XXV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA–VENEZUELA 2012

TEORÍA DE RAMSEY Y DINÁMICA DE GRUPOS TOPOLÓGICOS

José G. Mijares P.

MÉRIDA, VENEZUELA, 2 AL 8 DE SEPTIEMBRE DE 2012

XXV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA - VENEZUELA 2012

Teoría de Ramsey y dinámica de grupos topológicos

José G. Mijares P.

Universidad Central de Venezuela
Pontificia Universidad Javeriana

jose.mijares@ciens.ucv.ve
jmijares@javeriana.edu.co

MÉRIDA, VENEZUELA, 2 AL 8 DE SEPTIEMBRE DE 2012

XXV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana.

La XXV Escuela Venezolana de Matemáticas recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Banco Central de Venezuela, el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) y Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA).

2010 Mathematics Subject Classification: 05D10, 22F05 05C55, 43A05, 22A05, 22F50

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
Rif: G-20004206-0

Teoría de Ramsey y dinámica de grupos topológicos
José G. Mijares P.

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas
Preprensa e impresión: Gráficas Lauki C. A.
Depósito legal If66020125102161
ISBN 978-980-261-135-5
Caracas, Venezuela
2012

Prefacio

En estas notas queremos presentar los conceptos básicos necesarios para estudiar la relación entre la Teoría de Ramsey y la Dinámica de Grupos Topológicos; esto nos llevará a repasar nociones matemáticas cuya conexión, vista desprevenidamente, se podría pensar como inexistente.

Obviamente presentaremos rudimentos combinatorios de la Teoría de Ramsey clásica y necesariamente estudiaremos algunos conceptos propios de la Dinámica de Grupos Topológicos. Pero, técnicamente hablando, para presentar la conexión existente entre estas áreas tendremos que echar mano de conceptos y métodos que provienen del Análisis Funcional, la Teoría de la Medida, la Topología Conjuntista, la Teoría de Espacios Uniformes, la Teoría de Modelos y la Lógica Matemática.

Podríamos decir que el concepto unificador, al menos en la presentación que hacemos en estas notas, es el de *G-espacio uniforme*. El ejemplo típico es un espacio métrico sobre el cual actúa continuamente un grupo topológico G, por *isometrías*. La noción de G-espacio uniforme sirve de marco general para los fenómenos que idealmente están en el centro de nuestro estudio: los llamados *fenómenos tipo Ramsey*, que se refieren a la tendencia que tienen ciertas *estructuras* matemáticas hacia el orden, en un sentido que esperamos aclarar en esta Introducción. El *principio del casillero* clásico es quizás el ejemplo más sencillo. Este afirma que si un conjunto *suficientemente grande* es particionado en una cantidad finita de clases, una de las clases es suficientemente grande también. Desde el punto de vista combinatorio, el patrón general puede ser descrito como sigue: si una estructura es *coloreada* con una cantidad finita de colores, entonces existe una *subestructura* que es *monocromática.* Algunos resultados que responden a este patrón son, por ejemplo, el Teorema de van der Waerden [24] sobre progresiones aritméticas arbitrariamente grandes, el Teorema de Ramsey [21] sobre coloraciones de k-subconjuntos de $\mathbb{N}$, el Teorema de Graham, Leeb y Rothschild [4] sobre coloraciones de espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo finito y el Teorema de Hindman [6] sobre sumas finitas de números naturales.

Pero los fenómenos tipo Ramsey tienen un caracter más general que va más allá del contexto, digamos *discreto*, de la Combinatoria. Para describir el patrón de comportamiento en el caso general, hace falta dotar a las estructuras a ser *coloreadas* de más complejidad matemática. Consideremos por ejemplo el caso en el que coloreamos un espacio métrico (X, d). Supongamos que el conjunto de *colores* es $\{0, 1, 2, \ldots, r-1\}$ visto como espacio métrico discreto y que la *coloración* $c : X \to \{0, 1, 2, \ldots, r-1\}$ es una función uniformemente continua. En muchos de los casos, en lugar de la existencia de un subconjunto monocromático (i.e., uno donde la función c es constante), ocurrirá el fenómeno siguiente: dado un real $\epsilon > 0$, existirá $i \in \{0, 1, 2, \ldots, r-1\}$ y $F \subseteq X$ tal que $F \subseteq \{x : (\exists z)\ c(z) = i, d(x, z) < \epsilon\}$. Es decir, X contiene un subconjunto que es *casi monocromático* para la coloración c y lo podemos encontrar *arbitrariamente cerca de algún color*. Este es el caso cuando X es la *esfera unitaria* $\mathbb{S}^\infty$ del Espacio de Hilbert l^2 con la métrica inducida por la norma; cuando X es el *espacio de Urysohn* (el espacio métrico universal [23]); o cuando X es la *variedad de Stiefel* en l^2. En estos y otros casos que aparecen en diversos contextos matemáticos, los fenómenos tipo Ramsey correspondientes están conectados a propiedades de regularidad de las *acciones* de grupos topológicos sobre determinados espacios uniformes; como la propiedad de *oscilación finitamente estable* para G-espacios uniformes y la propiedad de *punto fijo sobre compactos* (o de ser *extremadamente dócil*) para grupos topológicos. Parte de esta conexión es la que intentaremos describir en estas notas.

En cada capítulo del texto encontrarán ejercicios que complementan en gran medida la exposición de los temas tratados. Sin embargo, invitamos al lector interesado en profundizar en el estudio de la relación entre la Teoría de Ramsey y la Dinámica de Grupos Topológicos a consultar las referencias. Especialmente [9] y [17]. También, en [1], [5] y [14] el lector encontrará una exposición más completa sobre los conceptos fundamentales de la Teoría de Ramsey. Como es usual en estos casos, se deben atribuir al autor todos los errores u omisiones contenidos en este texto.

Deseo mostrar mi gratitud a Minoru Akiyama (UCLA Venezuela), por su revisión del borrador final de este texto. Además, quisiera agradecer a Daniela Torrealba (UCV), Alfonso Garmendia (UCV), José Salazar (UDO) y Lorenzo Castagno (UCV), quienes tomaron un curso que dicté sobre este tema en el postgrado en Matemáticas de la Universidad Central de Venezuela, entre Marzo y Junio de 2011. De nuestras sesiones y discusiones surgió gran parte de estas notas. También agradezco a Carlos Di Prisco y Arnaud Meyroneinc (IVIC) quienes participaron por un tiempo en dicho curso, enriqueciendo enormemente las discusiones.

Finalmente, agradezco en las personas de Neptalí Romero y Carlos Di Prisco a los organizadores de hoy y de siempre de la Escuela Venezolana de Matemáticas, por la oportunidad de participar en su XXV edición dictando uno de los cursos. Seguro como estoy de que mi participación como estudiante ya hace muchos años en la Escuela, como cariñosamente nos referimos a ella, fue fundamental en mi formación como matemático. Agradecido por siempre.

José Gregorio Mijares Palacios

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1 En el principio: el Teorema de van der Waerden

La conexión entre la Teoría de Ramsey y la Dinámica Topológica es de larga data. Entre los resultados más antiguos se encuentra la versión dinámica del Teorema de van der Waerden. Por su sencillez y belleza, hemos decidido presentar su demostración al inicio de estas notas, a manera de motivación. Invitamos a que se consulte el libro [5] para profundizar en las implicaciones de este resultado.

Teorema 1.1.1. *(versión dinámica del Teorema de van der Waerden) Sea* (X, d) *un espacio métrico compacto y* $f : X \to X$ *continua. Para todo real* $\epsilon > 0$ *y todo natural* $k > 0$ *existe* $x \in X$ *y un natural* n *tal que* $d(x, f^{i \cdot n}(x)) < \epsilon$ *para todo* $i \in \{0, \ldots, k-1\}$.

El Teorema original de van der Waerden puede ser enunciado de la siguiente forma:

Teorema 1.1.2. *(Teorema de van der Waerden, [24]) Sea* $r > 0$ *un número natural. Para toda partición* $\mathbb{N} = \mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_r$ *y todo natural* $k > 0$ *existe* $i \in \{1, \ldots, r\}$ *tal que* $\mathcal{C}_i$ *contiene una progresión aritmética de largo* k.

□

El Teorema 1.1.2 nos da un típico ejemplo de un fenómeno tipo Ramsey. Cada vez que la estructura dada (e.g., el conjunto $\mathbb{N}$) es particionada en una cantidad finita de clases, podemos encontrar una subestructura con ciertas características interesantes (e.g., una progresión aritmética) contenida en una sola clase. Por otro lado, el Teorema 1.1.1 se refiere a la propiedad de *ergodicidad* en el sistema dinámico compacto (X, f).

Veremos ahora que el Teorema 1.1.2 implica el Teorema 1.1.1 :

Demostración del Teorema 1.1.1. Sean (X, d), f, k y ϵ como en la hipótesis. Como X es compacto, podemos fijar un cubrimiento finito

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_r$$

tal que para cada i, el diámetro de X_i respecto a la métrica d es menor que ϵ. Podemos además suponer que los X_i's son disjuntos, sin pérdida de generalidad. Fijemos $y \in X$ y consideremos la sucesión

$$y, f(y), f^2(y), f^3(y), \ldots$$

Definamos

$$\mathbb{N} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_r$$

así:

$$j \in \mathcal{C}_i \text{ si y solo si } f^j(y) \in X_i.$$

Por el Teorema 1.1.2, existen $a, n \in \mathbb{N}$ tales $\{a, a+n, \ldots, a+(k-1)n\} \subseteq \mathcal{C}_i$, para algún i. Entonces, haciendo $x = f^a(y)$ tenemos

$$\{x, f^n(x), f^{2n}(x), \ldots, f^{(k-1)n}(x)\} \subseteq X_i.$$

Esto completa la demostración. □

De hecho se puede demostrar que los Teoremas 1.1.2 y 1.1.1 son equivalentes. Para una demostración de que 1.1.1 implica 1.1.2, se puede consultar [1] o [5].
En la siguiente sección estudiaremos el principal resultado sobre el cual se basa la Teoría de Ramsey.

1.2 El Teorema de Ramsey

A continuación presentaremos un resultado que sirve de prototipo para los fenómenos que queremos estudiar en este curso: el *Teorema de Ramsey.* Si bien el Teorema de van der Waerden es un resultado anterior, fue a partir del Teorema de Ramsey que los estudios de estos fenómenos tomaron cuerpo propiamente, alcanzando un desarrollo sorprendente con múltiples aplicaciones, algunas de las cuales serán presentadas en este texto.

Notación. En lo sucesivo, identificaremos a cada número natural $m > 0$, con el conjunto de sus predecesores, i.e., $m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Además, dado un conjunto X y un número natural n, usaremos la siguiente notación:

$$X^{[n]} := \{Y \subseteq X : |Y| = n\},$$

donde $|Y|$ es la cardinalidad de Y. En particular, para todo $m > 0$,

$$m^{[n]} = \{Y \subseteq m : |Y| = n\}.$$

También,

$$X^{[\infty]} := \{Y \subseteq X : |Y| = \infty\}.$$

Por otro lado, una *coloración finita* de un conjunto X es una función

$$c : X \to r,$$

de X en algún número natural r. Es decir, c determina una partición de X en r clases. En este caso también decimos que c es una r-*coloración* de X. Si $Y \subseteq X$ es tal que c es constante en Y, decimos que Y es *monocromático* para c.

□

Teorema 1.2.1 (Teorema de Ramsey; [21])**.** *Dado $n > 0$ en $\mathbb{N}$ y $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito, para toda coloración finita de $\mathbb{N}^{[n]}$ existe $B \in A^{[\infty]}$ tal que $B^{[n]}$ es monocromático.*

Demostración. El caso $n = 1$ es el *principio del casillero* clásico. Haremos el caso $n = 2$ y dejaremos el caso general como ejercicio.

Sea $c : A^{[2]} \to r$ una coloración finita de A. Vamos a definir una sucesión de conjuntos $(A_n)_n$ tales que $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots$.

Sea $A_0 = A$.

Si ya hemos definido A_k para $k \geq 0$, sea $a_k = min(A_k)$ y para cada $j \in r$, consideremos ahora el conjunto

$$A_k^j = \{x \in A_k \setminus \{a_k\} : c(\{a_k, x\}) = j\}.$$

Por el principio del casillero podemos elegir $j(k) \in r$ tal que $A_k^{j(k)}$ es infinito. Sea $A_{k+1} := A_k^{j(k)}$.

Es fácil ver que $(\forall k \in \mathbb{N})\ a_k < a_{k+1}$. Sea $\hat{B} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$. Entonces, para cada $x \in \hat{B}$ existe $j_x \in r$ tal que $c(\{x, y\}) = j_x$ para todo $y \in \hat{B}$ tal que $x < y$. Esto define una partición de $\hat{B}$ en r clases de la forma $\{x \in \hat{B} : j_x = j\}$, para $j \in r$. Luego, otra vez por el principio del casillero, existe $B \subseteq \hat{B}$ infinito y $j \in r$ tal que $j_x = j$ para todo $x \in B$. Entonces B satisface la condición requerida. Esto completa la demostración del Teorema de Ramsey. $\square$

EJERCICIO 1.2.1. Haga la demostración del caso general del Teorema de Ramsey, para $n \geq 2$. (*Sugerencia*: por inducción en n).

Teorema 1.2.2 (Teorema de Ramsey finito; [21])**.** *Dados $k, n, r > 0$ en $\mathbb{N}$, existe $m = m(k, n, r) \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que para todo conjunto $E \subset \mathbb{N}$ con $|E| = m$ y toda coloración $c : E^{[n]} \to r$ existe $F \subseteq E$ tal que $|F| = k$ y $F^{[n]}$ es monocromático para c.*

El teorema anterior es equivalente al siguiente:

Teorema 1.2.3 (Teorema de Ramsey finito, segunda versión; [21])**.** *Dados $k, n, r > 0$ en $\mathbb{N}$, existe $m = m(k, n, r) \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que para toda coloración $c : m^{[n]} \to r$ existe $F \subseteq m$ tal que $|F| = k$ y $F^{[n]}$ es monocromático para c.*

EJERCICIO 1.2.2. Demuestre que los Teoremas 1.2.2 y 1.2.3 son equivalentes. (*Sugerencia*: dado m como en el Teorema 1.2.3, $E \subset \mathbb{N}$ tal que $|E| = m$ y una coloración $c : E^{[n]} \to r$, fije una biyección entre m y E, y utilícela para inducir una coloración $\hat{c} : m^{[n]} \to r$.)

Haremos entonces la demostración de la segunda versión del Teorema de Ramsey finito:

Demostración del Teorema 1.2.3. Fijemos $k \geq n,\ r > 0$ en $\mathbb{N}$, y supongamos que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe una coloración $c_m : m^{[n]} \to r$ que no satisface la tesis del enunciado del Teorema 1.2.3, es decir, para todo conjunto $F \subseteq m$ con $|F| = k$ se tiene que $F^{[n]}$ no es monocromático para c_m.

Definamos $c : \mathbb{N}^{[n+1]} \to r$ de la siguiente manera:

$$c(E) = c_{max(E)}(E - \{max(E)\}),$$

donde $max(E)$ es el máximo del conjunto finito E. Por el Teorema 1.2.1, existe $B \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $B^{[n+1]}$ es monocromático para c. Sea $E \subset B$ tal que $|E| = k + 1$ y sea $m = max(E)$. Entonces $F = E - \{m\}$ es tal que $|F| = k$ y $F^{[n]}$ es monocromático para c_m. Contradicción.

$\square$

1.3 Acciones de grupos

El fenómeno descrito en ambas versiones del Teorema de Ramsey ha aparecido de manera natural en diversos contextos matemáticos, no necesariamente discretos. Usualmente, la manera en que este comportamiento aparece es descrita por medio de acciones de ciertos grupos sobre conjuntos adecuados, dotados de algún tipo de estructura (topológica, métrica, de medida, etc). Es por esto que haremos un breve repaso de nociones básicas sobre acciones de grupos.

Definición 1.3.1. *Sea G un grupo y X un conjunto no vacío. Supongamos que está dada una función $(g, x) \mapsto g.x$ de $G \times X$ en X. Decimos que esto define una* ***acción*** *de G en X, o que G actúa en X, si se satisface lo siguiente:*

1. *$e \cdot x = x$ para todo $x \in X$. (Aquí e denota al elemento neutro de G).*

2. *$g(h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$ para todo $x \in X$ y todo par $g, h \in G$.*

Además, decimos que la acción es ***transitiva*** *si para cada par $x, x' \in X$ existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = x'$. La acción es* ***efectiva*** *si para todo $g \in G$ distinto de e, existe $x \in X$ tal que $g \cdot x \neq x$; es* ***libre o fuertemente efectiva*** *si para todo $g \in G$ con $g \neq e$ se tiene $(\forall x \in X)\ (g \cdot x \neq x)$; es decir, la acción es libre si ningún $g \neq e$ tiene puntos fijos.*

En cada caso, decimos que G es transitivo, efectivo o fuertemente efectivo (libre) en su acción sobre X.

Si G es un grupo que actúa sobre un conjunto no vacío X y $x \in X$, la **órbita** de x respecto a la acción de G, es el conjunto:

$$G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}.$$

EJERCICIO 1.3.1. Demuestre que la acción de G sobre X es transitiva si y solo si para todo $x \in X$ se tiene que $G \cdot x = X$.

Ejemplo 1.3.1. Sea S_∞ el conjunto de la funciones biyectivas de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ (en otras palabras, S_∞ es el conjunto de las permutaciones de $\mathbb{N}$). Es sabido que S_∞ es un grupo, con la composición de funciones como multiplicación, conocido como *grupo simétrico infinito*.

Fijemos $n > 0$ en $\mathbb{N}$. La correspondencia $(\pi, F) \mapsto \pi \cdot F$, donde

$$\pi \cdot F := \{\pi(x) : x \in F\},$$

define una acción de S_∞ sobre $\mathbb{N}^{[n]}$.

EJERCICIO 1.3.2. Demuestre que la correspondencia definida en el ejemplo 1.3.1 es en efecto una acción de S_∞ sobre $\mathbb{N}^{[n]}$ que es transitiva, efectiva, pero no fuertemente efectiva.

EJERCICIO 1.3.3. Demuestre que la acción de S_∞ sobre $\mathbb{N}^{[n]}$ satisface la siguiente propiedad, conocida como *ultratransitividad*: dados $F, F' \in \mathbb{N}^{[n]}$ y una biyección $f : F \to F'$, existe $\pi \in S_\infty$ tal que $\pi \restriction F = f$. Es decir, $\pi \cdot F = \{f(x) : x \in F\} = F'$. Observe que esto implica que la acción de S_∞ sobre $\mathbb{N}^{[n]}$ es transitiva, pero ultratransitividad es una condición más fuerte.

Ejemplo 1.3.2. Sea $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Recordemos que

$$l^2 := \{(a_n)_n \subseteq \mathbb{K} : \Sigma_n\ |a_n|^2 < \infty\}$$

es un *espacio de Hilbert* sobre $\mathbb{K}$ de dimensión infinita, con el *producto interno*

$$\langle (a_n)_n, (b_n)_n \rangle := \Sigma_n\ a_n \cdot \overline{b_n} \quad ,$$

donde $\overline{b_n}$ denota al complejo conjugado de b_n. Si b_n es un número real entonces $\overline{b_n} = b_n$.

l^2 es un espacio métrico *separable*[1], con la distancia determinada por la norma asociada al producto interno anterior; i.e.,

$$\|(a_n)_n\| := \sqrt{\langle (a_n)_n, (a_n)_n \rangle}$$

y

$$d((a_n)_n, (b_n)_n) := \|(a_n)_n - (b_n)_n\|.$$

Recordemos también que en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, un *operador lineal* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es *unitario* si $T \circ T^* = T^* \circ T = I$, donde I es la transformación identidad sobre $\mathcal{H}$ y $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es la *adjunta* de T, es decir, T^* es el único operador lineal tal que:

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle.$$

La existencia de T^* está garantizada por el *Teorema de Riesz.* [2]
El conjunto $U(\mathcal{H})$ de todos los operadores unitarios sobre $\mathcal{H}$ es un grupo, con la composición de funciones como operación de grupo.

[1] i.e., contiene un subconjunto denso numerable

[2] **Teorema de Riesz:** *Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y un funcional lineal sobre $\mathcal{H}$ continuo, existe un único $z \in \mathcal{H}$ tal que $f(x) = \langle x, z \rangle$, para cada $x \in \mathcal{H}$.*

Definición de T^*: para cada $y \in \mathcal{H}$, el funcional lineal f_y dado por $f_y(x) = \langle T(x), y \rangle$ es continuo. Luego, por el Teorema de Riesz existe un único z_y tal que $f_y(x) = \langle x, z_y \rangle$. Se define entonces $T^*(y) = z_y$, para todo $y \in \mathcal{H}$. Además, se satisface que $\|T^*\| = \|T\|$.

Que un operador T sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ sea unitario es equivalente a que satisface las condiciones siguientes:

1. T es sobreyectivo y
2. $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

De la segunda condición se deduce que todo operador unitario es una *isometría*, es decir, *preserva distacias*: $d(T(x), T(y)) = d(x, y)$.

Sea

$$\mathbb{S}^\infty := \{(a_n)_n : \|(a_n)_n\| = 1\}$$

la *esfera unitaria* de l^2. Entonces la correspondencia

$$(T, (a_n)_n) \mapsto T \cdot (a_n)_n := T((a_n)_n)$$

define una acción de $U(l^2)$ sobre $\mathbb{S}^\infty$.

EJERCICIO 1.3.4. Demuestre que la correspondencia definida en el ejemplo 1.3.2 es en efecto una acción de $U(l^2)$ sobre $\mathbb{S}^\infty$ que es transitiva, efectiva, pero no fuertemente efectiva. (*Sugerencia*: las rotaciones son operadores unitarios).

EJERCICIO 1.3.5. Dado $n > 1$ en $\mathbb{N}$, sea $X = \mathbb{Z}_n^{\mathbb{N}}$ es conjunto de las sucesiones de elementos del anillo $\mathbb{Z}_n$. Demuestre que la siguiente correspondencia define una acción del grupo aditivo $\mathbb{Z}$ sobre X:

$$m \cdot (a_i)_i = (m + a_i \ mod \ n)_i$$

para cada $m \in \mathbb{Z}$ y cada sucesión $(a_i)_i \in X$. Es decir, $m \cdot (a_i)_i$ es la sucesión de elementos de $\mathbb{Z}_n$ cuyo término i-ésimo está dado por

$$m + a_i \ mod \ n,$$

la clase de $m + a_i$ módulo n. Demuestre además que esta acción es transitiva, pero no es ni efectiva ni libre.[3]

Observaciones.

Más adelante, veremos la demostración de que el Teorema de Ramsey Finito (Teorema 1.2.2) es equivalente al siguiente enunciado (considere a $\mathbb{N}^{[n]}$ como un espacio métrico discreto y a $\mathbb{R}$ con la métrica usual):

Para todo $n > 0$ se tiene lo siguiente: dados $\epsilon > 0$, $f : \mathbb{N}^{[n]} \to \mathbb{R}$, uniformemente continua y acotada, y $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}^{[n]}$ finito, existe $\pi \in S_\infty$ tal que $sup\{|f(F) - f(F')| : F, F' \in \pi \cdot \mathcal{F}\} < \epsilon$.

Aquí $\pi \cdot \mathcal{F} = \{\pi \cdot F : F \in \mathcal{F}\}$.

[3] Esta es la generalización de un ejemplo sugerido por Carlos Di Prisco.

En este caso decimos que para cada $n > 0$ el par $(S_\infty, \mathbb{N}^{[n]})$ es *de oscilación finitamente estable*[4].

En general, nos interesará estudiar la propiedad correspondiente para pares (G, X) en los que G es un grupo actuando sobre un *espacio uniforme* X; en este caso supondremos que G es un grupo de *isomorfismos uniformes* sobre X (estas nociones serán definidas en el Capítulo 2). Cuando G sea un *grupo topológico* supondremos además que la acción de G sobre X es una función continua. Y en el caso en que X sea un espacio métrico, G será un grupo de isometrías de X.

