $u$ -convexas, que en el caso particular que  $u$  es la función identidad corresponde a funciones convexas. De esta manera queda establecido que  $BV_2[a, b] = BC[a, b]$ .

### 2.4.1 Funciones $(t_1, \dots, t_k)$ -Convexas.

Inspirados en la definición de  $k$ -convexidad (Definición 2.4.5), en el año 2008 los húngaros A. Gilányi y Z. Páles [96] introducen un nuevo concepto de convexidad.

**Definición 2.4.6** ( $(t_1, \dots, t_k)$ -Convexidad). *Sean  $t_1, \dots, t_k \in (0, \infty)$ .  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es  $(t_1, \dots, t_k)$ -convexa si  $f[x_1, \dots, x_{k+1}] \geq 0$  para cualesquiera  $k + 1$  puntos de  $[a, b]$ , tales que*

$$x_1 := x, x_2 = x + t_1 h, \dots, x_{k+1} = x + (t_1 + \dots + t_k)h, \quad h > 0.$$

*Se dice que  $f$  es cíclicamente  $(t_1, \dots, t_k)$ -convexa si es  $(t_{i_1}, \dots, t_{i_k})$ -convexa, para cualquier permutación cíclica  $(i_1, \dots, i_k)$  de  $\{1, \dots, k\}$ ; y es simétricamente  $(t_1, \dots, t_k)$ -convexa si es  $(t_{i_1}, \dots, t_{i_k})$ -convexa para cualquier permutación  $(i_1, \dots, i_k)$  de  $\{1, \dots, k\}$ .*

**Observación 2.4.4.** Si  $t_1 = \dots = t_k$  las tres definiciones son equivalentes a la Definición 2.4.2. Mientras que una función  $f$  es  $(t)$ -convexa si y sólo  $f$  es cíclicamente o simétricamente  $(t, 1 - t)$ -convexa.

Además tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 2.4.2.** Sean  $k \geq 1$  entero,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $t_1, \dots, t_k$  números positivos y consideremos las posibilidades:

a.  $f$  es  $k$ -convexa.

b.  $f$  es simétricamente  $(t_1, \dots, t_k)$ -convexa.

c.  $f$  es cíclicamente  $(t_1, \dots, t_k)$ -convexa.

d.  $f$  es  $(t_1, \dots, t_k)$ -convexa.

Entonces:  $a. \Rightarrow b. \Rightarrow c. \Rightarrow d.$

A. Gilányi y Z. Páles [96] demuestran el siguiente resultado tipo Kuhn (Ver Teorema 2.2.1).

**Teorema 2.4.2.** Sean  $k \geq 1$  un entero,  $t_1, \dots, t_k$  números positivos y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  es cíclicamente  $(t_1, \dots, t_k)$ -convexa, entonces es simétricamente  $(r_1, \dots, r_k)$ -convexa para números racionales positivos  $r_1, \dots, r_k$ .

## 2.5 $\varepsilon$ -Convexidad.

En el año 1952 D. H. Hyers y S. M. Ulam [128], inspirados, entre otras cosas, en el concepto de función  $\varepsilon$ -aditiva (Ver [146]) consideran un nuevo concepto de convexidad.

De la definición de función convexa tenemos que  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si y sólo si

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) + \varepsilon, \quad x, y \in D, \quad (2.6)$$

para todo  $\varepsilon > 0$ .

Sin embargo, puede que ocurra que la Desigualdad (2.6) se verifique para un número  $\varepsilon > 0$ . Esta situación motiva la siguiente definición dada en [128].

**Definición 2.5.1** ( $\varepsilon$ -Convexidad). Sean  $\varepsilon > 0$  y  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  es  $\varepsilon$ -convexa si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon, \quad x, y \in D, t \in (0, 1).$$

Hyers y Ulam demuestran en [128] la siguiente caracterización de las funciones  $\varepsilon$ -convexas.

**Teorema 2.5.1.** Sean  $\varepsilon > 0$  y  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $\varepsilon$ -convexa.

a. Si  $D$  es abierto, entonces  $f$  es acotada en cada subconjunto cerrado  $C \subset D$ .

b. ( $\varepsilon$ -aproximación) Si  $D$  es abierto, entonces existe una función convexa  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\|f - h\|_\infty < k_n \varepsilon$ , donde  $k_n := \frac{n^2 + 3n}{4n + 4}$ , y  $n$  es la dimensión del espacio donde está contenido el conjunto  $D$ .

*Demostración.* Una prueba de este resultado para el caso unidimensional la hacen en [26] de la manera siguiente (para el caso  $n$ -dimensional se puede ver también [146]).

Supongamos que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $\varepsilon$ -convexa y definamos  $g := f + \varepsilon$ , entonces:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon = tg(x) + (1-t)g(y), \quad x, y \in I.$$

Entonces por el Teorema del Sandwich (Teorema 1.6.1) existe una función convexa  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f \leq h \leq f + \varepsilon$  y así  $\|f - h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ .  $\square$

En [146] M. Kuczma demuestra los siguientes resultados.

**Proposición 2.5.1.** Sean  $\varepsilon > 0$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y convexo y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$   $\varepsilon$ -convexa. Entonces

a.  $f$  es localmente acotada por arriba en  $D$ .

b.  $f$  es acotada en cualquier compacto  $C \subset D$ .

De manera similar a la Definición 2.5.1, para una función  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos considerar los conceptos de

### $\varepsilon$ -midconvexa

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \varepsilon, \quad x, y \in D,$$

para algún  $\varepsilon > 0$ .

### $(\varepsilon, t)$ -convexa

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon, \quad x, y \in D,$$

para algún  $t \in (0, 1)$  y  $\varepsilon > 0$ .

En el caso de funciones  $\varepsilon$ -midconvexas podemos señalar los siguientes resultados.

**Teorema 2.5.2** (C. T. Ng, K. Nikodem 1993 [187]). *Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$   $\varepsilon$ -midconvexa.*

*a. Si  $D$  es abierto y  $f$  localmente acotada por arriba en un punto de  $D$ , entonces  $f$  es  $2\varepsilon$ -convexa.*

*b. Si la frontera de  $D$  no contiene un segmento y  $f$  es acotada por arriba en un punto de  $D$ , entonces  $f$  es  $2\varepsilon$ -convexa.*

### 2.5.1 Funciones $(\varepsilon, \delta)$ -Convexas.

El profesor Zsolt Páles, en el año 2002 en [201], introduce las funciones  $(\varepsilon, \delta)$ -convexas de la manera siguiente.

**Definición 2.5.2** (Funciones  $(\varepsilon, \delta)$ -convexas). *Sean  $\varepsilon, \delta \geq 0$ . Una función  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es  $(\varepsilon, \delta)$ -convexa si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon t(1-t)\|x-y\| + \delta,$$

$x, y \in D, t \in (0, 1)$ .

Por supuesto, toda función convexa es  $(\varepsilon, \delta)$ -convexa para todo par de números  $\varepsilon, \delta \geq 0$ , y toda función  $\delta$ -convexa es  $(0, \delta)$ -convexa.

El resultado más importante y sorprendente de este trabajo [201] es el siguiente teorema.

**Teorema 2.5.3.** *Sean  $\varepsilon, \delta \geq 0$ . Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se puede escribir de la forma  $f = g + l + h$ , donde  $g, l, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g$  convexa,  $h$  acotada con  $\|h\|_\infty \leq \frac{\delta}{2}$  y  $l$  es Lipschitz  $\|l\|_{Lip} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , entonces  $f$  es  $(\varepsilon, \delta)$ -convexa.*

*Recíprocamente, si  $f$  es  $(\delta, \varepsilon)$ -convexa, entonces existen  $g, l, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g$  convexa,  $h$  acotada con  $\|h\|_\infty \leq \frac{\delta}{2}$  y  $l$  es Lipschitz  $\|l\|_{Lip} \leq \varepsilon$ , tal que  $h = g + l + h$ .*

Otro artículo publicado en el año 2004 sobre este tema lo escribieron A. Háyzy y Z Páles [113], cuyos principales resultados lo resumimos a continuación.

**Teorema 2.5.4.** *Sean  $\varepsilon, \delta \geq 0$ ,  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $D \subset \mathbb{X}$  abierto y convexo.*

*a. Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es  $(\varepsilon, \delta)$ -convexa y localmente acotada por arriba en un punto de  $D$ , entonces  $f$  es localmente acotada en  $D$ .*

*b. Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es  $(\varepsilon, 0)$ -convexa y localmente acotada por arriba en un punto de  $D$ , entonces  $f$  es continua.*

## 2.6 Funciones Wright Convexas.

Consideremos una función convexa  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces para  $x, y \in D$ ,  $t \in (0, 1)$ , se verifican las siguientes desigualdades.

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq tf(x) + (1-t)f(y), \\ f(ty + (1-t)x) &\leq tf(y) + (1-t)f(x). \end{aligned}$$

Al sumar estas desigualdades, resulta

$$f(tx + (1-t)y) + f(ty + (1-t)x) \leq f(x) + f(y).$$

Esto motiva la siguiente definición, cuyas idea fue considerada en 1954 por E. W. Wright en [251].

**Definición 2.6.1** (Función Wright convexa). *Una función  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es **Wright convexa** si*

$$f(tx + (1-t)y) + f(ty + (1-t)x) \leq f(x) + f(y), \quad x, y \in I, t \in (0, 1).$$

**Observación 2.6.1.**

a. En [223] A. W. Roberts y D. E. Varberg señalan que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es Wright convexa si

$$f(x + \delta) - f(x) \leq f(y + \delta) - f(y), \quad x < y, \delta > 0.$$

C. T. Ng en [185] demuestra que esta definición es equivalente a la Definición 2.6.1.

b. En [57] usan el término  $M$ -convexa para referirse a este tipo de funciones.

Algunos resultados que involucran este tipo de funciones los exponemos a continuación.

**Teorema 2.6.1** (C. T. Ng 1987 [185]). *Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  abierto y convexo.  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es Wright convexa si y sólo si  $f$  se puede escribir como la suma de una función convexa  $C : D \rightarrow \mathbb{R}$  con una aditiva  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .*

Por supuesto podemos considerar el concepto de  $\varepsilon$ -Wright convexa combinando las definiciones de  $\varepsilon$ -convexa y Wright convexa. En este sentido, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.6.2.** (C. T. Ng, K. Nikodem 1993 [187]). *Si  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\varepsilon$ -Wright convexa y localmente acotada por abajo en un punto de  $\overset{\circ}{D}$ , entonces  $f$  es  $2\varepsilon$ -convexa.*

A. Gilányi y Z. Páles en [96] introducen el concepto de función  $k$ -Wright convexa de la manera siguiente.

**Definición 2.6.2.**  *$f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es **Wright convexa de orden  $k$**  ( $k > 0$ , entero) si*

$$\Delta_{h_1} \cdots \Delta_{h_n} f(x) \geq 0,$$

donde  $h_1, \dots, h_n \in (0, \infty)$ ,  $x \in I$  y  $x + h_1 + \dots + h_n \in I$  y  $\Delta_h f(x) := f(x+h) - f(x)$ .

Si  $t_1, \dots, t_k$  son números positivos fijos, entonces  $f$  es  $(t_1, \dots, t_k)$ -Wright convexa si

$$\Delta_{t_1 h} \cdots \Delta_{t_n h} f(x) \geq 0,$$

$h > 0$ ,  $x \in I$ ,  $x + (t_1 + \dots + t_k)h \in I$ .

Y demuestran los siguientes resultados.

**Teorema 2.6.3.** Sean  $r_1, \dots, r_k$  números racionales positivos y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Las siguientes condiciones son equivalentes

a.  $f$  es simétricamente  $(r_1, \dots, r_k)$ -convexa.

b.  $f$  es cíclicamente  $(r_1, \dots, r_k)$ -convexa.

c.  $f$  es  $k$ -convexa.

d.  $f$  es  $(1, \dots, 1)$ -convexa.  
 $k$ -veces

e.  $f$  es  $(r_1, \dots, r_k)$ -convexa.

Además obtiene el siguiente corolario tipo Teorema de Kuhn 2.2.1.

**Corolario 2.6.1.** Si  $r \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$  y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Las siguientes condiciones son equivalentes

a.  $f$  es  $r$ -convexa.

b.  $f$  es midconvexa.

c.  $f$  es  $\frac{1}{2}$ -Wright convexa.

d.  $f$  es  $r$ -Wright convexa.

En el año 2009 G. Maksa y Z. Páles [156] demuestran un teorema similar al Teorema 2.6.1 para funciones  $k$ -Wright convexas.

**Teorema 2.6.4.** *Sea  $k$  un entero positivo.  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es  $k$ -Wright convexa si y sólo si  $f = C + P$ , donde  $C : I \rightarrow \mathbb{R}$  es continua  $k$ -convexa y  $P$  es un polinomio de grado a lo sumo  $k$ .*

## 2.7 Convexidad Generalizada (Familias de Parámetros).

Otro concepto de convexidad fue estudiado por Edwin Beckenbach en el año 1937 en [27], considerando familias de parámetros.

**Definición 2.7.1.** *Una familia  $\mathcal{F}$  de funciones  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  es una **familia de dos parámetros** si para cada par de puntos  $(x, w), (y, v) \in I \times \mathbb{R}$ ,  $x \neq y$ , existe una sólo función  $\varphi \in \mathcal{F}$ , tal que  $\varphi(x) = w$ ,  $\varphi(y) = v$ . Esta función se denota por  $\varphi_{((x,w),(y,v))}$ .*

Algunos ejemplos de familias de dos parámetros son:

$$\mathcal{F}_r = \{ax + by : a, b \in \mathbb{R}\} \text{ -Rectas-}$$

$$\mathcal{F}_c = \{cx^2 + axy + by : a, b \in \mathbb{R}\}, c \in \mathbb{R}, c \neq 0, \text{ fijo - Parábolas-}$$

Beckenbach considera la siguiente definición de convexidad.

**Definición 2.7.2.** *Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es  **$\mathcal{F}$ -convexa** (respecto a una familia  $\mathcal{F}$  de dos parámetros) si dados  $y, z \in I$ , ( $y < z$ )*

$$f(x) \leq \varphi_{((y,f(y)),(z,f(z)))}(x), \quad x \in [y, z].$$

Con esta definición y la Definición de convexidad de Jensen (Definición 1.1.1), tenemos que

$$f \text{ es convexa} \iff f \text{ es } \mathcal{F}_r \text{ -convexa.}$$

En [2] se generalizan las ideas desarrolladas por Beckenbach considerando familias de tres parámetros. También es importante resaltar que K. Nikodem y Z. Páles tratan este tema en [195] donde también presentan teoremas de separación como los mostrados en los Teoremas 1.6.1, 1.6.2 y 2.3.2.

## 2.8 $s$ -Convexidad.

En el año 1994 H. Hudzik y L. Maligranda [125] exponen un conjunto de propiedades de las funciones  $s$ -convexas definidas en primera instancia por W. Orlicz [198] en 1961 y en una segunda versión por W. W. Breckner [42] en el año 1978.

**Definición 2.8.1.** Sea  $0 < s \leq 1$ . Una función  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es  $s$ -convexa en el primer sentido o  $s_1$ -convexa si

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y),$$

$$x, y, \alpha, \beta \in [0, \infty), \alpha^s + \beta^s = 1.$$

$s$ -convexa en el segundo sentido o  $s_2$ -convexa si

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y),$$

$$x, y \in [0, \infty), \alpha, \beta \in (0, 1), \alpha + \beta = 1.$$

### Observación 2.8.1.

a. La noción de función  $s_1$ -convexa fue introducida en 1961 por el gran matemático polaco del siglo XX, W. Orlicz en [198]. Mientras la  $s_2$ -convexidad, en 1978 por W. W. Breckner [42]. Por esto algunos autores denominan a las funciones  $s_2$ -convexas como Breckner convexas.

b.  $f$  es  $s_1$ -convexa si y sólo si

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y), \quad x, y \in [0, \infty), t \in (0, 1).$$

c.  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si y sólo si es  $s$ -convexa (con  $s = 1$ ) en cualquiera de los dos sentidos.

d. En [125] H. Hudzik y L. Maligranda estudian algunas propiedades de este tipo de funciones. En particular

d1. Si  $f$  es  $s_2$ -convexa y  $f(0) = 0$ , entonces  $f$  es  $s_1$ -convexa.

d2. Si  $0 < s < 1$  y  $k > 1$  y se define  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x) := \begin{cases} x^{s/(1-s)} & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ kx^{s/(1-s)} & , \quad x > 1 \end{cases} .$$

Entonces  $f$  es no negativa, discontinua en  $x = 1$  y es  $s_1$ -convexa. pero no es  $s_2$ -convexa.

e. En [208] M. R. Pinheiro demuestra que la Desigualdad de Jensen Generalizada (Desigualdad (1.4)) es cierta para funciones  $s$ -convexas en los dos sentidos.

f. Algunas de las demostraciones de las propiedades de las funciones  $s$ -convexas pueden revisarse en [182].

En [42, 43, 44] se demuestra un resultado tipo Bernstein-Doetsch (Teorema 2.1.3) para las funciones Breckner convexa con  $t \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ .

En el año 2009, P. Burai, A. Háyzy y T. Juhász, generalizan el concepto de Breckner convexidad [49], como sigue

**Definición 2.8.2.** Sean  $\mathbb{X}$  un espacio vectorial,  $D \subset \mathbb{X}$ , convexo,  $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $s \in [0, 1]$ .  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es  $(s, d)$ -convexa si

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y) + d(x, y), \quad (2.7)$$

$x, y \in D, t \in [0, 1]$ .

Si la Desigualdad (2.7) se verifica para algún número fijo  $t \in [0, 1]$  se dice que  $f$  es  $(t, s, d)$ -convexa y si se verifica para  $t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  decimos que  $f$  es **racionalmente**  $(s, d)$ -convexa o  $(\mathbb{Q}, s, d)$ -convexa.

Adicionalmente asumen que  $d$  es una semimétrica ( $d$  es no negativa, simétrica y cumple la desigualdad triangular), invariante por traslación y sub homogénea respecto a una función  $\psi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  ( $d(tx, ty) \leq \psi(t)d(x, y), x, y \in \mathbb{X}, t \in (0, \infty)$ ).

En el siguiente Teorema exponemos algunos resultados obtenidos en [49, 50].

**Teorema 2.8.1.** Sean  $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  una semimétrica, invariante por traslación, subhomogénea respecto a una función  $\psi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  y continua y  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ .

a. Si  $f$  es  $(t, s, d)$ -convexa y acotada por arriba en un punto de  $D$ , entonces es localmente acotada en  $D$ .

b. (Bernstein-Doetsch). Si  $d(x, x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{X}$  y  $f$  es  $(\mathbb{Q}, s, d)$ -convexa y acotada por arriba en un punto de  $D$ , entonces  $f$  es continua en  $D$ .

c. Si  $d(x, x) = 0$ ,  $x \in X$  y  $f$  es  $(\mathbb{Q}, s, d)$ -convexa y acotada por arriba en un punto de  $D$ , entonces  $f$  es  $(s, d)$ -convexa.

