

**XXV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS  
EMALCA-VENEZUELA 2012**

---

**GEODÉSICAS EN SUPERFICIES, RIGIDEZ Y  
GEOMETRÍA GLOBAL**

**Rafael Oswaldo Ruggiero**

**MÉRIDA, VENEZUELA, 2 AL 8 DE SEPTIEMBRE DE 2012**



XXV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS  
EMALCA - VENEZUELA 2012

---

GEODÉSICAS EN SUPERFICIES,  
RIGIDEZ Y GEOMETRÍA GLOBAL

Rafael Oswaldo Ruggiero

Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio  
rorr@mat.puc-rio.br

---

MÉRIDA, VENEZUELA, 2 AL 8 DE SEPTIEMBRE DE 2012

## XXV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana. La XXV Escuela Venezolana de Matemáticas recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Banco Central de Venezuela, el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CD-CHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) y Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA).

2010 Mathematics Subject Classification: 53A05, 53C22, 53C24, 14F35, 14H30, 49S05, 37J50.

©Ediciones IVIC

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Rif: G-20004206-0

**Geodésicas en superficies, rigidez y geometría global**

Rafael Oswaldo Ruggiero

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas

Preprensa e impresión: Gráficas Lauki C. A.

Depósito legal If66020125102163

ISBN 978-980-261-137-9

Caracas, Venezuela

2012

# Prefacio

El presente texto fue concebido como referencia para un mini-curso introductorio sobre geometría de superficies. La teoría de las superficies es uno de los temas más clásicos y fundamentales de la matemática, su evolución es el resultado de la convergencia de diversas corrientes de investigación en física-matemática: mecánica clásica, análisis, ecuaciones diferenciales, topología, geometría algebraica. La teoría tiene aplicaciones en un vasto dominio de las ciencias puras e ingeniería, donde son parte esencial del modelaje de muchos fenómenos. Por este motivo, representa un gran desafío redactar notas para un mini-curso de una semana, tiempo en el cual se pretende transmitir algo de la importancia y la belleza del tema a una audiencia en principio bastante ecléctica, en lo que respecta a sus intereses y su formación.

Preferimos, a riesgo de ser injustos por las omisiones, elegir la presentación de un asunto concreto que sea elemental, importante, y que complemente la materia vista sobre superficies en los cursos de cálculo y geometría: el tema de las geodésicas en superficies. Las geodésicas constituyen una de las familias de curvas que son llamadas con frecuencia **curvas o líneas especiales**. Son objetos importantes no solo del punto de vista de la geometría sino también del punto de vista de la mecánica clásica. El estudio de las geodésicas es dejado de lado en los cursos de pregrado por ser considerado un tema técnico y algo específico. Pero la verdad es que las geodésicas ocupan lugar importante en la vitrina de la matemática desde la Grecia antigua, el desarrollo (bien posterior) de la mecánica Newtoniana, y de la mecánica Hamiltoniana, muestra la relevancia de las geodésicas como generalizaciones naturales de los movimientos uniformes libres en el plano.

Las notas están divididas en dos partes. La primera parte contiene una introducción al estudio de las geodésicas en superficies del espa-

cio Euclidiano, y se propone como objetivo principal la demostración del siguiente enunciado: una superficie conexa diferenciable en  $\mathbb{R}^3$  cuyas geodésicas son todas curvas planas (o sea, cada geodésica es subconjunto de un cierto plano en  $\mathbb{R}^3$ ) debe ser un subconjunto de una esfera o de un plano en el espacio Euclidiano. Las geodésicas de un plano en el espacio Euclidiano son rectas, y las geodésicas de una esfera son las circunferencias máximas. En ambos casos, cada geodésica es una curva plana. Nos proponemos demostrar la recíproca de esta afirmación, lo que nos sirve de pretexto para hacer un recuento de algunas de las nociones básicas más importantes de la geometría de las superficies en  $\mathbb{R}^3$ .