Veremos por ejemplo que el par $(U(l^2), \mathbb{S}^\infty)$ del ejemplo 1.3.2 también es de oscilación finitamente estable. Es decir (considere a $\mathbb{S}^\infty$ como subespacio métrico de l^2):

Dados $\epsilon > 0$, $f : \mathbb{S}^\infty \to \mathbb{R}$ uniformemente continua y acotada y $\mathcal{F} \subset \mathbb{S}^\infty$ finito, existe $T \in U(l^2)$ tal que $sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in T \cdot \mathcal{F}\} < \epsilon$.

Aquí $T \cdot \mathcal{F} = \{T(x) : x \in \mathcal{F}\}$.

Presentaremos estas nociones en su forma general en la Capítulo 3.

[4] Dado un conjunto Y y una función $f : Y \to \mathbb{R}$, la **oscilación** de f sobre $X \subseteq Y$ es

$$osc(f \restriction X) = sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in X\}.$$

1.4 Filtros

En los captítulos 2 y 3 presentaremos las nociones de *espacio uniforme* y *G-espacio uniforme*. Como anunciamos en la Introducción, estas nos servirán de marco para estudiar los fenómenos tipo Ramsey. En ese estudio necesitaremos la noción de *completitud* de un espacio uniforme. Es por esto que requerimos de un repaso del concepto de *filtro* y algunas de sus propiedades.

1.4.1 Conceptos básicos

Definición 1.4.1. *Un **filtro** sobre un conjunto no vacío X es una familia $\mathcal{F} \subseteq \wp(X)$ tal que*

1. $(\forall A, B \subseteq X)\ A, B \in \mathcal{F} \rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.
2. $(\forall A, B \subseteq X)\ A \in \mathcal{F}\ \wedge\ A \subseteq B\ \rightarrow\ B \in \mathcal{F}$.

*La condición 1 es esquivalente a que $\mathcal{F}$ es cerrada por intersecciones finitas: $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{F} \rightarrow \bigcap_{j=1}^{k} A_j \in \mathcal{F}$. Una familia de subconjuntos de X que satisface la condición 1 se conoce como **prefiltro** (sobre X). La condición 2 se suele resumir diciendo que $\mathcal{F}$ es cerrada por superconjuntos.*

Ejemplo 1.4.1. Es fácil ver que $\wp(X)$ es un filtro, conocido como **el filtro trivial**. Además, para todo filtro $\mathcal{F}$ se tiene que $\emptyset \in \mathcal{F}$ si y solo si $\mathcal{F} = \wp(X)$. Diremos entonces que un filtro es **no trivial** si $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Ejemplo 1.4.2. Supongamos que X es infinito. La familia

$$\{A \subseteq X : X - A \text{ es finito}\}$$

es un filtro no trivial sobre X. Se conoce como el **filtro de Fréchet** sobre X.

Ejemplo 1.4.3 (*Filtro generado por un conjunto*)**.** Dado $B \subseteq X$, la familia

$$\mathcal{F}_B = \{A \subseteq X : B \subseteq A\}$$

es un filtro sobre X. Se conoce como **filtro generado por** B. El filtro $\mathcal{F}_B$ es trivial si y solo si $B = \emptyset$.

En particular, dado $x \in X$, la familia

$$\mathcal{F}_x = \{A \subseteq X : x \in A\}$$

es un filtro no trivial sobre X.

Definición 1.4.2. *Una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de un conjunto no vacío X es* ***base para un filtro*** *sobre X, si $(\forall A, B \in \mathcal{B})$ $(\exists C \in \mathcal{B})$ $C \subseteq A \cap B$. El* ***filtro generado*** *por $\mathcal{B}$ es la familia*

$$\{A \subseteq X : (\exists B \in \mathcal{B})\ B \subseteq A\}$$

Obviamente, si $\emptyset \in \mathcal{B}$ entonces el filtro generado por $\mathcal{B}$ es el trivial.

Ejemplo 1.4.4. $\{B\}$ es base para $\mathcal{F}_B$ y $\{\{x\}\}$ es base para $\mathcal{F}_x$.

EJERCICIO 1.4.1 (*Filtro generado por una familia de conjuntos*)**.** Sea $\mathcal{S} \subseteq \wp(X)$ no vacía y $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ la familia de las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ (es de notar que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$). Demuestre que $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ es base para un filtro, que es no trivial si y solo si $\mathcal{S}$ tiene la *propiedad de intersección finita.*[5] Además, demuestre que este es el menor filtro que contiene a $\mathcal{S}$. (Observe que entonces existen familias que no están contenidas en ningún filtro no trivial).

Definición 1.4.3. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro maximal no trivial sobre X, es decir, $\mathcal{F}$ es no trivial y para todo filtro $\mathcal{F}'$ sobre X se tiene*

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}' \to \mathcal{F} = \mathcal{F}' \ \ o \ \ \mathcal{F}' = \wp(X),$$

entonces decimos que $\mathcal{F}$ es un ***ultrafiltro*** *sobre X.*

EJERCICIO 1.4.2. Sea $\mathcal{F}$ un filtro no trivial sobre X. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro.
2. $(\forall A \subseteq X)$ $A \in \mathcal{F} \ \leftrightarrow \ X - A \notin \mathcal{F}$.
3. $(\forall A, B \subseteq X)$ $A \cup B \in \mathcal{F} \ \to \ A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$.

[5] i.e., para toda subcolección finita $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subseteq \mathcal{S}$ se tiene que $\bigcap_{i=1}^{n} A_n \neq \emptyset$.

Ejemplo 1.4.5. Dado X no vacío, $\mathcal{F}_x$ es de hecho un ultrafiltro, para cada $x \in X$. Decimos que un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X es **principal** si existe $x \in X$ tal que $\mathcal{U} = \mathcal{F}_x$. En caso contrario decimos que $\mathcal{U}$ es **no principal o libre**.

EJERCICIO 1.4.3. Sea X infinito. Demuestre que el filtro de Fréchet sobre X no es un ultrafiltro.

Ejemplo 1.4.6. Usando el lema de Zorn, podemos construir un ultrafiltro no principal: sea $\mathbb{F}$ el filtro de Fréchet sobre $\mathbb{N}$. Consideremos la colección $\mathcal{F}il(\mathbb{F})$, de todos los filtros no triviales sobre $\mathbb{N}$ que contienen a $\mathbb{F}$. Es fácil ver que si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}il(\mathbb{F})$ es una cadena creciente, entonces

$$\bigcup \mathcal{C} = \bigcup \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \in \mathcal{C}\}$$

es un filtro. Obviamente $\bigcup \mathcal{C}$ pertenece a $\mathcal{F}il(\mathbb{F})$ y es cota superior de $\mathcal{C}$ (en el orden $\subseteq$). Por lo tanto, por el lema de Zörn existe un elemento maximal $\mathcal{U}$ en $\mathcal{F}il(\mathbb{F})$. Por maximalidad $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Además, $\mathcal{U}$ es no principal por contener a $\mathbb{F}$.

Ejemplo 1.4.7 (*Filtro elemental asociado a una sucesión*)**.** Sea X un cunjunto y $(x_n)_n$ una sucesión de puntos en X. La familia

$$\{A \subseteq X : (\exists k)\ (\forall n \geq k)\ x_n \in A\}$$

es un filtro sobre X.

EJERCICIO 1.4.4. Demuestre que la familias definidas en los ejemplos 1.4.2, 1.4.3, 1.4.5, 1.4.7 y 1.4.6 son en efecto filtros (o ultrafiltros según el caso) y que satisfacen las propiedades que se afirman sobre ellos (por ejemplo, ser no principal, no trivial, etc).

Definición 1.4.4 (Extensión y traza de filtros)**.** *Si $X \subseteq Y$ y $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, entonces $\mathcal{F}$ genera un filtro sobre Y. Concretamente, la familia*

$$\{A \subseteq Y : (\exists B \in \mathcal{F})\ B \subseteq A\}$$

*es un filtro sobre Y. Se conoce como la **extensión de $\mathcal{F}$ a Y**. Por otro lado, si $\mathcal{G}$ es un filtro sobre Y y $(\forall A \in \mathcal{G})\ A \cap X \neq \emptyset$ entonces $\{A \cap X : A \in \mathcal{G}\}$ es base para un filtro no trivial sobre X, que se conoce como **la traza de $\mathcal{G}$ sobre X**.*

Definición 1.4.5. *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son filtros sobre X y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, entonces decimos que $\mathcal{F}'$ es un* ***refinamiento*** *de $\mathcal{F}$.*

EJERCICIO 1.4.5. Demuestre los siguiente:

1. Si $(x_n)_n$ es una sucesión de puntos en X y $(x_{n_k})_k$ es una subsucesión, entonces el filtro elemental asociado a $(x_{n_k})_k$ es un refinamiento del filtro elemental asociado a $(x_n)_n$.

2. Si $\mathcal{F}$ es el filtro elemental asociado a $(x_n)_n$ y $\mathcal{F}'$ es un refinamiento de $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}'$ es el filtro elemental asociado a alguna subsucesión de $(x_n)_n$.

1.4.2 Filtros sobre espacios topológicos

Por el resto de esta sección, sea X un espacio topológico. Para cada $x \in X$, denotaremos por $\mathcal{N}_x$ a la colección de *vecindades* de x.[6] Es fácil ver que $\mathcal{N}_x$ es un filtro no trivial sobre X, conocido como el **filtro o sistema de vecindades** de x. Una **base de vecindades para** x es simplemente una base para el filtro $\mathcal{N}_x$. La familia $\mathcal{B}_x$ de las vecindades abiertas de x es una base de vecindades para x.

Definición 1.4.6. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Decimos que $x \in X$ es un* ***punto límite*** *de $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}$ es un refinamiento de $\mathcal{N}_x$. En este caso decimos que $\mathcal{F}$* ***converge*** *a x. Por otro lado, decimos que x es un* ***punto de adherencia*** *de $\mathcal{F}$ si x está en la adherencia de cada elemento de $\mathcal{F}$. Al conjunto de los puntos de adherencia de $\mathcal{F}$ se le llama* ***adherencia*** *de $\mathcal{F}$.*

EJERCICIO 1.4.6. Demuestre lo siguiente:

1. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ filtros no triviales sobre X. Supongamos que $\mathcal{F}'$ es un refinamiento de $\mathcal{F}$.

    - Todo punto de adherencia de $\mathcal{F}'$ es un punto de adherencia de $\mathcal{F}$.

[6] No nos referimos solamente a *vecindades abiertas*. Un subconjunto $A \subseteq X$ es una **vecindad** de un punto $x \in X$, si x pertenece al *interior* de A. En el caso en que A sea un conjunto abierto (resp. cerrado) diremos que A es una **vecindad abierta (resp. cerrada)** de x.

- Todo punto límite de $\mathcal{F}$ es punto límite de $\mathcal{F}'$.

2. Dada $(x_n)_n$ una sucesión de puntos en X, $(x_n)_n$ converge a $x \in X$ si y solo el filtro elemental asociado a $(x_n)_n$ converge a x.

3. Si $\mathcal{F}$ es un filtro no trivial sobre X, entonces x es un punto de adherencia de $\mathcal{F}$ si y solo si x es punto límite de algún refinamiento no trivial de $\mathcal{F}$.

4. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X, entonces x es un punto de adherencia de $\mathcal{U}$ si y solo si x es punto límite de $\mathcal{U}$.

Capítulo 2

Espacios uniformes

2.1 Conceptos básicos y ejemplos

Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, para todo $V \subseteq X \times X$ sea

$$V^{-1} := \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in V\}.$$

Y para cada para $U, V \subseteq X \times X$ sea

$$U \circ V := \{(x, z) \in X \times X : (\exists y \in X)\ (x, y) \in U, (y.z) \in V\}.$$

Para cada $V \subseteq X \times X$ y cada $x \in X$, la V-**vecindad** de x es el conjunto

$$V[x] := \{y \in X : (x, y) \in V\}.$$

Proposición 2.1.1. *Sea $X \neq \emptyset$. Dados $U, V, W \subseteq X \times X$ se tiene lo siguiente:*

1. $(V^{-1})^{-1} = V$.
2. $U \circ (V \circ W) = (U \circ V) \circ W$.
3. $(U \cap V)^{-1} = U^{-1} \cap V^{-1}$.
4. $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \cap U^{-1}$.
5. $U \subseteq V \to U \circ U \subseteq V \circ V$.

□

EJERCICIO 2.1.1. Demuestre la Proposición 2.1.1.

Definición 2.1.1. *Un **espacio uniforme** es un par $(X,\mathcal{U})$ formado por un conjunto X y una familia $\mathcal{U} \subseteq \wp(X \times X)$, llamada **estructura uniforme o uniformidad**, que satisface las siguientes propiedades:*

1. *$\mathcal{U}$ es un filtro sobre $X \times X$.*
2. *Denotemos por Δ (o Δ_X) a la diagonal $\{(x,x) : x \in X\}$. Entonces, para cada $V \in \mathcal{U}$ se tiene que $\Delta \subseteq V$.*
3. *Si $V \in \mathcal{U}$ entonces $V^{-1} \in \mathcal{U}$.*
4. *Si $V \in \mathcal{U}$ entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \circ U \subseteq V$.*

Observación 2.1.1. En virtud de la condición 2, a cada elemento de $\mathcal{U}$ se le llama **entorno de la diagonal**. Es de notar que la condición 2 implica que si $V \in \mathcal{U}$ entonces $V \circ V \in \mathcal{U}$. Un entorno de la diagonal V es **simétrico** si y solo si $V = V^{-1}$.

Ejemplo 2.1.1. *La uniformidad discreta* sobre un conjunto X es

$$\mathcal{D}_X := \{V \subseteq X \times X : \Delta \subseteq V\}.$$

Ejemplo 2.1.2. *La uniformidad trivial* sobre un conjunto X es

$$\mathcal{T}_X \equiv \{X \times X\}.$$

Cuando $X = \emptyset$ entonces $\mathcal{T}_X$ es la *uniformidad vacía.*

2.2 Base de una estructura uniforme y más ejemplos

Definición 2.2.1. *Dada una uniformidad $\mathcal{U}$, una subfamilia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ es una **base** de $\mathcal{U}$ si $\mathcal{B}$ es un prefiltro y para todo $V \in \mathcal{U}$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subseteq V$.*

Proposición 2.2.1. *Dado un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$, sea $Sim(\mathcal{U}) = \{V \in \mathcal{U} : V$ es simétrico$\}$. Entonces $Sim(\mathcal{U})$ es una base para $\mathcal{U}$.*

Demostración. Para todo $U \in \mathcal{U}$ se tiene que $U \cap U^{-1}$ es simétrico. $\square$

EJERCICIO 2.2.1.

1. Demuestre que para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{U}$ simétrico tal que
$$V \circ V \circ V \subseteq U.$$

2. Demuestre que si V es simétrico, entonces para todo U se tiene
$$V \circ U \circ V = \bigcup \{V[x] \times V[y] : (x, y) \in U\}.$$

Proposición 2.2.2. *Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{B} \subseteq \wp(X)$ es **base de alguna uniformidad** si y solo si se satisface lo siguiente:*

1. *$\mathcal{B}$ es un prefiltro sobre $X \times X$.*

2. *Todo elemento de $\mathcal{B}$ contiene a la diagonal Δ.*

3. *Para todo $V \in \mathcal{B}$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subseteq V^{-1}$.*

4. *Para todo $V \in \mathcal{B}$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \circ U \subseteq V$.*

Demostración. Si $\mathcal{B}$ es base para alguna uniformidad, es fácil ver que por definición de uniformidad $\mathcal{B}$ satisface las condiciones 1, 2, 3 y 4. Recíprocamente, si $\mathcal{B}$ satisface las condicones 1, 2, 3 y 4 entonces
$$\mathcal{U}(\mathcal{B}) \equiv \{V \in \wp(X \times X) : (\exists U \in \mathcal{B})\ U \subseteq V\}$$
es una uniformidad sobre X y $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{U}(\mathcal{B})$. En este caso decimos que $\mathcal{U}(\mathcal{B})$ es la **uniformidad generada** por $\mathcal{B}$. $\square$

Ejemplo 2.2.1. Dado un número primo p, *la uniformidad p-ádica* sobre $\mathbb{Z}$ es generada por los entornos de la diagonal de la forma:
$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \ mod\ p^n\}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Ejemplo 2.2.2. *La uniformidad aditiva* sobre un espacio vectorial topológico E, cuya base está formada por los entornos de la diagonal de la forma:
$$\{(x, y) \in E \times E : x - y \in V\},$$
donde V es una vecindad del vector 0.

Ejemplo 2.2.3. *La uniformidad izquierda* $\mathcal{U}_L(G)$ sobre un grupo topológico G, cuya base está formada por los entornos de la diagonal de la forma:

$$\{(x, y) \in G \times G : x^{-1}y \in V\},$$

donde V es una vecindad de la identidad de G. Análogamente, la *uniformidad derecha* $\mathcal{U}_R(G)$ está generada por los entornos de la diagonal de la forma:

$$\{(x, y) \in G \times G : xy^{-1} \in V\},$$

donde V es una vecindad de la identidad de G. Obviamente, si G es conmutativo $\mathcal{U}_L(G)$ y $\mathcal{U}_R(G)$ coinciden.

Ejemplo 2.2.4. *La uniformidad métrica* sobre un espacio métrico (X, d), cuya base está formada por los entornos de la diagonal de la forma:

$$V_\epsilon^d := \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \epsilon\}, \ \epsilon > 0.$$

EJERCICIO 2.2.2. Demuestre que los ejemplos anteriores constituyen en efecto uniformidades.

2.3 Topología asociada a una uniformidad

Sea $\mathcal{U}$ una estructura uniforme sobre un conjunto no vacío X. Para cada $x \in X$, la familia $\{V[x] : V \in \mathcal{U}\}$ forma una base de vecindades para x en cierta topología[1] $\tau_{\mathcal{U}}$ sobre X que es denominada **topología asociada** a $\mathcal{U}$ o **topología uniforme** relativa a $\mathcal{U}$:

---

[1]Sea X un conjunto no vacío, y supongamos que está dada una correspondencia que asigna a cada $x \in X$ una familia no-vacía $\mathcal{F}_x \subseteq \wp(X)$ tal que:

1. $\mathcal{H}_x$ es un filtro.
2. Para cada $B \in \mathcal{H}_x$ se tiene que $x \in B$.
3. Para cada $B \in \mathcal{H}_x$ existe $A \in \mathcal{H}_x$ tal que $A \subseteq B$ y $A \in \mathcal{H}_y$, para todo $y \in A$.

Entonces, la colección $\tau = \{A \subseteq X : (\forall x \in A)(\exists B \in \mathcal{H}_x) \ B \subseteq A\}$ es una topología sobre X. Además, para cada $x \in X$ la familia $\mathcal{H}_x$ es precisamente el filtro de vecindades de x en la topología τ. En el caso que nos compete, la correspondencia que a cada $x \in X$ le asigna el filtro generado por la familia $\{V[x] : V \in \mathcal{U}\}$ satisface la condiciones 1, 2 y 3.

$$A \in \tau_{\mathcal{U}} \text{ si y solo si } (\forall x \in A)(\exists V \in \mathcal{U})\ V[x] \subseteq A.$$

Si (X, τ) es un espacio topológico y $\mathcal{U}$ es una estructura uniforme sobre X tal que $\tau_{\mathcal{U}} = \tau$, entonces decimos que $\mathcal{U}$ es **compatible** con τ o simplemente *compatible*, cuando no hay ambigüedad en el contexto.

Proposición 2.3.1. *Sea $(X,\mathcal{U})$ una espacio uniforme. Si $\mathcal{B}$ es base para $\mathcal{U}$ entonces, para todo $x \in X$ se tiene que $\{U[x] : U \in \mathcal{B}\}$ es una base de entornos para x en $\tau_{\mathcal{U}}$.*

□

Ejemplo 2.3.1. Consideremos a $\mathbb{R}$ con la uniformidad métrica. Si U_ϵ es un elemento de la base de esta uniformidad entonces para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$U_\epsilon[x] = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \epsilon\}$$

y la familia $\{U_\epsilon[x] : x \in \mathbb{R}, \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$ es una base para la topología uniforme asociada, que es precisamente la topología usual de $\mathbb{R}$.

A la topología producto inducida por $\tau_{\mathcal{U}}$ sobre $X \times X$ la denominaremos **topología producto uniforme**. Las partes 1 y 2 de la siguiente proposición nos dicen que las colecciones $\{V[x] \times W[y] : x, y \in X; V, W \in \mathcal{U}\}$ y $\{V[x] \times V[y] : x, y \in X; V \in \mathcal{U}\}$ son bases para la topología producto uniforme; y además los elementos de $\mathcal{U}$ son en efecto entornos (topológicos) de la diagonal.

Proposición 2.3.2. *Sea $(X,\mathcal{U})$ una espacio uniforme.*

1. *Para todo $P \subseteq X \times X$, el interior de P en la topología producto uniforme es*

$$\begin{aligned} int(P) &= \{(x, y) \in X \times X : (\exists U, V \in \mathcal{U})\ U[x] \times V[y] \subseteq P\} \\ &= \{(x, y) \in X \times X : (\exists V \in \mathcal{U})\ V[x] \times V[y] \subseteq P\}. \end{aligned}$$

2. *Si $U \in \mathcal{U}$ entonces $int(U) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, todo elemento de $\mathcal{U}$ es una vecindad de la diagonal en la topología producto uniforme.*

3. *$\{V \in Sim(\mathcal{U}) : V$ es abierto$\}$ es base para $\mathcal{U}$.*

4. *Para todo* $A \subseteq X$ *se tiene* $\bar{A} = \bigcap\{U[A] : U \in \mathcal{U}\}$.

5. *Para todo* $P \subseteq X \times X$ *se tiene* $\bar{P} = \bigcap\{U \circ P \circ U : U \in \mathcal{U}\}$.

6. $\{V \in Sim(\mathcal{U}) : V$ *es cerrado*$\}$ *es base para* $\mathcal{U}$.

EJERCICIO 2.3.1. Demuestre la Proposición 2.3.2.

Lema 2.3.1. *Sea* $(X,\mathcal{U})$ *una espacio uniforme. Si* $V \in \mathcal{U}$ *es cerrado en la topología producto uniforme entonces* $V[x]$ *es cerrado en* $\tau_{\mathcal{U}}$, *para todo* $x \in X$.

Demostración. Si $y \notin V[x]$ entonces $(x, y) \notin V$. Por lo tanto existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W[x] \times W[y] \cap V = \emptyset$. De aquí se deduce que $W[y] \cap V[x] = \emptyset$, pues si $z \in W[y] \cap V[x]$ entonces por un lado $(x, z) \in W[x] \times W[y]$ y por el otro $(x, z) \in V$. □

Teorema 2.3.1. *Si* $(X,\mathcal{U})$ *es un espacio uniforme entonces* $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ *es un espacio regular* [2].

Demostración. Sea $x \in X$ y $A \in \mathcal{N}_x$. Podemos suponer que $A = U[x]$ para algún $U \in \mathcal{U}$. Por la parte 6 de la Proposición 2.3.2 existe $V \subseteq U$ en $\mathcal{U}$ que es cerrado. Obviamente $V[x] \subseteq U[x]$. Y $V[x]$ es cerrado por el el lema 2.3.1. □

Observación 2.3.1. Es fácil ver que si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme entonces $\bigcap\mathcal{U}$ es una relación de equivalencia sobre X. Cuando esta relación es la *igualdad*, i.e. cuando $\bigcap\mathcal{U} = \Delta$, decimos que $\mathcal{U}$ es una uniformidad **separada**.

EJERCICIO 2.3.2. Demuestre que $\bigcap\mathcal{U}$ es una relación de equivalencia sobre X.