Es importante resaltar la importancia de la condición  $d(x, x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{X}$  en el Teorema 2.8.1. En [49] consideran

$$f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) := \begin{cases} x^s & , \quad x \in ((2^s - 1)^{1/s}, 1) \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & , \quad x \in ((2^s - 1)^{1/s}, 1) \cap \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Entonces  $f$  es  $(1/2, s, 0)$ -convexa acotada y no es continua en ningún punto.

Otros artículos que se pueden revisar sobre este tema son [3, 5, 8, 72, 126, 197, 206, 207, 208, 234].

### 2.8.1 $h$ -Convexidad.

Una manera “natural” de generalizar el concepto de Breckner-convexidad (Definición 2.8.1) fue propuesta por la matemática croata S. Varošanec en el año 2005 en [246].

**Definición 2.8.3.** Sea  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función no negativa y no idénticamente nula.  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es  **$h$ -convexa** si

$$f(tx + (1 - t)y) \leq h(t)f(x) + h(1 - t)f(y), \quad x, y \in I, t \in (0, 1). \quad (2.8)$$

Si la desigualdad es en sentido inverso decimos que  $f$  es  $h$ -cóncava. La clase de las funciones  $h$ -convexas definidas en un intervalo  $I$  se denota por  $SX(h, I)$ .

**Observación 2.8.2.**

a. Si  $h(t) \leq t$ ,  $t \in I$ , entonces toda función de  $SX(h, I)$  es convexa. En particular, si  $h \equiv 1$ ,  $SX(h, I)$  es la clase de funciones convexas.

b. En el caso  $h(t) = \frac{1}{t}$ ,  $t \in I, t \neq 0$  es estudiado en [99].

c. Si  $h(t) = t^s$ ,  $t \in (0, 1)$  para algún  $0 < s \leq 1$ , entonces  $SX(h, [0, \infty))$  es la clase de las funciones  $s_2$ -convexas estudiadas al principio de esta sección.

d. Supongamos que  $h(t) \geq t$ ,  $t \in (0, 1)$ . Como es el caso de  $h(t) = t^k$  con  $k \leq 1$ . Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa no negativa, entonces:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y).$$

$x, y \in I$ ,  $t \in (0, 1)$ . Y así  $f$  es  $h$ -convexa.

e. En [246] se considera el siguiente ejemplo. Sea  $k < 0$  y

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \neq \frac{a+b}{2} \\ 2^{1-k} & , \quad x = \frac{a+b}{2} \end{cases} .$$

Entonces  $f$  no es convexa y es  $h_k$ -convexa, donde  $h_k$  está definida en la parte d. de estas observaciones.

f. También podemos tratar el concepto de  $h$ -convexidad para funciones  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ .

En 2009, P. Burai y A. Háyzy [48] con las mismas ideas desarrolladas en [49], generalizan el concepto de  $h$ -convexidad, de la siguiente manera.

**Definición 2.8.4.** Sea  $D \subset \mathbb{X}$ ,  $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función no negativa y no idénticamente nula.  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es  $(h, d)$ -convexa si

$$f(tx + (1-t)t) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) + d(x, y), \quad (2.9)$$

$x, y \in D$ ,  $t \in (0, 1)$

De manera similar a la Definición 2.8.1 si la Desigualdad (2.9) se verifica para algún número fijo  $t \in [0, 1]$  se dice que  $f$  es  $(t, h, d)$ -convexa y si se verifica para  $t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  decimos que  $f$  es **racionalmente  $(h, d)$ -convexa** o  **$(\mathbb{Q}, h, d)$ -convexa**.

Además los autores suponen que

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow 1} h(t) = 1.$$

El siguiente teorema es uno de los principales resultados presentados en [48].

**Teorema 2.8.2.** (*Bernstein-Doetsch*). Sean  $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  una semimétrica, invariante por traslación, subhomogénea respecto a una función  $\psi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  y continua y  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si  $d(x, x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{X}$  y  $f$  es  $(\mathbb{Q}, h, t)$ -convexa o  $(h, d)$ -convexa y acotada por arriba en un punto de  $D$ , entonces  $f$  es continua en  $D$ .

También en el 2009, M. Bombardelli y S. Varošanec, [37] presentan una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard-Fejér.

**Teorema 2.8.3.** Sean  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  no negativa ni idénticamente nula y simétrica respecto a  $\frac{a+b}{2}$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $h$ -convexa y  $x, y \in [a, b]$ ,  $x < y$ , entonces:

$$\frac{1}{y-x} \int_x^y f(s)g(s)ds \leq [f(x) + f(y)] \int_0^1 h(s).g(tx + (1-t)y)ds.$$

Además en [174] introduce un nuevo concepto de convexidad que denominan funciones  $(k, h)$ -convexas.

Para ver otros estudios que se han hecho sobre este tipo de funciones se puede revisar [4, 5, 11, 233, 243].

## 2.9 $E$ -Convexidad.

En el año 1999 E. A. Youness considera un nuevo concepto de convexidad que describimos en las siguientes líneas.

**Definición 2.9.1.** Sea  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Un conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  es  $E$ -convexo si

$$tE(x) + (1-t)E(y) \in M, \quad x, y \in M, \quad t \in (0, 1).$$

Si  $M \subset \mathbb{R}^n$  es  $E$ -convexo una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es

**$E$ -convexa** si

$$f(tE(x) + (1-t)E(y)) \leq tf(E(x)) + (1-t)f(E(y)),$$

$x, y \in E, t \in (0, 1)$ .

**Semi  $E$ -convexa** si

$$f(tE(x) + (1-t)E(y)) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

$x, y \in E, t \in (0, 1)$ .

Este concepto se puede generalizar exactamente igual para  $M \subset \mathbb{X}$ , donde  $\mathbb{X}$  es un espacio vectorial.

**Proposición 2.9.1.** Sean  $M, N \subset \mathbb{R}^n$ .

- a. Si  $M$  es convexo, entonces es  $E$ -convexo.
- b. Si  $M$  es  $E$ -convexo, entonces  $E(M) \subset M$ .
- c. Si  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $E(M)$  es convexo y  $E(M) \subset M$ , entonces  $M$  es  $E$ -convexo.
- d. Si  $M, N$  son  $E$ -convexo  $M \cap N$  es  $E$ -convexo.
- e. Si  $M, N$  son  $E$ -convexo  $M \cup N$  no necesariamente es  $E$ -convexo.
- f. Si  $M, N$  son  $E$ -convexos respecto a la misma función  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $M + N$  es  $E$ -convexo.
- g. Si  $M$  es  $E_1$ -convexo y  $E_2$ -convexo, entonces es  $E_1 \circ E_2$ -convexo y  $E_2 \circ E_1$ -convexo.

En [235] se exponen otras propiedades de los conjuntos  $E$ -convexos.

Ahora introducimos la definición de función  $E$ -convexa estudiada por E. A. Youness [253].

**Definición 2.9.2** (Función  $E$ -convexa). *Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es  $E$ -convexa sobre un conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  si existe una función  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $M$  es un conjunto  $E$ -convexo y*

$$f(tE(x) + (1-t)E(y)) \leq tf(E(x)) + (1-t)f(E(y)), \quad (2.10)$$

$x, y \in M, t \in (0, 1)$ .

Si la Desigualdad (2.10) es estricta se dice que  $f$  es estrictamente  $E$ -convexa. Si la desigualdad se verifica en sentido contrario decimos que  $f$  es  $E$ -cóncava y si es estricta se dice estrictamente  $E$ -cóncava.

**Observación 2.9.1.**

a. Toda función convexa es  $E$ -convexa sobre cualquier conjunto convexo  $M \subset \mathbb{R}^n$ , respecto a la función identidad  $I_{\mathbb{R}^n}$ .

b. Sean

$$M_1 = \text{Conv} \{(0, 0), (2, 1), (0, 3)\},$$

$$M_2 := \text{Conv} \{(0, 1), (-2, -1), (0, -3)\},$$

$$M = M_1 \cup M_2 \quad E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{y} \quad E(x, y) := \left( \frac{2y - x}{3}, \frac{y + 4x}{3} \right).$$

Entonces  $E(M) = M$  y  $M$  no es  $E$ -convexo.

c. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ -x & , \quad x \leq 0 \end{cases}$  y  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $E(x) = -x^3, x \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\mathbb{R}$  es un conjunto  $E$ -convexo y  $f$  es  $E$ -convexo y no es convexa.

d. El concepto de  $E$ -convexidad lo podemos considerar para funciones  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Este concepto ha sido tratado en varios trabajos, donde también se han estudiado otras nociones de  $E$ -convexidad que mostramos en la siguiente definición.

**Definición 2.9.3.** Sean  $\mathbb{X}$  un espacio vectorial,  $E : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ ,  $M \subset \mathbb{X}$  un conjunto  $E$ -convexo y  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ .

a. (Youness- Abo Al-Olaa [254]).  $f$  es **cuasi  $E$ -convexa** sobre  $M$  si

$$f(tE(x) + (1-t)E(y)) \leq \text{máx} \{f(E(x)), f(E(y))\},$$

$$x, y \in M, t \in (0, 1).$$

b. (Youness-Eman [255]).  $f$  es **semi- $E$ -convexa** si

$$f(tE(x) + (1-t)E(y)) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

$$x, y \in M, t \in (0, 1).$$

c. (Youness-Eman [255]).  $M$  es **fuertemente  $E$ -convexo** si

$$t(sx + E(x)) + (1-t)(sy + E(y)) \in M,$$

$$x, y \in M, s, t \in [0, 1].$$

d. (Youness-Eman [255]).  $f$  es **fuertemente  $E$ -convexa** sobre  $M$  si

$$f(t(sx + E(x)) + (1-t)(sy + E(y))) \leq t(f(E(x)) + (1-t)(f(E(y)))),$$

$$x, y \in M, s, t \in [0, 1].$$

## 2.10 Funciones Fuertemente Convexas.

En 1966 el matemático ruso B. T. Polyak en [210] estudia el concepto de función fuertemente convexa con módulo  $c > 0$ , como describimos en las próximas líneas.

**Definición 2.10.1.** Sean  $c > 0$  y  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espacio normado. Una función  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es **fuertemente convexa** con módulo  $c$  si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)\|x-y\|^2, \quad (2.11)$$

$x, y \in D, t \in (0, 1)$ .

Si la Desigualdad (2.11) se cumple en sentido contrario se dice que  $f$  es fuertemente cóncava con módulo  $c$ .

**Observación 2.10.1.**

a. Sean  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función fuertemente convexa con módulo  $c > 0$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ . Consideremos la parábola  $h(x) = cx^2 + ax + b, x \in \mathbb{R}$ . Si  $x, y \in I, t \in (0, 1), x, y$ , entonces como  $h$  es convexa tenemos que

$$h(tx + (1 - t)y) \leq th(x) + (1 - t)h(y), \quad t \in (0, 1).$$

Haciendo las cuentas, para cada  $t \in (0, 1)$ , se verifica la igualdad

$$th(x) + (1 - t)h(y) - h(tx + (1 - t)y) = ct(1 - t) \|x - y\|^2. \quad (2.12)$$

En la siguiente figura se ilustran estos resultados.

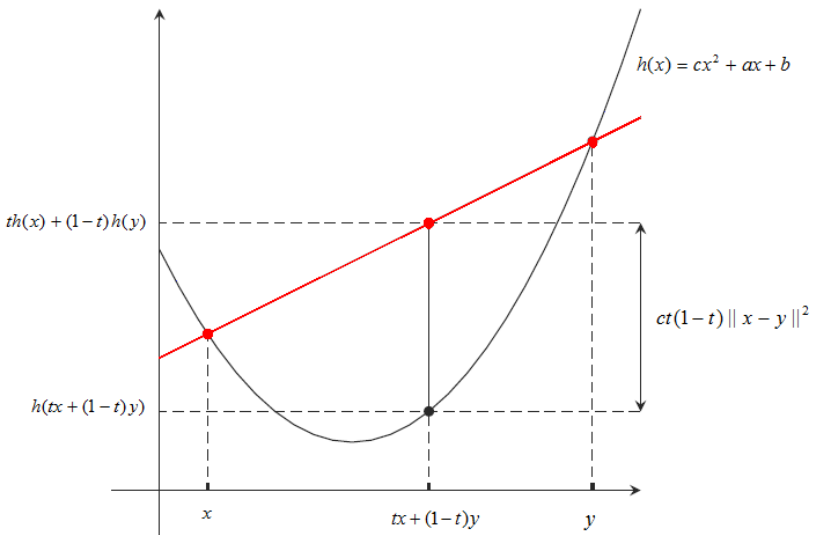


Figura 2.5: Interpretación geométrica de  $ct(1 - t)\|x - y\|^2$ .

Utilizando la Desigualdad (2.11) y la Igualdad (2.12), resulta

$$\begin{aligned}
 tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y) & \\
 & \geq ct(1-t) \|x - y\|^2 \\
 & = th(x) + (1-t)h(y) - h(tx + (1-t)y).
 \end{aligned}$$

De donde resulta que

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(tx + (1-t)y), \quad t \in (0, 1).$$

De esta manera, en el intervalo  $(x, y)$ , la gráfica de  $f$  está por debajo de la gráfica de la parábola  $h$ , como se ilustra en la Figura 2.6.

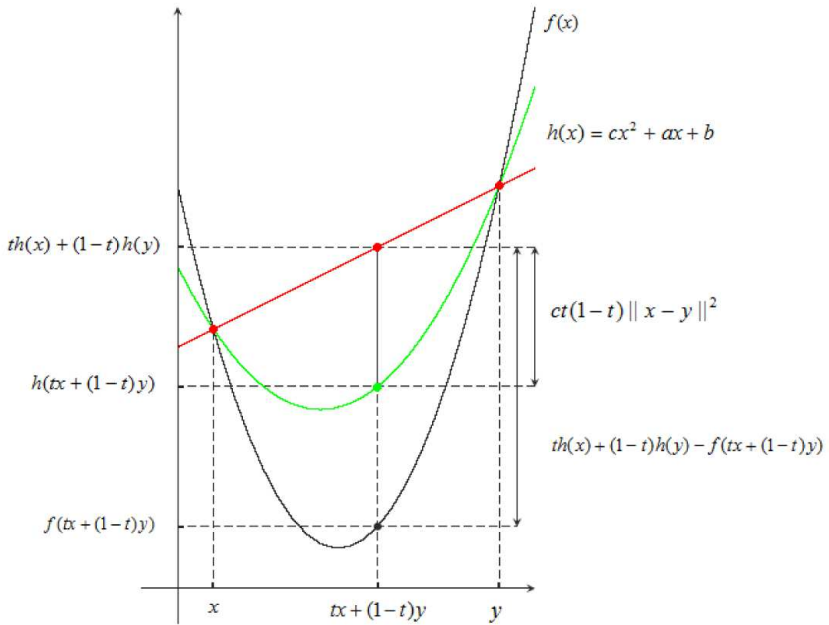


Figura 2.6: Interpretación geométrica de convexidad fuerte.

b. Al revisar los distintos conceptos de convexidad que hemos estudiado a lo largo de este trabajo, podemos notar las relaciones que se esquematiza a continuación:

$$f \text{ convexa} \implies \left\{ \begin{array}{l} \textit{midconvexa} \\ \textit{t - convexa} \\ \textit{cuasi convexa} \\ \textit{k - convexa} \ (k \geq 3) \\ \textit{(t}_1, \dots, \textit{t}_k) - \textit{convexa} \\ \textit{\varepsilon - convexa} \\ \textit{(\varepsilon, \delta) - convexa} \\ \textit{Wright convexas} \\ \textit{s}_1 - \textit{convexa}, \textit{s}_1 = 1 \\ \textit{h - convexa}, \textit{h}(t) \geq t \\ \textit{E - convexidad} \end{array} \right. ,$$

$$\textit{convexa} + \textit{diferenciabilidad} \implies \left\{ \begin{array}{l} \textit{pseudo - convexa} \\ \textit{InveX} \end{array} \right. .$$

En el caso de funciones fuertemente convexa obtenemos la relación recíproca, es decir

$$f \text{ es fuertemente convexa con módulo } c > 0 \implies f \text{ es convexa.}$$

En consecuencia toda función fuertemente convexa verifica las propiedades que cumplen las funciones convexas.

Existen varios trabajos de investigación donde se puede ver la aplicación de las funciones fuertemente convexas en la Teoría de Optimización y en la Economía (Ver por ejemplo [134, 181, 190, 218, 249]). También es interesante revisar el artículo de E. S. Polovinki [209] donde trata este tema y considera los conjuntos fuertemente convexos.

**Otras nociones de Funciones Fuertemente Convexas.** Siguiendo el esquema que hemos hecho con las funciones convexas, podemos construir otras nociones de convexidad ligado con las funciones fuertemente convexas.

**Definición 2.10.2.** Sean  $c, \varepsilon > 0$ ,  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espacio normado,  $h : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$  y  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ .

a.  $f$  es fuertemente midconvexa con módulo  $c$  si

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4} \|x-y\|^2, \quad x, y \in D.$$

b.  $f$  es fuertemente  $t$ -convexa con módulo  $c$  ( $t \in (0, 1)$  fijo) si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t) \|x-y\|^2, \quad x, y \in D.$$

c.  $f$  es  $\varepsilon$ -fuertemente convexa con módulo  $c$  si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t) \|x-y\|^2 + \varepsilon, \\ x, y \in D, t \in (0, 1).$$

d.  $f$  es fuertemente cuasi convexa con módulo  $c$  si

$$f(tx + (1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} - ct(1-t) \|x-y\|^2, \\ x, y \in D, t \in (0, 1).$$

e.  $f$  es fuertemente Wright convexa con módulo  $c$  si

$$f(tx + (1-t)y) + f(ty + (1-t)x) \leq f(x) + f(y) - 2ct(1-t) \|x-y\|^2, \\ x, y \in D, t \in (0, 1).$$

f. Si  $\delta > 0$ .  $f$  es fuertemente  $(\varepsilon, \delta)$ -convexa con módulo  $c$  si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon t(1-t) \|x-y\| - ct(1-t) \|x-y\|^2 + \delta \\ x, y \in D, t \in (0, 1).$$

g.  $f$  es fuertemente  $h$ -convexa con módulo  $c$  si

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) - ct(1-t) \|x-y\|^2, \\ x, y \in D, t \in (0, 1).$$

Por supuesto, cambiando el sentido de las desigualdades, obtenemos los concepto duales, cambiado convexa por cóncava. Además en cada caso podemos considerar otros subcasos combinando las definiciones.