La segunda parte es un poco más avanzada y trata del estudio de una clase de geodésicas en superficies abstractas llamadas geodésicas globalmente minimizantes. Esta clase de geodésicas viene siendo estudiada desde los trabajos de Morse y Hedlund de las décadas de 1920 y 1930, y son el germen de una cantidad enorme de investigación actual en matemática que incluye por ejemplo lo que se conoce como la teoría geométrica de grupos y la famosa teoría de Aubry-Mather. Ciertamente, esta parte de la exposición es más compleja, requiere nociones básicas de la geometría Riemanniana y de aspectos topológicos de la teoría de la clasificación de superficies (espacios de recubrimiento y grupo fundamental). El trabajo pionero de Morse trata de geodésicas en superficies de género mayor que 1, mientras que el trabajo de Hedlund trata de geodésicas en el toro bidimensional. Ambos trabajos siguen la misma idea general: la topología de la superficie tiene gran impacto en comportamiento global de las geodésicas minimizantes. Sin embargo, la gran diferencia que existe entre las topologías del toro y de las superficies de género más alto se refleja en los métodos totalmente opuestos usados por Hedlund y Morse en el estudio de la geometría global de las geodésicas minimizantes en cada caso.

De los dos fantásticos trabajos anteriores escogimos presentar el de Hedlund, por estar más cercano en muchos sentidos a la geometría Euclidiana. El objetivo de nuestra exposición será desarrollar la teoría de Hedlund sobre las geodésicas minimizantes de cualquier métrica en el toro bidimensional: los levantamientos de tales geodésicas en el recubrimiento universal del toro (el plano) se comportan como rectas Euclidianas. Cada geodésica minimizante el recubrimiento universal se encuentra en la vecindad tubular de una recta Euclidiana, cada geodésica minimi-

zante es únicamente determinada por dos puntos diferentes de la misma, dos geodésicas minimizantes o son disjuntas y casi paralelas.<sup>o</sup> se intersectan en un único punto y divergen. Las semejanzas con la geometría Euclidiana son sorprendentes, teniendo en cuenta que la métrica del toro puede ser cualquiera.

Esperamos motivar en el lector la curiosidad por la geometría Riemanniana, al final del texto sugerimos algunas referencias sobre el tema. Y nos disculpamos por lo inevitablemente suscinto de muchas partes del documento, el lector interesado en proseguir o profundizar su visión sobre los temas considerados encontrará en las referencias el comienzo del camino ...



# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>III</b>
<b>1. Superficies en <math>\mathbb{R}^3</math> como variedades diferenciables</b>	<b>1</b>
1.1. Estructura diferenciable: parametrizaciones y plano tangente . . . . .	1
1.1.1. Funciones continuas y diferenciables . . . . .	4
1.1.2. Planos tangentes, fibrado tangente . . . . .	5
1.2. Ejemplos . . . . .	8
1.2.1. Gráficos de funciones . . . . .	8
1.2.2. Superficies de nivel . . . . .	10
1.2.3. La esfera . . . . .	11
1.2.4. Superficies de revolución . . . . .	13
1.3. Campos vectoriales, derivaciones, producto de Lie . . . . .	15
<b>2. Superficies como Estructuras Riemannianas, geodésicas</b>	<b>19</b>
2.1. Espacios métricos, Grecia antigua y geodésicas . . . . .	19
2.2. Derivada covariante y mecánica Newtoniana . . . . .	21
2.3. Un poco de cálculo variacional . . . . .	25
<b>3. Segunda forma fundamental y curvatura de Gauss</b>	<b>31</b>
3.1. Aplicación normal de Gauss y curvatura de superficies . . . . .	31
3.1.1. Geometría de curvas en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	31
3.2. La curvatura de Gauss-Kronecker . . . . .	34
3.3. Curvaturas principales y puntos umbílicos . . . . .	38
3.4. Ejercicios complementarios . . . . .	42