Teorema 2.3.2. *Sea* $(X,\mathcal{U})$ *una espacio uniforme. Las siguientes afirmaciones son equivalente:*

1. $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ *es Hausdorff* [3].

[2] Un espacio topológico X es **regular** si dado $x \in X$ y un conjunto cerrado no-vacío $C \subset X$ tal que $x \notin C$, existe un conjunto abierto $A \subset X$ tal que $x \notin A$ y $C \subseteq A$.

[3] Un espacio topológico X es **Hausdorff** si dados $x, y \in X$ distintos, existen entornos U de x y V de y tales que $U \cap V = \emptyset$.

2. Para todo $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado en $\tau_{\mathcal{U}}$.

3. $\bigcap \mathcal{U} = \Delta$.

Demostración. Obviamente 1 implica 2. La equivalencia de 1 y 2 es consecuencia de que $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es un espacio regular.

Supongamos que 2 vale. Sabemos que $\Delta \subseteq \bigcap \mathcal{U}$. Si $x, y \in X$ y $x \neq y$ entonces existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $y \notin V[x]$; es decir, $(x, y) \notin V$. Por lo tanto $(x, y) \notin \bigcap \mathcal{U}$. Esto demuestra que 2 implica 3.

Supongamos ahora que vale 3 y demostremos 2. Si X es unitario no hay nada que demostrar. Si no, dado $x, y \in X$ tales que $y \neq x$, se tiene $(x, y) \notin \Delta$ y por lo tanto existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $y \notin V[x]$. Esto implica que $\{x\}$ es cerrado en $\tau_{\mathcal{U}}$. □

EJERCICIO 2.3.3. Demuestre que si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme entonces $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es *completamente regular.*[4] Por lo tanto, $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es un *espacio Tychonoff* si y solo si $\mathcal{U}$ es separada.

EJERCICIO 2.3.4. Demuestre que todo espacio Tychonoff admite una estructura uniforme compatible que es necesariamente separada.

EJERCICIO 2.3.5. Demuestre que todo elemento de una uniformidad compatible $\mathcal{U}$ sobre un espacio topológico X es una vecindad de la diagonal en la topología producto sobre $X \times X$. Deduzca de esto que todo *espacio compacto*[5] admite una *única* uniformidad compatible, formada por las vecindades de la diagonal.

[4] Un espacio topológico X es **completamente regular** si para todo $x \in X$ y todo entorno abierto A de x existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y f es constantemente igual a 1 en $X - A$. Aquí estamos considerando a $[0, 1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología usual. X es **Tychonoff** si es completamente regular y para todo $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es cerrado.

[5] Un espacio topológico X es **compacto** si todo cubrimiento de X por abiertos contiene un subcubrimiento finito.

2.3.1 Réplica separada de una estructura uniforme

Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Consideremos la relación de equivalencia $\bigcap\mathcal{U}$ sobre X y sea $\pi : X \to X/\bigcap\mathcal{U}$ la aplicación cociente. Para todo $S \subseteq X \times X$, definimos

$$(\pi \times \pi)(S) := \{(\pi(x), \pi(y)) : (x, y) \in S\}.$$

Veamos que la familia

$$(\pi \times \pi)(\mathcal{U}) := \{(\pi \times \pi)(V) : V \in \mathcal{U}\}$$

es una estructura uniforme sobre el cociente $X/\bigcap\mathcal{U}$:

1. Si $\Delta_{X/\bigcap\mathcal{U}}$ es la diagonal de $X/\bigcap\mathcal{U} \times X/\bigcap\mathcal{U}$ entonces

   $$\Delta_{X/\bigcap\mathcal{U}} = (\pi \times \pi)(\bigcap\mathcal{U}) \subseteq (\pi \times \pi)(V),$$

   para todo $V \in \mathcal{U}$.

2. Si $V, W \in \mathcal{U}$ entonces $(\pi\times\pi)(V)\cap(\pi\times\pi)(W) = (\pi\times\pi)(V\cap W) \in (\pi \times \pi)(\mathcal{U})$.

3. Sea $V \in \mathcal{U}$ y $Z \subseteq X/\bigcap\mathcal{U} \times X/\bigcap\mathcal{U}$ tal que $(\pi \times \pi)(V) \subseteq Z$. Si hacemos $W = \{(x, y) : (\pi(x), \pi(y)) \in Z\}$ entonces $V \subseteq W$ y $(\pi \times \pi)(W) = Z$. Por lo tanto, $Z \in (\pi \times \pi)(\mathcal{U})$.

4. Para todo $V \in \mathcal{U}$ se tiene $(\pi \times \pi)(V)^{-1} = (\pi \times \pi)(V^{-1}) \in (\pi \times \pi)(\mathcal{U})$.

5. Para todo $U \in \mathcal{U}$ se tiene $(\pi \times \pi)(U) \circ (\pi \times \pi)(U) = (\pi \times \pi)(U \circ U)$. Por lo tanto, si $U, V \in \mathcal{U}$ son tales que $U \circ U \subseteq V$ entonces $(\pi \times \pi)(U) \circ (\pi \times \pi)(U) \subseteq \pi(V)$.

Nótese que $\bigcap(\pi\times\pi)(\mathcal{U}) = (\pi\times\pi)(\bigcap\mathcal{U}) = \Delta_{X/\bigcap\mathcal{U}}$ (ver la parte 1 arriba). Es decir, la estructura uniforme $(\pi \times \pi)(\mathcal{U})$ es separada. Se conoce como la **réplica separada** de $\mathcal{U}$. Obviamente, si $\mathcal{U}$ es separada se tiene

$$(X/\bigcap\mathcal{U}, (\pi \times \pi)(\mathcal{U})) = (X,\mathcal{U}).$$

Además, si $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{U}$ entonces

$$(\pi \times \pi)(\mathcal{B}) := \{(\pi \times \pi)(V) : V \in \mathcal{B}\}$$

es base de $(\pi \times \pi)(\mathcal{U})$.

2.3.2 Subespacios uniformes

Definición 2.3.1. *Si* $(X,\mathcal{U}_X)$ *es un espacio uniforme y* $Y \subseteq X$ *es un subconjunto cualquiera entonces* $\mathcal{U}_Y = \{V \cap (Y \times Y) : V \in \mathcal{U}_X\}$ *es una uniformidad sobre* Y *que se conoce como* ***uniformidad relativa****, inducida por* $\mathcal{U}_X$*. Entonces decimos que* $(Y,\mathcal{U}_Y)$ *es* ***subespacio uniforme*** *de* $(X,\mathcal{U}_X)$*. Observe que* $(Y,\tau_{\mathcal{U}_Y})$ *es un subespacio topológico de* $(X,\tau_{\mathcal{U}_X})$*.*

2.3.3 Filtros de Cauchy. Completitud

Definición 2.3.2. *Dado un espacio uniforme* $(X,\mathcal{U})$ *y* $V \in \mathcal{U}$*, decimos que* $A \subseteq X$ *es* V*-**pequeño**, si* $A \times A \subseteq V$*.*

Definición 2.3.3. *Sea* $(X,\mathcal{U})$ *un espacio uniforme. Decimos que* $\mathcal{F} \subseteq \wp(X)$ *es un* ***filtro de Cauchy*** *si* $\mathcal{F}$ *es un filtro sobre* X *y para todo* $V \in \mathcal{U}$ *existe* $A \in \mathcal{F}$ *tal que* A *es* V*-pequeño.*

Ejemplo 2.3.2. El filtro elemental asociado a una *sucesión de Cauchy.* [6]

EJERCICIO 2.3.6. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme, $(x_n)_n$ una sucesión de puntos de X y $\mathcal{F}$ el filtro elemental asociado a $(x_n)_n$. Demuestre que $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy si y solo si $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy.

Proposición 2.3.3. *Todo refinamiento de un filtro de Cauchy es de Cauchy.*

□

Proposición 2.3.4. *Todo filtro convergente en la topología uniforme es de Cauchy.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro que converge a un punto x. Entonces $\mathcal{F}$ es un refinamiento de $\mathcal{N}_x$ y por lo tanto basta demostrar que $\mathcal{N}_x$ es de Cauchy:

Sea $V \in \mathcal{U}$. Podemos suponer que V es abierto. Entonces, como $(x,x) \in V$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U[x] \times U[x] \subseteq V$. Esto es, $U[x]$ es V-pequeño. □

[6] En un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$, una **sucesión** $(x_n)_n \subseteq X$ es **de Cauchy** si para todo $V \in \mathcal{U}$ existe un número natural k tal que para todo par $m,n \geq k$ se tiene $(x_m,x_n) \in V$.

EJERCICIO 2.3.7. Demuestre que el filtro elemental asociado a una sucesión de Cauchy es convergente si y solo si la sucesión es convergente.

El ejercicio 2.3.7 muestra que el recíproco de la Proposición 2.3.4 no vale en general. Esto induce la siguiente noción:

Definición 2.3.4. *Decimos que un espacio uniforme* $(X,\mathcal{U})$ *es* ***completo*** *si todo filtro de Cauchy es convergente (en la topología asociada* $\tau_{\mathcal{U}}$*).*

La siguiente es una condición suficiente para la convergencia de un filtro de Cauchy.

Proposición 2.3.5. *Todo filtro de Cauchy con puntos de adherencia es convergente.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy sobre X. Primero demostremos lo siguiente:

Afirmación. *Para todo* $V \in \mathcal{U}$ *existe* $A \in \mathcal{F}$ *cerrado que es* V*-pequeño.*

Demostración de la Afirmación. Dado $V \in \mathcal{U}$. Sea $W \in \mathcal{U}$ cerrado tal que $W \subseteq V$. Como $\mathcal{F}$ es de Cauchy, existe $B \in \mathcal{F}$ tal que B es W-pequeño. Sea $A = \bar{B}$, la clausura de B en $\tau_{\mathcal{U}}$. Entonces, $A \times A \subseteq \overline{B \times B} \subseteq W$. Entonces A es W-pequeño y por lo tanto V-pequeño. Además, A es cerrado y pertenece a $\mathcal{F}$ porque $B \subseteq A$. $\square$

Continuando con la demostración de la Proposición, supongamos ahora que $\mathcal{F}$ tiene un punto de adherencia x. Debemos demostrar que $\mathcal{F}$ es un refinamiento de $\mathcal{N}_x$:

Dado $V \in \mathcal{U}$, sea $A \in \mathcal{F}$ cerrado, tal que $A \times A \subseteq V$. Como x es punto de adherencia de $\mathcal{F}$ tenemos que $x \in \bar{A} = A$. Por lo tanto, para todo $y \in A$ se tiene $(x, y) \in A \times A$ y en consecuencia $y \in V[x]$. Es decir, $A \subseteq V[x]$. Esto implica que $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$.

$\square$

Proposición 2.3.6. *Sea* D *un subconjunto denso de un espacio uniforme* $X = (X,\mathcal{U})$*. Entonces,* X *es completo si y solo si la extensión a* X *de cualquier filtro de Cauchy sobre* D *(con la uniformidad* $\mathcal{U}_D$ *inducida por* $\mathcal{U}$*) es convergente.*

Demostración. Obviamente la extensión a X de un filtro de Cauchy sobre D es de Cauchy, y por lo tanto es convergente, si X es completo. Recíprocamente, sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy sobre X y sea $\mathcal{G}$ el filtro sobre X generado por la familia $\{V[A] : A \in \mathcal{F}, V \in \mathcal{U}\}$. Nótese que $\mathcal{F}$ es un refinamiento de $\mathcal{G}$. Basta ver entonces que $\mathcal{G}$ es convergente para demostrar que $\mathcal{F}$ lo es.

Afirmación 1. *$\mathcal{G}$ es de Cauchy.*

Demostración de la Afirmación 1. Dado $V \in \mathcal{U}$, tomemos $U, W \in \mathcal{U}$ y $A \in \mathcal{F}$ tales que $U \circ U \subseteq V$, $W \circ W \subseteq U \cap U^{-1}$ y $A \times A \subseteq W$. Entonces $W[A] \times W[A] \subseteq V$. Esto completa la demostración de la afirmación. $\square$

Para $A \subseteq X$ no vacío, cada $V[A]$ es un abierto no vacío en X. Entonces $V[A] \cap D \neq \emptyset$ y por lo tanto podemos definir el filtro $\mathcal{G}_0$ sobre D, generado por la familia $\{V[A] \cap D : V[A] \in \mathcal{G}\}$.

Afirmación 2. *$\mathcal{G}_0$ es de Cauchy (sobre D).*

Demostración de la Afirmación 2. Todo entorno en $\mathcal{U}_D$ es de la forma $V \cap (D \times D)$ para algún $V \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, si $A \in \mathcal{F}$ y $W \in \mathcal{U}$ son tales que $W[A] \times W[A] \subseteq V$ entonces $W[A] \cap D \times W[A] \cap D \subseteq V \cap (D \times D)$. Esto completa la demostración de la afirmación. $\square$

En consecuencia, si $\mathcal{G}_1$ es la extensión de $\mathcal{G}_0$ a X, entonces por hipótesis $\mathcal{G}_1$ es convergente y por lo tanto tiene un punto de adherencia. Pero $\mathcal{G}_1$ es un refinamiento de $\mathcal{G}$ y por lo tanto $\mathcal{G}$ tiene el mismo punto de adherencia; luego $\mathcal{G}$ es convergente por la Proposición 2.3.5. Esto termina la demostración de que X es completo. $\square$

2.4 Continuidad uniforme

Dados dos conjuntos X y Y y una función $f : X \to Y$, usaremos la siguiente notación:

1. Para todo $P \subseteq X \times X$,

$$(f \times f)(P) = \{(f(x), f(y)) : (x, y) \in P\}.$$

2. Para todo $P \subseteq Y \times Y$,

$$(f \times f)^{-1}(P) = \{(x, y) \in X \times X : (f(x), f(y)) \in P\}.$$

Definición 2.4.1. *Sean $(X,\mathcal{U}_X)$ y $(Y,\mathcal{U}_Y)$ espacios uniformes. Una función $f : X \to Y$ es **uniformemente continua** si para todo $V \in \mathcal{U}_Y$ existe $U \in \mathcal{U}_X$ tal que $(f \times f)(U) \subseteq V$. En otras palabras, f es uniformemente continua si para todo $V \in \mathcal{U}_Y$ el conjunto $(f \times f)^{-1}(V)$ pertenece a $\mathcal{U}_X$. Si además f es biyectiva y f^{-1} es uniformemente continua entonces decimos que f es un **isomorfismo uniforme** y que $(X,\mathcal{U}_X)$ y $(Y,\mathcal{U}_Y)$ son **uniformemente equivalentes**.*

EJERCICIO 2.4.1. Demuestre que *ser uniformemente equivalentes* es una relación de equivalencia sobre la colección de todos los espacios uniformes.

Es muy fácil demostrar lo siguiente a partir de las definiciones.

Teorema 2.4.1. *Toda función uniformemente continua es continua en la topología uniforme. En particular, todo isomorfismo uniforme es un homeomorfismo en la topología uniforme.*

□

EJERCICIO 2.4.2. Demuestre el Teorema 2.4.1.

2.4.1 Uniformidad inducida por una función

Sea X un conjunto no vacío, $(Y,\mathcal{U}_Y)$ un espacio uniforme y $f : X \to Y$ una función. La colección

$$\{(f \times f)^{-1}(V) : V \in \mathcal{U}_Y\}$$

es base para una uniformidad $\mathcal{U}_X^f$ sobre X. Es fácil ver que $\mathcal{U}_X^f$ es la menor uniformidad sobre X que hace a f uniformemente continua. Es decir, si $\mathcal{U}$ es una uniformidad sobre X y f es uniformemente continua respecto a $\mathcal{U}$ entonces $\mathcal{U}_X^f \subseteq \mathcal{U}$.

Ejemplo 2.4.1. Si $(Y,\mathcal{U}_Y)$ es un espacio uniforme y $X \subseteq Y$ es no vacío, entonces la menor uniformidad sobre X que hace uniformemente continua a la inclusión $i : X \to Y$, $i(x) = x$, es precisamente la uniformidad relativa.

EJERCICIO 2.4.3. Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathcal{C}$ una colección de funciones $f : X \to X_f$, donde $(X_f, \mathcal{U}_f)$ es un espacio uniforme, para cada f en $\mathcal{C}$. Demuestre que la familia

$$\{(f \times f)^{-1}(V) : f \in \mathcal{C}, V \in \mathcal{U}_f\}$$

es *subbase*[7] para una uniformidad sobre X, y que esta es la menor uniformidad sobre X que hace uniformemente continua a toda $f \in \mathcal{C}$.

2.4.2 Uniformidad producto

El resultado en el Ejercicio 2.4.3 nos permite dotar al producto cartesiano de espacios uniformes de una uniformidad. Sea $(X_\beta, \mathcal{U}_\beta)_{\beta \in \Lambda}$ una colección de espacios uniformes. Para todo $\alpha \in \Lambda$, consideremos la *proyección*

$$\pi_\alpha : \prod_{\beta \in \Lambda} X_\beta \to X_\alpha$$

que asigna a cada $x \in \prod_{\beta \in \Lambda} X_\beta$ la *α-ésima coordenada* $x(\alpha)$. Llamaremos **uniformidad producto** a la menor uniformidad sobre $\prod_{\beta \in \Lambda} X_\beta$ que hace uniformemente continua a π_α, para todo $\alpha \in \Lambda$. Entonces los conjuntos de la forma

$$\{(x, y) \in \prod_{\beta \in \Lambda} X_\beta \times \prod_{\beta \in \Lambda} X_\beta : (x(\alpha), y(\alpha)) \in V\}$$

con $\alpha \in \Lambda$ y $V \in \mathcal{U}_\alpha$ forman una subbase para la uniformidad producto.

En particular, si $(X, \mathcal{U})$ es un espacio uniforme entonces los conjuntos de la forma

$$\{((x, y), (x', y')) : (x, x') \in V, (y, y') \in V\},$$

con $V \in \mathcal{U}$, forman una *base* de la uniformidad producto sobre $X \times X$.

Proposición 2.4.1. *La topología uniforme asociada a la uniformidad producto es la topología producto.*

[7] i.e., la familia de las intersecciones finitas de sus elementos forma una base.

Demostración. Dada una colección $(X_\beta, \mathcal{U}_\beta)_{\beta\in\Lambda}$ de espacios uniformes, los conjuntos de la forma

$$\{y \in \prod_{\beta\in\Lambda} X_\beta : (x(\alpha), y(\alpha)) \in V\},$$

para $x \in X$ y $V \in \mathcal{U}_\alpha$, forman una subbase tanto de la topología uniforme asociada a la uniformidad producto como de la topología producto. □

2.4.3 Pseudométricas asociadas a una uniformidad

Definición 2.4.2. *Dado un conjunto X no vacío, una* ***pseudométrica*** *sobre X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que*

1. $d(x, x) = 0$ *para todo* $x \in X$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *para todo par* $x, y \in X$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, *para toda terna* $x, y, z \in X$.

Observación 2.4.1. Obviamente toda métrica sobre X es una pseudométrica. Pero el recíproco no es verdad en general. Por ejemplo, sea X el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $d(f, g) = |f(0) - g(0)|$ es una pseudométrica sobre X, pero no es métrica.

Observación 2.4.2. Como en el caso métrico, si d es pseudométrica sobre X y para cada $\epsilon > 0$,

$$U^d_\epsilon = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Entonces la colección $\{U^d_\epsilon : \epsilon > 0\}$ es una base para una uniformidad sobre X llamada **uniformidad pseudométrica**.

Teorema 2.4.2. *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una pseudométrica. Entonces, d es uniformemente continua si y solo si para todo $\epsilon > 0$ el conjunto U^d_ϵ pertenece a $\mathcal{U}$.*

Demostración. Si d es uniformemente continua entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que si $(x, x'), (y, y') \in V$ entonces $|d(x, y) - d(x,' y')| < \epsilon$. En particular, si $(x, y) \in V$ se tiene $d(x, y) = |d(x, y) - d(y, y)| < \epsilon$. Es decir, $V \subseteq U^d_\epsilon$ y por lo tanto $U^d_\epsilon \in \mathcal{U}$.

Recíprocamente, fijemos $\epsilon > 0$. Como $U^d_{\epsilon/2} \in \mathcal{U}$ entonces basta demostrar que si $(x, x'), (y, y') \in U^d_{\epsilon/2}$ entonces $|d(x, y) - d(x,' y')| < \epsilon$.

En efecto, dados $(x, x'), (y, y') \in U^d_{\epsilon/2}$ tenemos:

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y)$$

de donde

$$d(x, y) - d(x', y') < \epsilon.$$

Y de manera análoga podemos demostrar que

$$d(x', y') - d(x, y) < \epsilon$$

y por lo tanto

$$-\epsilon < d(x, y) - d(x', y') < \epsilon.$$

□

Observación 2.4.3. Este resultado implica que la menor uniformidad sobre X que hace uniformemente continua a d es la uniformidad métrica $\mathcal{U}_d$ generada por los conjuntos U^d_ϵ.

Lema 2.4.1 (Lema de metrización)**.** *Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y $(V_n)_n$ una sucesión de subconjuntos de $X \times X$ tales que*

1. $V_0 = X \times X$.

2. *Para todo n, V_n es simétrico y contiene a Δ.*

3. *Para todo n, $V_{n+1} \circ V_{n+1} \circ V_{n+1} \subseteq V_n$.*

Entonces, existe una pseudométrica d sobre X tal que

$$V_n \subseteq U^d_{2^{-n}} \subseteq V_{n-1}.$$

Demostración. Sea $f : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 2^{-n}$ si y solo si $(x, y) \in V_{n-1} - V_n$. Y $f(x, y) = 0$ si y solo si $(x, y) \in \bigcap_n V_n$.

Definamos $d : X \times X \to \mathbb{R}$ así:

$$d(x,y) = inf\{\sum_{i=0}^{n+1} f(x_i, x_{i+1}) : n \in \mathbb{N}, x_0 = x, x_{n+1} = y, x_i \in X, 0 < i \leq n\}.$$

f es obviamente simétrica y $f(x, x) = 0$ para todo $x \in X$. Por lo tanto, d es también simétrica y $d(x, x) = 0$. Además, dados $x, y, z \in X$ se tiene lo siguiente:

$$\text{Si } A = \{\sum_{i=0}^{n+1} f(x_i, x_{i+1}) : n \in \mathbb{N}, x_0 = x, x_{n+1} = y, x_i \in X, 0 < i \leq n\},$$

$$B = \{\sum_{i=0}^{n+1} f(x_i, x_{i+1}) : n \in \mathbb{N}, x_0 = y, x_{n+1} = z, x_i \in X, 0 < i \leq n\} \text{ y}$$

$$C = \{\sum_{i=0}^{n+1} f(x_i, x_{i+1}) : n \in \mathbb{N}, x_0 = x, x_{n+1} = z, x_i \in X, 0 < i \leq n\}$$

entonces $\{a + b : a \in A, b \in B\} \subseteq C$.

Por lo tanto,

$$inf\ C \leq inf\ \{a + b : a \in A, b \in B\} \leq inf\ A + inf\ B.$$

Es decir, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Veamos que $V_n \subseteq U^d_{2^{-n}}$. Notemos que por definición $d(x, y) \leq f(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Además, si $(x, y) \in V_n$ entonces $f(x, y) \leq 2^{-(n+1)}$ y por lo tanto $(x, y) \in U^d_{2^{-n}}$.