Existen varios trabajos de investigación relacionados con las funciones fuertemente convexas donde se generalizan propiedades que verifican las funciones convexas. En virtud de esto, hacemos una recopilación de algunos de estos resultados.

**Propiedades de Funciones Fuertemente Convexas.** En primer lugar es importante exponer un lema utilizado por N. Merentes y K. Nikoden en [171], que fue demostrado en el año 2001 en [120].

**Lema 2.10.1.** *Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es fuertemente convexa con módulo  $c > 0$ , si y sólo si, la  $g(x) := f(x) - cx^2$ ,  $x \in I$  es convexa.*

Este resultado garantiza que un función fuertemente convexa la podemos transformar en una función convexa restándole una parábola. O equivalentemente que toda función fuertemente convexa módulo  $c$ , se escribe como la suma de una convexa con la parábola  $p(x) := cx^2$ ,  $x \in I$ .

Algunas propiedades de las funciones fuertemente convexa están planteadas en un problema propuesto en [223] y cuyas demostraciones pueden verse en [182]. Estas propiedades las exponemos a continuación.

**Proposición 2.10.1.** *Sean  $c > 0$  y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

a.  *$f$  es fuertemente midconvex con módulo  $c$ .*

b. *Para cada  $x_0$ , existe una función lineal  $m$ , tal que:*

$$f(x) \geq c(x - x_0)^2 + m(x - x_0) + f(x_0), \quad x \in I.$$

c. *Si  $f$  es diferenciable en  $x_0$ ,*

$$f(x) \geq c(x - x_0)^2 + f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad x \in I.$$

d. *Si  $f$  es diferenciable,*

$$(f'(x) - f'(y))(x - y) \geq 2c(x - y)^2, \quad x, y \in I.$$

e. *Si  $f$  es dos veces diferenciable,*

$$f''(x) \geq 2c, \quad x \in I.$$

En el siguiente teorema resumimos los principales resultados obtenidos en el año 2010 en [171].

**Teorema 2.10.1.** Sean  $c > 0$  y  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$

a. (Teorema del Sandwich). Existe una función  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  fuertemente convexa, tal que  $f \leq h \leq g$ , si y sólo si

$$f(tx+(1-t)y) \leq tg(x)+(1-t)g(y)-ct(1-t)(x-y)^2, \quad x, y \in I, t \in [0, 1].$$

b. ( $\varepsilon$  aproximación). Si  $f$  es  $\varepsilon$ -fuertemente convexa con módulo  $c$ , entonces existe una función  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  fuertemente convexa módulo  $c$ , tal que

$$\|f - g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in I.$$

c. (Generalización de la Desigualdad de Jensen). Si  $f$  es fuertemente convexa con módulo  $c$ , entonces

$$f\left(\sum_{i=1}^k t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k t_i f(x_i) - c \sum_{i=1}^k t_i (x_i - (t_1 x_1 + \cdots + t_k x_k))^2,$$

$$x_i \in I, t_i > 0, i = 1, \dots, k, t_1 + \cdots + t_k = 1.$$

d. (Generalización de la Desigualdad de Jensen para integrales). Si  $(\mathbb{X}, \Sigma, \mu)$  es un espacio de probabilidad y  $\varphi : \mathbb{X} \rightarrow I$  es una función Lebesgue integrable y  $f$  es fuertemente convexa con módulo  $c$ , entonces:

$$f\left(\int_{\mathbb{X}} \varphi(x) d\mu\right) \leq \int_{\mathbb{X}} f(\varphi(x)) d\mu - c \int_{\mathbb{X}} \left(\varphi(x) - \int_{\mathbb{X}} \varphi(x)\right)^2 d\mu.$$

e. (Generalización de la Desigualdad de Hermite-Hadamard). Si  $f$  es fuertemente convexa con módulo  $c$ , entonces:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{c}{12}(x-y)^2 \leq \frac{1}{y-x} \int_x^y f(s) ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \frac{c}{6}(x-y)^2,$$

$$x, y \in I, x < y.$$

f. (Caracterización tipo Beckenbach). Si  $f$  es fuertemente convexa con módulo  $c$ , entonces es  $\mathcal{F}_c$ -convexa, donde

$$\mathcal{F}_c = \{cx^2 + axy + by : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

En el año 2012 A. Azócar, N. Nikodem y G. Roa [20] mejoran el resultado obtenido en [171] en relación a la Desigualdad de Hermite-Hadamard, señalado arriba y demuestran un resultado sobre la Desigualdad tipo Fejér, que resumimos en el siguiente teorema.

**Teorema 2.10.2.** Sean  $c > 0$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fuertemente convexa con módulo  $c$ ,  $x, y \in [a, b]$ ,  $x < y$  y  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función de simétrica de densidad ( $g(a+b-x) = g(x)$ ,  $x \in [a, b]$  y  $\int_a^b g(x)dx = 1$ ). Entonces:

a. (Desigualdad tipo Hermite-Hadamard mejorada).

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{c}{12}(y-x)^2 &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3x+y}{4}\right) + f\left(\frac{x+3y}{4}\right)\right] + \frac{c}{48}(y-x)^2 \\ &\leq \frac{1}{y-x} \int_x^y f(s)ds \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{f(x)+f(y)}{2}\right] - \frac{c}{24}(y-x)^2 \\ &\leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{6}(y-x)^2. \end{aligned}$$

b. (Generalización de la Desigualdad de Fejér).

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) + c\left[\int_x^y s^2 g(s)ds - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2\right] &\leq \int_x^y f(s)g(s)dx \\ &\leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - c\left[\frac{x^2+y^2}{2} - \int_x^y s^2 g(s)ds\right]. \end{aligned}$$

c. (Desigualdad tipo Hermite-Hadamard discreta). Si  $x = x_1 < \dots < x_n = y$  son  $n$  puntos equidistantes, se tiene:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{c(n+1)}{12(n-1)}(y-x)^2 &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \\ &\leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c(n-2)}{6(n-1)}(y-x)^2. \end{aligned}$$

**Funciones Fuertemente Midconvexas.** A. Azócar, J. Gimenez, K. Nikodem y J. L. Sánchez [19] demuestran algunas propiedades de las funciones fuertemente midconvexas con módulo  $c > 0$ , que recopilamos en el siguiente teorema.

**Teorema 2.10.3.** Sean  $c > 0$  y  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ .

a. Si  $f$  es continua, entonces  $f$  es fuertemente convexa con módulo  $c$ , si y sólo si,  $f$  es fuertemente midconvexa con módulo  $c$ .

b. (Caracterización tipo Bernstein-Doetsch). Si  $D \subset \mathbb{R}^n$  es abierto,  $f$  es fuertemente midconvexa con módulo  $c$  y acotada por arriba en un conjunto con interior no vacío, entonces  $f$  es continua.

c. (Caracterización tipo Ostrowski). Si  $D$  es abierto,  $f$  es fuertemente midconvexa con módulo  $c$  y acotada por arriba en un conjunto con medida de Lebesgue positiva, entonces  $f$  es continua.

d. Si  $f$  es fuertemente  $t$ -convexa con módulo  $c$ , entonces es fuertemente midconvexa con módulo  $c$ .

e. Si  $f$  es fuertemente  $t$ -convexa con módulo  $c$ , entonces  $f$  es fuertemente  $t$ -convexa con módulo  $c$ , para  $t \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ .

f. Si  $(\mathbb{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio vectorial con un producto interno,  $D \subset \mathbb{X}$  abierto, entonces  $f$  es midconvexa con módulo  $c$ , si y sólo si, para cada  $x_0 \in D$ ,

$$f(x) \geq h(x) := c \|x - x_0\|^2 + a(x - x_0) + f(x_0), \quad x \in D,$$

donde  $a : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función aditiva que depende de  $x_0$ .

g. (Caracterización tipo Beckenbach)  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es fuertemente midconvexa con módulo  $c$ , si y sólo si, es fuertemente  $\mathcal{F}$ -midconvexa módulo  $c$ , donde

$$\mathcal{F}_c = \{cx^2 + axy + by : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

En el año 2011, en [172] se demuestra el siguiente teorema de descomposición.

**Teorema 2.10.4.** Sean  $c > 0$ ,  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espacio normado,  $D \subset \mathbb{X}$  abierto y  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  es fuertemente midconvexa con módulo  $c$  y  $g$  fuertemente midcóncava con módulo  $c$ , tales que  $f \leq g$ . Entonces existen una función aditiva  $a : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f_1, g_1 : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1$  fuertemente convexa con módulo  $c$  y  $g_1$  continua fuertemente cóncava módulo  $c$ , tales que

$$f(x) = f_1(x) + a(x) \quad , \quad g(x) = g_1(x) + a(x), \quad x \in D.$$

**Funciones Fuertemente Wright Convexas.** También se tienen resultados para funciones fuertemente Wright convexas con módulo  $c$  (Ver [172]).

**Teorema 2.10.5.** Sean  $c > 0$ ,  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espacio normado  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a.  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  tiene un producto interno.

b.  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es fuertemente Wright convexa con módulo  $c$ , si y sólo si,  $h := f - c\|\cdot\|^2$  es Wright convexa.

c.  $\|\cdot\|^2 : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es fuertemente Wright convexa módulo 1.

Como corolario de este teorema se obtiene el siguiente resultado de descomposición de funciones fuertemente Wright convexas.

**Corolario 2.10.1** (Descomposición de funciones fuertemente Wright convexa). Sean  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espacio con producto interno,  $D \subset \mathbb{X}$  abierto y convexo;  $y c > 0$ .  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es fuertemente Wright convexa con módulo  $c > 0$ , si y sólo si, existen una función convexa  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  y una función aditiva  $a : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que:

$$f(x) = g(x) + a(x) + c\|x\|^2, \quad x \in D.$$

**Funciones Fuertemente  $h$ -Convexas.** En el siguiente teorema exponemos los resultados obtenidos recientemente en [12].

**Teorema 2.10.6.** Sean  $c > 0$ ,  $h : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces:

a. Si  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  tiene un producto interno,  $h(t) \geq t$ ,  $t \in (0, 1)$  y se considera  $g : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  fuertemente  $h$ -convexa con módulo  $c$ , entonces  $f(x) := g(x) + c\|x\|^2$ ,  $x \in D$ , es fuertemente  $h$ -convexa con módulo  $c$ .

b. Si  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  tiene un producto interno,  $h(t) \leq t$ ,  $t \in (0, 1)$  y  $f$  es fuertemente  $h$ -convexa módulo  $c$ , entonces existe una función  $g : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$   $h$ -convexa, tal que

$$f(x) = g(x) + c\|x\|, \quad x \in D.$$

c. Si  $D = I \subset \mathbb{R}$  y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es Lebesgue integrable y fuertemente  $h$ -convexa con módulo  $c$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h(1/2)} \left[ f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{c}{12}(y-x)^2 \right] &\leq \frac{1}{y-x} \int_x^y f(x) dx \\ &\leq (f(x) + f(y)) \int_0^1 h(t) dt - \frac{c}{6}(y-x)^2, \end{aligned}$$

$$x, y \in I, \quad x < y.$$

## 2.11 Multifunciones

Dado un conjunto  $\mathbb{Y}$  denotamos por  $2^{\mathbb{Y}}$  el conjunto potencia de  $\mathbb{Y}$ . Es decir la clase de los subconjuntos de  $\mathbb{Y}$ . Si  $\mathbb{Y}$  es un espacio métrico, entonces el conjunto  $2^{\mathbb{Y}}$  puede ser dotado de una métrica denominada Métrica de Hausdorff (Ver [15, 38, 56]) que se define como

$$d_H(A, B) := \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\}, \quad A, B \in 2^{\mathbb{Y}}.$$

En el caso que no tengamos una métrica, E. Michael [173] introdujo una topología en  $2^{\mathbb{Y}}$  dando una base de entornos.

También se utilizará la siguiente notaciones:

$$n(\mathbb{Y}) = 2^{\mathbb{Y}} - \{\emptyset\}.$$

Si  $\mathbb{Y}$  es un espacio topológico

$$C(\mathbb{Y}) := \{S \subset \mathbb{Y} : S \text{ es compacto, } S \neq \emptyset\}.$$

$$CC(\mathbb{Y}) := \{S \subset \mathbb{Y} : S \text{ es compacto, y convexo } S \neq \emptyset\}.$$

$$B(\mathbb{Y}) := \{S \subset \mathbb{Y} : S \text{ es acotado, } S \neq \emptyset\}.$$

$$BCl(\mathbb{Y}) := \{S \subset \mathbb{Y} : S \text{ es acotado y cerrado, } S \neq \emptyset\}.$$

$$BC(\mathbb{Y}) = \{S \subset \mathbb{Y} : S \text{ es acotado y convexo, } S \neq \emptyset\}.$$

**Definición 2.11.1.** *Dados dos conjuntos  $\mathbb{X}$  y  $\mathbb{Y}$  una función  $F : \mathbb{X} \rightarrow 2^{\mathbb{Y}}$  se denomina **multifunción o función conjunto valuada**. Es decir una multifunción  $F : \mathbb{X} \rightarrow 2^{\mathbb{Y}}$ , asocia a cada punto de  $\mathbb{X}$  un subconjunto de  $\mathbb{Y}$ .*

Las multifunciones son de gran utilidad en diversa situaciones de la matemática y otras áreas del conocimiento, como economía y optimización. Mostremos algunos ejemplos en este sentido.

**Ejemplo 2.11.1.**

a. Dada una función  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ , se puede considerar la multifunción  $F : \mathbb{Y} \rightarrow 2^{\mathbb{X}}$ , definida por

$$F(y) := f^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{X} : f(x) = y\}.$$

Si  $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{R}$  y  $f(x) := x^2, x \in \mathbb{R}$ , entonces

$$F(y) := \begin{cases} \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\} & , y \geq 0 \\ \emptyset & , y < 0 \end{cases}.$$

b. Si en conjunto  $\mathbb{X}$  está definida una relación de equivalencia  $\sim$  y denotamos por  $\mathbb{X}/\sim$  el conjunto de las clases de equivalencias, entonces podemos definir una multifunción  $F : \mathbb{X} \rightarrow 2^{\mathbb{X}}$  que asocia a cada  $x \in \mathbb{X}$  su clase de equivalencia.

c. Dada una matriz  $A$  de orden  $m \times n$  y un vector  $b \in \mathbb{R}^m$ , definimos la multifunción  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$  como:

$$F(x) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\},$$

donde la desigualdad  $Ax \leq b$  es coordenada a coordenada.

En este caso a cada vector  $x \in \mathbb{R}^n$  le asociamos lo que se conoce como un poliedro. Esta multifunción se denomina **Multifunción Poliedral**.

d. Consideremos el conjunto entorno de un individuo, que consiste de las posibles condiciones que se deben cumplir, para realizar un acción (presupuesto, clima, condiciones de salud, etc). De esta manera, podemos considerar la multifunción que asocia cada situación del entorno un conjunto de acciones a realizar. Por ejemplo, si se dispone de un determinado presupuesto, el individuo o familia, puede realizar un viaje o adquirir ciertos artículos. Si el día es lluvioso, no se puede ir a la playa o no se puede realizar una excursión a la montaña. etc.

e. Cada consumidor (individuo o familia) tiene un conjunto de Planes de Consumos posibles. Estos planes de consumo especifican ciertas cantidades de bienes o servicios consumibles. De esta manera a cada consumidor podemos asociar el conjunto de planes de consumo, que son subconjuntos del un conjunto denominado Conjunto de Consumo. Estos planes pueden depender de varios factores, como el presupuesto disponible por cada individuo, preferencias de la persona, ubicación de la vivienda, condiciones ambientales, etc.

Las multifunciones han sido objeto de estudio y formalización en la matemática, tanto es así, que existen revistas de investigación dedicadas a este tema, como Set-Valued Analysis y Journal of Fuzzy Set Valued Analysis.

En relación al estudio de este objeto matemático, se han desarrollado conceptos, como las nociones de: continuidad, diferenciabilidad, integrabilidad y convexidad entre otras. En tal sentido se puede revisar [7, 15, 16, 18, 24, 30, 38, 56, 119, 123, 140].

## 2.12 Multifunciones Convexas.

**Definición 2.12.1.** Sean  $\mathbb{X}$ ,  $\mathbb{Y}$  espacios vectoriales, y  $D \subset \mathbb{X}$  un conjunto convexo. Una **multifunción**  $F : D \rightarrow n(\mathbb{Y})$  es **convexa** si

$$tF(x) + (1 - t)F(y) \subset F(tx + (1 - t)y), \quad (2.13)$$

$x, y \in D, t \in (0, 1)$ .

De manera similar al caso de funciones convexas podemos considerar otros conceptos de convexidad.

**Definición 2.12.2.** Sean  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$  espacios vectoriales reales,  $D \subset \mathbb{X}$  un conjunto convexo,  $c > 0$  y  $F : D \rightarrow n(\mathbb{Y})$ , entonces:

a.  $F$  es  **$t$ -convexa** si se verifica (2.13), para  $x, y \in D$  y  $t$  es un elemento fijo del intervalo  $(0, 1)$ .

b.  $F$  es **midconvexa** si verifica (2.13), para  $x, y \in D$ ,  $t = \frac{1}{2}$  y  $t$  es un elemento fijo del intervalo  $(0, 1)$ .

c. Si  $K \subset \mathbb{Y}$  es un cono ( $K + K \subset K$  y  $tK \subset K$ ,  $t \in [0, \infty)$ )  $F$  es  **$K$ -convexa**

$$F(x) + (1 - t)F(y) \subset F(tx + (1 - t)y) + K, \quad (2.14)$$

$x, y \in D$ ,  $t \in (0, 1)$ .

d.  $F$  es  **$K$ - $t$ -convexa** si se verifica (2.14) para un valor fijo de  $t \in (0, 1)$ .

e.  $F$  es  **$K$ -midconvexa** si se verifica (2.14) para  $t = \frac{1}{2}$ .

f. Si  $\mathbb{X}$  es un espacio normado y  $\varepsilon > 0$ .  $F$  es  **$\varepsilon$ - $K$ -convexa** si

$$F(x) + (1 - t)F(y) \subset F(tx + (1 - t)y) + K + \varepsilon\bar{B},$$

$x, y \in D$ ,  $t \in [0, 1]$ , donde  $\bar{B}$  denota la clausura de la bola unitaria de  $\mathbb{X}$ .

g.  $F$  es **fuertemente convexa con módulo  $c$**  si

$$tF(x) + (1 - t)F(y) + ct(1 - t) \|x - y\|^2 \bar{B} \subset F(tx + (1 - t)y), \quad (2.15)$$

$x, y \in D$ , donde  $\bar{B}$  denota la clausura de la bola unitaria de  $\mathbb{X}$ . Si la Inclusión (2.15) se cumple para algún  $t$  fijo de  $[0, 1]$ , decimos que  $F$  es  **$t$ -fuertemente convexa con módulo  $c$**  y si  $t = \frac{1}{2}$  se dice que  $F$  es **fuertemente midconvexa**.