<b>4. Clasificación de las superficies de revolución con curvatura constante</b>	<b>45</b>
4.1. Ecuaciones diferenciales de orden 2 con coeficientes constantes . . . . .	46
4.2. Superficies de revolución con curvatura cero . . . . .	47
4.3. Superficies con curvatura negativa constante . . . . .	47
4.4. Superficies con curvatura positiva constante: esferas . . . . .	49
<b>5. Rigidez geométrica y geodésicas</b>	<b>51</b>
5.1. Geodésicas e intersecciones de la superficie con planos . . . . .	51
5.2. Gráficos donde toda geodésica es una curva plana . . . . .	52
5.3. Geodésicas planas y superficies de revolución . . . . .	55
<b>6. Superficies abstractas y Geometría Riemanniana</b>	<b>57</b>
6.1. Variedades diferenciables . . . . .	57
6.2. Subvariedades, Espacio tangente . . . . .	59
<b>7. Planos Euclidiano e Hiperbólico</b>	<b>63</b>
<b>8. Geodésicas en variedades Riemannianas</b>	<b>69</b>
8.1. Conexión de Levi-Civita y derivación covariante . . . . .	70
8.2. Fórmula de la primera variación . . . . .	72
8.3. Propiedades importantes de las geodésicas, minimización local y global de la longitud de arco . . . . .	74
8.4. Co-compacidad de la familia de las geodésicas . . . . .	78
8.5. El Teorema de Hopf-Rinow . . . . .	80
<b>9. El recubrimiento universal, el grupo fundamental y las minimizantes globales</b>	<b>83</b>
9.1. Espacios de recubrimiento . . . . .	83
9.2. Clases de homotopía, grupo fundamental . . . . .	85
9.3. Recubrimiento universal, isometrías de recubrimiento . . . . .	88
<b>10. Minimizantes globales y clases de homotopía en superficies</b>	<b>95</b>
10.1. Teorema de Cartan . . . . .	95
10.2. La topología de los espacios de dimensión 2: Teorema de Jordan . . . . .	98

10.3. Primera aplicación del teorema de Jordan: ejes de transformaciones de recubrimiento . . . . .	99
10.4. Apéndice: como generalizar los resultados anteriores a superficies compactas orientables . . . . .	104
<b>11. Geodésicas minimizantes globales en el toro</b>	<b>109</b>
11.1. Intersecciones entre minimizantes globales . . . . .	110
11.2. Geodésicas cerradas que minimizan longitud en clases de homotopía son simples . . . . .	113
11.3. Ejes son sombreados por rectas . . . . .	116
11.4. Toda minimizante global es sombreada por una recta . . .	121



# Capítulo 1

## Superficies en $\mathbb{R}^3$ como variedades diferenciables

En este capítulo nos proponemos hacer una introducción al concepto de superficie diferenciable tomando como referencia la familia de las superficies en  $\mathbb{R}^3$ . No nos proponemos elaborar un texto de geometría diferencial introductoria por no ser realista dentro de las limitaciones de tiempo del presente curso. Restringiremos nuestra exposición al conjunto mínimo necesario de definiciones, ejemplos y resultados de la teoría básica. Como prerequisites para el curso sería suficiente un conocimiento básico de cálculo en varias variables reales, donde incluimos en particular el teorema de la función inversa y el teorema de la función implícita. El lector interesado en profundizar su conocimiento sobre los temas del capítulo tiene a su disposición buenas referencias de geometría diferencial (por ejemplo, Do Carmo [4], Spivak [11], Hicks [2] son algunas de ellas).

### 1.1. Estructura diferenciable: parametrizaciones y plano tangente

En primer lugar, nos gustaria fijar algunas notaciones que usaremos durante toda la exposición. Una función  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un abierto  $U$  del plano es de clase  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , si sus derivadas parciales hasta orden  $k$  existen y son continuas. Identificamos la clase  $C^0$  con la

clase de funciones continuas. De forma análoga definimos una función de clase  $C^k$   $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  si las derivadas parciales de las funciones coordenadas  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  de  $f$ ,  $f(p) = (f_1(p), f_2(p), \dots, f_n(p))$  son funciones de clase  $C^k$ . El producto interno de dos vectores  $w$ ,  $n$ , en el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  es

$$\langle w, n \rangle = \langle (w_x, w_y, w_z), (n_x, n_y, n_z) \rangle = w_x n_x + w_y n_y + w_z n_z.$$