Para ver ahora que $U^d_{2^{-n}} \subseteq V_{n-1}$ demostremos por inducción en n lo siguiente:

Afirmación. *dados* $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$ *se tiene*

$$f(x_0, x_{n+1}) \leq 2 \sum_{i=0}^{n+1} f(x_i, x_{i+1}).$$

Demostración de la afirmación. Para $n = 0$ es obvio. Supongamos que la afirmación vale para todo $n' < n$ y fijemos $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$. Sea

$$\rho = \sum_{i=0}^{n+1} f(x_i, x_{i+1})$$

y sea k el mayor entero tal que

$$\sum_{i=0}^{k} f(x_i, x_{i+1}) \leq \rho/2$$

Notemos que por la elección de k también se tiene

$$\sum_{i=k+1}^{n+1} f(x_i, x_{i+1}) \leq \rho/2.$$

Entonces, por hipótesis inductiva,

$$f(x_0, x_k) \leq \rho$$

y también

$$f(x_{k+1}, x_{n+1}) \leq \rho.$$

Además, obviamente se tiene

$$f(x_k, x_{k+1}) \leq \rho.$$

Si tomamos

$$m = min\{r \in \mathbb{N} : 2^{-r} \leq \rho\}$$

entonces $(x_0, x_k), (x_k, x_{k+1}), (x_{k+1}, x_{n+1}) \in V_{m-1}$ y por lo tanto

$$(x_0, x_{n+1}) \in V_{m-1} \circ V_{m-1} \circ V_{m-1} \subseteq V_{m-2}.$$

Esto implica

$$f(x_0, x_{n+1}) \leq 2^{-(m-1)} \leq 2\rho.$$

$\square$

Para concluir con la demostración, si $(x,y) \in U^d_{2^{-n}}$ entonces en virtud de la afirmación demostrada tenemos

$$f(x,y) \leq 2d(x,y) < 2^{-(n-1)}$$

y por lo tanto

$$f(x,y) \leq 2^{-n}.$$

Esto implica que $(x,y) \in V_{n-1}$ y completa la demostración. $\square$

Corolario 2.4.1. *Todo espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ admite una pseudométrica uniformemente continua respecto a $\mathcal{U}$.*

$\square$

Definición 2.4.3. *Dado un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$, decimos que este es **(pseudo)metrizable** si existe una (pseudo)métrica d sobre X tal que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_d$.*

Teorema 2.4.3 (Teorema de Metrización)**.** *Un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es pseudometrizable si y solo si $\mathcal{U}$ tiene una base numerable. Es metrizable si y solo si $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es Hausdorff y $\mathcal{U}$ tiene una base numerable.*

Demostración. Si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme y d es una (pseudo)métrica sobre X tal que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_d$ entonces $\{V^d_r : r \in \mathbb{Q}\}$ es una base numerable para $\mathcal{U}$. Recíprocamente, si $(U_n)_n$ es base para $\mathcal{U}$ (podemos suponer que $U_0 = X \times X$) entonces usando un ejercicio anterior podemos definir una sucesión $(V_n)_n$ de elementos simétricos de $\mathcal{U}$ tales que

1. $V_0 = U_0$.

2. $V_{n+1} \circ V_{n+1} \circ V_{n+1} \subseteq V_n \cap U_{n+1}$

Notemos que $(V_n)_n$ también es base para $\mathcal{U}$. Aplicando el Lema 2.4.1 a $(V_n)_n$ se obtiene entonces que $(X,\mathcal{U})$ es pseudometrizable.

Si $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es Hausdorff y d es una pseudométrica sobre X tal que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_d$ entonces d es de hecho una métrica. De esto se obtiene el resto del resultado requerido. $\square$

Uniformidad inducida por una familia de pseudométricas. Dado $X \neq \emptyset$ y una familia $\mathcal{M}$ de pseudométricas sobre X, dotaremos a X de una uniformidad $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ que hará uniformemente continua a cada $d \in \mathcal{M}$ con respecto a la uniformidad producto asociada. De hecho, $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ será la menor uniformidad sobre X con esta propiedad.

Sea $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ la uniformidad sobre X que tiene a la colección $\{V_\epsilon^d : d \in \mathcal{M}, \epsilon > 0\}$ como subbase. Entonces, por el Teorema 2.4.2, $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ satisface las propiedades anunciadas en el párrafo anterior. Además vale lo siguiente:

Afirmación. *1. Para cada $d \in \mathcal{M}$, la función identidad $I : (X,\mathcal{U}_{\mathcal{M}}) \to (X, d)$, $(\forall x \in X)\ I(x) = x$, es uniformemente continua.*

2. Consideremos a $\prod_{d\in\mathcal{M}}(X, d)$ con la uniformidad producto. La función $h : (X,\mathcal{U}_{\mathcal{M}}) \to \prod_{d\in\mathcal{M}}(X, d)$ tal que la coordenada d-ésima de $h(x)$ es $h(x)_d = x$, es un isomorfismo uniforme entre $(X,\mathcal{U}_{\mathcal{M}})$ y $h(X)$ con la uniformidad relativa.

Demostración.

1. Para todo $\epsilon > 0$ se tiene $V_\epsilon^d \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$. Esto implica el resultado requerido.

2. Sigue de 1.

$\square$

Por el Lema 2.4.1, para todo espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ la colección de pseudométricas sobre X uniformemente continuas respecto a $\mathcal{U}$ es no-vacía. De hecho tenemos lo siguiente:

Lema 2.4.2. *Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y sea $\mathcal{M}$ la colección de pseudométricas sobre X uniformemente continuas respecto a $\mathcal{U}$. Entonces $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$.*

Demostración. Por hipótesis, cada $d \in \mathcal{M}$ es uniformemente continua respecto a $\mathcal{U}$. Luego por la minimalidad de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ se tiene $\mathcal{U}_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{U}$. Pero por el Lema de Metrización, para cada $V \in \mathcal{U}$, existe $d \in \mathcal{M}$ tal que $V_{1/4}^d \subseteq V$. Entonces $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$. $\square$

Hemos establecido entonces el siguiente resultado:

Teorema 2.4.4. *Todo espacio uniforme es uniformemente equivalente a un subespacio del producto de espacios pseudométricos.*

Demostración. Sigue del Lema 2.4.2 y de la parte 2 de la Afirmación demostrada más arriba. □

El resultado anterior, junto al siguiente ejercicio, nos permitirá caracterizar a las topologías compatibles con uniformidades (Corolario 2.4.2).

EJERCICIO 2.4.4. Demuestre que un espacio topológico es completamente regular si y solo si es homeomorfo a un subespacio del producto de espacios pseudométricos.

Corolario 2.4.2. *Sea τ una topología sobre un conjunto $X \neq \emptyset$. Entonces, $\tau = \tau_{\mathcal{U}}$ para alguna uniformidad $\mathcal{U}$ sobre X si y solo si (X, τ) es un espacio completamente regular.*

Demostración. Sigue de los teoremas 2.4.1, y 2.4.4, y del Ejercicio 2.4.4. □

EJERCICIO 2.4.5. Sea X un conjunto no vacío. Demuestre que la uniformidad discreta sobre X, $\mathcal{D}_X = \{V \subseteq X \times X : \Delta \subseteq V\}$ es inducida por la pseudométrica $d : X \times X \to \{0, 1\}$ dada por $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$; es decir, $\mathcal{D}_X = \mathcal{U}_d$.

EJERCICIO 2.4.6. Sea (X, d) un espacio pseudométrico. Definamos $\hat{d} : X \times X \to \mathbb{R}$, así:

$$\hat{d}(x, y) = min\{1, d(x, y)\}.$$

Demuestre que $\hat{d}$ es una pseudométrica sobre X y que las uniformidades inducidas por d y $\hat{d}$ coinciden.

Concluya de lo anterior que si $(X, \mathcal{U})$ es un espacio uniforme entonces existe una familia $\mathcal{M}_{\mathcal{U}}$ de métricas uniformemente continuas y acotadas (como función) con la siguiente propiedad:

Para cada $V \in \mathcal{U}$ existe $d \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}}$ tal que

$$d(x, y) < 1 \to (x, y) \in V.$$

EJERCICIO 2.4.7. Sea d una pseudométrica uniformemente continua y acotada sobre X, y sea A un subconjunto no vacío de X. Definamos $d_A : (X,d) \to \mathbb{R}$ por $d_A(x) = inf\{d(x,y) : y \in A\}$. Demuestre que d_A es acotada y uniformemente continua. Más aún, demuestre que d_A es 1-Lipschitz. Es decir,

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y).$$

2.4.4 Completación de un espacio uniforme

Inmersiones uniformes. Dados dos espacios topológicos X y Y, recordemos que una función $\phi : X \to Y$ es una *inmersión* (topológica) si ϕ es 1-1 y la topológia de X es inducida por ϕ a partir de la topología de Y, i.e., la topología de X es generada por los conjuntos de la forma $\phi^{-1}(A)$, donde A es un subconjunto abierto de Y.

Definición 2.4.4. *Dados dos espacios uniformes $(X,\mathcal{U}_X)$ y $(Y,\mathcal{U}_Y)$, decimos que $\phi : X \to Y$ es una **inmersión uniforme** si es uniformemente continua y además es una inmersión topológica de $(X,\tau_{\mathcal{U}_X})$ en $(Y,\tau_{\mathcal{U}_Y})$.*

Ejemplo 2.4.2. Si X es subespacio uniforme de Y entonces la inclusión $i : X \to Y$ es una inmersión uniforme.

Definición 2.4.5. *Dado $(X,\mathcal{U})$, **una completación uniforme** de $(X,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme completo $(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{U}})$ junto con una inmersión uniforme $\sigma : (X,\mathcal{U}) \to (\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{U}})$, tal que la imagen de X por σ es densa en la topología uniforme asociada a $\widetilde{\mathcal{U}}$.*

A continuación describimos una construcción de una completación uniforme.

Dado $(X,\mathcal{U})$, sea $\widetilde{X}$ la colección de los filtros de Cauchy sobre X. Vamos a dotar a $\widetilde{X}$ de una estructura uniforme. Para todo $V \in Sim(\mathcal{U})$, consideremos el siguiente subconjunto de $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$:

$$\widetilde{V} = \{(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) : (\exists A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)\ A \text{ es } V\text{-pequeño }\}.$$

La colección $\{\widetilde{V} : V \in Sim(\mathcal{U})\}$ es base para una uniformidad sobre $\widetilde{X}$ que denotaremos por $\widetilde{\mathcal{U}}$.

Sea $\sigma : (X,\mathcal{U}) \to (\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{U}})$ dada por

$$\sigma(x) = \mathcal{F}_x = \{A \subseteq X : x \in A\}.$$

Es decir, $\sigma(x)$ es el filtro principal sobre X determinado por x. Obviamente σ es inyectiva. Nos referiremos a ella como la **inclusión canónica** de X en $\widetilde{X}$.

Proposición 2.4.2. *La inclusión canónica σ es una inmersión uniforme. Además, $\sigma(X)$ es denso en la topología uniforme asociada a $\widetilde{\mathcal{U}}$.*

Demostración. Dejaremos como ejercicio la demostración de que σ es una inmersión uniforme. Veamos que $\sigma(X)$ es denso:

Fijemos $\mathcal{F} \in \widetilde{X}$ y $V \in Sim(\mathcal{U})$. Tomemos $A \in \mathcal{F}$ que sea V-pequeño y $x \in A$ cualquiera. Entonces se tiene $(\sigma(x), \mathcal{F}) \in \widetilde{V}$; es decir, $\sigma(X) \cap \widetilde{V}[\mathcal{F}] \neq \emptyset$. □

EJERCICIO 2.4.8. Demuestre que σ en la Proposición 2.4.2 es una inmersión uniforme.

Ahora podemos demostrar que $(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{U}})$ es completo (ver la Proposición 2.3.6).

Proposición 2.4.3. $(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{U}})$ *es completo.*

Demostración. Sea $\mathcal{G}$ un filtro de Cauchy sobre $\sigma(X)$, y sea $\widetilde{\mathcal{G}}$ su extensión a $\widetilde{X}$. Para cada $A \subseteq X$ sea $\sigma(A) = \{\sigma(x) : x \in A\}$. La colección

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : \sigma(A) \in \mathcal{G}\}$$

es un filtro de Cauchy sobre X. Veamos que $\widetilde{\mathcal{G}}$ converge a $\mathcal{F}$:

Sea $V \in Sim(\mathcal{U})$ y $A \in \mathcal{F}$, V-pequeño. Igual que en la proposición anterior, para cada $x \in A$ se tiene $(\sigma(x), \mathcal{F}) \in \widetilde{V}$. Esto implica $\sigma(A) \subseteq \widetilde{V}[\mathcal{F}]$ y por lo tanto $\widetilde{V}[\mathcal{F}] \in \mathcal{G} \subseteq \widetilde{\mathcal{G}}$. Esto es, $\widetilde{\mathcal{G}}$ es un refinamiento del filtro de vecindades de $\mathcal{F}$ en la topología uniforme asociada a $\widetilde{\mathcal{U}}$ y en consecuencia $\widetilde{\mathcal{G}}$ converge a $\mathcal{F}$.

De lo anterior se obtiene que $(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{U}})$ es completo, en virtud de la Proposición 2.3.6. □

Observación 2.4.4. La Proposición 2.4.2 nos permite además identificar a X con un subespacio denso de $\widetilde{X}$. El espacio $(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{U}})$, junto con la inclusión canónica σ, es entonces una completación uniforme de $(X,\mathcal{U})$. Si $\mathcal{U}$ es separada entonces $\widetilde{\mathcal{U}}$ también lo es y en este caso la completación $(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{U}})$ es única salvo equivalencia uniforme.

EJERCICIO 2.4.9. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Demuestre que si $\mathcal{U}$ es separada entonces $\widetilde{\mathcal{U}}$ también lo es.

EJERCICIO 2.4.10. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Demuestre que si $(\widetilde{X}_1,\widetilde{\mathcal{U}}_1)$ y $(\widetilde{X}_2,\widetilde{\mathcal{U}}_2)$ son espacios uniformes completos y separados, y para cada $j \in \{1,2\}$ existe una inmersión uniforme $\sigma_j : (X,\mathcal{U}) \to (\widetilde{X}_j,\widetilde{\mathcal{U}}_j)$ de X sobre un subespacio denso de $\widetilde{X}_j$, entonces $(\widetilde{X}_1,\widetilde{\mathcal{U}}_1)$ y $(\widetilde{X}_2,\widetilde{\mathcal{U}}_2)$ son uniformemente equivalentes.

2.4.5 Uniformidades precompactas

Definición 2.4.6. *Un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es* ***totalmente acotado*** *si para todo entorno $V \in \mathcal{U}$ existe $F \subseteq X$ finito tal que $V[F] = X$. En este caso también decimos que $\mathcal{U}$ es totalmente acotada. Si además $\mathcal{U}$ es separada, decimos que $(X,\mathcal{U})$ es* ***precompacto*** *(o que $\mathcal{U}$ es precompacta).*

Es decir, X es totalmente acotado si, dado $V \in \mathcal{U}$, X puede ser cubierto por una cantidad finita de vecindades básicas $V[x]$, con $x \in X$.

EJERCICIO 2.4.11. El nombre *precompacto* proviene de lo siguiente: sea $(\hat{X},\hat{\mathcal{U}})$ la completación de un espacio uniforme separado $(X,\mathcal{U})$. Entonces $(\hat{X},\tau_{\hat{\mathcal{U}}})$ es compacto si y solo si $(X,\mathcal{U})$ es precompacto. Demuestre este hecho.

EJERCICIO 2.4.12. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{U}$. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathcal{U}$ es totalmente acotada.
2. Dado $V \in \mathcal{U}$, X puede ser cubierto por una cantidad finita de conjuntos V-pequeños.
3. Dado $V \in \mathcal{B}$, X puede ser cubierto por una cantidad finita de conjuntos V-pequeños.

EJERCICIO 2.4.13. Un espacio uniforme X es precompacto si y solo si todo filtro sobre X admite un refinamiento de Cauchy si y solo si todo ultrafiltro sobre X es un filtro de Cauchy.

2.4.6 Réplica precompacta

Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Para cada partición finita γ de X y cada entorno $V \in \mathcal{U}$, sea

$$\widetilde{\gamma V} \equiv \bigcup_{A\in\gamma} V[A] \times V[A].$$

La familia

$$\{\widetilde{\gamma V} : \gamma \text{ es partición finita de } X \; ; V \in \mathcal{U}\}$$

es base de una uniformidad. Denotaremos por $\mathcal{C}^*\mathcal{U}$ a la uniformidad generada por esta familia. $\mathcal{C}^*\mathcal{U}$ es la más fina uniformidad totalmente acotada contenida en $\mathcal{U}$.

Si suponenemos que $\mathcal{U}$ es separada entonces $\mathcal{C}^*\mathcal{U}$ también lo es. En este caso $\mathcal{C}^*\mathcal{U}$ es precompacta y nos referiremos a ella como la *réplica precompacta* de $\mathcal{U}$.

La compactificación de Samuel, [22] o *compactificación uniforme universal.* Cuando $\mathcal{U}$ es separada, el espacio uniforme $(X,\mathcal{C}^*\mathcal{U})$ tiene una única completación (salvo equivalencia uniforme) que resulta ser una compactificación de $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ conocida como *compactificación de Samuel* o *compactificación uniforme universal.* En lo sucesivo denotaremos por σX a esta compactificación y por $\mathcal{U}_{\sigma X}$ a la única uniformidad compatible con el espacio compacto σX.

La siguiente conocida proposición, caracteriza a la compactificación de Samuel:

Proposición 2.4.4. *[22] Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme separado y sea $\sigma : (X,\mathcal{C}^*\mathcal{U}) \to (\sigma X, U_{\sigma X})$ la inclusión canónica (ver la Proposición 2.4.2). Para todo espacio compacto Y y para toda $f : X \to Y$ uniformemente continua, existe $h : \sigma X \to Y$ uniformemente continua tal que $f = h \circ \sigma$.*

□

EJERCICIO 2.4.14. Demuestre los siguiente:

1. La familia de los $\widetilde{\gamma V}$ es en efecto una base.

2. $\mathcal{C}^*\mathcal{U}$ es en efecto totalmente acotada.

3. Si $\mathcal{U}$ es separada entonces $\mathcal{C}^*\mathcal{U}$ también lo es. Esto implica, por la parte anterior, que si $\mathcal{U}$ es separada entonces $\mathcal{C}^*\mathcal{U}$ es precompacta y por lo tanto σX es compacto.

EJERCICIO 2.4.15. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme separado.

1. Demuestre que si $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ es una uniformidad precompacta sobre X entonces $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{C}^*\mathcal{U}$; es decir, $\mathcal{C}^*\mathcal{U}$ es la más fina uniformidad precompacta contenida en $\mathcal{U}$.

2. Demuestre que $\mathcal{C}^*\mathcal{U}$ es la menor uniformidad $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ sobre X con la propiedad siguiente: toda función acotada $f : X \to \mathbb{R}$ que sea uniformemente continua con respecto a $\mathcal{U}$ es también uniformemente continua con respecto a $\mathcal{U}'$.

3. Demuestre que $\tau_{\mathcal{U}} = \tau_{\mathcal{C}^*\mathcal{U}}$. Deduzca de esto que la función identidad $I : (X, \tau_{\mathcal{U}}) \to (X, \tau_{\mathcal{C}^*\mathcal{U}})$, $I(x) = x$, es un homeomorfismo.

Capítulo 3

Oscilación finitamente estable

3.1 G-espacios de oscilación finitamente estable

Definición 3.1.1. *Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto X y sea $(Y,\mathcal{U}_Y)$ un espacio uniforme. Una función $f : X \to Y$ es* ***de oscilación finitamente estable*** *si para todo entorno $V \in \mathcal{U}_Y$ y todo conjunto finito $F \subseteq X$ existe $g \in G$ tal que $(f \times f)(gF \times gF) \subseteq V$.*

Donde $(f \times f)(gF \times gF) := \{(f(x), f(y)) : x, y \in gF\}$.

Nuestro estudio sobre espacios uniformes en el capítulo anterior tiene el objetivo de dotarnos de un contexto general para estudiar los fenómenos tipo Ramsey, por medio del concepto de *G-espacio uniforme*:

Definición 3.1.2. *Si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme y G es un grupo de automorfismos uniformes que actúa sobre X entonces decimos que el par (G, X) es un G-**espacio uniforme**, o simplemente que X es un G-espacio uniforme. En el caso en que G sea un grupo topológico, pediremos que la acción de G sobre X sea continua.*

Definición 3.1.3. *Un G-espacio uniforme X es* ***de oscilación finitamente estable*** *si toda $f : X \to \mathbb{R}$ uniformemente continua y acotada es de oscilación finitamente estable. Aquí consideramos a $\mathbb{R}$ con la uniformidad métrica usual.*

Los G-espacios de oscilación finitamente estable pueden ser caracterizados de diversas maneras equivalentes, como nos muestra el siguiente Teorema.

Teorema 3.1.1. *(Pestov [17]) Sea $X = (X,\mathcal{U})$ un G-espacio uniforme. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es de oscilación finitamente estable.*

2. *Existe una colección $\mathcal{M}$ de pseudométricas uniformemente continuas y acotadas que genera a $\mathcal{U}$ tal que si $d \in \mathcal{M}$ entonces toda función 1-Lipschitz acotada $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ es de oscilación finitamente estable.*

3. *Para toda partición $X = A \cup B$, todo $V \in \mathcal{U}$ y todo $F \subseteq X$ finito, existe $g \in G$ tal que $gF \subseteq V[A]$ o $gF \subseteq V[B]$.*

4. *Dados $V \in \mathcal{U}$ y $F \subseteq X$ finito, existe $K \subseteq X$ finito tal que para toda partición $K = A \cup B$ existe $g \in G$ tal que $gF \subseteq K$ y, $gF \subseteq V[A]$ o $gF \subseteq V[B]$.*

5. *Dados $r \in \mathbb{N}$, $V \in \mathcal{U}$ y $F \subseteq X$ finito, existe $K \subseteq X$ finito tal que para toda partición $c : K \to r$ existen $g \in G$ y $j \in r$ tales que $gF \subseteq K$ y $gF \subseteq V[c^{-1}(\{j\})]$.*

6. *Para todo cubrimiento finito γ de X, todo $V \in \mathcal{U}$ y todo $F \subseteq X$ finito existen $g \in G$ y $A \in \gamma$ tales que $gF \subseteq V[A]$.*

7. *Para todo $W \in \mathcal{C}^*\mathcal{U}$ y todo $F \subseteq X$ finito existe $g \in G$ tal que gF es W-pequeño.*

8. *La inclusión canónica $\sigma : X \to \sigma X$ es de oscilación finitamente estable.*

9. *Si Y es un espacio compacto, entonces toda $f : X \to Y$ uniformemente continua es de oscilación finitamente estable.*

10. *Si $f : X \to \mathbb{R}^n$ es uniformemente continua y acotada entonces f es de oscilación finitamente estable.*

Demostración. (1 $\Rightarrow$ 2): Sigue del Ejercicio 2.4.6 y del hecho siguiente: dada una pseudométrica d uniformemente continua respecto a $\mathcal{U}$, toda función a valores reales 1-Lipschitz sobre (X, d) es uniformemente continua (respecto a $\mathcal{U}$).

(2 $\Rightarrow$ 3): Sea d una pseudométrica uniformemente continua y acotada tal que para $x, y \in X$ se tiene $d(x, y) < 1 \Rightarrow (x, y) \in V$. Recordemos que la función $d_A(x) = inf\{d(x, y) : y \in A\}$ es 1-Lipschitz y acotada sobre (X, d) (Ejercicio 2.4.7). Por lo tanto, existe $g \in G$ tal que $sup\{|d_A(x) - d_A(z)| : x, z \in gF\} < 1$. Si $gF \subseteq B$ entonces estamos listos. Si no, tomemos $x_0 \in gF \cap A$. Entonces $d_A(x_0) = 0$ y por lo tanto para todo $y \in gF$ se tiene $d_A(y) = |d_A(x_0) - d_A(y)| \leq sup\{|d_A(x) - d_A(z)| : x, z \in gF\} < 1$. Luego, por definición de *ínfimo*, tenemos que para todo $y \in gF$ existe $x \in A$ tal que $d(x, y) < 1$; es decir $y \in V[x]$. En otras palabras, $gF \subseteq V[A]$.