Podemos observar que como  $0 \in K$ , entonces

$$F \text{ es convexa} \implies F \text{ es } K\text{-convexa.}$$

Además

$K = \{0\}$ ,  $F$  es  $K$ -convexa  $\implies F$  es convexa.

$F$  es convexa  $\implies F$  es  $\varepsilon - K$ -convexa.

$F$  es convexa  $\implies F$  es fuertemente convexa con módulo  $c$ .

Algunos resultados sobre algunas de estas multifunciones .

**Teorema 2.12.1** (Teorema de Descomposición (K. Nikodem 1989 [193])).  
*Sea  $\mathbb{Y}$  un espacio topológico localmente convexo. Una multifunción  $F : I \rightarrow C(\mathbb{Y})$  es midconvexa, si y sólo si, existe una función aditiva  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  y una multifunción continua  $G : I \rightarrow CC(\mathbb{Y})$ , tal que*

$$F(x) = a(x) + G(x), \quad x \in D.$$

**Teorema 2.12.2** (T. Cardinali, K. Nikodem, F. Papalini, 1993 [54]).  
*Sea  $K \subset \mathbb{R}^m$ . Si una multifunción  $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow n(\mathbb{R}^n)$  es  $K$ -convexa, entonces existe una multifunción  $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow n(\mathbb{R}^m)$   $\varepsilon$ - $K$ -convexa, tal que*

$$F(x) \subset G(x) \subset F(x) + K + i_{n+m}\varepsilon B, \quad x \in D,$$

donde  $j_{n+m} = \min \left\{ \frac{n^2+3n}{2n+2}, p \right\}$  con  $2^{m-1} \leq p < 2^m$ .

**Teorema 2.12.3** (Teorema tipo Kuhn (T. Cardinali, K. Nikodem, F. Papalini, 1993 [54])). *Sean  $\mathbb{X}$  un espacio vectorial,  $\mathbb{Y}$  un espacio vectorial real topológico,  $K \subset \mathbb{Y}$  un cono convexo cerrado y  $t \in (0, 1)$ . Si  $F : D \subset \mathbb{X} \rightarrow C(\mathbb{Y})$  es  $K$ - $t$ -convexa, entonces es  $K$ -midconvexa.*

**Teorema 2.12.4** (Generalización Teorema del Sandwich (E. Sadowska [232])). *Sean  $F, G : I \rightarrow n(\mathbb{R})$ , tal que*

$$GrF = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y \in F(x)\}$$

es la unión de dos subconjuntos conexos de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces

$$tF(x) + (1-t)F(y) \subset G(tx + 1-t)y,$$

$x, y \in I$ ,  $t \in (0, 1)$ , si y sólo si, existe una multifunción convexa  $H : I \rightarrow n(\mathbb{R})$ , tal que

$$F(x) \subset H(x) \subset G(x), \quad x \in I.$$

Además este resultado también es cierto si  $F, G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow n(\mathbb{R}^p)$ , son tales que  $GrF = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R}^p : y \in F(x)\}$  se puede escribir como la reunión de  $n + p$  subconjuntos conexos de  $\mathbb{R}^{n+p}$  y

$$t_1 F(x_1) + \cdots + t_{n+p} F(x_{n+p}) \subset G(t_1 x_1 + \cdots + t_{n+p} x_{n+p}),$$

$x_i \in D, t_i \in [0, 1]$ .

Recientemente se mostraron algunos resultados sobre multifunciones fuertemente convexa con módulo  $c$  en [151], que exponemos en el siguiente teorema.

**Teorema 2.12.5** (H. Leiva, N. Merentes, K. Nikodem, J.L. Sánchez [151]). Sean  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ ,  $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$  espacios normados reales,  $D \subset \mathbb{X}$  convexa,  $c > 0$ , y  $F : D \rightarrow BCl(\mathbb{Y})$ .

a. Si  $F$  es  $t$ -fuertemente convexa con módulo  $c$ , entonces  $F$  es fuertemente midconvexa con módulo  $c$ .

b. Las tres condiciones siguientes son equivalentes;

- $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$  es un espacio con producto interno.
- $F$  es fuertemente  $t$ -convexa con módulo  $c$ , si y sólo si, la multifunción  $G := F + c \|\cdot\|^2 \overline{B}$  es  $t$ -midconvexa.
- $G := F + c \|\cdot\|^2 \overline{B}$  es midconvexa, entonces es fuertemente midconvexa con módulo  $c > 0$ .

c.  $F$  es fuertemente midconvexa con módulo  $c$  y acotada sobre  $D$ , con  $\overset{\circ}{D}$ , entonces  $F$  es fuertemente convexa con módulo  $c$  y continua (es decir para  $x_0 \in D$  y  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ ,  $F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon B$  y  $F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B$ , para todo  $x \in D$  tal que  $\|x - x_0\|_{\mathbb{X}} \leq \delta$ ).

## 2.13 Subdiferencial.

En la Proposición 1.4.1 se afirma que toda función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexa tiene una recta soporte. Más aún se afirma que

$$f(x) - f(x_0) \geq m(x - x_0), \quad x \in I,$$

donde  $f'_-(x_0) \leq m \leq f'_+(x_0)$ .

En la parte e. del Teorema 1.8.1 se demuestra que si  $f : \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa diferenciable en  $x_0$ , entonces

$$f(x) - f(x_0) \geq \nabla f(x_0)(x - x_0), \quad x \in \overset{\circ}{D}.$$

El Teorema 1.9.2 garantiza que si  $f : \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $x_0$ , entonces

$$f(x) - f(x_0) \geq df(x_0)(x - x_0), \quad x \in \mathbb{X}.$$

Estos resultados motivan la siguiente definición.

**Definición 2.13.1** (Subdiferencial). Sean  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espacio normado,  $U \subset \mathbb{X}$  convexo y abierto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x \in U$ . Un **subgradiente** de la función  $f$  en  $x$  es un funcional lineal continuo  $x^* : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$f(y) - f(x) \geq x^*(y - x), \quad x \in \mathbb{X}.$$

El conjunto de los subgradientes de  $f$  en  $x$  se denomina **subdiferencial** de  $f$  en  $x$  y se denota por  $\partial f(x)$ .

**Observación 2.13.1.**

a.  $\partial f$  es una multifunción que asocia puntos de  $U$  con subconjuntos de  $\mathbb{X}^*$ .

b. El Teorema 1.9.2 garantiza que si  $f : U \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa y diferenciable en  $x$ , entonces  $\partial f(x) \neq \emptyset$ , más aún  $df(x) \in \partial f(x)$ .

c. Un resultado de interés es determinar si para dos funciones  $f, g$  se verifica la relación

$$\partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

Este resultado no es cierto en general (siempre se verifica la inclusión  $\partial(f + g)(x) \supset \partial f(x) + \partial g(x)$ ). Condiciones para que se cumpla la igualdad son dadas en un conocido teorema, cuya versión para el caso  $\mathbb{R}^n$ , damos a continuación.

**Teorema 2.13.1** (Moreau-Rockafellar). *Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones convexas, tal que  $f$  es continua en  $x_0$ . Si  $\partial(f + g)(x_0) \neq \emptyset$ , entonces  $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ ,  $\partial g(x_0) \neq \emptyset$  y*

$$\partial(f + g)(x_0) = \partial f(x_0) + \partial g(x_0).$$

La demostración de esta versión del Teorema de Moreau-Rockafellar puede verse en [1] (Ver también [222]).

El tema de la subdiferencial ha sido objeto de estudio por muchos autores, originando lo que se conoce como Cálculo Subdiferencial. Sobre esta parte de la Matemática se puede revisar [35, 40, 190, 205, 222].

## 2.14 Algunos Contextos donde Aparece la Convexidad.

En el libro de S. Boyd y L Vandenberghe [41] de finales de la primera década de este siglo, evidencian la importancia de la convexidad cuando señalan lo siguiente:

*“... Desde 1990, muchas aplicaciones han sido descubiertas en áreas como los sistemas de control automático, la estimación y procesamiento de señales, comunicaciones y redes, el diseño de circuitos eléctricos, análisis de datos y modelos, estadística y finanzas. La optimización convexa también ha encontrado una amplia gama de aplicaciones en la optimización combinatoria y global...”*

*Creemos que muchas otras aplicaciones de optimización convexa todavía están esperando a ser descubiertas. ”*

Existen una variedad de tópicos en los que aparece la convexidad. A continuación hacemos referencia de algunos de ellos. No pretendemos hacer un lista exhaustiva y en algunos casos exponemos algunas pequeñas explicaciones de qué tipo de problemas se tratan.

**Optimización Matemática.** La *Optimización Matemática* es un área de la Matemática donde se estudian problemas de elección de la mejor alternativa entre posibles opciones. Un *Problema de Optimización Matemática* o *Problema de Optimización* “POM o PO” tiene la forma:

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimizar} & f(x) \\
 \text{sujeto a} & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\
 & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p
 \end{array} \quad (2.16)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ .

El objetivo es hallar el mínimo de  $f(x)$ , donde  $x$  está sujeto a las condiciones

$$f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad , \quad h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

La función  $f$  se denomina *Función Objetivo*. Las condiciones de desigualdad son denominadas *Restricciones de Desigualdad* y las condiciones de igualdad *Restricciones de Igualdad*. Si no tenemos restricciones decimos que el problema es sin restricciones.

Las funciones involucradas están definidas en subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Y los valores de  $x$  están en  $D = D_f \cap \left( \bigcap_{i=1}^m D_{f_i} \right) \cap \left( \bigcap_{i=1}^p D_{g_i} \right)$ , denominado *Dominio de Optimización*. Los valores de  $x \in D$  que verifican las restricciones son denominados *Soluciones Factibles*.

En el caso que las funciones son lineales el problema es denominado PPL (*Problema de Programación Lineal*).

Si en el PO (2.16) las funciones  $f, f_i, i = 1, \dots, m$  son convexas (Cóncavas) y las funciones  $h_i, i = 1, \dots, p$  son lineales se dice que es un problema de **Optimización Convexa** (*Cóncava*). También podemos considerar el caso en el que las funciones  $f, f_i, i = 1, \dots, m$  sean cuasi convexas, pseudo convexas, invex como planteamos en el la Sección 2.3.3 o funciones *E*-convexas. Además se puede dar el caso en que tengamos más de una función objetivo. En esta situación se le incorpora a la denominación de cada problema el adjetivo de *Multi objetivo*.

**Cálculo de Variaciones** Este tipo de problemas se circunscribe a determinar los puntos óptimos de funcionales definidos sobre algún espacio funcional. En este caso las soluciones son funciones.

Un problema en este sentido fue planteado por J. Bernoulli en 1696, conocido como **El problema de la braquistócrona** (breve en el tiempo) y se refiere a determinar la forma que debe tener un alambre (determinar la curva) fijado en dos puntos A y B del plano de manera que al soltar un objeto del punto A llegue al punto B en el menor tiempo posible. Si el punto A tiene coordenadas  $(x_0, y_0)$  y el punto B tiene coordenadas  $(x_1, y_1)$  entonces este problema se reduce a determinar una función  $y$  que sea solución del problema:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{y_0-y(x)}} \\ \text{sujeta a} & y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \end{array} .$$

Para los cálculos se puede revisar [164]. Para ahondar sobre este tema se puede ver [244].

**Teoría de Dualidad.** En Programación Lineal cuando se habla de “**Dualidad**” se entiende la relación entre todo problema de minimización con un problema de maximización. De tal forma que resolviendo el segundo obtenemos un valor óptimo del primero. Denotemos el problema de programación lineal por PL y el problema dual PD y exploremos algunas ideas sobre este tema.

Un PL tiene un estructura del tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & z = cx \\ \text{sujeta a} & Ax \geq b, x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0 \end{array} ,$$

donde  $c \in \mathbb{R}^n$  es una función lineal y  $A$  es una matriz de orden  $n \times m$  y  $b$  es un vector fijo de  $\mathbb{R}^m$ .

A este problema le podemos asociar otro problema conocido como problema dual PD:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & w = by \\ \text{sujeta a} & A^T y \leq c, y \in \mathbb{R}^m, y \geq 0, \quad , y \in \mathbb{R}^m. \end{array}$$

Estos dos problemas tienen las relaciones:

- $cx \geq by$ , para toda solución factible  $x$  de PL y de PD.
- PL tiene solución óptima si y sólo si PD tiene solución óptima.

- PL no tiene solución óptima, entonces PD no tiene solución y viceversa.
- PL es el problema dual de PD.

Además las funciones objetivos son funciones convexas y las regiones factibles son conjuntos convexos. De esta manera las propiedades de las funciones convexas y conjuntos convexos son importantes en la resolución de estos problemas.

En la Matemática se ha desarrollado toda una teoría denominada Teoría de Dualidad inspirada en los problemas aludidos y su origen se debe a John von Neumann en su trabajo sobre teoría de juegos [184]. Para revisar material bibliografía de ese tópico (Ver[1, 18, 35, 31, 39, 41, 154, 222]).

**Optimización Dinámica.** La optimización dinámica estudia la obtención de la solución óptima de sistemas que evolucionan en el tiempo susceptibles de influencia mediante decisiones externas.

**Modelo del Transporte.** Este modelo se usa para describir un problema de programación sobre el transporte de insumos, personas, etc, desde lugares de origen a determinados destinos. Los modelos sirven, entre otras cosas, para la toma de decisiones sobre planificación, ingeniería, adquisición de vehículos de transporte, capacidad de infraestructura, impactos ambientales, contaminación, etc.

Veamos un ejemplo de una situación que se estudia con este modelo. Supongamos que tenemos  $m$  centros de suministro, de donde podemos transportar ciertos insumos a  $n$  destinos que requieren dichos insumos. Denotemos por  $a_i, i = 1, \dots, m$  el número de unidades disponibles de un producto del lugar de suministro  $i$ ; y  $b_j, j = 1, \dots, n$  el número de unidades de determinado producto con que se desea abastecer el destino  $j$ . Denotemos por  $C_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  el costo para transportar una unidad del producto desde el origen  $i$  al destino  $j$ . El problema consiste determinar el número de unidades del producto que se debe transportar de cada lugar de suministro a cada destino, de manera que el costo total sea mínimo y se cumplan con los niveles de disponibilidad de cada origen y de requerimiento de cada destino. De esta manera se debe

$$\begin{array}{l}
 \text{minimizar} \quad z = \sum_{i,j=1}^{m,n} C_{ij}x_{ij} \\
 \text{sujeto a} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m \\
 \quad \quad \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad i = 1, \dots, n \\
 \quad \quad \quad x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n
 \end{array}
 ,$$

donde  $x_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  representan el número de unidades que se han de transportar desde el lugar  $i$  al destino  $j$ . Para la resolución de estos problemas se usan ciertos métodos como: el de la esquina no-roeste, de costo mínimo y de la aproximación de Vogel. Los precursores en la formulación y resolución de este modelo fueron F. L. Hitchcock [121] y los premios Nobel en economía del año 1975, L. Kantorovich [137] y F. L. Koopmans [142]

**Teoría del Consumidor (ver [84]).** Se desea determinar qué elección realizará un consumidor entre los bienes disponibles con los recursos que dispone. En algunas situaciones, tomando en cuenta las preferencias de consumidor, se puede construir una función continua  $U : D_U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que se denomina “Función de utilidad”, donde  $D_U$  es el conjunto de bienes que la persona consume. El problema a resolver es escoger la combinación de bienes que maximizan la utilidad del individuo sujeto a un presupuesto fijo  $P_F$ .

Si  $p = (p_1, \dots, p_k)$  son los precios de los productos o bienes a consumir, entonces se debe:

$$\begin{array}{l}
 \text{maximizar} \quad U(x_1, \dots, x_k) \\
 p_1x_1 + \dots + p_kx_k \leq P_F \\
 x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k
 \end{array}
 .$$

**Desigualdad y Pobreza (ver [84]).** Se considera un grupo de  $n$  individuos o familias con una distribución de ingresos mensuales  $\mathcal{I} = (I_1, \dots, I_n)$ , donde  $I_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  representan los ingresos individuales obtenidos en un lapso de tiempo. Además

$$I_1 \leq \dots \leq I_p \leq \mathcal{Z} \leq I_{p+1} \leq \dots \leq I_n,$$

donde  $Z$  es lo que se conoce como “**Línea de Pobreza**” que indica un valor en la correspondiente moneda nacional, tal que las personas que tienen un ingreso por debajo de este monto, se consideran pobres. Para medir la pobreza se utilizan los “*Indíces de Pobreza*” que corresponde a una función que mide la pobreza  $P : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $P(\mathcal{I}, \mathcal{Z}) \in [0, 1]$  que indica el grado de pobreza asociado con una distribución de ingresos  $\mathcal{I}$  y la línea  $\mathcal{Z}$ . Por ejemplo en [89] se considera, la función:

$$P(\mathcal{I}, \mathcal{Z}) = \frac{1}{n \mathcal{Z}^\alpha} \sum_{i=1}^p (\mathcal{Z} - I_i)^\alpha,$$

donde  $\alpha \geq 0$  está prefijado,  $\mathcal{Z} > 0$  y  $\mathcal{Z} - I_i$  mide el déficit del individuo o familia  $I_i, i = 1, \dots, p$ .

Por ejemplo:

- $\alpha = 0 \implies P(\mathcal{I}, \mathcal{Z}) = \frac{p}{n}$  mide la proporción de pobres.
- $\alpha = 1 \implies P(\mathcal{I}, \mathcal{Z}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \left( \frac{\mathcal{Z} - I_i}{\mathcal{Z}} \right)$  mide la diferencia a corregir por per capita.

**Ejemplo 2.14.1.** Un problema a estudiar es si se dispone de un cierto presupuesto  $\mathcal{T} = t_1 + \dots + t_p$ , donde  $t_i, i = 1, \dots, p$  son recursos provenientes de diversas fuentes, y se desea repartir, por el Estado, en subsidios, de tal forma de reducir la pobreza lo más posible. El PO a resolver es:

$$\begin{aligned} \text{mínimizar} \quad & \sum_{i=1}^p (\mathcal{Z} - I_i - t_i)^\alpha \\ & T = t_1 + \dots + t_p \\ & t_i \geq 0, i = 1, \dots, p \\ & \mathcal{Z} - I_i - t_i \geq 0, i = 1, \dots, p \\ & I_i + t_i \leq I_{i+1} + t_{i+1}, i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad .$$

En el año 2006, J. J. Nuñez [196] escribe un excelente artículo sobre este tema.