El producto vectorial de dos vectores  $w$ ,  $n$  es un vector definido por

$$\begin{aligned} w \times n &= (w_x, w_y, w_z) \times (n_x, n_y, n_z) \\ &= (w_y n_z - w_z n_y, -(w_x n_z - w_z n_x), w_x n_y - w_y n_x). \end{aligned}$$

Una **Superficie en  $\mathbb{R}^3$  diferenciable**  $M$  de clase  $C^k$ ,  $k \geq 0$ , es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  que puede ser parametrizado localmente utilizando dos coordenadas. Mas precisamente, una superficie en  $\mathbb{R}^3$  admite una colección de aplicaciones  $\Phi_i$  y un cubrimiento por subconjuntos  $U_i$  obtenidos como intersecciones de abiertos conexos  $A_i$  de  $\mathbb{R}^3$  con la superficie  $M$ , o sea  $M = \cup_i U_i$ , que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Las aplicaciones  $\Phi_i$  son biyecciones  $\Phi_i : V_i \rightarrow U_i$ , donde  $V_i$  es un abierto conexo de  $\mathbb{R}^2$ ,
2. Cada  $\Phi_i$  es una función de clase  $C^k$  como aplicación de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$ , de rango máximo. O sea, el rango de la aplicación diferencial de  $\Phi_i$ , la cual es una matriz  $2 \times 2$ , es dos en todo punto, para todo  $i$ .

Las funciones  $\Phi_i$  son llamadas **parametrizaciones locales** de la superficie, sus inversas  $(\Phi_i)^{-1}$  (existen por el teorema de la función implícita) son llamadas **coordenadas o cartas locales** de la superficie, y las funciones compuestas

$$(\Phi_j)^{-1} \circ \Phi_i : V'_i \subset V_i \rightarrow U_j,$$

que son difeomorfismos de clase  $C^k$  como aplicaciones entre subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ , son llamadas **cambios de coordenadas**. La colección  $\{(U_i, \Phi_i)\}$  es denominada un **atlas diferenciable** de clase  $C^k$  de  $M$ , en clara referencia a los mapas y la cartografía.

La definición de superficie implica que existe en ella lo que se denomina una **estructura de espacio topológico**, o sea, existe una colección de subconjuntos  $\mathfrak{F}$  que llamamos **abiertos** que satisface,

1. La unión de cualquier número de elementos de  $\mathfrak{F}$  es un elemento de  $\mathfrak{F}$ .
2. La intersección de un número finito de elementos de  $\mathfrak{F}$  es un elemento de  $\mathfrak{F}$ .
3.  $M$  y el conjunto vacío son elementos de  $\mathfrak{F}$ .

Esta colección de subconjuntos no es más que la formada por las uniones de cualquier número e intersecciones de un número finito de imágenes de conjuntos abiertos del plano por todas las parametrizaciones posibles de  $M$ . En realidad basta tomar un atlas dado y formar la colección de las uniones cualesquiera e intersecciones finitas de imágenes de abiertos del plano por las parametrizaciones de este atlas (ejercicio).

La noción de topología en la superficie es fundamental pues permite generalizar de forma natural una serie de herramientas analíticas de  $\mathbb{R}^2$  de gran importancia en el estudio de la geometría de las mismas. La noción de abierto permite definir funciones continuas y diferenciables  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  por ejemplo. A partir de esta idea es posible definir funciones continuas y diferenciables entre superficies, y el concepto de campo vectorial en el plano se extiende sin mayores problemas a las superficies.

**Lema 1.1.1.** (Ejercicio) Sea  $M$  una superficie diferenciable en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces todo abierto de  $M$  es la intersección de un abierto del espacio  $\mathbb{R}^3$  con la superficie  $M$ .