(3 $\Rightarrow$ 4): Si X es finito entonces $K = X$ satisface la condición requerida. Su pongamos que X es infinito y que la afirmación 4 es falsa. Es decir, existen $V \in \mathcal{U}$ y $F \subset X$ finito tales que para todo $K \subseteq X$ finito existe una partición $\{A_K, B_K\}$ tal que para todo $g \in G$ si $gF \subseteq K$ entonces $gF \nsubseteq V[A_K]$ y $gF \nsubseteq V[B_K]$.
Sea

$$X^{[<\infty]} := \{E \subset X : |E| < \infty\}.$$

Para cada conjunto $E \in X^{[<\infty]}$ sea $S_E = \{K \in X^{[<\infty]} : E \subseteq K\}$. Es fácil ver que la familia $\mathcal{S} = \{S_E : E \in X^{[<\infty]}\}$ tiene la *propiedad de intersección finita*. Sea $\mathcal{H}$ un ultrafiltro sobre $X^{[<\infty]}$ tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$. Definamos A y B tales que

$$x \in A \;\Leftrightarrow\; \{K \in X^{[<\infty]} : x \in A_K\} \in \mathcal{H},$$

$$x \in B \;\Leftrightarrow\; \{K \in X^{[<\infty]} : x \in B_K\} \in \mathcal{H}.$$

Por ser $\mathcal{H}$ un ultrafiltro, tenemos que $X = A \cup B$. Sea $g \in G$ cualquiera. Para cada $K \in \mathcal{S}_{gF}$ existen $a_K, b_K \in gF$ tales que para todo $x \in A_K$ y todo $y \in B_K$ se tiene $(x, a_K) \notin V$ y $(y, b_K) \notin V$. Como $S_{gF} \in \mathcal{H}$ y gF es finito, existen $a, b \in gF$ tales que

$$\{K \in S_{gF} : a_K = a, b_K = b\} \in \mathcal{H}.$$

Entonces si $x \in A$ y $y \in B$ tenemos que

$$\{K \in S_{gF} : x \in A_K, y \in B_K, a_K = a, b_K = b\} \in \mathcal{H}.$$

Por lo tanto, $(x,a) \notin V$ y $(y,b) \notin V$. Es decir, $gF \not\subseteq V[A]$ y $gF \not\subseteq V[B]$, y la afirmación 3 es falsa.

$(4 \Rightarrow 5)$: Por inducción en r.
$(5 \Rightarrow 6)$: Podemos suponer que γ es una partición finita. Aplicamos la afirmación 5 a V, F y $r = |\gamma|$. Luego, fijamos K como en 5 y definimos $c : K \to r$ como la restricción de γ a K. Entonces el resultado sigue de la elección de K.

$(6 \Rightarrow 7)$: Por definición de $\mathcal{C}^*\mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ y una partición γ de X tales que $W = \widetilde{\gamma V}$. Por la afirmación 6, existe $g \in G$ y $A \in \gamma$ tal que $gF \subseteq V[A]$. Por lo tanto, $gF \times gF \subseteq W$.

$(7 \Rightarrow 8)$: Sea $W \in \mathcal{U}_{\sigma X}$ y $F \subseteq X$ finito. Entonces

$$W' := W \cap (X \times X) \in \mathcal{C}^*\mathcal{U}$$

y por la afirmación 7 existe $g \in G$ tal que gF es W'-pequeño y en en consecuencia también es W-pequeño. Pero $\sigma(gF) = gF$, por lo tanto $(\sigma \times \sigma)(gF \times gF) \subseteq W$.

$(8 \Rightarrow 9)$: Sea Y compacto, $f : X \to Y$ uniformemente continua y $F \subseteq X$ finito. Por definición de σX existe $h : \sigma X \to Y$ uniformemente continua tal que $f = h \circ \sigma$. Entonces, si $\mathcal{U}_Y$ es la única uniformidad compatible de Y y $W \in \mathcal{U}_Y$, tenemos que $V = (h^{-1} \times h^{-1})(W) \in \mathcal{U}_{\sigma X}$. Por 8, existe $g \in G$ tal que $(\sigma \times \sigma)(gF \times gF) \subseteq V$. Entonces $(h \circ \sigma \times h \circ \sigma)(gF \times gF) \subseteq W$.

$(9 \Rightarrow 10)$: $f(X)$ es compacto.

$(10 \Rightarrow 1)$: Obvio. □

3.2 Ejemplos

3.2.1 El grupo simétrico y el espacio de los k-conjuntos de números naturales

Sea S_∞ el grupo simétrico infinito y, dado $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, consideremos al conjunto $\mathbb{N}^{[k]}$ de los subconjuntos de $\mathbb{N}$ de cardinalidad k. En la Sección 1.3 vimos que S_∞ actúa de manera transitiva (y ultratransitiva) sobre $\mathbb{N}^{[k]}$, por medio de la correspondencia:

$$(\pi, F) \mapsto \pi \cdot F := \{\pi(x) : x \in F\},$$

de $S_\infty \times \mathbb{N}^{[k]}$ en $\mathbb{N}^{[k]}$. Si dotamos a $\mathbb{N}^{[k]}$ de la *uniformidad discreta* (ver ejemplo 2.1.1 o ejercicio 2.4.5), entonces $\mathbb{N}^{[k]}$ es un S_∞-espacio uniforme.

Teorema 3.2.1. *El S_∞-espacio $\mathbb{N}^{[k]}$ es de oscilación finitamente estable.*

Demostración. De hecho, vamos a demostrar que el Teorema 3.2.1 es equivalente al Teorema de Ramsey finito (Teorema 1.2.2):

Teorema de Ramsey finito $\Rightarrow$ Teorema 3.2.1:

Vamos a demostrar que la parte 5 del Teorema 3.1.1 vale para $(S_\infty, \mathbb{N}^{[k]})$, a partir del Teorema de Ramsey finito. Fijemos un entorno de la diagonal V, $F \subseteq \mathbb{N}^{[k]}$ finito y $r \in \mathbb{N}-\{0\}$. Podemos suponer que $V = \Delta$ sin pérdida de generalidad, porque estamos considerando a $\mathbb{N}^{[k]}$ con la uniformidad discreta. Sea $n = |\bigcup F| = |\bigcup\{x : x \in F\}$ y fijemos $m = m(k, n, r)$ como en el Teorema de Ramsey finito aplicado k, n y r. Sea $K = m^{[k]}$. Entonces, para toda coloración $c : K \to r$ existe $B \in m^{[n]}$ tal que $B^{[k]}$ es monocromático para c. Como la acción de S_∞ es ultratransitiva, existe $\pi \in S_\infty$ tal que $\pi(\bigcup F) = B$. Entonces, $\pi \cdot F \subseteq B^{[k]}$ y por lo tanto es monocromático para c. Es decir, $\pi \cdot F \subseteq \Delta[c^{-1}\{j\}]$ para algún $j < r$.

Teorema 3.2.1 $\Rightarrow$ Teorema de Ramsey finito:

Fijemos k, n y r en $\mathbb{N} - \{0\}$. Sea $C \subset \mathbb{N}$ con $|C| = n$. Por el Teorema 3.2.1, podemos fijar $K \subset \mathbb{N}^{[k]}$ finito como en la parte 5 del Teorema 3.1.1, aplicado a $X = \mathbb{N}^{[k]}$, r, $V = \Delta$ y $F = C^{[k]}$. Entonces, veamos que

$$m = m(k, n, r) = |\bigcup K| = |\bigcup\{x : x \in K\}|$$

satisface la conclusión del Teorema de Ramsey:

Fijemos una coloración finita $c : m^{[k]} \to r$. Por ultratransitividad, existe $\pi \in S_\infty$ tal que $\pi(\bigcup K) = \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Por lo tanto, $\pi \cdot x \in m^{[k]}$, para todo $x \in K$. Consideremos la coloración, $c \circ \pi : K \to r$. Entonces, por la elección de K, existe $\rho \in S_\infty$ tal que $\rho \cdot C^{[k]} \subseteq K$ y $\rho \cdot C^{[k]} \subseteq \Delta[(c \circ \pi)^{-1}\{j\}] = (c \circ \pi)^{-1}\{j\}$.

Ahora, sea $B = (\pi \circ \rho)(C)$. Entonces $B \in m^{[n]}$ y $B^{[k]}$ es monocromático para c.

$\square$

Las únicas características relevantes de la acción de S_∞ en la demostración del Teorema 3.2.1 son la transitividad y la ultratransitividad. Entonces el resultado se puede extender a cualquier subgrupo de G que actúe de igual manera sobre $\mathbb{N}^{[k]}$. La demostración es análoga.

Es decir,

Teorema 3.2.2. *Sea G un subgrupo de S_∞ y supongamos que la acción de G sobre $\mathbb{N}^{[k]}$ inducida por la acción de S_∞ es ultratransitiva sobre $\mathbb{N}$. Entonces, para todo natural $k > 0$ el G-espacio $\mathbb{N}^{[k]}$ es de oscilación finitamente estable.*

$\square$

3.2.2 El grupo de automorfismos de $(\mathbb{Q}, \leq)$ y el espacio de los k-conjuntos de números racionales

Denotemos por $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$ al grupo de automorfismos de $\mathbb{Q}$ con el orden usual, es decir, al grupo de las biyecciones de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ que preservan el orden, con la composición de funciones como operación de grupo. Para cada $k > 0$, podemos definir una acción de $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$ sobre $Q^{[k]}$, análoga a la acción de S_∞ sobre $\mathbb{N}^{[k]}$. Esta acción es obviamente ultratransitiva. Fijando una enumeración de $\mathbb{Q}$ podemos ordenar a $\mathbb{N}$ con el tipo de orden de los racionales, es decir, podemos inducir sobre $\mathbb{N}$ un orden lineal denso, sin extremos, isomorfo a $(\mathbb{Q}, \leq)$. Bajo este isomorfismo, podemos identificar a $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$ con un subgrupo de S_∞ cuya acción es ultratransitiva. Por los tanto, del Teorema 3.2.2 y la presente observación obtenemos el siguiente importante ejemplo, debido a Pestov (ver [17], [18]):

Corolario 3.2.1. *Para todo natural $k > 0$, el $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$-espacio $Q^{[k]}$ es de oscilación finitamente estable.*

$\square$

3.2.3 Una familia de ejemplos

En esta sección presentaremos, en el Teorema 3.2.6 más adelante, un criterio que establece una condición suficiente para que un G-espacio sea de oscilación finitamente estable. En realidad, su demostración es una generalización de la que Milman dió de que la esfera unitaria de l^2 vista como $U(l^2)$-espacio es de oscilación finitamente estable. El Teorema 3.2.6 nos permitirá obtener el resultado de Milman como un caso particular y presentar otros ejemplos que serán de utilidad más adelante.

Antes necesitaremos algunos resultados y definiciones.

La medida de Haar. Recordemos que un **grupo topológico** es un grupo dotado de una topología Hausdorff tal que las operaciones

$$G \times G \to G$$
$$(g, h) \longmapsto gh$$

y

$$G \to G$$
$$g \longmapsto g^{-1}$$

son continuas. Si G es además un espacio compacto con la topología Hausdorff asociada, diremos entonces que G es un **grupo compacto**.

Definición 3.2.1. *Sea G un grupo topológico y sea $\mathcal{B}(G)$ la σ-álgebra de los subconjuntos Borelianos de G. Una **medida de Haar** sobre G es una medida $\mu : \mathcal{B}(G) \to \mathbb{R}^+$ que es invariante a la izquierda (por traslaciones), es decir:*

Para todo $g \in G$ y todo $A \in \mathcal{B}(G)$ se tiene

$$\mu(g \cdot A) = \mu(A),$$

donde $g \cdot A = \{g \cdot x : x \in A\}$.

Teorema 3.2.3. *(Existencia de la medida de Haar; [26]) Todo grupo topológico G admite una medida de Haar μ, única salvo multiplicación por un escalar positivo, tal que para cada $K \subseteq G$ compacto se tiene que $\mu(K) < \infty$.*

□

Corolario 3.2.2. *Todo grupo compacto admite una única medida de probabilidad invariante a la izquierda.*

Demostración. Sea G un grupo compacto. Por el Teorema 3.2.3 podemos fijar una medida de Haar μ sobre G, única salvo multiplicación por un escalar positivo. Como G es compacto entonces $0 < \mu(G) < \infty$.

"Normalizando " la medida μ, definamos $\lambda : \mathcal{B}(G) \to [0,1]$ así:

$$\lambda(A) = \mu(A)/\mu(G).$$

Entonces λ es una medida de probabildad sobre G invariante a la izquierda. La unicidad de λ se obtiene de que μ es única salvo multiplicación por un escalar positivo y $\lambda(G) = 1$. $\square$

El grupo unitario $U(l^2)$, sobre el espacio de Hilbert (real) l^2, es un grupo topológico con la *topología de convergencia fuerte* cuyos abiertos básicos son de la forma:

$$V(x_1, \ldots, x_k) = \{u \in U(l^2) : \|u(x_i) - x_i\| < \epsilon, i = 1, \ldots, k\},$$

para $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in l^2$ y $\epsilon > 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U(n)$ el grupo de las matrices reales unitarias de orden n (equivalentemente, $U(n)$ es el grupo de los operadores unitarios de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$). Es decir, $A \in U(n)$ si y solo si $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_n$, donde I_n es matriz identidad de orden n y A^t es la traspuesta de A.

De igual manera, $U(n)$ es un grupo topológico con la topología de convergencia fuerte cuyos abiertos básicos son de la forma obvia:

$$V(x_1, \ldots, x_k) = \{u \in U(n) : d_n(u(x_i), x_i) < \epsilon, i = 1, \ldots, k\},$$

para $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$, d_n es la métrica euclídea sobre $\mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$.

EJERCICIO 3.2.1. ($U(n)$ es un subgrupo compacto de $U(l^2)$) Demuestre que $U(n)$ es isomorfo a un subgrupo compacto de $U(l^2)$, con la topología de convergencia fuerte.

Por el Ejercicio 3.2.1 y en virtud del Teorema 3.2.2, para cada n podemos fijar μ_n, la única medida de probabilidad invariante a la izquierda definida sobre $U(n)$. El grupo de isometrías de $\mathbb{S}^n$ es isomorfo a $U(n)$, y $U(n)$ actúa de manera transitiva y continua sobre $\mathbb{S}^n$, de manera análoga a la acción de $U(l^2)$ sobre $\mathbb{S}^\infty$. Sea $\mathcal{B}(\mathbb{S}^n)$ la σ-álgebra de los Borelianos de $\mathbb{S}^n$. Fijemos un $x_0 \in \mathbb{S}^n$ cualquiera y definamos $\nu_n : \mathcal{B}(\mathbb{S}^n) \to \mathbb{R}^+$, así:

$$\nu_n(A) = \mu_n(\{g \in U(n) : g(x_0) \in A\}).$$

Entonces μ_n es una medida Boreliana de probabilidad sobre $\mathbb{S}^n$ y de la unicidad de ν_n obtenemos lo siguiente:

Corolario 3.2.3. *La esfera unitaria $\mathbb{S}^n$ de $\mathbb{R}^n$ admite una única medida de probabilidad invariante a la izquierda.*

□

Familias de Lévy.

Definición 3.2.2. *Un **mm-espacio** o **espacio con métrica y medida** es una estructura (X, d, μ) donde X es un conjunto no vacío, d es una métrica sobre X y μ es una medida de probabilidad definida sobre los Borelianos del espacio métrico (X, d).*

Si (X, d) es un espacio métrico y $A \subseteq X$, para todo $\epsilon > 0$ usaremos la siguiente notación para el ϵ-entorno de A:

$$A_\epsilon := \{y \in X : (\exists x \in A)\ d(x, y) < \epsilon\} = \bigcup_{x \in A} V_\epsilon^d[x].$$

Definición 3.2.3. *Una sucesión $(X_n, d_n, \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mm-espacios es una **familia de Lévy** si dados Borelianos $A_n \subseteq X_n$ tales que*

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A_n) > 0,$$

se tiene que para todo $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n((A_n)_\epsilon) = 1.$$

EJERCICIO 3.2.2. Demuestre que si $(X_n, d_n, \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de Lévy entonces, dados Borelianos $A_n \subseteq X_n$ y dados $\delta_1, \delta_2 > 0$, existe un natural N_0 tal que para todo $N \geq N_0$ se cumple que si

$$\mu_N(A_N) \geq \delta_1$$

entonces para todo $\epsilon > 0$

$$\mu_N((A_N)_\epsilon) > 1 - \delta_2.$$

El siguiente teorema, cuya demostración omitiremos, nos presenta un ejemplo muy importante de familia de Lévy que será de utilidad en lo sucesivo. Recomendamos leer su demostración en [17], Teorema 1.3.15.

Teorema 3.2.4 ([11]). *Para todo natural $n > 0$, sea ν_n la única medida boreliana de probabilidad invariante a la izquierda sobre la esfera unitaria $\mathbb{S}^n$ (i.e., la medida de Haar normalizada) y sea d_n la métrica euclídea sobre $\mathbb{S}^n$. Entonces, la sucesión $(\mathbb{S}^n, d_n, \nu_n)_{n>0}$ es una familia de Lévy.*

□

Miremos otro ejemplo importante. Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $m \in \mathbb{N}$, denotaremos por $St_m(\mathcal{H})$ al conjunto de las m-tuplas de vectores ortonormales de $\mathcal{H}$. Dotemos a $St_m(\mathcal{H})$ de la métrica uniforme:

$$d(x, y) = max\{\|x_i - y_i\| : 1 \leq i \leq m\},$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma en $\mathcal{H}$. El espacio $St_m(\mathcal{H})$ es conocido como la **variedad de Stiefel** de m-tuplas ortonormales en $\mathcal{H}$, o simplemente, m-**variedad de Stiefel** en $\mathcal{H}$. El espacio $St_m(\mathcal{H})$ es una *subvariedad suave* del espacio de Banach $\mathcal{H}^m$.

EJERCICIO 3.2.3. Demuestre que $St_m(\mathcal{H})$ es homeomorfa al espacio de *inmersiones lineales isométricas* de $\mathbb{R}^m$ en $\mathcal{H}$. Es decir, al espacio

$$\{f \in L(\mathbb{R}^m, \mathcal{H}) : f^\top \circ f = I_{\mathbb{R}^m}\}.$$

Aquí, $f^\top$ es la *traspuesta* de f respecto a las métricas de $\mathcal{H}$ y $\mathbb{R}^m$, i.e.,

$$\langle f^\top(v), r\rangle = \langle v, f(r)\rangle \quad \forall v \in \mathcal{H}, \forall r \in \mathbb{R}^m.$$

La métrica sobre $St_m(\mathcal{H})$ es inducida por el producto $\langle f, g\rangle = tr(f^\top \circ g)$. Así, $St_m(\mathcal{H})$ es una *subvariedad Riemanniana* de $\mathcal{H}^m$.

□

Se suele denotar por $St_m(n)$ a $St_m(\mathbb{R}^n)$ y por $St_m(\infty)$ a $St_m(l^2)$. Para cada n la variedad $St_m(n)$ es compacta. Procediendo de manera similar al caso de la esfera $\mathbb{S}^n$ (Corolario 3.2.3) obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.2.4. *La variedad de Stiefel $St_m(n)$ admite una única medida de probabilidad Boreliana, invariante por rotaciones.*

□

El siguiente resultado es una generalización del Teorema 1.3.15 de [17]. Omitiremos su demostración.

Teorema 3.2.5 ([11]). *Fijemos un natural m. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea ν_n la única medida boreliana de probabilidad invariante por rotaciones sobre $St_m(n)$ y sea d_n la métrica euclídea sobre $St_m(n)$. Entonces, la sucesión $(St_m(n), d_n, \nu_n)_{n>0}$ es una familia de Lévy.*

□

Una familia de ejemplos.

Teorema 3.2.6. *Sea G un grupo topológico que actúa continuamente, por isometrías, sobre un espacio métrico (X, d) . Supongamos que existe una familia de subgrupos compactos $(G_n)_n$, dirigida por inclusión y tal que existe $x \in X$ con la siguiente propiedad:*

- *Las órbitas $G_n \cdot x$ forman una familia de Lévy respecto a la restricción de la métrica d y las medidas de probabilidad $\mu_n \cdot x$, donde μ_n es la medida de Haar normalizada sobre G_n.*
- *La unión de las órbitas, $\bigcup_n G_n \cdot x$, es densa en X.*

Entonces el G-espacio X es de oscilación finitamente estable.

Demostración. Sea $F \subset X$ finito (no-vacío), $\epsilon > 0$ y γ un cubrimiento finito de X. Sea también $k = |F|$ y $m = |\gamma|$. Podemos elegir N_0 suficientemente grande como para que $F \subset G_{N_0} \cdot x$. Como $\mu_{N_0}(G_{N_0}) = 1$ y $m = |\gamma|$ entonces existe $A \in \gamma$ tal que $\mu_{N_0} \cdot x(A \cap G_{N_0} \cdot x) \geq 1/m$.

Para cada $n > 0$ definamos $A_n = A \cap G_n$. Por el Ejercicio 3.2.2, existe N_1 tal que tal que para todo $n \geq N_1$ se cumple que si

$$\mu_n \cdot x(A_n) \geq 1/m$$

entonces

$$\mu_n \cdot x((A_n)_\epsilon) > 1 - 1/k.$$

Entonces si tomamos $M = max\{N_0, N_1\}$ tenemos que:

- $F \subset G_M \cdot x$.

- $\mu_M \cdot x(A_M) \geq 1/m$, y por lo tanto $\mu_M \cdot x((A_M)_\epsilon) > 1 - 1/k$.

Entonces, para todo $\xi \in F$ se tiene lo siguiente:

$$\mu_M(\{g \in G_M : g \cdot \xi \in (A_M)_\epsilon\}) = \mu_M \cdot x((A_M)_\epsilon) > 1 - 1/k.$$

En consecuencia, como $\mu_M(G_M) = 1$ se tiene

$$\bigcap_{\xi \in F} \{g \in G_M : g \cdot \xi \in (A_M)_\epsilon\} \neq \emptyset.$$

Sea $g \in \bigcap_{\xi \in F}\{g \in G_M : g \cdot \xi \in (A_M)_\epsilon\}$. Entonces $g \cdot F \subset (A_M)_\epsilon \subseteq A_\epsilon$. Como $G_M \subset G$, esto completa la demostración, en virtud de la parte 6 del Teorema 3.1.1. □

3.2.4 El grupo unitario y la esfera unitaria de l^2

Consideremos nuevamente a $U(l^2)$ con la topología de convergencia fuerte. Con la acción descrita en el Ejemplo 1.3.2, la esfera unitaria $\mathbb{S}^\infty$ de l^2 es un $U(l^2)$-espacio, con la uniformidad métrica inducida. En esta sección presentaremos una demostración de que este $U(l^2)$-espacio es de oscilación finitamente estable. Este resultado se debe a V. Milman, quien dio una demostración directa de este hecho en [12]. Presentaremos una demostración que se basa en el Teorema 3.2.6.

Recordemos que el grupo de isometrías de $\mathbb{S}^n$ es isomorfo al grupo $U(n)$ de las matrices reales unitarias de orden n, y que $U(n)$ actúa de manera transitiva y continua sobre $\mathbb{S}^n$. Además, por el Ejercicio 3.2.1 podemos considerar a $U(n)$ como subgrupo compacto de $U(l^2)$.

Ahora podemos enunciar y demostrar el resultado principal de esta sección:

Teorema 3.2.7. *(Milman [12]) El $U(l^2)$-espacio $\mathbb{S}^\infty$ es de oscilación finitamente estable.*

Demostración. Fijemos $x \in \mathbb{S}^\infty$ cualquiera. Usando la transitividad de la acción de $U(l^2)$ sobre $\mathbb{S}^\infty$, es fácil demostrar lo siguiente:

- Para todo n, $U(n) \cdot x = \mathbb{S}^n$.
- $\overline{\bigcup_n \mathbb{S}^n} = \mathbb{S}^\infty$.