**Portafolio** Otro problema de interés en economía se refiere a inversiones de capitales en activos financieros. Como bonos, certificados, cuentas de ahorros, acciones y otras opciones existente en el mercado financiero.

El problema se refiere a determinar las posibles combinaciones de las inversiones logrando dos objetivos: maximizar la ganancia y minimizar el riesgo. En este tipo de problema se utilizan ciertas mediciones estadísticas como la varianza de la cartera, la covarianza entre los rendimientos y la esperanza de la rentabilidad. El pionero en estudiar estas situaciones fue uno de los premios Nobel en economía del año 1990, H. Markowitz [163] donde plantea un modelo conocido como “*Modelo de Markowitz*” (Ver [77]).

**Electrónica.** En este contexto es importante determinar los tamaños de dispositivos de equipos electrónicos, que cumplen los requisitos de diseño y que sea más eficiente en el uso de la energía. Aquí las variables son las dimensiones del dispositivo y las restricciones se refieren a los requerimientos de fabricación, tales como límites de dimensión, tiempo de funcionamiento operable dentro de los estándares establecidos, etc.

**Estadística.** Un ejemplo es encontrar un modelo de una familia de modelos posibles, que ajusta mejor los datos obtenidos de cierta información. Las variables son los parámetros del modelo y las limitaciones (restricciones) la información previa, tales como condiciones de no negatividad. La función a optimizar pudiera ser una medida del error de predicción. En [162] se exponen ejemplos en esta área.

Como podemos apreciar la convexidad es de gran importancia en muchos problemas de Toma de Decisiones. En muchas situaciones los problemas tienen solución del punto de vista matemático, por ejemplo, en el caso del problema KKT (Sección 2.3.3) se dan ciertas condiciones para la existencia de solución. En KKT la solución debe verificar la condición:

$$\nabla f(x) + \sum_{k \in I(x)} \lambda_k \nabla g_k(x) = 0.$$

Los métodos de solución para algunos problemas de optimización se reducen a construir un algoritmo para obtener la solución “con cierto nivel de precisión”, como es el caso del Algoritmo Simple o Método Simplex, desarrollado por G. Dantzing en 1947 [64], para localizar de una manera eficiente entre los puntos extremos la solución de un PPL.

Además de los ejemplos que hemos aludido de aplicaciones de la convexidad, debemos resaltar otros, no menos importantes, que son objetos de estudio por muchos investigadores en distintas ramas del conocimiento, como son Optimización Dinámica, Optimización Combinatoria, Geometría de Espacios de Banach, Operadores Monótonos, Cálculo Subdiferencial, Teoría de Desigualdades, Teoría de Control, Análisis Convexo Discreto, Teoría de la Producción, Telecomunicaciones, Teoría de Señales, Estadística, Programación Matemática en sus distintas vertientes. Algunas referencias para consultar sobre estos temas son [1, 22, 23, 24, 35, 39, 41, 53, 57, 58, 62, 77, 84, 155, 158, 164, 168, 169, 170, 177, 191, 204, 205, 238, 244, 249].

## 2.15 Más Conceptos de Convexidad.

Existen otros conceptos de convexidad de funciones además de los que hemos hecho referencia. En esta sección haremos solamente referencia a algunos de ellos y citaremos algunos trabajos donde lo mencionan o donde se introduce la respectiva noción. Hemos colocados los distintos conceptos por orden cronológico.

**1. Funciones Schur-Convexas.** I. Schur 1923 [236] (Ver también [162, 190, 238, 242]).

**Definición 2.15.1.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y simétrico (si  $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ , entonces  $x_\sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \in D$ , para cualquier permutación  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$ ). Una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es **Schur-convexa o S-convexa** si

$$x \prec y \implies f(x) \leq f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

donde después de ordenar las componentes de  $x, y$  en forma creciente:

$$x'_1 \leq \dots \leq x'_n, \quad y'_1 \leq \dots \leq y'_n,$$

$$x \prec y \text{ significa } \sum_{i=1}^k x'_i \leq \sum_{i=1}^k y'_i, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n y_i.$$

Otra manera de definir estas funciones es usando las llamadas matrices biestocástica o doblemente estocástica (Ver [162]). Una matriz

$S = (s_{ij})_n$  de orden  $n \times n$  es biestocástica si todas sus entradas son no negativas y la suma de las entradas de cada fila y cada columna es igual a 1. Es decir:

$$s_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n$$

y

$$\sum_{i=1}^n s_{ij} = 1, j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n s_{ij} = 1, i = 1, \dots, n.$$

Dado un intervalo  $I$ , una función  $f : I^n \rightarrow \mathbb{R}$  es Schur-convexa si

$$f(Sx) \leq f(x), \quad x \in I^n$$

para toda matriz  $S$  doblemente estocástica (Ver [223]).

En [162] se realiza un extenso estudio de estas funciones (Ver en particular el capítulo 3) y en [196] se hace uso de ellas en problemas de medición de desigualdad y pobreza.

## 2. Funciones Geométricamente Convexas. P. Montel 1928 [180]

**Definición 2.15.2.**  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  es **geométricamente convexa** o **convexa respecto a la media geométrica** si

$$f(\sqrt{xy}) \leq \sqrt{f(x)} \sqrt{f(y)}, \quad x, y \in (0, \infty). \quad (2.17)$$

J. Matkowski 1992 [165] (Ver también [130]) generaliza este concepto modificando la Ecuación (2.17) por:

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}, \quad x, y \in (0, \infty), t \in [0, 1].$$

C. P. Niculescu 2004 [188] hace otra generalización modificando la Ecuación (2.17) por:

$$f(x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}) \leq [f(x_1)]^{t_1} \cdots [f(x_n)]^{t_n},$$

$x_i \in (0, \infty), t_i \in [0, 1], t_1 + \cdots + t_n = 1.$

T-Y. Zhang, A-P. Ji, F. Qi, 2012 [258] definen función **S-geométricamente convexa**, modificando la Ecuación (2.17) por:

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^{t^s} [f(y)]^{(1-t)^s}, \quad x, y \in (0, \infty), s \in [0, 1].$$

### 3. Funciones Delta Convexas. A. D. Aleksandrov 1950 [6].

La clase  $BC[a, b]$  de las funciones que se descomponen como diferencia de funciones convexas la han considerado varios autores para funciones  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $\mathbb{X}$  es un espacio vectorial normado, como sigue

**Definición 2.15.3.** Sean  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espacio normado,  $D \subset \mathbb{X}$  un subconjunto convexo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es **delta convexa** si se puede escribir como diferencia de dos funciones convexas y continuas.

Ver [141, 247, 248].

### 4. Funciones $\gamma$ -Paraconvexas. S. Rolewicz 1979 en [226].

**Definición 2.15.4.** Sea  $\gamma > 0$ . Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es  **$\gamma$ -paraconvexa** si para algún  $\varepsilon > 0$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon|x-y|^\gamma,$$

$x, y \in I, t \in (0, 1)$ .

Además generaliza este concepto para multifunciones.

En el año 2006 S. Rolewicz [227] hace otra generalización de la manera siguiente.

**Definición 2.15.5.** Sean  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  una función creciente tal que  $\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(t)}{t} < \infty$ . Una función  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es  **$\alpha(\cdot)$ -paraconvexa** si existe  $C > 0$ . tal que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + C\alpha(\|x-y\|),$$

$x, y \in D, t \in (0, 1)$ .

### 5. Funciones $m$ -Convexas. G. Toader 1984 [241].

**Definición 2.15.6.** Sean  $b > 0$  y  $m \in [0, 1]$ . Una función  $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es  **$m$ -convexa** si

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y),$$

$x, y \in [0, b], t \in [0, 1]$ .

En [202] J. Park afirma que en 1990 S. S. Dragomir y N. M. Ionescu [74] (en [82] señalan que fue en [176]) considera una forma más general de este concepto, combinándolo con el de  $s$ -convexidad (Definición 2.8.1).

**Definición 2.15.7.** Sean  $b > 0$  y  $\alpha, m \in [0, 1]$ . Una función  $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es  $(\alpha, m)$ -convexa si

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^\alpha f(x) + m(1-t)^\alpha f(y), \quad (2.18)$$

$x, y \in [0, b]$ ,  $t \in [0, 1]$ .

En [202] J. Park, introducen el estudio de un nuevo concepto, denominado  $(h, m)$ -convexidad cambiando la Desigualdad (2.18) por

$$f(tx + m(1-t)y) \leq h(t)f(x) + mh(1-t)f(y),$$

donde  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , es no negativa y no idénticamente nula.

**6. Multifunciones  $p$ -Convexas.** D. Popa 1998 [211] (Ver también [212]).

**Definición 2.15.8.** Sean  $\mathbb{X}$  un espacio vectorial y  $p \in (0, 1)$  fijo. Un conjunto  $D \subset \mathbb{X}$  es  $p$ -convexo si

$$px + (1-p)y \in D, \quad x, y \in D.$$

Si  $D \subset \mathbb{X}$  es  $p$ -convexo, una multifunción  $F : D \rightarrow n(\mathbb{X})$  es  $p$ -convexa si

$$pF(x) + (1-p)F(y) \subset F(px + (1-p)y), \quad x, y \in D.$$

**7. Función Co-ordenadas Convexa.** S. S. Dragomir 2001 [71].

**Definición 2.15.9.** Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$ ,  $c < d$ ,  $\Delta := [a, b] \times [c, d]$ . Una función  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  es **co-ordenada convexa** si las funciones  $f(\cdot, y)$ ,  $y \in [c, d]$  y  $f(x, \cdot)$  son convexas en  $[a, b]$  y  $[c, d]$ , respectivamente.

$f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  es convexas si

$$f(tx + (1-t)y, tz + (1-t)w) \leq tf(x, z) + (1-t)f(y, w),$$

$(x, z), (y, w) \in \Delta$ ,  $t \in [0, 1]$ .

En el año 2011 M. Emin, Özdemir, E. Set y M. Zeki Sarikaya, [82] hace una generalización de este concepto usando la noción de  $m$ -convexidad.

**Definición 2.15.10.** Sean  $b, d > 0$ ,  $m \in [0, 1]$  y  $\Delta = [0, b] \times [0, d]$ . Una función  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  es  **$m$ -convexa en  $\Delta$  o co-ordenada convexa en  $\Delta$**  si

$$f(tx + (1-t)y, tz + m(1-t)w) \leq tf(x, z) + m(1-t)f(y, w),$$

$(x, z), (y, w) \in \Delta, t \in [0, 1]$ .

**8. Funciones  $(\omega_1, \omega_2)$ -convexas** M. Bessenbyei y Z. Páles 2003 [34].

**Definición 2.15.11.** Sean  $\omega_1, \omega_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es  **$(\omega_1, \omega_2)$ -convexa** si

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(y) & f(z) \\ \omega_1(x) & \omega_1(y) & \omega_1(z) \\ \omega_2(x) & \omega_2(y) & \omega_3(z) \end{vmatrix} > 0,$$

$x, y, z \in I, x < y < z$ .

Esta definición está inspirada en la Parte c de la Proposición 1.1.1. Posteriormente, en el año 2008 M. Bessenbyei, generaliza esta noción.

**Definición 2.15.12.** Sean  $\omega_i : I \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$  un **sistema Chebyshev**. Es decir, funciones continuas, tales que si  $x_1 < \dots < x_n$  son elementos de  $I$ , entonces:

$$\begin{vmatrix} \omega_1(x_1) & \cdots & \omega_1(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x_1) & \cdots & \omega_n(x_n) \end{vmatrix} > 0.$$

Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es  **$(\omega_1, \dots, \omega_n)$ -convexa** si

$$(-1)^n \begin{vmatrix} f(x_1) & \cdots & f(x_{n+1}) \\ \omega_1(x_1) & \cdots & \omega_n(x_{n+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n(x_1) & \cdots & \omega_n(x_{n+1}) \end{vmatrix} \geq 0,$$

$x_i \in I, i = 1, \dots, n+1, x_1 < \dots < x_{n+1}$ .

Si  $\omega_1(x) = 1, \dots, \omega_n(x) = x^{n-1}$  si dice que  $f$  es **polinómicamente  $n$ -convexa**.

**9. Funciones Cuasi Midconvexas.** A. Gilányi, K. Nikodem y Z. Páles 2004 [94].

**Definición 2.15.13.** Sean  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espacio normado,  $D \subset \mathbb{X}$  un subconjunto abierto y convexo,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es **cuasi midconvexo** si

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\}, \quad x, y \in D.$$

**10. Función  $(M, N)$ -Convexa.** J. Matkowski 2003 [166] (Ver también [189]).

**Definición 2.15.14.** Una función  $M : I^2 \rightarrow I$  se llama **promedio** (mean) si

$$\min\{x, y\} \leq M(x, y) \leq \max\{x, y\}, \quad x, y \in I.$$

Dadas dos intervalos  $I, J$  y dos funciones promedio  $M : I^2 \rightarrow I$ ,  $N : J^2 \rightarrow J$ , una función  $f : I \rightarrow J$  es  **$(M, N)$ -convexa** si

$$f(M(x, y)) \leq N(f(x), f(y)), \quad x, y \in I. \quad (2.19)$$

En el año 2007, M. Lewicki [152] considera la noción de función  $(M, N)$ -Wright convexa, sustituyendo la Desigualdad (2.19) por

$$f(M(x, y)) + f(N(x, y)) \leq f(x) + f(y), \quad x, y \in I,$$

imponiendo la condición adicional que  $M(x, y) + N(x, y) = x + y, x, y \in I$ .

**11. Funciones  $(M, p, q)$ -Convexa.** Z. Daróczy y Z. Páles 2005 [67].

**Definición 2.15.15.** Sean  $M : I^2 \rightarrow I$  una función promedio y  $p, q \in (0, 1)$ . Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es  **$(M, p, q)$ -convexa** si

$$f(px + qy + (1 - p - q)M(x, y)) \leq pf(x) + qf(y) + (1 - p - q)f(M(x, y)),$$

$x, y \in D$ .

## 12. Funciones $(d, t)$ -Convexas. A. Háyzy 2007 [111].

**Definición 2.15.16.** Sean  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espacio normado,  $D \subset \mathbb{X}$  un conjunto abierto y convexo,  $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $t \in (0, 1)$ . Una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es  $(d, t)$ -convexa si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + d(x, y), \quad x, y \in D.$$

Un caso particular de estas funciones lo tratan A. Háyzy y Z. Páles 2005 [114] de la manera siguiente. *Funciones  $(\varepsilon, p, t)$ -convexas.*

**Definición 2.15.17.** Sean  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espacio normado,  $D \subset \mathbb{X}$  un subconjunto abierto y convexo,  $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty)^{k+1}$ ,  $p = (p_0, \dots, p_k) \in [0, \infty)^{k+1}$  y  $t \in (0, 1)$ .  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es  $(\varepsilon, p, t)$ -convexa si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \|x - y\|^{p_i},$$

$x, y \in D$ .

## 13. Funciones *Fuertemente Convexa de Orden $m$ con módulo $c$* . G. H. Lin y M. Fukushima 2003 [153].

**Definición 2.15.18.** Sean  $\mathbb{X}$  un espacio de Banach,  $c, m > 0$ . Una función  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es **fuertemente convexa de orden  $m$  con módulo  $c$**  si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + ct(1-t) \|x - y\|^m,$$

$x, y \in D, t \in (0, 1)$ .

Una generalización de este concepto para multifunciones lo hace H. Huan 2010 [124].

**Definición 2.15.19.** Sean  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$  espacios de Banach,  $c, m > 0$ ,  $D \subset \mathbb{X}$  convexo.  $F : D \rightarrow n(\mathbb{Y})$  es **fuertemente gráfico convexa de orden  $m$  con módulo  $c$**  si

$$tF(x) + (1-t)F(y) + ct(1-t) \|x - y\|_X^m \overline{B_Y} \subset F(tx + (1-t)y),$$

$x, y \in D$ , donde  $\overline{B_Y}$  denota la clausura de la bola unitaria del espacio  $\mathbb{Y}$ .

**14. Funciones Fuertemente Convexas de Orden  $k$  con módulo  $c$ .** R. Ger, K. Nikodem [93].

**Definición 2.15.20.** Sea  $c > 0$  y  $k$  un entero positivo. Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es **fuertemente convexa de orden  $k$  con módulo  $c$** , si  $f[x_1, \dots, x_{k+1}] \geq c$ , para cualquier colección de  $k + 1$  puntos  $x_1, \dots, x_{k+1} \in [a, b]$ .

**15. Funciones  $(k, h)$ -Convexas.** A. Házy 2012 [112]. (Ver también [174]).

**Definición 2.15.21.** Sean  $T \subset \mathbb{R}$  un conjunto no vacío, tal que si  $t \in T$ , entonces  $1 - t \in D$ ,  $h, k : T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{X}$  un espacio real o complejo y  $D \subset \mathbb{X}$  un conjunto abierto  $k$ -convexo ( $k(t)x + k(1 - t)y \in D$ ,  $x, y \in D$ ,  $t \in T$ ). Una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es  **$(k, h)$ -convexa** si

$$f(k(t)x + k(1 - t)y) \leq h(t)f(x) + h(1 - t)f(y),$$

$x, y \in D$ ,  $t \in T$ .

## 2.16 ¿Qué Investigar Sobre un Concepto de Convexidad?

Si tenemos un concepto de función convexa  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos obtener nuevos resultados, haciendo lo siguiente:

1. Generalizar el concepto modificando el dominio:  $D \subset \mathbb{R}^n$  o  $D \subset \mathbb{X}$ ,  $D$  convexo y  $\mathbb{X}$  un espacio vectorial o normado.
2. Cambiar el conjunto de llegada por:  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{Y}$ , donde  $\mathbb{Y}$  es un espacio vectorial o normado con un orden.
3. Generalizar el concepto para multifunciones.
4. Determinar que relación tiene este nuevo concepto con la noción clásica de convexidad.
5. Dar interpretaciones geométricas.
6. Estudiar condiciones para el acotamiento por arriba localmente o globalmente, continuidad, diferenciabilidad, etc.

7. Considerar los correspondientes conceptos de  $t$ -convexa, midconvexa  $\varepsilon$ -convexa,  $(\varepsilon, \delta)$ -convexa,  $h$ -convexa, fuertemente convexa módulo  $c$ , etc. y determinar relaciones entre ellos.
8. Estudiar si se puede obtener un resultado tipo: Teorema tipo Ostrowski, Sandwich, Bernstein-Doetsch, Kuhn u otro.
9. Determinar si es posible generalizar desigualdades tipo Jensen, Hermite-Hadamard, Fejér o alguna otra.
10. Determinar si el concepto tiene aplicaciones. En particular en problemas de optimización y economía.