Nos gustaría observar que la noción de superficie diferenciable en  $\mathbb{R}^3$  se generaliza a objetos más abstractos, llamados también superficies diferenciables, pero que no son necesariamente subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$ . De hecho, la existencia de atlas con cambios de coordenadas diferenciables se verifica en muchos objetos que pueden ser considerados naturalmente como superficies, por estar modelados localmente por parametrizaciones de abiertos del plano. Además, nótese que la diferenciableidad de cambios de coordenadas es definida en subconjuntos del plano y no en la superficie. En general, en geometría diferencial la noción de superficie diferenciable como objeto en el cual existen atlas con cambios de coordenadas diferenciables (y algunas otras condiciones adicionales) se muestra más conveniente en muchas aplicaciones. En los primeros 4 capítulos solo consideraremos superficies en  $\mathbb{R}^3$ , las superficies "abstractas" serán el objeto de estudio de la segunda parte de la monografía.

### 1.1.1. Funciones continuas y diferenciables

Una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es continua si la preimagen de todo intervalo abierto es un abierto en  $M$ , según la topología definida en  $M$  por las parametrizaciones locales de un atlas dado.

**Ejercicio:** Verificar que la definición de continuidad no depende del atlas.

**Ejercicio:** Verificar que la definición de continuidad coincide con la definición de continuidad de funciones utilizada en cálculo.

De la misma forma, se dice que una función continua  $f : M \rightarrow N$  entre dos superficies  $M, N$  si la preimagen de un abierto de  $N$  es un abierto de  $M$ .

Una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable de clase  $C^k$  si existe un atlas  $(U_i, \Phi_i)$  de  $M$  tal que las funciones  $\Psi_j(f(\Phi_i^{-1}))$  son de clase  $C^k$  como aplicaciones entre subconjuntos del plano. De forma análoga, decimos que una función  $f : M \rightarrow N$  entre dos superficies  $M, N$ , es de clase  $C^k$  si dados atlas  $\{U_i, \Phi_i\}$  de  $M$ , y  $\{A_j, \Psi_j\}$  de  $N$ , se tiene que las funciones  $\Psi_j(f(\Phi_i^{-1}))$  son funciones de clase  $C^k$  entre subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejercicio:** Verificar que la noción de diferenciabilidad de funciones no depende de los atlas escogidos en las definiciones anteriores.

Estas definiciones parecen un poco abstractas, a fin de cuentas estamos tratando de objetos que son subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  y es razonable pensar que exista alguna relación entre la diferenciabilidad en las superficies y la diferenciabilidad de funciones en  $\mathbb{R}^3$ . En realidad, las nociones de diferenciabilidad expuestas están inspiradas en nociones análogas relativas a las llamadas superficies abstractas: la existencia de atlas con cambios de coordenadas diferenciables sería suficiente para definir un criterio de diferenciabilidad de funciones. Resulta que en el caso de superficies de  $\mathbb{R}^3$  esta noción "intrínseca" de diferenciabilidad es de alguna forma heredada, así como lo es la topología de la superficie (Teorema 1.1.1), de la diferenciabilidad en el espacio ambiente  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 1.1.1.** (Ejercicio) Sea  $M$  una superficie diferenciable de clase  $C^k$  en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces, toda función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^r$  si y solo

si para todo punto  $p \in M$  existe un abierto  $B(p)$  de  $\mathbb{R}^3$  y una función  $F : B(p) \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^r$ , tal que  $F(x) = f(x)$  para todo  $x \in M \cap B(p)$ .

Este teorema nos dice en particular que la restricción de funciones diferenciables del espacio Euclidiano a la superficie  $M$  define funciones diferenciables en la superficie. Así como en el Teorema 1.1.1, la demostración es una aplicación del teorema de la función implícita. En la próxima sección sugeriremos otra forma más geométrica de demostrar los Teoremas 1.1.1 y 1.1.1.

### 1.1.2. Planos tangentes, fibrado tangente

Toda superficie diferenciable  $M$  en  $\mathbb{R}^3$  viene equipada con una colección de planos llamados **planos tangentes** que pasamos a definir a continuación.