Entonces, por el Teorema 3.2.4 y el Teorema 3.2.6, obtenemos el resultado requerido al notar que si μ_n es la única medida de Haar sobre $U(n)$ y ν_n es la única medida Boreliana de probalidad invariante a la izquierda sobre $\mathbb{S}^n$ entonces $\nu_n = \mu_n \cdot x$ (por unicidad de estas medidas). $\square$

3.2.5 El grupo unitario y la variedad de Stiefel $St_m(\infty)$

Teorema 3.2.8. *Para cada $m \in \mathbb{N}$, el $U(l^2)$-espacio $St_m(\infty)$ es de oscilación finitamente estable.*

Demostración. Fijemos m y $x \in St_m(\infty)$. De manera análoga a la demostración del Teorema 3.2.7, se puede comprobar lo siguiente:

- Para todo n, $U(n) \cdot x = St_m(n)$.
- $\overline{\bigcup_n St_m(n)} = St_m(\infty)$.

El resultado requerido es entonces consecuencia de los Teoremas 3.2.5 y 3.2.6.

$\square$

3.3 Un contraejemplo

Dotemos al conjunto $X = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \neq n\}$ con la métrica discreta, y definamos la acción del grupo simétrico S_∞ sobre X así:

$$(\pi, (m,n)) \longmapsto (\pi(m), \pi(n)).$$

Con esta acción el espacio métrico X es un S_∞-espacio, pero veremos que no es de oscilación finitamente estable.

Consideremos la función $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(m,n) = 1$ si $m < n$ y $f(m,n) = 0$ en caso contrario. Obviamente f es acotada, pero si $F = \{(0,1),(1,0)\}$ entonces para todo $\pi \in S_\infty$ tenemos que $\pi \cdot F$ es de la forma

$$\{(x,y),(y,x)\} \text{ con } x \neq y.$$

Por lo tanto,

$$osc(f \restriction F) = 1,$$

y en consecuencia f no es de oscilación finitamente estable.

Capítulo 4

Punto fijo sobre compactos

Dado un grupo topológico G, la idea en esta parte del curso es estudiar a G como G-espacio, y caracterizar cuando es de oscilación finitamente estable. Esta caracterización, determinada por la *propiedad de punto fijo sobre compactos*, será presentada en la Sección 5.3. Antes revisaremos algunos hechos sobre acciones continuas sobre compactos y sobre la estructura uniforme de un grupo topológico.

Recordemos que la **estructura uniforme izquierda** $\mathcal{U}_L(G)$, sobre un grupo topológico G, tiene como entornos básicos de la diagonal a los conjuntos de la forma:

$$U_L = \{(g,h) \in G \times G : g^{-1}h \in U\},$$

donde U es una vecindad de la identidad en la topología de G. También conviene recordad la **estructura uniforme derecha** $\mathcal{U}_R(G)$, generada por los conjuntos:

$$U_R = \{(g,h) \in G \times G : gh^{-1} \in U\},$$

donde U es de nuevo una vecindad de la identidad en la topología de G.

Entonces, dado un espacio uniforme $(Y, \mathcal{U}_Y)$, una función $f : G \to Y$ es *uniformemente continua respecto a* $\mathcal{U}_L(G)$ si para todo $V \in \mathcal{U}_Y$ existe una vecidad U de la indentidad de G tal que

$$(\forall g,h \in G) \ \ gh^{-1} \in U \Rightarrow (f(g), f(h)) \in V.$$

Análogamente se puede precisar cuando f es *uniformemente continua respecto a* $\mathcal{U}_R(G)$. [1]

4.1 Acciones continuas sobre compactos

En la Proposición 4.1.1 más abajo, se caracteriza las acciones continuas de un grupo topológico G sobre un espacio compacto X en térmicos del homomorfismo estandar entre G y $Homeo(X)$, el grupo de homeomorfismos de X sobre sí mismo.

Dado un espacio compacto X, sea $\mathcal{U}_X$ la única uniformidad compatible con la topología de X. Para todo $V \in \mathcal{U}_X$ definamos:

$$\tilde{V} = \{f \in Homeo(X) : (\forall x \in X)\ f(x) \in V[x]\}.$$

La colección $\{\tilde{V} : V \in \mathcal{U}_X\}$ es base de entornos de la identidad en una topología sobre $Homeo(X)$ conocida como **topología de convergencia uniforme** o **compacto-abierta**.

EJERCICIO 4.1.1. Demuestre que con la topolgía de convergencia uniforme $Homeo(X)$ es un grupo topológico y que la acción estandar de $Homeo(X)$ sobre X dada por

$$(f, x) \longmapsto f(x)$$

es continua respecto a esta topología.

EJERCICIO 4.1.2. Si G es un grupo topológico que actúa sobre un compacto X, entonces para cada $g \in G$ la aplicación dada por

$$X \longrightarrow X$$

$$x \longmapsto g \cdot x$$

es un homeomorfismo.

Lema 4.1.1. *Sea G un grupotopológico que actúa de manera continua sobre un compacto X. Entonces para cada $x \in X$, la función:*

[1] En algunos textos, por ejemplo [17], cuando f es uniformemente continua respecto a $\mathcal{U}_L(G)$ (resp. $U_L(G)$) se dice que f es *uniformemente continua a la izquierda* (resp. *derecha*). Esos términos nos parecen ambigüos así que evitaremos emplearlos.

(i)

$$G \to X$$
$$g \mapsto g \cdot x$$

es uniformemente continua respecto a la uniformidad derecha $\mathcal{U}_R(G)$.

(ii)

$$G \to X$$
$$g \mapsto g^{-1} \cdot x$$

es uniformemente continua respecto a la uniformidad izquierda $\mathcal{U}_L(G)$.

Demostración. Demostremos (i). Fijemos $x \in X$ y sea $\mathcal{U}_X$ la única uniformidad compatible con X. Tomemos $V \in \mathcal{U}_X$. Por la proposición anterior, existe U, vecindad de la identidad de $e \in G$, tal que $\gamma(U) \subseteq \tilde{V}$. En particular, para todo $g \in U$, se tiene que $\gamma_g(y) \in V[y]$, $\forall\, y \in X$.

Se quiere demostrar que $\forall\ g, h \in G\ (g \cdot h^{-1} \in U \to (g \cdot x, h \cdot x) \in V)$.

Sean $g, h \in G$, tales que $g \cdot h^{-1} \in U$. Por la elección de U, se tiene que $\gamma_{g \cdot h^{-1}}(h \cdot x) \in V[h \cdot x]$. Es decir, $(g \cdot x, h \cdot x) \in V$.

La parte (ii) se obtiene de que

$$\eta : (G, \mathcal{U}_L(G)) \to (G, \mathcal{U}_R(G))$$
$$\eta(g) = g^{-1}$$

es un isomorfismo uniforme.

□

Para cada $g \in G$ denotemos por γ_g a la aplicación definida en el Ejercicio 4.1.2. Consideremos ahora la siguiente aplicación de G en $Homeo(X)$:

$$G \longrightarrow Homeo(X)$$
$$g \longmapsto \gamma_g.$$

Denotemos por γ a esta aplicación. Entonces,

$$\gamma(gh) = \gamma_{gh} = \gamma_g \circ \gamma_h = \gamma(g) \circ \gamma(h).$$

Es decir, γ es un *homomorfismo* de grupos entre G y $Homeo(X)$. Lo llamaremos *homomorfismo asociado* de G en $Homeo(X)$. Si e es la identidad de G entonces $\gamma(e)$ es la identidad de $Homeo(X)$.

Proposición 4.1.1. *Sea X un espacio compacto y sea G un grupo topológico actuando sobre X. Entonces, la acción de G sobre X es continua si y solo si el homomorfismo asociado de G en $Homeo(X)$, dotado de la topolgía de convergencia uniforme, es continuo.*

Demostración. Supongamos que la acción

$$G \times X \to X$$

$$(g, x) \longmapsto g \cdot x$$

es continua y sea γ el homomorfismo asociado de G en $Homeo(X)$. Para demostrar la continuidad de γ basta ver que para todo entorno $\tilde{V}$ de $\gamma(e)$ existe un entorno U de e tal que $\gamma(U) \subseteq \tilde{V}$.

Sea $\mathcal{U}_X$ la única uniformidad asociada a X y fijemos $V \in \mathcal{U}_X$. Fijemos también $V' \in \mathcal{U}_X$ simétrico tal que $V' \circ V' \subseteq V$. Entonces, por continuidad de la acción, para cada $x \in X$ existe un entorno U_x de e y existe una vecidad W_x de x en la topología de X tales que

$$U_x \cdot W_x := \{g \cdot y : g \in U_x, y \in W_x\} \subseteq V'[x].$$

Notemos que $\{W_x : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de X y por lo tanto existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^n W_{x_i}$.

Sea $U = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$ y consideremos $g \in U$ arbitrario. Dado $x \in X$, existe i tal que $x \in W_{x_i}$, y por lo tanto $\gamma_g(x) = g \cdot x \in U \cdot W_{x_i} \subseteq V'[x_i]$. Es decir, $(x_i, \gamma_g(x)) \in V'$. Por otro lado, $x = e \cdot x \in U \cdot W_{x_i} \subseteq V'[x_i]$ y por lo tanto también tenemos $(x_i, x) \in V'$. Entonces por ser V' simétrico se tenemos $(x, \gamma_g(x)) \in V' \circ V' \subseteq V$. Esto demuestra que $\gamma(U) \subseteq \tilde{V}$ y concluye la demostración de la implicación directa.

La recíproca es consecuencia del Ejercicio 4.1.1. □

4.2 El ámbito más grande

En esta sección presentaremos un importante G-espacio que será de utilidad en lo sucesivo.

Dado un grupo topológico G, denotemos por $S(G)$ a la compactificación de Samuel del espacio uniformne $(G, \mathcal{U}_R(G))$.

Consideremos la acción de G sobre $(G,\mathcal{U}_R(G))$ dada por

$$G \times G \to G$$

$$(g,h) \longmapsto g \cdot h.$$

(aquí $g \cdot h$ es la multiplicación en G).

Para cada $g \in G$, la traslación

$$G \to G$$

$$h \longmapsto g \cdot h$$

es una equivalencia uniforme. Por lo tanto, puede ser extendendida a un auto-homeomorfismo de $S(G)$ en $S(G)$ y en consecuencia la acción de G sobre $(G,\mathcal{U}_R(G))$ se puede extender a una acción continua de G sobre $(S(G),\mathcal{U}_{S(G)})$, donde $U_{S(G)}$ es la única uniformidad compatible con el compacto $S(G)$. Es decir, $S(G)$ es un G-espacio compacto. Además, si e es el elemento neutro de G entonces la orbita $G \cdot e = G$ es densa en $S(G)$ por ser $S(G)$ la compactificación de Samuel de G. De hecho $S(G)$ es el G-espacio compacto "más grande" con una órbita densa.

Definición 4.2.1. *Sea G un grupo topológico. Un G-**ámbito** es un par (X, x_0), donde X es un G-espacio compacto y $x_0 \in X$ es tal que su órbita $G \cdot x_0$ es densa.*

Por lo visto más arriba, si e es su elemento neutro entonces el par $(S(G), e)$ es un G-ámbito. De hecho, $S(G)$ satisface la siguiente propiedad universal:

Teorema 4.2.1. *Para todo G-ámbito (X, x_0), existe un único morfismo de G-espacios $\phi : S(G) \to X$ tal que $\phi(e) = x_0$.*

□

Observación 4.2.1. Nótese que una ϕ como en el Teorema 4.2.1 es necesariamente sobreyectiva, porque la imagen de $S(G)$ por ϕ es un cerrado y la órbita de $\phi(e) = x_0$ es densa en X. Por lo tanto, el Teorema 4.2.1 implica que la cardinalidad de $S(G)$ es mayor o igual a la de cualquier otro G-ámbito. Por esta razón $S(G)$ es conocido como el **ámbito más grande** de G.

4.3 Grupos extremadamente dóciles

Definición 4.3.1. *Sea G un grupo topológico. Decimos que G es* ***extremadamente dócil*** *o que tiene la* ***propiedad de punto fijo sobre compactos*** *si toda acción continua de G sobre un espacio compacto X tiene un punto fijo, es decir: existe $x \in X$ tal que para todo $g \in G$ se tiene $g \cdot x = x$.*

En esta sección vamos a caracterizar a los grupos extremadamente dóciles en términos de la propiedad de oscilación finitamente estable. Veremos que esto es también una caracterización de los grupos topológicos G, que son de oscilación finitamente estable como G-espacios.

El siguiente lema se deduce de la discusión en la sección anterior.

Lema 4.3.1. *Toda función definida sobre G que sea acotada y uniformemente continua respecto a $\mathcal{U}_R(G)$ puede ser extendida a una función continua definida sobre el ámbito más grande $S(G)$.*

□

Intruduciremos ahora notación que será de utilidad. Sea G un grupo topológico y sea $d : G \times G \to \mathbb{R}^+$ una pseudométrica acotada, invariante por la izquierda sobre G. Es decir,

$$\forall\ f, g, h \in G \quad d(g \cdot h, g \cdot f) = d(h, f).$$

Sea $\mathcal{H}_d = \{g \in G : d(g, e) = 0\}$, donde $e \in G$ es el elemento neutro del grupo. Dados $g, h \in \mathcal{H}_d$, se tiene

$$d(g^{-1} \cdot h, e) = d(h, g) \leq d(h, e) + d(g, e) = 0.$$

Por lo tanto, $\mathcal{H}_d$ es subgrupo de G.

Sea $G/_d = G/_{\mathcal{H}_d}$, el cociente de G por la relación

$$g \sim h \Leftrightarrow g^{-1} \cdot h \in \mathcal{H}_d \Leftrightarrow d(g, h) = 0.$$

Para cada $g \in G$, denotemos por $g \cdot \mathcal{H}_d$ a la clase de g bajo esta relación, es decir, al conjunto $\{g' \in G : g' \sim g\}$; y definamos $\hat{d} : G/_d \times G/_d \to [0, \infty)$ así:

$$\hat{d}(g \cdot \mathcal{H}_d, h \cdot \mathcal{H}_d) = d(g, h).$$

Es fácil ver que $\hat{d}$ es una métrica sobre $G/_{\hat{d}}$.

Presentaremos ahora la caracterización de la propiedad de punto fijo sobre compactos en términos de la propiedad de oscilación finitamente estable:

Teorema 4.3.1 (Pestov [17]). *Sea G un grupo topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *G es extremadamente dócil.*

2. *El G-espacio $(G,\mathcal{U}_L(G))$ con la acción de G sobre G por "traslaciones a la izquierda" es de oscilación finitamente estable.*

3. *Si G actúa de manera transitiva y continua por isometrías sobre un espacio métrico X entonces, el G-espacio X es de oscilación finitamente estable.*

4. *Existe una colección dirigida $\mathcal{M}$ de pseudométricas continuas, acotadas e invariantes a la izquierda, que genera la topología de G y tal que para cada $d \in \mathcal{M}$ el G-espacio G/d es de oscilación finitamente estable.*

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$) Como $S(G)$ es compacto, podemos elegir un punto fijo $x_0 \in S(G)$ para la acción de G sobre $S(G)$. Sean $f : G \to \mathbb{R}$ una función acotada y uniformemente continua respecto a $U_L(G)$, $F \subseteq G$ finito y $\epsilon > 0$. Sea también $\hat{F} = F \cup \{x^{-1} : x \in F\}$. La función $\hat{f} : G \to \mathbb{R}$ dada por $\hat{f}(x) = f(x^{-1})$ es acotada y uniformemente continua respecto a $U_R(G)$), y por lo tanto puede ser extendida a una función continua y acotada (que denotaremos igualmente $\hat{f}$) de $S(G)$ en $\mathbb{R}$, en virtud del Lema 4.3.1.

Sea $(g_\alpha)_\alpha \subseteq G$ una red que converge a x_0. Entonces, para cada $h \in \hat{F}$ la red $(h \cdot g_\alpha)_\alpha$ converge también a $x_0 = h \cdot x_0$, porque la acción de G sobre $S(G)$ es continua y, restringida a G, coincide con la acción de G sobre G. Por lo tanto, existe α tal que $\forall\, h \in \hat{F}$ se tiene que:

$$|\hat{f}(x_0) - \hat{f}(h \cdot g_\alpha)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

En consecuencia, si $h, h' \in \hat{F}$, se sigue que:

$$|\hat{f}(h \cdot g_\alpha) - \hat{f}(h' \cdot g_\alpha)| < \epsilon.$$

Luego, $osc(f \restriction_{g_\alpha^{-1}\hat{F}}) < \epsilon$, lo que implica que $osc(f \restriction_{g_\alpha^{-1}F}) < \epsilon$.

($2 \Rightarrow 3$) Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua y acotada. Fijemos $x_0 \in X$ y sea $\hat{f} : G \to \mathbb{R}$ dada por

$$\hat{f}(g) = f(g^{-1} \cdot x_0).$$

Como la aplicación $g \mapsto g^{-1} \cdot x_0$ es uniformemente continua entonces $\hat{f}$ es uniformemente continua y acotada. Luego, $\hat{f}$ es de oscilación finitamente estable.

Sea $F \subseteq X$ finito y $\epsilon > 0$. Queremos hallar $g \in G$ tal que

$$(\forall\, x, y \in F)\ |f(g \cdot x) - f(g \cdot y)| < \epsilon.$$

Como la acción es transitiva, para todo $x \in F$ existe $g_x \in G$, tal que $g_x^{-1} \cdot x_0 = x$. Sea $E = \{g_x : x \in F\}$.

Por otro lado, como $\hat{f}$ es de oscilación finitamente estable, existe $g \in G$ tal que para todo $x, y \in F$, se tiene que $|\hat{f}(g^{-1} \cdot g_x) - \hat{f}(g^{-1} \cdot g_y)| < \epsilon$. Por lo tanto

$$|f(g \cdot (g_x^{-1} \cdot x_0)) - f(g \cdot (g_y^{-1} \cdot x_0))| < \epsilon,$$

es decir,

$$|f(g \cdot x) - f(g \cdot y)| < \epsilon.$$

($3 \Rightarrow 4$) Trivial.

($4 \Rightarrow 2$) Fijemos $d \in \mathcal{M}$ y sea $\pi : G \to G/_d$ el epimorfismo canónico. Sea $f : (G, d) \to \mathbb{R}$ una función 1-Lipschitz y acotada. Observemos que si $h \in \pi(g)$ entonces

$$|f(h) - f(g)| \leq d(h, g) = 0.$$

Es decir, para todo $h \in \pi(g)$ se tiene $f(h) = f(g)$. Esto muestra que la función $\hat{f} : G/_d \to \mathbb{R}$ dada por

$$\hat{f}(\pi(g)) = f(g)$$

está bien definida. Además, $\hat{f}$ es uniformemente continua y acotada, y por lo tanto es de oscilación finitamente estable. Es fácil ver que esto implica que f también es de oscilación finitamente estable. Hemos demostrado que vale la parte (2) de Teorema 3.1.1 apliacada a $\mathcal{M}$ y $(G,\mathcal{U}_L(G))$.

El resultado sigue entonces de la equivalencia entre (1) y (2) del Teorema 3.1.1.

$(2 \Rightarrow 1)$ Sea X compacto tal que G actúa continuamente sobre X. Fijemos $x_0 \in X$. $\forall\, g \in G$ la aplicación

$$G \to X$$

$$g \mapsto g^{-1} \cdot x_0$$

es uniformemente continua respecto a $\mathcal{U}_L(G)$.

Por la parte (9) del Teorema 3.1.1, esta función es de oscilación finitamente estable, es decir, $\forall\, F \subseteq G$ finito, $\forall\, V \in \mathcal{U}_X$, la única uniformidad compatible con X, existe $g_{F,V} \in G$ tal que

$$(g^{-1} \cdot g_{F,V}^{-1} \cdot x_0, h^{-1} \cdot g_{F,V}^{-1} \cdot x_0) \in V, \ \forall\, g, h \in F.$$

Es decir, si $F^{-1} = \{x^{-1} : x \in F\}$, entonces

$$(F^{-1} \cdot g_{F,V}^{-1} \cdot x_0) \times (F^{-1} \cdot g_{F,V}^{-1} \cdot x_0) \subseteq V.$$

Observe que la red $\{g_{F,V}^{-1} \cdot x_0 : F \subseteq G$ finito y $V \in \mathcal{U}_X\}$ en el compacto X tiene un punto de acumulación $z \in X$, que satisface $\forall\, g \in G$, $g \cdot z = z$.
□

4.4 Ejemplos

4.4.1 El grupo de automofismos de los racionales y otros grupos asociados.

Recordemos que $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$ es el grupo de automorfismos de $\mathbb{Q}$ con el orden usual, es decir, de biyecciones de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ que preservan el orden. $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$ es homeomorfo a un subconjunto cerrado del espacio $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$, con la topología producto que resulta de dotar a $\mathbb{Q}$ con la topología discreta. De esta forma $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$ resulta ser un *grupo polaco*,[2]

[2]Un espacio topológico es **polaco** si es separable y completamente metrizable. Un grupo es polaco si es un grupo topológico que como espacio topológico es polaco.

Dado $F \subset \mathbb{Q}$ finito, definamos la función $d_F : Aut(\mathbb{Q}, \leq) \to \{0,1\}$, así:

$$d_F(\sigma, \tau) = 0 \text{ si y solo si } \sigma(F) = \tau(F).$$

EJERCICIO 4.4.1. Demuestre que para cada $F \subset \mathbb{Q}$ vale lo siguiente:

1. La función d_F es una pseudométrica acotada, invariante a la izquierda y continua. Además, la familia $\{d_F : F \subset \mathbb{Q}, F \text{ finito}\}$ genera la topología de $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$.

2. El $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$-espacio $Aut(\mathbb{Q}, \leq)/d_F$ es isomorfo al $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$-espacio $\mathbb{Q}^{[|F|]} = \{E \subset \mathbb{Q} : |E| = |F|\}$, equipado con la métrica discreta.

Teorema 4.4.1. *El grupo polaco $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$ es extremadamente dócil.*

Demostración. Por el Corolario 3.2.1 y la parte 2 del Ejercicio 4.4.1, tenemos que el $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$-espacio $Aut(\mathbb{Q}, \leq)/d_F$ es de oscilación finitamente estable. Además, por la parte 1 del Ejercicio 4.4.1 la familia $\{d_F : F \subset \mathbb{Q}, F \text{ finito}\}$ genera la topología de $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$. Por lo tanto, aplicando la parte 4 del Teorema 4.3.1 obtenemos el resultado requerido. □

Observación 4.4.1. El resultado anterior y su demostración muestran que la *docilidad extrema* de $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$ (i.e., el que $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$ satisfaga la propiedad de punto fijo sobre compactos) es equivalente al Teorema de Ramsey finito (Teorema 1.2.2).

Veremos a continuación que la docilidad extrema de $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$ se transfiere a otros grupos importantes, usando el siguiente criterio:

EJERCICIO 4.4.2. Sea $\phi : G \to H$ un homomorfismo continuo entre grupos topológicos tal que la imagen de G por ϕ es densa en H. Demuestre que si G es extremadamente dócil entonces H también lo es.

Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología usual. Denotemos por $Homeo_+X$ al grupo de los homeomorfismos de X en X que preservan el orden, equipado de la topología compacto abierta. En particular, los grupos $Homeo_+\mathbb{R}$, $Homeo_+(0,1)$ y $Homeo_+[0,1]$ son grupos topológicos polacos.