## 2.17 Ejercicios.

1. Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es aditiva si  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Demostrar que
  - a) Toda función aditiva es midconvexa.
  - b) Si  $f$  es aditiva, entonces:
    - i.  $f\left(\sum_{k=1}^m x_k\right) = \sum_{k=1}^m f(x_k)$ ,  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ .
    - ii.  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ ,  $\lambda \in \mathbb{Q}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .
  - c) Toda función aditiva y continua es lineal.
2. Un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es Jensen convexo o simplemente  $J$ -convexo si

$$\frac{x+y}{2} \in C, \quad x, y \in C.$$

Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y convexo.

- a) Demostrar que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es midconvexa si y sólo si

$$\{(x, y) \in D \times \mathbb{R} : f(x) < y\}$$

es  $J$ -convexo.

- b) Demostrar que si un conjunto  $C$  es Jensen convexo y cerrado, entonces es convexo.

3. Demostrar el Corolario 2.1.1.
4. Revisar los problemas de las p. 216-218, 223-224 de [223] y p.158-159, 195-196 de [146].
5. Demostrar que  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es cuasi cóncava si y sólo si  $f^{-1}[\alpha, \infty)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  es convexo.
6. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x, y) := (x+y)^3 + x+y$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Demostrar que  $f$  es cuasi convexa pero no es convexa.
7. Demostrar que si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es cuasi convexa y cuasi cóncava, entonces es monótona.
8. Un subconjunto  $D \subset \mathbb{X}$  es un *cono* si  $\lambda x \in D$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $x \in D$ . Demostrar que la intersección de conos es un cono y que un cono es convexo si es cerrado para la suma ( $x + y \in D$ ,  $x, y \in D$ ).
9. Demostrar que la clase de las funciones convexas es un cono en el espacio de las funciones  $f : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ .
10. Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un *cono convexo*. Una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es homogénea de grado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si

$$f(tx) = t^\alpha f(x), \quad x \in D, t > 0.$$

Sea  $f$  es homogénea de grado  $\alpha = 1$ , tal que  $f(x) > 0$ ,  $x \in D$ . Demostrar que  $f$  es cuasi convexa si y sólo si es convexa.

$$f\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k\right) \leq \text{máx} \{f(x_1), \dots, f(x_k)\},$$

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0, k = 1, \dots, p.$$

11. Demostrar la Proposición 2.3.4.
12. ¿Cuáles de las siguientes funciones  $f(x) := x|x|$ ,  $g(x) := x|x|+x^2$ ,  $h(x) := x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$  son pseudo convexas?

13. Considerar las funciones  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por

$$f(x, y) := -(x - y)^2, \quad g(x, y) := -x^2 - 2xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calcular la matriz Hessiana orlada  $\bar{H}(x, y)$  de cada una de estas funciones y determinar si  $f$  o  $g$  son pseudo convexas o cuasi convexas. Hacer el mismo estudio con la función  $h : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $h(x, y) := 2y - \frac{x}{y+1}$ ,  $(x, y) \in D$ . Donde  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\}$ .

14. Sean  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $P(x) := \{z \in D : f(z) \geq f(x)\}$ . Demostrar que  $f$  es cuasi cóncava si y sólo si  $P(x)$  es un conjunto convexo para cada  $x \in D$ .
15. Determinar cuáles de las siguientes funciones son invex o cuasi convexas:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := x^3$ ,  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x, y) := x^3 + x - 10y^3 - y$ .
16. Determinar bajo qué operaciones son cerradas las clases de funciones cuasi convexas, pseudo-convexas o invex.
17. Demostrar las Proposiciones 2.4.1 y 2.4.2.
18. Hacer un bosquejo de la gráfica de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x = \frac{k}{3^n} \quad k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 1 & , \quad \text{en otros casos.} \end{cases}$$

y demostrar que  $f$  es  $\frac{1}{3}$ -cuasi convexa y no es  $\frac{1}{2}$ -cuasi convexa (Ver [194]).

19. Demostrar las afirmaciones hechas sobre la función definida después del Teorema 2.8.1.
20. Hacer un bosquejo de la gráfica de la función  $f$  definida en la parte c. de las Observaciones 2.8.2 y demostrar lo allí afirmado.
21. Demostrar la Proposición 2.9.1, sobre conjuntos  $E$ -convexos.
22. Considerar los conjuntos

$$M_1 := \text{Conv} \{(0, 0), (2, 1), (0, 3)\},$$

$$M_2 := \text{Conv} \{(0, 0), (-2, -1), (0, -3)\}.$$

- a) Verificar que  $M := M_1 \cup M_2$  no es convexo pero es  $E$ -convexo, respecto a la función segunda proyección  $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .
- b) Sea  $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $E(x, y) := \left( \frac{2y-x}{3}, \frac{4x+y}{3} \right)$ . Demostrar que  $M_1$  y  $M_2$  son  $E$ -convexos, pero que  $M_1 \cup M_2$  no es  $E$ -convexo.
23. Verificar las afirmaciones realizadas en la Observación 2.9.1 sobre funciones  $E$ -convexas.
24. Determinar algunas propiedades que verifican las funciones cuasi  $E$ -convexas, semi  $E$ -convexas y fuertemente  $E$ -convexas (Ver [255]).
25. Verificar la Igualdad (2.12).
26. Demostrar la Proposición 2.10.1.
27. Demostrar el Corolario 2.10.1 sobre descomposición de funciones fuertemente Wright convexas.
28. Construir ejemplos de multifunciones.
29. ¿Por qué en la Definición 2.12.1 de multifunción convexa  $F(x) \neq \emptyset$ ,  $x \in \mathbb{X}$ ?
30. En 1965 R. J. Aumann [17] (uno de los premios Nobel de economía del año 2005) introduce lo que se conoce hoy como integral de Aumann para multifunciones, como sigue:

Dada una multifunción  $F : [0, 1] \rightarrow n(\mathbb{R}^n)$  se considera la familia  $\mathcal{F}$  de las funciones  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  integrables, tales que  $f(t) \in F(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  (general las funciones que verifican esta propiedad se llaman **selectores**). Aumann define la multifunción integral:

$$\int_0^1 F(t)dt := \left\{ \int_0^1 f(t)dt : f \in \mathcal{F} \right\}.$$

En [17] hay un desarrollo de las propiedades de la integral de Aumann.

- (a) Construir ejemplos de  $\int_0^1 F(t)dt$ .

- (b) Demostrar que  $\int_0^1 F(t)dt$  es convexo.
31. Sea  $f(x) = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Demostrar que
- $$\partial f(0) = \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : h(x) = ax, x \in \mathbb{R}, |a| \leq 1\}.$$
32. Calcular el subdiferencial de la norma usual en  $\mathbb{R}^n$ .
33. Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Demostrar que:
- Si  $f$  es continua en  $x$ , entonces  $\partial f(x) \neq \emptyset$ .
  - Si  $f$  es diferenciable en  $x$ , entonces  $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$ .
  - Si  $f$  es subdiferenciable en  $x$ , entonces  $\partial f(x)$  es un conjunto convexo.
  - Qué puede decirse de las partes a), b) y c) si cambiamos  $\mathbb{R}^n$  por  $\mathbb{X}$ .
34. Dar ejemplos de funciones (no triviales) que verifique cada una de las definiciones de la Sección 2.15.
35. En [200] (Ver también [162]) se demuestra que una función  $f : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es Schur-convexa si y sólo si es simétrica y

$$\left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \right) (y - x) > 0, \quad x, y \in I, x \neq y.$$

Esta relación se conoce como “condición de Schur”. Usar este criterio para verificar (Ver [80]) que si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces  $f$  es convexa (cóncava), si y sólo si,

$$F : I^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad F(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t)dt & , \quad x \neq y \\ f(x) & , \quad x = y \end{cases}$$

es Schur-convexa (Schur-cóncava).

36. Demostrar que toda función promedio  $M$ , verifica  $M(x, x) = x$  y además es creciente en cada variable.

37. Verificar que las siguientes funciones son funciones promedio:

$$M : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad M(x, y) := \left( \frac{x^p + y^p}{2} \right)^{1/p}, \quad p \neq 0.$$

$$N : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad N(x, y) := \sqrt{xy}.$$

$$P : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad P(x, y) := \frac{x + y}{2}.$$

## 2.18 Problemas para Investigar.

1. Generalizar el Teorema 1.6.2 para funciones  $f, g : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ .
2. Plantear y demostrar una versión del Teorema 2.3.2 para funciones  $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  o más general  $f, g : D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  (Ver Teorema 2.3.2).
3. Siguiendo las ideas desarrolladas en la sección 2.6 para motivar la Definición de función Wright convexa (Definición 2.6.1) y el concepto de cuasi convexidad (Definición 2.3.1) podemos considerar la siguiente definición: una función  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es cuasi Wright convexa si

$$f(tx + (1 - t)y) + f(ty + (1 - t)x) \leq 2 \max \{f(x), f(y)\},$$

$x, y \in D, t \in (0, 1)$ . Estudiar que propiedades tienen este tipo de funciones (Ver [5]).

4. Definir los conceptos de función  $\frac{1}{2}$ - $E$ -convexa,  $t$ - $E$ -convexa,  $\varepsilon$ - $E$ -convexa, Wright- $E$ -convexa y  $h$ - $E$ -convexa y determinar que propiedades cumplen estas, observando los resultados estudiados en el Capítulo II para los otros conceptos de convexidad.
5. Investigar si el siguiente resultado es cierto. Si  $f$  es estrictamente convexa existirá  $c > 0$  tal que  $f$  es fuertemente convexa módulo  $c$ . De no ser cierto construir contraejemplo.
6. Definir el concepto de multifunción fuertemente cóncava con módulo  $c$ .

7. Estudiar los problemas propuestos en las líneas anteriores para los conceptos expuestos en la Sección 2.16. Con cada concepto se puede desarrollar toda una línea de investigación, sobre todo con los formulados más recientemente.
8. Considerar la generalización del concepto de función promedio para funciones  $M : I^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definir función  $(M, N)$ -convexa y estudiar sus propiedades.

# Índice alfabético

- $k$ -Variación Acotada, 80
- Calculo de Variaciones, 114
- Conjunto
  - $E$ -Convexo, 93
  - $p$ -Convexo, 123
  - Convexo, 39
  - Cuasi Midconvexo, 125
  - Diferenciable, 48
  - Fuertemente  $E$ -Convexo, 96
  - Jensen Convexo, 128
  - Subdiferencial, 112
- Conjunto de Nivel, 68
- Desigualdad
  - Cauchy-Schwarz, 35
    - Para Integrales, 36
  - Fejér, 38
  - Hölder, 34
    - Para Integrales, 35
  - Hermite-Hadamard, 37
  - Jensen
    - Para Integrales, 36
  - Minkowski, 35
    - Para Integrales, 36
  - Young, 37
- Desigualdad y Pobreza, 117
- Diferencias Divididas, 77
- Dominio Efectivo, 42
- Dualidad, 115
- El Problema de
  - la Braquistócrona, 115
- Electrónica, 119
- Epígrafo, 40
- Estadística, 119
- Familia de dos Parámetros, 88
- Función
  - $(M, N)$ -Convexa, 125
  - $(\alpha, m)$ -Convexa, 123
  - $(\varepsilon, \delta)$ -Convexa, 84
  - $(\varepsilon, p, t)$ -Convexa, 126
  - $(\varepsilon, t)$ -Convexa, 84
  - $(h, d)$ -Convexa, 92
  - $(k, h)$ -Convexa, 127
  - $(s, d)$ -Convexa, 90
  - $(t, h, d)$ -Convexa, 92
  - $(t, s, d)$ -Convexa, 90
  - $(t_1, \dots, t_k)$ -Convexa, 81
  - $E$ -Convexa, 94
  - $S$ -Convexa, 120
  - $S$ -Geoméricamente Convexa, 121
  - $\alpha(\cdot)$ -Paraconvexa, 122
  - $\gamma$ -Paraconvexa, 122
  - $(M, p, q)$ -Convexa, 125
  - $(\omega_1, \omega_2)$ -Convexa, 124
  - $(d, t)$ -Convexa, 126
  - $\mathcal{F}$ -Convexa, 88
  - $\varepsilon$ -Convexa, 83

- $\varepsilon$ -Fuertemente Convexa, 100
- $\varepsilon$ -Midconvexa, 84
- $h$ -Convexa, 91
- $k$ -Convexa, 79
- $m$ -Convexa, 122
- $m$ -Convexa en  $\Delta$ , 124
- $s$ -Convexa, 89
- $s_1$ -Convexa, 89
- $s_2$ -Convexa, 89
- $t$ -Convexa, 64
- $t$ -Cuasi Convexa, 74
- Absolutamente Continua, 23
- Co-ordenada Convexa, 123
- Conjunto Valuada, 107
- Convexa, 18
- Cuasi  $E$ -Convexa, 96
- Cuasi Convexa, 65
- Delta-Convexa, 122
- Fuertemente
  - $(\varepsilon, \delta)$ -Convexa, 100
  - $h$ -Convexa, 100
  - $t$ -Convexa, 100
  - Convexa, 96
  - Convexa de orden  $k$ , 127
  - Convexa de orden  $m$ , 126
  - Cuasi Convexa, 100
  - Gráfico Convexa, 126
  - Midconvexa, 100
  - Wright Convexa, 100
- Geoméricamente Convexa, 121
- Homogénea de Grado  $\alpha$ , 129
- Invex, 76
- Midconvexa, 17, 60
- Promedio, 125
- Propia, 42
- Pseudo-Convexa, 74
- Racionalmente
  - $(h, d)$ -Convexa, 92
  - $(s, d)$ -convexa, 90
  - Semi  $E$ -Convexa, 94, 96
  - Subgradiente, 112
  - Wright Convexa, 86
- Linea de Pobreza, 118
- Métrica de Hausdorff, 106
- Matriz Biestocástica, 120
- Media Geométrica-Media Aritmética, 34
- Modelo
  - de Markowitz, 119
  - del transporte, 116
- Multifunción
  - $K$ - $t$ -Convexa, 109
  - $K$ -Convexa, 109
  - $K$ -Midconvexa, 109
  - $\varepsilon$ - $K$ -Convexa, 109
  - $t$ -Convexa, 109
  - Convexa, 108
  - Fuertemente Convexa, 109
  - Midconvexa, 109
  - Poliedral, 107
- Optimización
  - Convexa, 114
  - Dinámica, 116
  - Matemática, 113
- Portafolio, 118
- Problema
  - de Optimización, 113
  - de Programación Lineal, 114
  - Dual, 115
  - KKT, 77
- Restricciones de

Desigualdad, 114

Igualdad, 114

Segunda Variación Acotada, 79

Selectores, 131

Sistema Chebyshev, 124

Solución Factible, 114

Teoría del Consumidor, 117

Teorema

Bernstein-Doetsch, 61

Blumberg-Sierpiński, 62

Carathéodory, 55

Helly, 56

Kuhn, 64

Moreau-Rockafellar, 113

Ostrowski, 62

Radon, 58

Sandwich, 32

Stolz, 25

Variación Acotada, 79



# Bibliografía

- [1] J. Abreu, L. Juricek, O. Monagas, J. R. Ortiz, S. Rivas, Introducción a la optimización Tomos I y II. Universidad Nacional Abierta. Caracas. 1985.
- [2] M. Adamek, A. Gilányi, K. Nikodem, Z. Páles, A note on three-parameter families and generalized convex functions, J. Math. Anal. Appl. 330, N° 2 (2007) 829-835.
- [3] A. O. Akdemir, M. Avci, H. Kavumaci, M. E. Özdemir, Inequalities for convex  $s$ -convex functions on  $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ . J. Ineq. App. (2012), (Online <http://www.journalofinequalitiesandapplications.com/content/2012/1/20>).
- [4] A. O. Akdemir, M. Gürbüz, M. E. Özdemir, Inequalities for  $h$ -convex functions via further properties, RGMIA Research Report Collection Volume 14, article 22, (2011), (Online <http://rgmia.org/v14.php>.)
- [5] A. O. Akdemir, M. E. Özdemir, C. Yildiz, On co-ordinated quasi-convex functions, Czechoslovak Math. J. 62, 4 (2012) 889-900.
- [6] A. D. Aleksandrof, Surfaces represented by the difference of convex functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 72 (1950) 613-616 (en ruso).
- [7] C. D. Aliprantis, K. C. Border, Infinite Dimensional Analysis, 3d. ed. Springer. 2006.
- [8] M. Alomari, M. Darus, On co-ordinated  $s$ -convex functions. International Math. Forum, 3 (2008), no. 40, 1977-1989.

- [9] M. Alomari, M. Darus, S. S. Dragomir, New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are quasi-convex (online <https://vuir.vu.edu.au/17949/1/Correctedmdssd.pdf>)
- [10] M. Alomari, M. Darus, S. S. Dragomir, U. S. Kirmani, Generalizations of the Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose derivatives are  $s$ -convex (Online <https://http://vuir.vu.edu.au/17727/1/mdssd.pdf>).
- [11] M. Alomari, M. A. Latif, On Hadmard-type inequalities for  $h$ -convex functions on the coordinates, *Int. J. Math. Anal.* 3 (2009), no.33, 1645-1656.
- [12] H. Angulo, J. Giménez, A. Moros, K. Nikodem, On strongly  $h$ -convex functions. *Ann. Funct. Anal.* 2 (2011) 2, 85-91.
- [13] T. M. Apostol, *Análisis matemático*, 2da edición, Editorial Reverté, 1981.
- [14] K. J. Arrow, K. J. Enthoven, Quasi-concave programming. *Econometrica* 29 (1961) 779-800.
- [15] J-P. Aubin, H. Frankowska, *Set-valued Analysis*. Birkhäuser. 1990.
- [16] J-P. Aubin, I. Ekeland, *Applied nonlinear analysis*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts. New York: John Wiley and Sons. 1984.
- [17] R. J. Aumann, Integrals of set-valued functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 12 (1965) 11–12.
- [18] A. Auslender, M. Teboulle, *Asymptotic cones functions in optimization and variational inequalities*. Springer. Springer Mongraphs in Mathematics. 2003.
- [19] A. Azócar, J. Giménez, K. Nikodem, J. L. Sánchez, On strongly midconvex functions, *Opuscula Math.* 31, 1 (2011).
- [20] A. Azócar, K. Nikodem. G. Roa, Fejer-type inequalities for strongly convex functions, *Ann. Math. Sil.* 26 (2012) 43-52.