Sea  $\Phi : V \rightarrow U$  una parametrización local de una superficie  $M$  de clase  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Podemos expresar  $\Phi$  en coordenadas cartesianas de  $\mathbb{R}^3$  como

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

donde  $(u, v)$  son las coordenadas cartesianas de  $V \subset \mathbb{R}^2$ . Como el rango de la aplicación diferencial  $D\Phi$  es 2 en todo punto, los vectores

$$\partial_u(\Phi(u, v)) = \frac{\partial}{\partial u}\Phi(u, v) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u + t, v) \Big|_{t=0},$$

$$\partial_v(\Phi(u, v)) = \frac{\partial}{\partial v}\Phi(u, v) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u, v + t) \Big|_{t=0},$$

son linealmente independientes en todo punto  $\Phi(u, v)$  de  $M$ . Notemos que

$$\partial_u(\Phi(u, v)) = D_{(u,v)}\Phi(1, 0),$$

$$\partial_v(\Phi(u, v)) = D_{(u,v)}\Phi(0, 1).$$

Y por la linealidad de las derivadas parciales, tenemos que

$$D_{(u,v)}\Phi(a, b) = a\partial_u(\Phi(u, v)) + b\partial_v(\Phi(u, v)).$$

Por lo tanto, la imagen de la aplicación diferencial  $D_{(u,v)}\Phi$  es un plano en  $\mathbb{R}^3$  que contiene los vectores tangentes  $\alpha'(0)$  de todas las curvas diferenciables  $\alpha(t) \subset M$  tales que  $\alpha(0) = p$ . Por este motivo, el plano

generado por la imagen de  $D_{(u,v)}\Phi$  es llamado **Plano tangente** a  $M$  en  $p \in M$ , y es denotado por  $T_pM$ . Los vectores  $\partial_u, \partial_v$  son llamados **vectores tangentes de la parametrización**.

**Ejercicio:** El plano tangente  $T_pM$  no depende de la parametrización local utilizada en una vecindad de  $p$  en  $M$ .

El conjunto de planos tangentes

$$TM = \cup_{p \in M} T_pM$$

es llamado **Fibrado tangente** de  $M$ .

La ecuación del plano tangente  $T_pM$  se puede obtener fácilmente en términos del producto vectorial  $n(\Phi(u, v)) = \partial_u(\Phi(u, v)) \times \partial_v(\Phi(u, v))$ . Denotaremos este vector por **vector normal asociado a la parametrización**. En efecto, recordemos que el producto vectorial  $w \times n$  es perpendicular al plano generado por  $w, n$ . Y la ecuación del plano perpendicular a un vector  $\tau \in \mathbb{R}^3$  que pasa por un punto  $p = (x_0, y_0, z_0)$  es

$$\langle \tau, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0.$$

Así que si las coordenadas en  $\mathbb{R}^3$  de  $\Phi(u, v) = p$  son  $p = (x_0, y_0, z_0)$ , tenemos

$$T_pM = \{(x, y, z) \text{ t.q. } \langle n(\Phi(u, v)), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0\}.$$

**Ejercicio:** Si  $M$  es de clase  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , entonces los planos tangentes  $T_pM$  dependen de  $p$  continuamente en la topología  $C^{k-1}$ . O sea, si  $T_pM$  tiene una ecuación del tipo

$$a(p)(x - x_0) + b(p)(y - y_0) + c(p)(z - z_0) = 0,$$

donde  $p = (x_0, y_0, z_0)$ , entonces las funciones  $a(p), b(p), c(p)$  son de clase  $C^{k-1}$  y sus derivadas parciales hasta orden  $k - 1$  son funciones continuas de  $p$ .

Una vez definida la noción de plano tangente, obtenemos una manera "intrínseca" de describir la aplicación diferencial de una función diferenciable entre superficies. Sea  $F : M \rightarrow N$  una función diferenciable

entre dos superficies. Dado un punto  $p \in M$ , la diferencial de  $f$  en  $p$  es una transformación lineal

$$D_p F : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$$

que asocia vectores tangentes a  $M$  vectores tangentes a  $N$ . Podemos "prescindir" de las coordenadas cartesianas de  $\mathbb{R}^3$  para escribir la expresión analítica de  $D_p F$ . Por definición, dado  $v \in T_p M$  la derivada  $D_p F(v)$  es