Tenemos lo siguiente:

Corolario 4.4.1. *$Homeo_+\mathbb{R}$, $Homeo_+(0,1)$ y $Homeo_+[0,1]$ son extremadamente dóciles.*

Demostración. Como $\mathbb{R}$ es la completación de Dedekind de $\mathbb{Q}$ entonces todo elemento $\sigma \in Aut(\mathbb{Q}, \leq)$ puede ser extendido de manera única a un elemento $\hat{\sigma} \in Homeo_+\mathbb{R}$. Es fácil ver que si $\phi : Aut(\mathbb{Q}, \leq) \to Homeo_+\mathbb{R}$ está dada por:

$$\phi(\sigma) = \hat{\sigma},$$

entonces ϕ es un homomorfismo continuo y la imagen de $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$ por ϕ es densa en $Homeo_+\mathbb{R}$. Entonces, por el Ejercicio 4.4.2 tenemos que $Homeo_+\mathbb{R}$ es extremadamente dócil. La demostración concluye al notar que los grupos $Homeo_+\mathbb{R}$, $Homeo_+(0,1)$ y $Homeo_+[0,1]$ son isomorfos como grupos topológicos. □

4.4.2 El grupo unitario

Nuestro próximo ejemplo es $U(l^2)$. Gromov y Milman [3] demostraron que este grupo, con la *topología de operador fuerte*, es extremadamente dócil. Los abiertos básicos de esta topología son de forma siguiente:

$$V[a_1, a_2, \ldots, a_n; \epsilon] = \{u \in U(l^2) : \|u(a_i) - a_i\| < \epsilon \ ; \ 1 \leq i \leq n\},$$

donde $\{a_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq l^2$ es númerable y genera un subespacio denso de l^2. Basta tomar $a_i = e_i$, la base estandar de l^2.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definamos $\rho_m : U(l^2) \times U(l^2) \to \mathbb{R}$ así:

$$\rho_m(u, v) = max\{\|u(e_i) - v(e_i)\| : 1 \leq i \leq m\}.$$

EJERCICIO 4.4.3. Para cada $m \in \mathbb{N}$, demuestre que ρ_m es una pseudométrica invariante a la izquierda y continua. Además, demuestre que la familia $\{\rho_m : m \in \mathbb{N}\}$ es dirigida y genera la topología de operador fuerte de $U(l^2)$.

Es muy fácil demostrar lo siguiente a partir de las definiciones:

Lema 4.4.1. *Para cada $m \in \mathbb{N}$ sea $H_m = \{u \in U(l^2) : \rho_m(u, e) = 0\}$, donde $e \in U(l^2)$ es el operador identidad. Entonces $U(l^2)/H_m$, con la métrica cociente, es isomorfo como $U(l^2)$-espacio métrico a $St_m(\infty)$.*

□

EJERCICIO 4.4.4. Demuestre el lema 4.4.1.

Teorema 4.4.2. *$U(l^2)$ es extremadamente dócil.*

Demostración. El resultado se obtiene del Lema 4.4.1, el Ejercicio 4.4.3, el Teorema 3.2.8 y la parte 4 del Teorema 4.3.1 aplicado a $G = U(l^2)$ y la familia de pseudométricas $\{\rho_m : m \in \mathbb{N}\}$. □

4.4.3 Contraejemplo: el grupo simétrico infinito

A continuación veremos que es fácil demostrar que el grupo simétrico infinito S_∞ no es extremadamente dócil. Este hecho fue establecido por Pestov en [18] como respuesta a la pregunta de Furstenberg sobre si S_∞ era extremadamente dócil.

Definamos $d : S_\infty \times S_\infty \to [0, \infty)$ así:

$$d(\pi, \tau) = \sum_{\pi(n) \neq \tau(n)} \frac{1}{2^n}.$$

EJERCICIO 4.4.5. Demuestre que d es una métrica invariante a la izquierda que genera la topología usual de S_∞.

Lema 4.4.2. *Existe un espacio métrico sobre el cual S_∞ actúa de manera continua y transitiva por isometrías que no es de oscilación finitamente estable.*

Demostración. El espacio métrico buscado es $X = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \neq n\}$ con la métrica discreta, como se mostró en la Sección 3.3 □

Teorema 4.4.3. *S_∞ no es extremadamente dócil.*

Demostración. Del Lema 4.4.2 y la parte 2 del Teorema 4.3.1 . □

Capítulo 5

Clases Ramsey de estructuras

En este Capítulo veremos como las técnicas desarrolladas hasta ahora pueden ser aplicadas en la Teoría de Fraïssé, que emplea métodos de la Teoría de Modelos y de la Lógica para estudiar estructuras numerables sobre un lenguaje dado. Como en el caso de la esfera unitaria $\mathbb{S}^\infty$ o $(\mathbb{Q}, \leq)$, estas estructuras suelen tener grupos de automorfismos interesantes. Veremos criterios bajo los cuales estos grupos son extremadamente dóciles y como, una vez más, estos criterios dependen de una propiedad de Ramsey, en este caso para clases de estructura finitas. También como la Teoría de Fraïssé nos permite estudiar los subgrupos de S_∞ que son extremadamente dóciles. Para una exposición más completa sobre la Teoría de Fraïssé se puede consultar el libro [7].

5.1 Teoría de Fraïssé

Definición 5.1.1. *Una* ***firma****, $L =< (R_i)_{i\in I}, (F_j)_{j\in J} >$, es una familia numerable de símbolos $(R_i)_{i\in I}$ para relaciones y $(F_j)_{j\in J}$ para funciones. Cada uno de estos símbolos tiene asociado un número entero llamado* ***aridad****, el cual es positivo para las relaciones y no-negativo para las funciones.*

Definición 5.1.2. *Una* ***estructura****, $\mathbb{A} =< A, (R_i^{\mathbb{A}})_{i\in I}, (F_j^{\mathbb{A}})_{j\in J} >$, sobre una firma L (o una L-**estructura**) consta de:*

- *Un conjunto A denominado* ***universo*** *de la estructura;*
- *Una familia $(R_i^{\mathbb{A}})_{i\in I}$ de relaciones donde, para cada $i \in I$, $R_i^{\mathbb{A}} \subseteq A^{n(i)}$, y $n(i)$ es la aridad de R_i; y*
- *Una familia $(F_j^{\mathbb{A}})_{j\in J}$ de funciones donde, para cada $j \in J$, $F_j^{\mathbb{A}} : A^{m(j)} \to A$, y $m(j)$ es la aridad de F_j.*

Decimos que $\mathbb{A}$ es una ***estructura relacional*** *si L no contiene símbolos para funciones.*

Cada firma L está asociada a un lenguaje de primer orden que incluye a los símbolos de L y también símbolos para variables $(x, y, \dots)$, conectivos lógicos ($\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$), cuantificadores ($\forall$, $\exists$), y un símbolo relacional binario para la igualdad ($=$). Donotaremos igualmente por L a este lenguaje. También se requiere que el lenguaje L contenga símbolos para constantes, aunque estos pueden ser pensados como símbolos funcionales de aridad 0.
Recordemos que una fórmula ρ en un lenguaje L es una **sentencia** si todos los cuantificadores que ocurren en ρ están acotados. Dada una estructura $\mathbb{A}$ y una sentencia ρ en el lenguaje asociado a $\mathbb{A}$, se tiene que o bien ρ es verdadera en $\mathbb{A}$ o ρ es falsa en $\mathbb{A}$; y ocurre una y solo una de esas alternativas. Si ρ es verdadera en $\mathbb{A}$ decimos que $\mathbb{A}$ **satisface** a ρ.

Ejemplo 5.1.1. Un conjunto es una estructura en la firma vacía $L = \emptyset$.

Ejemplo 5.1.2. Sea L la firma con un solo símbolo relacional binario, $<$. Todo conjunto totalmente ordenado es un ejemplo de una L-estructura; así como también todo conjunto parcialmente ordenado. La diferencia está en el conjunto de sentencias (axiomas) que caracterizan a los conjuntos totalmente ordenados y a los parcialmente ordenados.

Ejemplo 5.1.3. Sea L una firma con un solo símbolo relacional binario R. Un grafo (V, R^V) es un ejemplo de una L-estructura. El universo V es el conjunto de vértices y R^V es la relación de *adyacencia* sobre V. Se require que en la estructura (V, R^V) sea verdad la sentencia que dice que R^V es simétrica e irreflexiva.

Ejemplo 5.1.4. Sea $H \subseteq [0, \infty)$ numerable tal que $0 \in H$. Consideremos una firma que consta de símbolos relaciones binarios $(D_h)_{h\in H}$.

Un estructura en esta firma es un *espacio métrico H-valuado*, en el cual $(x, y) \in D_h$ se interpreta como $d(x, y) = h$, para una métrica d sobre el universo de la estructura. Además, se requiere que la estructura satisfaga las tres sentencias (axiomas) que caracterizan a los espacios métricos.

Necesitaremos ahora varias definiciones.

Definición 5.1.3. *Dadas dos estructuras $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ en la misma firma L, una aplicación $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un **homomorfismo** si para cada símbolo relacional R_i y cada símbolo funcional F_j se tiene lo siguiente:*

- *Dados $x_1, x_2, \ldots x_{n(i)} \in A$, $R_i^{\mathbb{A}}(x_1, \ldots, x_{n(i)})$ es verdad en $\mathbb{A}$ si y solo si $R_i^{\mathbb{B}}(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_{n(i)}))$ es verdad en $\mathbb{B}$.*
- *Dados $x_1, x_2, \ldots x_{m(j)} \in A$,*

$$\pi \circ F_j^{\mathbb{A}}(x_1, x_2, \ldots x_{m(j)}) = F_j^{\mathbb{B}}(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_{m(j)})).$$

*Si además π es inyectiva decimos que es un **monomorfismo** o una **inmersión**. Si π es biyectiva decimos que es un **isomorfismo** y que $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son **isomorfas**.*

Definición 5.1.4. *Sean*

$$\mathbb{A} =< A, (R_i^{\mathbb{A}})_{i\in I}, (F_j^{\mathbb{A}})_{j\in J} > \quad y \;\; \mathbb{B} =< B, (R_i^{\mathbb{B}})_{i\in I}, (F_j^{\mathbb{B}})_{j\in J} >$$

*dos L-estructuras. Decimos que $\mathbb{A}$ es una **subestructura** de $\mathbb{B}$, y escribimos $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$, si se satisface lo siguiente:*

- *$A \subseteq B$;*
- *Para todo $i \in I$, $R_i^{\mathbb{A}} = R_i^{\mathbb{B}} \cap A^{n(i)}$.*
- *Para todo $j \in J$, $F_j^{\mathbb{A}} = F_j^{\mathbb{B}} \restriction A^{m(j)}$.*

EJERCICIO 5.1.1. Demuestre que $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$ si y solo si $A \subseteq B$ y la inclusión $A \hookrightarrow B$ es una inmersión.

EJERCICIO 5.1.2. Demuestre que la intersección de una familia de subestructuras es nuevamente una subestructura.

Definición 5.1.5. *Sea X un subconjunto del universo de una estructura $\mathbb{B}$. La* ***subestructura*** *de $\mathbb{B}$* ***generada*** *por X es la menor subestructura de $\mathbb{B}$ que contiene a X; i.e.,*

$$\mathbb{B}_X = \bigcap\{\mathbb{A} \leq \mathbb{B} : X \text{ es subconjunto del universo de } \mathbb{A}\}.$$

Decimos entonces que X es ***generador*** *de $\mathbb{B}_X$*

Definición 5.1.6. *Una estructura es* ***finitamente generada*** *si tiene un generador finito; y es* ***localmente finita*** *si todas sus subestructuras finitamente generadas son finitas.*

Observación 5.1.1. Las estructuras relacionales son localmente finitas.

EJERCICIO 5.1.3. Demuestre que una estructura es localmente finita si y solo si todo subconjunto finito de su universo está contenido en una subestructura finita.

EJERCICIO 5.1.4. Demuestre que las estructuras presentadas en los ejemplos anteriores son localmente finitas.

A lo largo del resto de este capítulo, solo consideraremos estructuras localmente finitas. Los siguientes conceptos serán fundamentales en nuestro estudio de estructuras numerables con grupos de automorfismos interesantes:

Definición 5.1.7. *Sea $\mathbb{F}$ una estructura localmente finita. Decimos que $\mathbb{F}$ es* ***ultrahomogénea*** *si todo isomorfismo entre subestructuras finitamente generadas de $\mathbb{F}$ puede ser extendido a un automorfismo de $\mathbb{F}$.*

Definición 5.1.8. *Sea $\mathbb{A}$ una L-estructura. La* ***edad*** *de $\mathbb{A}$ es la clase de todas las L-estructuras finitas isomorfas a subestructuras de $\mathbb{A}$. Denotaremos a esta clase por $Edad(\mathbb{A})$.*

Definición 5.1.9. *Decimos que una estructura $\mathbb{F}$ es* ***Fraïsse*** *si es infinita numerable, ultrahomogénea y localmente finita.*

Las estructuras Fraïssé son precisamente las candidatas a proveernos de grupos de automorfismos interesantes. Veremos como la docilidad extrema de estos grupos depende de si la edad de la clase dada satisface una propiedad de Ramsey. Los tres resultados siguientes (Proposición

5.1.1 y Teoremas 5.1.1 y 5.1.2) nos conducen a una caracterización (en el Teorema 5.1.2) de la clases de estructuras finitas que son edades de estructuras Fraïssé. Para una demostración de estos importantes resultados de la Teoría de Modelos se puede consultar el libro [7].

Proposición 5.1.1. *Sea* $\mathbb{A}$ *una estructura localmente finita.* $\mathbb{A}$ *es ultrahomogénea si y solo si satisface la siguiente propiedad: si* $\mathbb{B}, \mathbb{C} \in Edad(\mathbb{A})$ *y* $\mathbb{B} \leq \mathbb{C}$ *entonces toda inmersión de* $\mathbb{B}$ *en* $\mathbb{A}$ *se puede extender a una inmersión de* $\mathbb{C}$ *en* $\mathbb{A}$.

$\square$

Teorema 5.1.1. *Si dos L-estructuras numerables son ultrahomogéneas y tienen la misma edad entonces son isomorfas.*

$\square$

Teorema 5.1.2. *(Fraïssé) Sea* $\mathcal{C}$ *una clase no-vacía de L-estructuras finitas.* $\mathcal{C}$ *es la edad de una estructura de Fraïssé si y solo si satisface las siguientes condiciones:*

1. $\mathcal{C}$ *es cerrada bajo isomorfismos.*

2. $\mathcal{C}$ *es hereditaria, es decir, si* $\mathbb{A} \in \mathcal{C}$ *y* $\mathbb{B} \leq \mathbb{A}$ *entonces* $\mathbb{B} \in \mathcal{C}$.

3. $\mathcal{C}$ *contiene estructuras de cardinalidad (finita) arbitrariamente grande.*

4. $\mathcal{C}$ *satisface la Propiedad de Inmersión Conjunta, es decir, si* $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{C}$ *entonces existe* $\mathbb{D} \in \mathcal{C}$ *tal que* $\mathbb{A} \leq \mathbb{D}$ *y* $\mathbb{B} \leq \mathbb{D}$.

5. $\mathcal{C}$ *satisface la Propiedad de Amalgamación, es decir, dadas* $\mathbb{A}, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2 \in \mathcal{C}$ *e inmersiones* $f_i : \mathbb{A} \to \mathbb{B}_i$, $i \in \{1, 2\}$, *existe* $\mathbb{D} \in \mathcal{C}$ *e inmersiones* $g_i : \mathbb{B}_i \to \mathbb{D}$, *tales que* $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$.

En este caso, existe una única (salvo isomorfismo) estrucutura Fraïssé $\mathbb{F}$), *tal que* $Edad(\mathbb{F}) = \mathcal{C}$.

Tal $\mathbb{F}$ *se conoce como el* ***límite de Fraïssé*** *de* $\mathcal{C}$ *y se denota por* $Flim(\mathcal{C})$.

$\square$

Definición 5.1.10. *Una clase de estructuras finitas $\mathcal{C}$ que satisface las condiciones del Teorema 5.1.2 se conoce como **clase Fraïssé**.*

Ejemplo 5.1.5. Los conjuntos finitos forman una clase Fraïssé cuyo límite es un conjunto infinito numerable (i.e., $\mathbb{N}$, salvo isomorfismo).

EJERCICIO 5.1.5. Demuestre que los órdenes lineales finitos forman una clase Fraïssé cuyo límite es isomorfo a $(\mathbb{Q}, \leq)$.

EJERCICIO 5.1.6. Demuestre que los grafos finitos forman una clase Fraïssé. Su límite de Fraïssé, R, se conoce como el *grafo aleatorio infinito* (o *grafo universal*, [20]). Demuestre que R está univocamente determinado salvo isomorfismos por cualquiera de las siguientes propiedades:

- Para todo subgrafo inducido S de R y toda extensión S' de S obtenida agregando solo un vértice, la inmersión inclusión $S \hookrightarrow R$ puede ser extendida a una inmersión de S', como subgrafo inducido.

- Para cada conjunto finito F de vértices en R, existen infinitos vértices en R que son adyacentes a todo vértice en F, y existen infinitos vértices en R que no son adyacentes a ningún vértice en F.

EJERCICIO 5.1.7. Demuestre que los espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo finito K forman una clase Fraïssé, cuyo límite de Fraïssé es un espacio vectorial de dimensión infinita sobre K.

Ejemplo 5.1.6. Los espacios métricos racionales finitos (ver Ejemplo 5.1.4) forman una clase Fraïssé cuyo límite de Fraïssé se conoce como el *espacio de Urysohn racional* y se denota por $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$.

5.2 Clases Ramsey

En esta Sección estudiarmos una *Propiedad de Ramsey* para clases Fraïssé de estructuras finitas. Esta propiedad nos permitirá caracterizar las estructuras Fraïssé cuyos grupos de automorfismos son extremadamente dóciles.

Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ dos L-estructuras. Denotaremos por

- $Inm(\mathbb{A},\mathbb{B})$ al conjunto de las inmersiones de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ como subestructura; y por
- $\left(\begin{array}{c}\mathbb{B}\\ \mathbb{A}\end{array}\right)$ al conjunto de las subestructuras de $\mathbb{B}$ que son isomorfas a $\mathbb{A}$.

EJERCICIO 5.2.1. Sea $\mathbb{F}$ una estructura Fraïssé y $\mathbb{A}$ una subestructura finita de $\mathbb{F}$. Demuestre que $Inm(\mathbb{A},\mathbb{F})$ es el cociente homogéneo de $Aut(\mathbb{F})$ por un subgrupo abierto. Además, demuestre que la topolgía de $Aut(\mathbb{F})$ hace continuas a todas las proyecciones canónicas de la forma $Aut(\mathbb{F}) \to Aut(\mathbb{F})/G$ con G subgrupo abierto de $Aut(\mathbb{F})$ y $Aut(\mathbb{F})/G$ homogéneo.

EJERCICIO 5.2.2. Demuestre que existe una aplicación sobreyectiva de $Inm(\mathbb{A},\mathbb{B})$ en $\left(\begin{array}{c}\mathbb{B}\\ \mathbb{A}\end{array}\right)$. Sin embargo, demuestre que si la estructura $\mathbb{A}$ es **rígida**, es decir, no admite automorfismos no-triviales, entonces $Inm(\mathbb{A},\mathbb{B})$ y $\left(\begin{array}{c}\mathbb{B}\\ \mathbb{A}\end{array}\right)$ coinciden.

Definición 5.2.1. *Decimos que* $\mathbb{A}$ *es una* ***estructura de orden*** *si la firma de* $\mathbb{A}$ *contiene al símbolo* $<$*, interpretado como un orden lineal en* $\mathbb{A}$*.*

Observación 5.2.1. Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son dos estructuras de orden en la misma firma y $\mathbb{A}$ es finita, entonces $Inm(\mathbb{A},\mathbb{B})$ y $\left(\begin{array}{c}\mathbb{B}\\ \mathbb{A}\end{array}\right)$ coinciden.

Notación. Sean $\mathbb{A} \leq \mathbb{B} \leq \mathbb{C}$ estructuras en la misma firma. Escribiremos

$$\mathbb{C} \to (\mathbb{B})^{\mathbb{A}}_r$$

si para toda coloración

$$c : \left(\begin{array}{c}\mathbb{C}\\ \mathbb{A}\end{array}\right) \to r$$

del conjunto $\left(\begin{array}{c}\mathbb{C}\\ \mathbb{A}\end{array}\right)$ en r colores, existe una copia isomorfa $\mathbb{B}' \leq \mathbb{C}$ de $\mathbb{B}$ tal que $\left(\begin{array}{c}\mathbb{B}'\\ \mathbb{A}\end{array}\right)$ es monocromático.

□

Definición 5.2.2. *Decimos que una clase Fraïssé $\mathcal{C}$ tiene la **propiedad de Ramsey** si para toda estructura finita $\mathbb{B} \in \mathcal{C}$ y toda subestructura $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$ existe una estructura finita $\mathbb{C} \in \mathcal{C}$ tal que para todo $r \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$\mathbb{C} \to (\mathbb{B})^{\mathbb{A}}_r.$$

EJERCICIO 5.2.3. Demuestre que en la Definición 5.2.2 basta considerar el caso $r = 2$. El caso general se deduce de este.

Ejemplo 5.2.1. La clase de los ordenes lineales finitos tiene la propiedad de Ramsey; este hecho es equivalente al Teorema de Ramsey finito (Teorema 1.2.2).

Ejemplo 5.2.2. La clase de los grafos ordenados finitos tiene la propiedad de Ramsey.

Ejemplo 5.2.3. Dado un cuerpo finito K, la clase de espacios vectoriales finitos sobre K tiene la propiedad de Ramsey.

Ejemplo 5.2.4. La clase de espacios métricos racionales, finitos y ordenados tiene la propiedad de Ramsey.

Para más detalles de estos y otros ejemplos, se puede consultar [4], [5], [13], [14], [15] y [16].

En el Lema 5.2.2, caractizaremos a esta propiedad de Ramsey en términos de la propiedad de oscilación finitamente estable. Antes demostraremos lo siguiente. Dada una estructura $\mathbb{F}$, sea $Aut(\mathbb{F})$ el grupo de automorfismos de $\mathbb{F}$:

Lema 5.2.1. *Sea $\mathbb{F}$ una estructura numerable. El grupo $Aut(\mathbb{F})$ es (isomorfo a) un subgrupo cerrado del grupo simétrico S_∞.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supondremos que el universo de $\mathbb{F}$ es $\mathbb{N}$. Bajo esta suposición pensar a $Aut(\mathbb{F})$ como subconjunto de S_∞. Demostraremos que $S_\infty \setminus Aut(\mathbb{F})$ es abierto. Si $\pi \in S_\infty \setminus Aut(\mathbb{F})$ entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{N}$ tales que $\{\pi(x_1), \pi(x_2), \ldots, \pi(x_n)\}$ no pertenece a la $Aut(\mathbb{F})$-órbita de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. El conjunto $\{\tau \in$

$S_\infty : \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ \tau(x_i) = \pi(x_i)\}$ es un entorno abierto de π que es disjunto de $Aut(\mathbb{F})$.

$\square$

Observación 5.2.2. En consecuencia, $Aut(\mathbb{F})$ es un grupo polaco con la topología relativa inducida por la topología de S_∞. Por otro lado, si $\mathbb{A}$ una subestructura finita de $\mathbb{F}$ y n es la cardinalidad del universo de $\mathbb{A}$, entonces la acción de S_∞ sobre $\mathbb{N}^{[n]}$ induce de manera natural una acción de $Aut(\mathbb{F})$ sobre el conjunto $\binom{\mathbb{F}}{\mathbb{A}}$.

Lema 5.2.2. *Sea $\mathcal{C}$ una clase Fraïssé y sea $\mathbb{F} = Flim(\mathcal{C})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{C}$ tiene la propiedad de Ramsey.*
2. *Para toda estructura finita $\mathbb{A} \in \mathcal{C}$, el $Aut(\mathbb{F})$-espacio $\binom{\mathbb{F}}{\mathbb{A}}$, con la uniformidad discreta y la acción natural de $Aut(\mathbb{F})$, es de oscilación finitamente estable.*

Demostración. Este resultado se obtiene de la equivalencia entre las partes 1 y 5 del Teorema 3.1.1.

Fijemos $\mathbb{A} \in \mathcal{C}$ y sean $X = \binom{\mathbb{F}}{\mathbb{A}}$ y $G = Aut(\mathbb{F})$.