- [21] O. Bagdasar, Inequalities and applications, Bachelor's degree thesis. Babes Bolyai University. Faculty of Mathematics and Computer Science, 2006.
- [22] R. Barbolla, E. Cerdá. P. Sanz, Optimización cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía, Pearson educación, s.a, Madrid 2001.
- [23] V. Barbu, T. Precupanu, Convexity and optimization in Banach spaces, Springer monographs in mathematics, fourth edition, Springer 2012.
- [24] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, C. M. Shetty, Nonlinear Programming. Theory and Algorithms, John Wiley. 1993.
- [25] A. Bavinok, A Course in convexity, Graduate Studies in Mathematics, Amer. Math. Soc., Vol 54, 2000.
- [26] K. Baron, J. Matkowski, K. Nikodem, A sandwich with convexity, Math. Pannonica 5/1 (1994) 139-144.
- [27] E. F. Beckenbach, On generalized convex functions, Bull. Amer. Math. Soc., 43 (1937) 362-371.
- [28] E. F. Beckenbach, R.H. Bing, On generalized convex functions, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945), 220-230.
- [29] A. Ben-Israel, B. Mond, What is invexity? J. Austral Math. Soc.. Ser. B (1986) 1-9.
- [30] C. Berge. Topological spaces. New York: Macmillan 1963. English translation by E. M. Patterson of Espaces topologiques et fonctions multivoques, published by Dunod, Paris, 1959.
- [31] L. D. Berkovitz, Convexity and optimization in  $\mathbb{R}^n$ . John Wiley & Sons. Inc. 2002.
- [32] F. Bernstein and G. Doetsch, Zur Theorie der konvexen Funktionen, Math. Ann. 76 (1915), no. 4, 514-526.
- [33] M. Bessenyei, Hermite-Hadamard-type inequalities for generalized convex functions. J. Ineq. Pure Appl. Math., 9 (3) (2008) 1-51

- [34] M. Bessenyei, Z. Páles, Hadamard-type inequalities for generalized convex functions. *Math. Ineq. Appl.*, 6 (3) (2003) 379-392
- [35] D. P. Bertsekas with A. Nedić, A. E. Ozdaglar, *Convex analysis and optimization*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 2003
- [36] H. Blumberg, On convex functions, *Trans. Amer. Math.Soc.* 20 (1919). 40-44.
- [37] M. Bombardelli, S. Varošanec, Properties of h-convex functions related to the Hermite-Hadamard-Fejér inequalities, *Comput. Math. Appl.* 58, 9 (2009) 1869-1877
- [38] K. C. Border, *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*, New York: Cambridge University Press. 1985
- [39] J. M. Borwein, J. D. Vandewerff, *Convex functions: Constructions, characterizations and counterexamples*, Cambridge University Press, 2010.
- [40] J. M. Borwein, Q. J. Zhu, A survey of subdifferential calculus with applications. *Nonlinear Anal.*, 38 (1999) 687-773.
- [41] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge University Press, 2009.
- [42] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Räumen. *Publ. Inst. Math.* 23 (1978),13-20.
- [43] W. W. Breckner, *Rational s-convexity. A generalized Jensen-convexity*. Cluj University Press, 2011.
- [44] W. W. Breckner and G. Orbán, *Continuity properties of rationally s-convex mappings with values in an ordered topological linear space*. Cluj-Napoca: "Babes-Bolyai" University Kolozsvár, 1978.
- [45] G. Brown, Continuous functions of bounded  $n$ -th variation, *Proc. Edinb. Math. Soc. (serie 2)* 16 (1969) 205-214.
- [46] P. S. Bullen, A criterion for  $n$ -convexity. *Pacific J. Math.*, 36, no.1 (1971) 81-98

- [47] P. S Bullen, Handbook of Means and their Inequalities, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.
- [48] P. Burai, A. Háyzy, On approximately  $h$ -convex functions. J. Convex Anal., 18 (2) (2011) 1-9.
- [49] P. Burai, A. Háyzy, T. Juhász, Bernstein-Doetsch type results for  $s$ -convex functions, Publ. Math., vol. 75, no. 1-2, (2009) 23-31.
- [50] P. Burai, A. Háyzy, T. Juhász, On approximately Breckner  $s$ -convexa functions, Control and Cybernetics, 40 (1) (2011) 91-99.
- [51] R. L. Burden, J. D. Faires, Numerical Analysis, Books-Cole, edition 7, 2004.
- [52] J. Chaillou, J. Henry, Problemas de topología, (extraídos del libro Topología de G. Choquet), Toray-masson s.a. Barcelana, 1976.
- [53] A. Cambini, L. Martein, Generalized convexity and optimization, Theory and applications, Lecture notes in economics and mathematical system 616, Springer, 2009.
- [54] T. Cardinali, K. Nikodem, F. Papalini, Some results on stability and on characterization of  $K$ -convexity of set-valued functions. Anal. Pol. Math. LVIII, 2 (1993), 185-192.
- [55] C. Carathéodory, Über den variabilitätsbereich der koeffizienten von potenzreihen, die werie nicht annehmen. Math. Ann. 64 (1907), 95-115 .
- [56] C. Castaing, M. Valadier, Convex analysis and measurable multifunctions. Lecture Notes in Math. 580, 1977.
- [57] W. Cook, L Lovász, J Vygen, Research trends in combinatorial optimization. Springer. 2008.
- [58] G. Cornuejods R. Tütüncü, Optimization methods in finance, Cambrige University Press, 2007.
- [59] M. Cotlar, R. Cignoli, An introduction to functional analysis, Noth-Holland Publishing Company, 1974.

- [60] R. W. Cottle, William Karush and the KKT theorem, *Documenta Math. Extra volumen* (2012) 255-269.
- [61] B. D. Craven, Invex functions and constrained local minima, *Bull. Austral. Math. Soc.* 24 (1981) 357-366.
- [62] B. D. Craven, S. M. N. Islam, *Optimization in Economic and Finance, Some advances in non-linear, dynamic, criteria and stochastic models*, Springer, 2005.
- [63] G. Dahl, *An Introduction to Convexity*, University of Oslo, Centro of Mathematics for Applications, 2010.
- [64] G.B. Dantzig, Programming in a linear structure, *Econometrica* 17 (1949) 73-74.
- [65] L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee, Helly's theorem and its relatives, *Convexity, Proc. Symp. Pure Math.* 7, Amer. Math. Soc. Providence, R. I., (1963) 101-179.
- [66] Z. Daróczy, Z. Páles, Convexity with given infinite weight sequences, *Stochastica XI-1* (1987) 5-12.
- [67] Z. Daróczy, Z. Páles, Generalized convexity and comparison of mean values. *Acta Sci. Math. (Szeged)* 71 (2005) 105-116.
- [68] J. Dattorro, *Convex optimization & euclidian distance geometry*, Meboo Publishing, 2005.
- [69] Ch. J. de la Vallée Poussin, Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées equidistantes, *Bull. Acad. Sei. Belg.* (1908), 314-410.
- [70] W. E. Diewert, M. Avriel, I. Zang, Nine kinds of quasiconcavity and concavity, Reprint from *J. Econ. theory*, 25 no. 3 (1981) 397-420.
- [71] S. S. Dragomir, On Hadamard's inequality for convex functions on the coordinates in a rectangle from the plane, *Taiwanese J. Math.*, 5 (2001) 775-788.

- [72] S. S. Dragomir, S. Fitzpatrick, The Hadamard's inequality for  $s$ -convex functions in the second sense. *Demonstratio Math.* 32 (4), (1999) 687-696.
- [73] S. S. Dragomir, B. D. Craven, Jensen-type inequalities for invex functions. *RGMIA research report collection*, 2 (5) (1999) (Online <http://vuir.vu.edu.au/17236/>).
- [74] S. S. Dragomir, N. M. Ionescu, On some inequalities for convex dominated functions, *Anal. Num. Theor. Approx.*, 19 (1990) 21-28.
- [75] S. S. Dragomir, C. E. M. Pearce, Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications (RG-MIA Monographs, Victoria University, 2000). (Online: <http://www.staff.vu.edu.au/RGMIA/monographs/hermite-hadamard.html>].
- [76] S. S. Dragomir, G. Toader, Some inequalities for  $m$ -convex functions, *Studia Univ. Babes- Bolyai, Mathematica* 38 (1) (1993) 21-28.
- [77] J. Dupačová, J. Hurt, J. Stěpán, *Stochastic modeling in economics and finance*. Kluwer Academic Publishers. 2002.
- [78] R. J. Džurina, A short history of convexity. *Differential Geometry - Dynamical Systems*, Vol 11, p. 112-129. 2009.
- [79] H. C. Eggleston, *Convexity*, Cambridge Tracts in Mathematics. No. 47, 1958.
- [80] N. Elezović, J. Pečarić, *Rocky Mountain J. Math.* 30 (3) (2000) 853-856.
- [81] M. Emin Özdemir, A. Ocak, E. Set. New Hadamard-type inequalities for  $m$ -convex and  $(\alpha, m)$ -convex function. *En arbitrarje*.
- [82] M. Emin, Özdemir, E. Set, M. Zeki Sarikaya, Some new Hadamard type inequalities for co-ordinated  $m$ -convex and  $(\alpha, m)$ -convex functions, *Hacetitepe J. Math. and Stat.*, 40 (2) (2011) 219-229.

- [83] B. Escobar, Algunos Teoremas de Separación de Funciones, Trabajo de Ascenso. Categoría Asistente, Universidad Nacional Abierta. Caracas. 2001.
- [84] D. Escobar, Economía matemática, Ediciones Alfaomega, s.a, 2001.
- [85] L. Fejér, Über die Fourierreihen, II, Math. Naturwiss, Anz. Ungar. Akad. Wiss., 24 (1906), 369-390. (In Hungarian).
- [86] W. Fenchel, Convex cones, sets, and functions. Mimeo book, Princeton Mathematics Departamnet. Pricenton, New Jersey (1953).
- [87] B. de Finetti, Sulle stratificazioni convesse, Ann. Mat. Pura Appl. 2 (1949) 173-183.
- [88] W. Förg-Rob, K. Nikodem, Z. Páles, Separation by monotonic functions, Math. Pannomica 7/2 (1996) 191-196.
- [89] J. Foster, J. Greer, E. Thorbecke, Notes and comments a class of decomposable poverty measure. Econometrica, 52 (1984) 761-766.
- [90] J. B. G. Frenk, G. Kassay. Introduction to convex and quasiconvex analysis. In Hadjisavvas, N., Komlósi, S. and S. Schaible, editor, Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, pages 3-87. Springer, Dordrecht. 2005.
- [91] R. M. Gaya, J. M. Pérez-Salamero González, M. V. Marco, Fundamentos de optimización matemática en economía, Programación no lineal,. Repro-Expres, 1999.
- [92] R. Ger, Some remarks on convex functions, Fund. Math. 66 (1969/1970) 255-262.
- [93] R. Ger, K. Nikodem, Strongly convex functions. Nonlinear Anal., 74 (2011) 661-665
- [94] A. Gilányi, K. Nikodem, Z. Páles, Bernstein-Doetsch types results for quasiconvex functions. Math. Ineq. Appl. 7, no 2 (2004), 169-175.

- [95] A. Gilányi, Z. Páles, On Dinghas-type derivatives and convex functions of higher order, *Real Anal. Exchange* 27 (2001/2002), 485-493.
- [96] A. Gilányi, Z. Páles, Convex functions of higher order, *Math. Ineq. App*, Vol 11, 2 (2008) 271-282.
- [97] G. Giorgi, S. K. Mishra, *Invexity and optimization*, Springer Verlag, 2008.
- [98] G. Giorgi and S. Mititelu, Convexités généralisées et propriétés *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 38 (1993), 2, 125-142.
- [99] E. K. Godunova, V.I. Levin, Neravenstva dlja funkcií širokogo klassa, soderžačgo vypuklye, monotonnnye i nekotorye drugie vidy funkcií *Vyčislitel. Mat. i. Mat. Fiz. Me, vuzov. Sb. Nauč. Trudov*, MGPI, Moskva, (1985) 138-142.
- [100] J. González, J. Ortega, *Cálculo V (mención Análisis Numérico)*. Universidad Nacional Abierta. Caracas, 1984.
- [101] H. J. Greenberg, W. P Pierskalla, A review of quasi-convex functions, Reprinted from *Oper. Res.* 19, 7 (1971), 1553-1570.
- [102] P. M. Gruber, J. M. Wills (Editors). *Handbook of convex geometry*. Vol. A, B. North-Hollands. 1993.
- [103] A. Guerraggio, E. Molho, The origins of quasi concavity: a development between mathematics and economics, *Historia Mathematica* 31 (2004) 62-75
- [104] J. S. Hadamard, Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonctions considérée par Riemann. *J. Math. Pures Appl.* 58 (1893) 171-215.
- [105] Ed. N. Hadjisavvas, S. Komlóski, S. Schaible, *Handbook of generalized convexity and generalized monotonicity*, Springer, 2005.
- [106] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1950.
- [107] M. A. Hanson, On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions, *J. Math. Anal. App*, 80 (1981) 545-550.

- [108] M. A. Hanson and B. Mond, Necessary and sufficient conditions in constrained optimization, FSU Statistics Report M683, Florida State University, Department of Statistics, Tallahassee, Florida, U.S.A., 1984.
- [109] G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung:  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , Math. Ann. 60 (1905), no. 3, 459-462.
- [110] G. H. Hardy, J.E Littlewood G. Pólya, Inequalities, Cambridge at the Univ. Press, 1934.
- [111] A. Háyzy, On the stability of  $t$ -convex functions. Aequationes Math. 74 (2007) 210-218.
- [112] A. Háyzy, Bernstein-Doetsch type results for  $(h, k)$ -convex functions. Miskolc Math. Notes. 13 (2012), no. 2, 325-336.
- [113] A. Háyzy, Z. Páles, On approximately midconvex functions. Bull. London Math. Soc. 36 (2004) 339-350.
- [114] A. Háyzy. Z. Páles, On approximately  $t$ -convex functions. Publ. Math. Debrecen. 66/3-4 (2005) 489-501
- [115] E. Helly, Über mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen punkten. Deutsche Math. 32 (1923) 175-176.
- [116] Ch. Hermite, Sur deux limites d'une intégrale définie Mathesis 3 (1883), 82.
- [117] M. A. Hernández, M. A. Salanova, La convexidad en la resolución de ecuaciones escalares no lineales. Universidad de la Rioja. Servicios de Publicaciones. 2011.
- [118] E. Hewitt, K. Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-Verlag, 1978.
- [119] W. Hildenbrand, Core and equilibria of a large economy. Princeton: Princeton University Press. 1974.
- [120] J-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, Fundamentals of convex analysis, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2001.

- [121] F. L. Hitchcock, Distribution of a product from several sources to numerous localities, *J. Math. Phys.* 20, (1941) 224-230.
- [122] O. Hölder, Über einen Mittelwertsatz, *Nachr. Ges. Wiss. Goettingen* (1889).
- [123] S. Hu, N. K. Papageorgiu, *Handbook of Multivalued Analysis. Vol. 1* Springer, 1997.
- [124] H. Huang, Global error bounds with exponents for multifunctions with set constraints, *Commun. Contemp. Math.*, 12, no.3 (2010) 417-435.
- [125] H. Hudzik, L. Maligranda, Some remarks on  $s$ -convex functions, *Aequationes Math* 48 (1994) 100-111.
- [126] S. Hussain, M. I. Bhatti, M. Iqbal, Hadmard-type inequalities for  $s$ -convex functions I, *Punjab University J. Math.* 41 (2009) 51-60.
- [127] D. H. Hyers, On the stability of the linear functional equation, *Proc. Nat Acad. Sci. USA*, 27 (1941) 222-224.
- [128] D. H. Hyers, S. M. Ulam, Approximately convex functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 3 (1952) 821-828.
- [129] E. Isaacson, B. Keller, *Analysis of numerical methods*, Dover Publication, Inc, New York, 1966.
- [130] W. Jarczyk, J. Matkowski, On Mulholland's inequality. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130 (11) (2002) 3243-3247.
- [131] J. L. W. Jensen, Om Konvekse funktioner og Uligheder mellem Middelveerdiene, *Nyt Tidsskrift for Matematik*, 16B , 1 (1905) 175-193.
- [132] J. L. W. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inegalités entre les valeurs moyennes, *Acta Math.* 39 (1906), 175-193.
- [133] C. Jordan, Sur la série de Fourier, *C. R. Acad. Sci. Paris*, (1881), 228-230.

- [134] M. V. Jovanović, A note on strongly convex and quasicovex functions, *Math. Notes* 60 (1995) 584-585; Translation of : *Mat. Zametki* 60 (1996) 778-779
- [135] R. Kannan, C. King, *Advance analysis on the real line*, Springer, 1996.
- [136] W. Karush, *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Conditions*, Master's Thesis, Department of Mathematics, University of Chicago, 1939.
- [137] L. Kantorovich, *Mathematical methods of organising and planning production*.1939. Reprinted in *Management Sci.*, 1960
- [138] J. H. B. Kemperman, A general functional equation. *Trans. Amer. Math. Soc.* 86 (1957) 28-56.
- [139] J. Kepler, *The Harmonies of the World*. Tr. Charles Glenn Wallis. Chicago: Great Books of the Western World, pub. by Encyclopedia Britannica, Inc. 1952.
- [140] E. Klein, A. C. Thompson. *Theory of correspondences: Including applications to mathematical economics*. Canadian Mathematical. 1984.
- [141] E. Kopecká, J. Malý. Remarks on delta-convex functions. *Comment. Math. Carolinae.* 31, 3 (1990) 501-510.
- [142] T. C. Koopmans, *Exchange ratios between cargoes on various routes (Non-Refrigerated Dry Cargoes)*. Memorandum for the Combined Shipping Adjustment Board. (1942). Reprinted in *Scientific Papers of Tjalling C. Koopmans*, Springer Verlag, pp. 77-86, 1970
- [143] M. G. Krein, D. P. Milman, On extreme points of regular convex sets, *Studia Math.*, 9 (1940) 133-138.
- [144] M. Kuczma, Note on convex functions, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 2 (1959) 25-26.
- [145] M. Kuczma, Some remarks on convexity and monotonicity, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 15 (1970) 1463-1469.

- [146] M. Kuczman, An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality. Second edition. Birkhäuser, 2000.
- [147] N. Kuhn, A note on  $t$ -convex functions, General Inequalities, 4 (Oberwolfach, 1983)(W. Walter, ed.), International Series of Numerical Mathematics, vol. 71, Birkhuser-Basel-Boston-Stuttgart, 1984, 269-276.
- [148] H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Nonlinear programming, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Neiman J. (Ed), University of California Press, Berkeley, (1951) 481-492.
- [149] S. Kurepa, Convex functions, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II. 11 (1956) 89-94.
- [150] M. Latif, On Some Fejér-type inequalities for double integrals, Tamkang J. Math., 43 (3) (2012) 423-436.
- [151] H. Leiva, N. Merentes, K. Nikodem, J. L. Sánchez, Strongly convex set-valued maps, (2013). Aceptado para su publicación.
- [152] M. Lewicki, Wright-convexity with respect to arbitrary means. J. Math. Ineq. 1 (3) (2007) 419-424.
- [153] G. H. Lin, M. Fukushima, Some exact penalty results for nonlinear programs and mathematical programs with equilibrium. J. Optim. Theory Appl. 118 (2003) 67-80
- [154] D. T. Luc, Lecture notes in economic and mathematical systems. Theory of vector optimization, 319. Springer-Verlag. 1989.
- [155] P. Madden, Concavidad y optimización en microeconomía, Alianza editorial, s.a, Madrid, 1987.
- [156] G. Y. Maksa, Z. Páles, Descomposition of higher order Wright-convex functions, J. Math Anal. App. 359 (2009) 439-443.
- [157] O. L. Mangasarian, Pseudo-convex functions, J. Soc. Indis. Appl. Math., Ser A, 3 (1965), 281-290.

- [158] O. L. Mangasarian, Non-linear programming. McGraw-Hill, 1969.
- [159] L. Maligranda, Why Hölder's inequality should be called Rogers' inequality?, *Math. Inequal. Appl.*, 1 (1998), 69-83.
- [160] S. Marcus, Critères de majoration pour les fonctions sous additives, convexes ou internes. *C.R. Acad. Sci. Sér. A-B* 244, (1957) 2270-2272.
- [161] S. Marcus, Fonctions convexes et fonctions internes. *Bull. Sci. Math.* 2, 81(1957) 66-70.
- [162] A. W. Marshall, I. Olkin, B. C. Arnold, Inequalities: Theory of Majorization and its Applications. Springer Series in Statisticc, second edition. Springer 2011.
- [163] H. Markowitz, Portafolio selection, *J. Finance*, 7 (1952) 77-91.
- [164] E. Martínez, Una breve introducción al cálculo de variaciones (2008). (Online <http://andres.unizar.es/>).
- [165] J. Matkowski, Lp-Like Paranorms, Selected Topics in Functional Equations and Iteration Theory, Proceedings of the Austrian-Polish seminar, *Graz Math. Ber.* 316 (1992) 103-138.
- [166] J. Matkowski, Convex functios with respect to a mean and a characterization of quasi-arithmetic means. *Vol. 29 (1) (2003) 229-246.*
- [167] M. R. Mehdi, On convex functions, *J. London Math. Soc.* 39 (1964) 321-326.
- [168] E. Mejias Fernández de Velasco, Herramienta de optimización convexa y aplicaciones en telecomunicaciones. Ingeniería de Telecomunicaciones. Proyecto de fin de carrera. Universidad Carlos III de Madrid. Escuela Politecnica Superior. Laganés 2011 (Online [http://e-archivo.uc3m.es/bitstream/10016/12990/3/PFC\\_Emilio\\_Mejia\\_Fernandez\\_Velasco.pdf](http://e-archivo.uc3m.es/bitstream/10016/12990/3/PFC_Emilio_Mejia_Fernandez_Velasco.pdf)).
- [169] R. Menu, J. M. Pérez-Salamero, M. Ventura, Fundamentos de optimización matemática en economía. Programación no Lineal. 1999. (Online <http://roderic.uv.es/bitstream/handle/10550/25951/>

FundamentosdeOptimizacionMatematicaenEconomia.pdf?  
sequence=1)

- [170] R. Menu, J. M. Pérez-Salamero, M. Ventura, Modelización y resolución de problemas de optimización en economía. *Rero\_Express*, S. L. 2013
- [171] N. Merentes, K. Nikodem, Remarks on strongly convex functions, *Aequationes Math.* 80, 1-2 (2010) 193-199.
- [172] N. Merentes, K. Nikodem, S. Rivas, Remarks on strongly Wright-convex functions. *Ann. Pol. Math.* 102.3 (2011) 271-278.
- [173] E. Michael, Topologies on spaces of subsets, *Trans. Amer. Math. Soc.* 4 (1951) 151-182.
- [174] B. Micherda, T. Rajba, On some Hermite-Hadamard-Fejer inequalities for  $(k, h)$ -convex functions. *Math. Ineq. Appl. Preprint Vo. 12, no.4* (2012) 931-940.
- [175] B. Mihály, Hermite-Hadamard-types for generalized convex functions. *Doctoral Thesis. Debrecen Egyetem Természettudományi Kar. Debrecen.* 2004.
- [176] V.G. Miheşan, A generalization of the convexity, *Seminar of Functional Equations, Approx. and Convex, Cluj-Napoca (Romania)* (1993).
- [177] S. K. Mishra, S. Y. Wang, K. K. Lai, *Generalized convexity and vector optimization, nonconvex optimization and its applications*, Vol. 90, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [178] S. Mititelu, Invex functions. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 49 (2004), 5-6, 529-544.
- [179] S. Mititelu, Invex set and preinvex functions, *J. Adv. Math. Studies.* 2 (2009), no.2, 41-52.
- [180] P. Montel, Sur les fonctions convexes et les fonctions sougharmoniques, *Journal de Math.*, (9), 7 (1928) 29-60.

- [181] L. Montrucchio, Lipschitz continuous policy function for strongly concave optimization problems, *J. Math. Econom.* 16 (1987) 259-273.
- [182] A. M. Moros S., Funciones  $h$ -fuertemente convexas. Trabajo de grado para la obtención del título de Magister Scientie. Universidad de los Andes. Facultad de Ciencias. Mérida-Venezuela 2012.
- [183] I. P. Natanson, Theory of functions of a real variable, Vol 1, Translated from the Russian by L. F. Boron, E. Hewitt. Fredirck Ungar Publishing Co New York, 1964.
- [184] J. von Neumann, Zur Theorie der Gesellschaftspiele. *Math. Ann.* 100 (1928) 295-320.
- [185] C. T. Ng, Functions generated Schur-convex sums. *International Series of Numerical Math.*, 80 (1987) 433-438.
- [186] C. T. Ng, On midconvex function with midconcave bounds, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 102,3 (1988) 536-540.
- [187] C. T. Ng, K. Nikodem, On Approximately convex functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* Vol. 118, 1 (1993) 103-108.
- [188] C. P. Niculescu, Convexity according to the geometric mean, *Math. Ineq. Appl.*, 3 (2000), no. 2, 155-167.
- [189] C. P. Niculescu, Convexity according to means. *Math. Ineq. Appl.*, 6 (4) (2003) 571-579.
- [190] P. Niculescu, L-E. Persson, Convex Functions and their Applications. A contemporary approach CMS Books in Mathematics vol. 23, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [191] H. Nikaido, Convex structures and economic theory, Vol 51, Academic Press, 1968.
- [192] K. Nikodem, Problems and remarks (Proceedings of the International Conference on Functional Equations and Inequalities. May 27-June 2, 1984, Sielpia (Poland)), *Wyż. Szkoła Ped. Hrakow. Rocznilk Nauk-Dydakt. Parce Mat.* 97 (1985).

- [193] K. Nikodem, A characterization of midconvex set-valued functions. *Acta Universitatis Carolinae. Math and Phys.*, 30, no.2 (1989) 125-129.
- [194] K. Nikodem, M. Nikodem, Remarks on  $t$ -quasiconvex functions, *Math. Ineq. App.* 12, 4 (2009) 711-717.
- [195] K. Nikodem, Z. Páles, Generalized convexity and separation theorems, *J. Convex Anal.* 14 (2007), no.2, 239-247.
- [196] J. J. Núñez Velázquez, La desigualdad económica medida a través de la curvas de Lorenz, *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa.* 2 (2006) 67-108 (Online <http://www.upo.es/RevMetCuant/art6.pdf>).
- [197] D. B. Ojha, M. K. Mishra, An application on fixed point for  $s$ -convex function. *Intern. J. Eng.rg. Sci. Tec.* 2 (8) (2010) 3571-3575.
- [198] W. Orlicz, A note on modular spaces. I. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* 9 (1961) 157-162.
- [199] A. M. Ostrowski, Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen, *Jber. Deutsch. Math.-Verein* 38 (1929) 54-62.
- [200] A. M. Ostrowski, Sur quelques applications des fonctions convexes et concaves au sens de I. Schur *J. Math. Pures Appl.*, 9, 31 (1952) 253-292.
- [201] Z. Páles, On approximately convex functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131, 1 (2002) 243-252.
- [202] J. Park, New definition and theorems via generalized convex dominated mappings, *International. J. Pure Appl. Math.* Vol. 78, no. 8 (2012) 1161-1172.
- [203] J. Peng, X. Long, A remark on preinvex functions, *Bull. Austral Math. Soc.* 70 (2004) 397-400,

- [204] J. E. Pečarić, F. Proschan, Y. L. Tong, Convex functions, partial ordering, and statistical applications, Mathematics in science and engineering, Vol 187, Academic Press, Inc, 1992.
- [205] R. R. Phelps, Convex functions monotone operators and differentiability, Lecture notes in mathematics, 1364, 2nd edition, Springer, 1993.
- [206] M. R. Pinheiro, Exploring the concept of  $s$ -convexity, Aequationes Math. Acc. 2006, V. 74, I.3, (2007) 201-209.
- [207] M. R. Pinheiro, Lazhar's inequalities and the  $s$ -convex phenomenon. New Zealand J. Math. 38 (2008), 57-62.
- [208] M. R. Pinheiro, Jensen's inequality in detail and  $s$ -convexity. Int. J. Math. Anal., 3 (2009), No.2, 95-98.
- [209] E. S. Polovinkin, Strongly convex analysis, Sbornik: Math., 187 (2) (1996) 259-286.
- [210] B. T. Polyak, Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions, Soviet Math. Dokl. 7 (1966) 72-75.
- [211] D. Popa,  $p$ -convex set valued maps with values in  $\mathbb{R}$ , General Math. Vol 6 (1998) 71-79.
- [212] D. Popa, A representation of  $p$ -convex set-valued maps with values in  $\mathbb{R}$ , Studia Univ. "Babes-Bolyai", Math. Vol. XLVIII, no. 4 (2003) 77-81.
- [213] T. Popoviciu, Sur les fonctions convexes d'une variable réelle, C. R. Sci. Paris 190 (1930) 1481-83.
- [214] T. Popoviciu, Sur quelques propriétés des fonctions d'une variable réelle convexes d'ordre superior, Mathematica (cluj) 8 (1934), 1-85.
- [215] A. Puglini, Generalized convexity and invexty in optimization theory: Some new results. App. Math Sci. 3 (2009), no. 47, 2311-2325.

- [216] H. Rademacher, Über partielle und totale Differenzierbarkeit I., Math. Ann. 89 (1919), 340-359.
- [217] J. Radon, Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten. Math. Ann., 83 (1921) 113-115.
- [218] T. Rajba, Sz. Wąsowicz, Probabilistic characterization of strong convexity, Opuscula Math. 31 (2011) 97-103.
- [219] F. Riesz, Sur certain systeme singuliers d'equations integrales Ann. Ecole Norm. Sup. Paris. (3) 28 (1911) 33-68.
- [220] S. Rivas, Algunas generalizaciones de la noción de variación acotada en el sentido de Riesz y un teorema de representación de Riesz, Tesis Doctoral, Universidad Central de Venezuela, Caracas, marzo 2012.
- [221] G. R. Roa, Funciones fuertemente convexas y fuertemente midconvexas, Trabajo especial de grado para optar al título de Licenciado en Matemática, Universidad Central de Venezuela, Caracas, octubre 2011.
- [222] R. T. Rockafellar, Convex Analysis. Princeton University Press, 1997. First published in 1970.
- [223] A. W. Roberts, D. E. Varberg, Convex functions. Academic Press., 1973.
- [224] L. Rodríguez, Funciones midconvexas y la ecuación de Jensen. Trabajo especial de grado para optar al título de Licenciado en Matemática, Universidad Central de Venezuela, Caracas, junio 1997.
- [225] L. J. Rogers, An extension of a certain theorem in inequalities, Messenger of Math., 17 (1888) 145-150.
- [226] S. Rolewicz, On  $\gamma$ -paraconvex multifunctions. Math. Japonica 24 (3), (1979) 293-300.
- [227] S. Rolewicz, An extension of Mazur's theorem on Gateaux differentiability to the class of strongly  $\gamma(\cdot)$ -paraconvex functions. Studia Math. 172 (3), (2006) 243-248.

- [228] H. R. Romero, *Funciones Convexas*, Trabajo de Pasantía, Universidad Nacional Abierta, Caracas, Venezuela. 1999.
- [229] A. M. Russell, Functions of bounded second variation and Stieltjes-type integrals, *J. London Math. Soc.* (2) 2 (1970), 193-208.
- [230] A. M. Russell, Function of bounded *kth*-variation, *Proc. London Math Soc.* (3) 26 (1973), 547- 563.
- [231] A. M. Russell, A Banach space of functions *kth* variation. *Bull. Austral. Math. Soc.* 15 (1976), 431-438.
- [232] E. Sadowska, A sandwich with convexity for set-valued functions. *Math. Pannonica*, 7/1 (1996) 163-169.
- [233] M. Z. Sarikaya, A. Saglam, H. Yildirim, On some Hadamard-type inequalities for *h*-convex functions, *J. Math. Ineq.* 3 (2008) 335-341
- [234] M. Z. Sarikaya, E. Set, M. E. Ozdemir, On new inequalities of Simpson's type for *s*-convex functions, *Comput. Math. Appl.*, 60, 8 (2010) 2191-2199.
- [235] J. Sheiba Grace, P. Thangavelu, Properties of *E*-convex set, *Tam-sui Oxford Math. Scie.*, 25 (2009) 1-7.
- [236] I. Schur, Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendung die Determinanten, *Theorie. Sitzungsber. Berlin. Math. Ges.*, 22 (1923) 9-20.
- [237] W. Sierpiński, Sur les fonctions convexes mesurables, *Fund. Math.* 1 (1920) 125-128.
- [238] B. Simon, *Convexity: an analytic viewpoint*, Cambridge Tracts in Mathematics, 187, Cambridge University Press, 2011
- [239] O. Stolz. *Grundzüge der Differential und Integralrechnung*, Vol. 1 Teubner, Leipzig, 1893.
- [240] K. Sydsaeter, P. Hammond, *Matemáticas para el análisis económico*, Prentice Hall, 1996.
- [241] G. Toader, Some generalization of the convexity, *Proc. of the Collo. Approx. and Optim.*, Univ. Cluj-Napoca, (1984) 329-338.

- [242] Y. L. Tong, Probability inequalities in multivariate distributions, Academic Press, New York, 1980.
- [243] M. Tunç, Ostrowski type inequalities via  $h$ -convex functions with applications for special means and P.D.F.'s, (2012) <http://arxiv.org/pdf/1204.2921.pdf>.
- [244] B. van Brunt, The calculus of variation, Springer, 2004.
- [245] J. van Tiel, Convex analysis. An introductory text. John Wiley & Sons, 1984.
- [246] S. Varošanec, On  $h$ -convexity. J. Math. Appl 326 (2007) 303-311.
- [247] L. Veselý, L Zajiček, Delta-convex between Banach sapaces and applications. Dissertationes Math. Polska Akademia Nauk, Instytut Matematyczny, CCLXXXIX, 1989.
- [248] L. Veselý, L Zajiček, On vector functions of bounded convexity. Math. Bohemica. 133 (2008) no.3, 321-325.
- [249] J. Vial, Strong convexity of set and functions. J. Math. Economy. 9 (1982) 187-205.
- [250] G. Vitali, Sulle funzioni integrali. Atti. Acc. Sci. Torino, 40 (1904-1905) 1021-1034.
- [251] E. M. Wright, An inequality for convex functions, Amer. Math. Monthly, 61 (1954) 620-622.
- [252] I. M. Yaglom, V. G. Boltyanskiĭ. Convex figures, (Translated by P. J. Kelly and L. F. Walton). Holt Rinehart and Winston, 1961.
- [253] E. A. Youness, E-convex set, E-convex functions, and E-convex programing. J. Optim.Theory Appl. 102 (1999) 439-450.
- [254] E. A. Youness, O. M. Abo Al-Olaa, On quasi  $E$ -convex bilevel programing problem, Amer. J. Appl. Scie., 2 (2) (2005), 565-568.
- [255] E. A. Youness, T. Eman, Strongly  $E$ -convex set and strongly  $E$ -convex functions. J. Interdisciplinary Math. (Online <http://faculty.uoh.edu.sa/t.emam/Strongly%20E-Convexity.pdf>).

- [256] W. H. Young, On classes of summable functions and their Fourier series, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 87 (1912) 225-229.
- [257] C. Zălinescu. A critical view on invexity. Math OC (2012) (Online <http://arxiv.org/abs/1203.1152v1>).
- [258] T-Y. Zhang, A-P. Ji, F. Qi, On Integral inequalities of Hermite-Hadamard type for s-geometrically convex functions, Abstract and Appl. Anal., vol. 2012, Article ID 560586, 14 pages doi:10.1155/2012/560586.
- [259] Q. J. Zhu, Convex Analysis in Financial Mathematics, Preprint may-2011.

## **Asociación Matemática Venezolana**

Presidente: Rafael Sánchez Lamonedá

### **Consejo Directivo Nacional**

Rafael Sánchez Lamonedá  
Capítulo Capital

Alexander Carrasco  
Capítulo de Centro Occidente

Oswaldo Araujo  
Capítulo de Los Andes

Said Kas-Danouche  
Capítulo de Oriente

Oswaldo Larreal  
Capítulo Zuliano

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela.

Asociación Matemática Venezolana  
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela  
<http://amv.ivic.gob.ve>

# Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

## Consejo Directivo

### **Director**

Eloy Sira

### **Subdirector**

Alexander Briceño

### **Representantes del Ministerio del Poder Popular para la Ciencia, Tecnología e Innovación**

Guillermo Barreto

Juan Luis Cabrera

### **Representante del Ministerio del Poder Popular para la Educación Universitaria**

Prudencio Chacón

### **Representantes Laborales**

José Garzaro

Víctor Peña

William Espinoza (Suplente)

Sirvia Ávila (Suplente)

### **Gerencia General**

Lira Parra

## Comisión Editorial

Eloy Sira (Coordinador)

Lucía Antillano

Horacio Bior

Jesús Eloy Conde

María Teresa Curcio

Rafael Gassón

Pamela Navarro

Héctor Suárez

Erika Wagner



Gobierno **Bolivariano**  
de Venezuela

Ministerio del Poder Popular  
para **Ciencia, Tecnología e Innovación**