$(1 \Rightarrow 2)$ Es fácil demostrar que si $\mathcal{C}$ es Ramsey entonces la parte 5 del Teorema 3.1.1 es cierta para X y G. De la equivalencia entre 1 y 5 en ese Teorema se deduce que el G-espacio X es de oscilación finitamente estable.

$(2 \Rightarrow 1)$ Por hipótesis, vale la parte 1 del Teorema 3.1.1 para X y G. Sea $\mathbb{B}$ un estructura finita tal que $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathbb{B} \leq \mathbb{F}$. Fijemos $F = \binom{\mathbb{B}}{\mathbb{A}}$ y sea $V = \Delta$, la diagonal de X. Como F es finito, por la equivalencia entre las partes 1 y 5 del Teorema 3.1.1 existe $K \subset X$ finito tal que para toda partición finita $c : K \to r$ existe $g \in G$ tal que $gF \subseteq K$ y , $gF \subseteq \Delta[c^{-1}(\{j\})] = c^{-1}(\{j\})$ para algún $j < r$. Sea $\mathbb{C}$ la estructura finita generada por el siguiente conjunto

$$\bigcup\{D : D \text{ es el universo de alguna } \mathbb{D} \in K\}.$$

Entonces $\mathbb{C}$ satisface la propiedad requerida en la Definición 5.2.2. $\square$

5.3 Subgrupos extremadamente dóciles de S_∞

Como vimos en la Sección 4.4.3, el grupo simétrico S_∞ no es extremadamente dócil. Sin embargo, en esta Sección veremos que existen subgrupos de S_∞ que si tienen esta propiedad, caracterizados como grupos de automorfismos de estructuras Fraïssé cuyas edades tienen propiedad de Ramsey.

A cada subgrupo G de S_∞ podemos asociarle una estructura Fraïssé relacional, $\mathbb{F}_G$ (denominada **estructura canónica asociada a** G), de la siguiente manera:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathbb{N}^n/G$ la colección de las G-órbitas de elementos de $\mathbb{N}^n$. Describiremos $\mathbb{F}_G$:

- La firma L_G: consta de los símbolos relacionales $R_{n,o}$, donde $n \in \mathbb{N}$ es la aridad de $R_{n,o}$ y $o \in \mathbb{N}^n/G$.
- El universo de $\mathbb{F}_G$ es $\mathbb{N}$.
- $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_{n,o}^{\mathbb{F}_G}$ si y solo si $G \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = o$.

Observación 5.3.1. Para cada $g \in G$, la aplicación

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$n \to g(n)$$

determina un automorfismo de $\mathbb{F}_G$. De hecho, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada n-tupla $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ se tiene que $G \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = G \cdot (g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n))$. Luego, para cada $o \in \mathbb{N}^n/G$ se tiene

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_{n,o} \text{ si y solo si } (g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n)) \in R_{n,o}.$$

Esto muestra que G puede ser considerado como un subgrupo de $Aut(\mathbb{F}_G)$.

Lema 5.3.1. *$Aut(\mathbb{F}_G)$ es la clausura de G respecto a la topología polaca natural de S_∞.*

Demostración. Basta demostrar que G es denso en $Aut(\mathbb{F}_G)$, en virtud del Lema 5.2.1 y la Observación 5.3.1.

Dada $\pi \in Aut(\mathbb{F}_G)$, sea

$$\mathcal{O} = \{\tau \in S_\infty : \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ \tau(x_i) = \pi(x_i)\}$$

un entorno abierto de π determinado por una n-tupla $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Como $(\pi(x_1), \pi(x_2), \ldots, \pi(x_n)) \in o = G\cdot(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces existe $g \in G$ tal que

$$(g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n)) = (\pi(x_1), \pi(x_2), \ldots, \pi(x_n)).$$

Entonces $g \in \mathcal{O}$. Esto concluye la demostración.

□

EJERCICIO 5.3.1. Demuestre que $\mathbb{F}_G$ es ultrahomogénea. En consecuencia, por ser numerable y relacional, $\mathbb{F}_G$ es una estructura Fraïssé. (*Sugerencia:* use la Observación 5.3.1).

Teorema 5.3.1. *Los subgrupos cerrados de S_∞ coinciden con los grupos de automorfismos de estructuras Fraïssé sobre $\mathbb{N}$.*

Demostración. De los Lemas 5.2.1 y 5.3.1, y el Ejercicio 5.3.1. □

Lema 5.3.2. *Sea G un subgrupo topológico de S_∞. Si G es extremadamente dócil entonces preserva un orden lineal sobre $\mathbb{N}$.*

Demostración. Sea LO el espacio de los órdenes lineales sobre $\mathbb{N}$. LO es compacto y la acción de S_∞ sobre LO es continua. Luego por ser G extremadamente dócil, LO contiene un punto fijo para G. □

El siguiente resultado muestra que los grupos de automorfismos de estructuras Fraïssé que son extremadamente dóciles son precisamente los subgrupos cerrados de S_∞ que son extremadamente dóciles.

Teorema 5.3.2. *Sea $\mathbb{F}$ una estructura Fraïssé y sea $\mathcal{C} = Edad(\mathbb{F})$. El grupo $Aut(\mathbb{F})$ dotado de la topología polaca inducida por S_∞ es extremadamente dócil si y solo si la clase $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de Ramsey y todos las estructuras en $\mathcal{C}$ son rígidas.*

Demostración. Supongamos que $Aut(\mathbb{F})$, con la topología polaca inducida por S_∞, es extremadamente dócil. Si $\mathbb{A}$ es una subestructura finita de $\mathbb{F}$ entonces la acción natural de $Aut(\mathbb{F})$ sobre $\binom{\mathbb{F}}{\mathbb{A}}$, con la métrica discreta, es continua, transitiva y por isometrías. Entonces, por la parte 3 del Teorema 4.3.1, el $Aut(\mathbb{F})$-espacio $\binom{\mathbb{F}}{\mathbb{A}}$ es extremadamente dócil. Luego por el Lema 5.2.2, $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de Ramsey. Además, por el Teorema 5.3.1 y el Lema 5.3.2, $Aut(\mathbb{F})$ preserva un orden lineal $\lhd$ sobre el universo de $\mathbb{F}$. Entonces, si una subestructura finita admitiera un automorfismo no-trivial, este podría ser extendido por ultrahomogeneidad a un automorfismo de $\mathbb{F}$. Pero esta extensión no preservaría a $\lhd$. Por lo tanto toda estructura finita en $\mathcal{C}$ es rígida.

Recíprocamente, supongamos que todas las estructura finitas en $\mathcal{C}$ son rígidas y que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de Ramsey. Por el Ejercicio 5.2.2, tenemos que para toda subestructura finita $\mathbb{A} \leq \mathbb{F}$, $Inm(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \binom{\mathbb{B}}{\mathbb{A}}$. Como $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de Ramsey, por el Lema 5.2.2 tenemos que para toda subestructura finita $\mathbb{A} \leq \mathbb{F}$, el $Aut(\mathbb{F})$-espacio métrico discreto $Inm(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ es de oscilación finitamente estable. Entonces el resultado requerido se obtiene de la parte 4 del Teorema 4.3.1 y el Ejercicio 5.2.1. $\square$

Corolario 5.3.1. *Dado un subgrupo cerrado G de S_∞, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *G es extremadamente dócil.*

2. *G preserva un orden lineal sobre $\mathbb{N}$ y es el grupo de automorfismos de una estructura Fraïssé, cuya edad tiene la propiedad de Ramsey.*

3. *G es el grupo de automorfismos de una estructura Fraïssé de orden, cuya edad tiene la propiedad de Ramsey.*

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$). Supongamos que G es extremadamente dócil. Entonces por el Lema 5.3.2 G preserva un orden lineal sobre $\mathbb{N}$. Además, como G es cerrado, por el Teorema 5.3.1, el Teorema 5.3.2 y el Lema 5.2.2 tenemos que G es el grupo de automosfismos de una estructura Fraïssé cuya edad tiene la propiedad de Ramsey.

$(2 \Rightarrow 3)$. Si $G = Aut(\mathbb{F})$ para una L-estructura Fraïssë $\mathbb{F}$ (con universo $\mathbb{N}$) cuya edad tiene la propiedad de Ramsey, y preserva un orden lineal sobre $\mathbb{N}$ entonces podemos extender la firma L agregando un símbolo relacional binario $<$ interpretado como un orden lineal sobre $\mathbb{F}$ y sobre toda subestructura finita. Si llamamos L' a la nueva firma y $\mathbb{F}'$ a la L'-estructura resultante, entonces obviamente $\mathbb{F}'$ es de orden y Fraïssë, su edad tiene la propiedad de Ramsey y $G = Aut(\mathbb{F}')$.

$(3 \Rightarrow 1)$. Si $G = Aut(\mathbb{F})$ para una estructura Fraïssé de orden, cuya edad tiene la propiedad de Ramsey, entonces las subestructuras finitas de $\mathbb{F}$ son necesariamente rígidas. Entonces por el Teorema 5.3.2 G es extremadamente dócil.

□

Finalizaremos mostrando unos ejemplos. En el primero de ellos el Teorema de Ramsey está presente de nuevo:

Ejemplo 5.3.1. El límite de Fraïssé de clase de los ordenes lineales finitos tiene el tipo de orden de los racionales. La propiedad de Ramsey de esta clase es precisamente el Teorema de Ramsey finito [21] (Teorema 1.2.2). Esto implica que $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$, con la topología polaca natural es extremadamente dócil, como ya habíamos visto en la Sección 4.4.1.

Ejemplo 5.3.2. La colección de todos los grafos ordenados (i.e., grafos dotados de un orden lineal sobre el conjunto de vértices) es una clase Fraïssé. Su límite de Fraïssé es conocido como el *grafo aleatorio ordenado*. Este límite es isomorfo al grafo aleatorio, como grafo; y como orden lineal es isomorfo a $(\mathbb{Q}, \leq)$. Además, la clase de los grafos finitos ordenados tiene la propiedad de Ramsey; por lo tanto el grafo aleatorio ordenado es extremadamente dócil.

Capítulo 6

El espacio de Urysohn

No podemos concluir nuestras notas sobre la relación entre la Teoría de Ramsey y la Dinámica de Grupos Topológicos sin una discusión, aunque breve e incompleta, sobre el *espacio de Urysohn* $\mathbb{U}$, o espacio métrico universal ([23]), y sus grupos de isometrías. Para completar y profundizar los detalles, remitimos al lector a [9] y [17].

Definición 6.0.1. *El* ***espacio métrico de Urysohn*** $\mathbb{U}$*, (o espacio métrico universal, definido originalmente en [23]) está determinado por las siguientes condiciones:*

- $\mathbb{U}$ *es un espacio métrico separable y completo.*
- $\mathbb{U}$ *es ultrahomogéneo, es decir, toda isometría entre dos subespacios métricos finitos de* $\mathbb{U}$ *se puede extender a una isometría de* $\mathbb{U}$ *en sí mismo.*
- $\mathbb{U}$ *es universal, es decir, contiene una copia isométrica de todo espacio métrico separable.*

Teorema 6.0.3. *El espacio universal* $\mathbb{U}$ *existe y es único salvo isometría.*

$\square$

Un manera de demostrar la existencia de $\mathbb{U}$ es la siguiente:

Sea X un espacio polaco. Un propiedad de un elemento de x es *genérica*, si el conjunto de todos los $x \in X$ que tienen la propiedad es un subconjunto G_δ de X.

Denotemos por $\mathcal{M}$ al conjunto de las pseudométricas definidas sobre $\mathbb{Z}$, el conjunto de los enteros. El espacio $\mathcal{M}$ está dotado con una topología polaca natural, inducida por la topología producto de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$, con $\mathbb{R}$ dotado de la topología usual. Se puede demostrar que el espacio de Urysohn es (isométrico a) la completación de $(\mathbb{Z}, d)$ donde $d \in \mathcal{M}$ es una pseudométrica genérica. Esta pseudométrica genérica es de hecho una métrica.

El grupo de isometrías de $\mathbb{U}$, $Iso(\mathbb{U})$ es extremadamente dócil. Una de las características interesantes de este hecho es que su demostración, debida a Pestov [19], se obtuvo tanto empleando métodos de la Teoría de Ramsey (ver Capítulo 5 de estas notas) como por medio de métodos de *concentración de medida*. Presentaremos a continuación un bosquejo de ambos métodos utilizados para la demostración.

Definición 6.0.2. *Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Decimos que una red $(\mu_\alpha)_\alpha$ de medidas de probabilidad Borelianas sobre $(X,\mathcal{U})$ tiene la* ***propiedad de concentración de Lévy*** *si para toda familia $\{A_\alpha\}_\alpha$ de Borelianos de X tales que $\liminf_\alpha \mu_\alpha(A_\alpha) > 0$ y para toda $V \in \mathcal{U}$ se tiene que $\mu_\alpha(V[A_\alpha]) \to 1$.*

Definición 6.0.3. *Un grupo topológico G es un* ***grupo de Lévy*** *si existe una familia de subgrupos compactos $\{G_\alpha\}_\alpha$ de G, dirigida por inclusión, cuya unión es densa y tales que las medidas de Haar normalizadas de los G_α's tienen la propiedad de concentración de Lévy, con respecto a la uniformidad derecha (o izquierda) sobre G.*

Teorema 6.0.4. *Todo grupo de Lévy es extremadamente dócil.*

Demostración. Obtendremos el resultado usando la parte 2 del Teorema 4.3.1. Es decir, basta demostrar que el grupo G dotado de la uniformidad izquierda y la acción de G sobre sí mismo por traslaciones izquierdas, es de oscilación finitamente estable. Pero como G es de Lévy, eso es consecuencia del Teorema 3.2.6.

$\square$

Proposición 6.0.1. *Sea X un espacio métrico. El grupo $Iso(X)$ de todas las isometrías de X en sí mismo dotado de la topología de convergencia simple es un grupo topológico. En este caso la topología de convergencia simple coincide con la topología compacto-abierta sobre $Iso(X)$. Además, si X es separable (y por lo tanto, segundo numerable) entonces $Iso(X)$ también. Si X es un espacio métrico separable y completo entonces $Iso(X)$ es metrizable con una métrica completa que no es necesariamente invariante a la izquierda.*

$\square$

El siguiente resultado fue utilizado luego por Pestov para demostrar que $Iso(\mathbb{U})$ es un grupo de Lévy.

Teorema 6.0.5. *(Vershik [25]) El grupo $Iso(\mathbb{U})$ con la topología polaca natural, contiene un subgrupo numerable, localmente finito y denso.*

$\square$

Teorema 6.0.6. *(Pestov [17]) El grupo $Iso(\mathbb{U})$ con la topología polaca natural es un grupo de Lévy.*

$\square$

Entonces, del Teorema 6.0.4 obtenemos finalmente lo siguiente:

Corolario 6.0.2. *(Pestov [19])El grupo $Iso(\mathbb{U})$ es extremadamente dócil.*

$\square$

Aunque el Corolario 6.0.2 fue demostrado originalmente por Pestov en [19], la demostración a partir del hecho de que $Iso(\mathbb{U})$ es un grupo de Lévy (Teorema 6.0.6) (también debida a Pestov) es posterior y aparece en [17]. La aparición del Teorema 6.0.5 motivó a Pestov a demostrar el Teorema 6.0.6 para obtener una demostración distinta de que $Iso(\mathbb{U})$ es extremadamente dócil, con la ganancia extra de demostrar que es un grupo de Lévy.

Existe otra demostración de que $Iso(\mathbb{U})$ es extremadamente dócil obtenida a partir de un resultado de Nesetril [13] que tiene que ver con el *espacio de Urysohn racional ordenado* $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ (el límite de Fraïssé de la clase de los espacios métricos racionales, finitos y *ordenados* – ver Ejemplo 5.1.4). Antes de hacer un recuento de esta demostración necesitaremos algunos conceptos.

Flujos minimales Nos referiremos a los G-espacios también como G-flujos.

Definición 6.0.4. *Decimos que un G-espacio X es un G-**flujo minimal** si no contiene G-subespacios cerrados propios.*

Lema 6.0.3. *Todo G-espacio compacto contiene un G-flujo minimal.*

Demostración. Fijemos X un G-espacio compacto. Sea

$$\mathcal{F} = \{Y \subseteq X : Y \text{ es } G\text{-espacio cerrado}\}.$$

Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ es una cadena decreciente, entonces $\bigcap \mathcal{C} = \bigcap \{Y : Y \in \mathcal{C}\} \neq \emptyset$, porque X es compacto. Luego $\bigcap \mathcal{C}$ es un G-espacio cerrado y es cota inferior de $\mathcal{C}$.

Por el lema de Zörn, existe $M \in \mathcal{F}$ minimal.

□

EJERCICIO 6.0.2. Demuestre que X es un G-flujo minimal si y solo si, $(\forall\, x \in X)\ \overline{G \cdot x} = X$; es decir, toda órbita es densa.

Teorema 6.0.7. *G es extremadamente dócil si, y solo si, todo G-flujo minimal es un conjunto unitario.*

Demostración. Supongamos que G es extremadamente dócil y sea X un G-espacio. Fijemos $Y \subseteq X$, un G-flujo minimal. Por la propiedad de punto fijo sobre compactos, podemos fijar $x_0 \in Y$ tal que $G \cdot x_0 = \{x_0\}$. Por lo tanto, en virtud del Ejercicio 6.0.2, $Y = \overline{G \cdot x_0} = \overline{\{x_0\}} = \{x_0\}$.

Recíprocamente, sea X un G-espacio compacto y sea $x_0 \in X$, tal que $\{x_0\}$ es un G-flujo minimal. Entonces, $G \cdot x_0 \subseteq \overline{G \cdot x_0} = \{x_0\}$.

□

Dado un grupo topológico G, en relación a los subflujos minimales del ámbito más grande $S(G)$ tenemos lo siguiente:

Teorema 6.0.8. *Dos subflujos minimales de $S(G)$ son isomorfos como G-espacios.*

□

Esto motiva la siguiente definición:

Definición 6.0.5. *Un G-flujo compacto isomorfo a un subflujo minimal de $S(G)$ es llamado **flujo minimal universal** de G. Obviamente el flujo minimal universal es único salvo isomorfismo. Es denotado por $\mathcal{M}(G)$.*

Ejemplo 6.0.3. Un grupo topológico G es extremadamente dócil si y solo si $|\mathcal{M}(G)| = 1$, por el Teorema 6.0.7 y la definición de $\mathcal{M}(G)$.

Ejemplo 6.0.4. Si un grupo topológico G es compacto entonces $\mathcal{M}(G) = G$.

Ejemplo 6.0.5. Sea $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ el espacio de Urysohn racional ordenado. Entonces $\mathcal{M}(Iso(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})) = LO(U_{\mathbb{Q}})$, el espacio compacto de los órdenes lineales sobre $U_{\mathbb{Q}}$. Aquí estamos considerando a $Iso(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$ con la topología de convergencia simple que resulta de considerar a $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ como un espacio discreto.

Volvemos ahora a nuestra discusión sobre el espacio de Urysohn. Nesetril demostró en [13] que la clase de los espacios métricos racionales, finitos (no necesariamente ordenados) tiene la propiedad de Ramsey. De esto se deduce la afirmación del Ejemplo 6.0.5: $\mathcal{M}(Iso(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})) = LO(U_{\mathbb{Q}})$.

Cada isometría de $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ admite una única extensión al espacio de Urysohn $\mathbb{U}$, por ser este último la completación del primero. Así se obtiene un monomorfismo de grupos $Iso(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}) \to Iso(\mathbb{U})$ que es continuo pero no es un isomorfismo topológico. Además, la imagen de $Iso(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$ es densa en $Iso(\mathbb{U})$.

Esto implica que existe un morfismo de $Iso(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})$-flujos,

$$j : \mathcal{M}(Iso(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})) = LO(U_{\mathbb{Q}}) \to \mathcal{M}(Iso(\mathbb{U})).$$

En consecuencia, para toda vecindad V de la identidad de $Iso(\mathbb{U})$ y todo $\lhd \in LO(U_{\mathbb{Q}})$, el siguiente subcojunto de la $Iso(\mathbb{U})$-órbita de $\lhd$

$$\{g \cdot \lhd : g \in V \cap Iso(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}})\}$$

es denso en $LO(U_{\mathbb{Q}})$. De esto se deduce que $|\mathcal{M}(Iso(\mathbb{U}))|$=1. Por el Teorema 6.0.7 y la definición de flujo minimal universal, esto implica que $Iso(\mathbb{U})$ es extremadamente dócil.

Bibliografía

[1] C.A. Di Prisco, *Combinatoria: Un panorama de la teoría de Ramsey*, Editoral Equinoccio, 2009.

[2] W.T. Gowers, *Lipschitz functions on classical spaces*, European J. Combin. **13** (1992), 141-151.

[3] M. Gromov, V. D. Milman, *A topological application of the isoperimetrical inequality*, Amer. J. Math. **105** (1983), 843–854.

[4] R.L. Graham, K. Leeb, B.L. Rothschild, *Ramsey's theorem for a class of categories*, Adv. Math., **8** (1972), 417—433

[5] R. Graham, B. Rothschild, J. Spencer, *Ramsey Theory*, Weily and sons. 1980.

[6] N. Hindman, *The existence of certain ultrafilters on* $\mathbb{N}$ *and a conjecture of Graham and Rothschild*, Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1973), 341–346.

[7] W. Hodges, *Model Theory*. Cambridge University Press, 1993.

[8] I. M. James, *Topological and uniform spaces*. Springer-Verlag; 1 edition, 1987.

[9] A. S. Kechris, V. G. Pestov and S. Todorcevic, *Fraïssé limits, Ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups*, Geom. and Funct. Analysis. Volume 15,Number 1 (2005), 106–189.

[10] J. Kelley, *General topology*. Springer; 1955.

[11] P. Lévy, *Leçons de analyse functionnelle*, Paris, Gauthier-Villars, 1922.

[12] V. D. Milman, *Infinite-dimensional geometry of the unit sphere in Banach spaces*, Sov. Math. Dokl. **8** (1967), 1440–1444.

[13] J. Nesetril, *Metric spaces are Ramsey.* European Journal of Combinatorics, Volume 28, Issue 1, January 2007, 457—468.

[14] J. Nesetril, *Ramsey theory.* R.L. Graham, M. Grötschel, L. Lovász (Eds.), *Handbook of Combinatorics*, Elsevier (1995), 1331—1403.

[15] J. Nesetril, V Rödl, *Combinatorial partitions of finite posets and lattice –Ramsey lattices*, Algebra Universalis, **19** (1984), 106—119.

[16] J. Nesetril, V Rödl, *Mathematics of Ramsey Theory.* Springer; 1990.

[17] V. Pestov, *Dynamics of infinite-dimensional groups*, ULECT 40, AMS, 2006.

[18] V. Pestov, *On free actions, minimal flows and a problem by Ellis*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), 4149–4165.

[19] V. Pestov, *Ramsey–Milman phenomenon, Urysohn metric spaces, extremely amenable group*, Israel J. of Math. **127** (2002), 317–358.

[20] P. Rado, *Universal graphs and universal functions.*Acta Arithm. **9** (1954), 331–340.

[21] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic.* Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 30, 264-286 (1929).

[22] P. Samuel, *Ultrafilters and compactifications of uniform spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 64, No. 1 (1948), 100–132.

[23] P.S. Urysohn, *Sur un espace metrique universel*, Bull. Sci. Math., **51** (1927), 1—38.

[24] B.L., van der Waerden, *Beweis einer Baudetschen Vermutung.* Nieuw. Arch. Wisk. **15**(1927), 212–216.

[25] A. M. Vershik, *Globalization of partial isometries of metric spaces and local approximations of the group of isometries of the Uryshon space.* Top. Appl. **155** (14) 2008, 1618–1626.

[26] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Actualités Scientifiques et Industrielles, 869, Paris: Hermann. 1940.

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela.

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela
`http://amv.ivic.gob.ve`

IVIC

Gobierno Bolivariano de Venezuela | Ministerio del Poder Popular para Ciencia, Tecnología e Innovación

corazón VENEZOLANO