$$D_p F(v) = \frac{\partial}{\partial t} F \circ (\gamma_v(t)) \Big|_{t=0},$$

donde  $\gamma_v(t)$  es una curva diferenciable en  $M$  tal que  $\gamma_v(0) = p$ ,  $\gamma'_v(0) = v$ . La definición no depende de la curva  $\gamma(t)$  que pase por  $p$  en  $t = 0$  siempre que su derivada en este punto sea  $v$ . Usando coordenadas locales  $(x, y)$  en una vecindad de  $p$  en  $M$ , y  $(s, t)$  en una vecindad de  $F(p)$  en  $N$ , tenemos que

$$D_p F(\partial_x) = a_{11}\partial_s + a_{12}\partial_t,$$

$$D_p F(\partial_y) = a_{21}\partial_s + a_{22}\partial_t,$$

y los coeficientes  $a_{ij}$  nos permiten obtener la matriz de  $D_p F$  en la base  $\partial_s, \partial_t$ , es decir, usando apenas las coordenadas de la parametrización y no las coordenadas del espacio Euclidiano.

Análogamente, podemos calcular la diferencial de una función escalar  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$  en términos de las derivadas direccionales de  $f$  con respecto a los vectores tangentes de una parametrización dada: si  $v = a\partial_x + b\partial_y$  entonces

$$D_p f : T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$D_p f(v) = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y}.$$

La reducción de la dimensión de 3 para 2 en el estudio de las superficies en  $\mathbb{R}^3$  facilitará substancialmente las demostraciones que presentaremos en el texto.

## 1.2. Ejemplos

### 1.2.1. Gráficos de funciones

Los ejemplos más conocidos de superficies en los cursos de cálculo son los gráficos de funciones diferenciables. Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^k$ , entonces el gráfico  $\Gamma(f)$  de  $f$  cuya definición es

$$\Gamma(f) = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in U\}$$

es una superficie de  $\mathbb{R}^3$  de clase  $C^k$ . La propia definición de gráfico nos da una parametrización bastante natural del mismo,

$$\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Los gráficos se cuentan entre los pocos ejemplos de superficies que admiten una única parametrización que describe totalmente la superficie como subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ . En general, no es posible parametrizar una superficie con una única parametrización. Los vectores tangentes de la parametrización son

$$\partial_x = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}) \text{ y } \partial_y = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}).$$

El vector normal asociado a la parametrización es

$$n(\Phi(x, y)) = (-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1).$$

La ecuación del plano tangente al gráfico en  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  es

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Reconocemos en esta fórmula la aproximación de Taylor de  $f$  de primer orden, lo que tiene un significado bastante geométrico: el plano tangente en un punto  $p = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \Gamma(f)$  es la mejor aproximación del gráfico por una función lineal  $L(x, y)$  tal que  $L(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$ .

El conjunto de los gráficos es importante en el estudio local de las superficies debido a la siguiente propiedad:

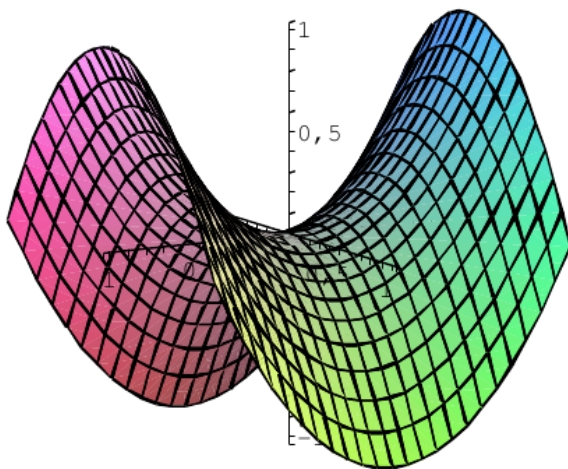


Figura 1.1: Gráfico de  $f(x, y) = x^2 - y^2$

**Proposition 1.2.1.** *Toda superficie  $M$  de clase  $C^k$ ,  $k \geq 1$  en  $\mathbb{R}^3$  es localmente un gráfico. O sea, dado un punto  $p \in M$ , existe un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , una función de clase  $C^k$   $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  (que depende de  $p$  en general), tal que la imagen de la función  $\Phi(x, y, f(x, y))$  es una vecindad abierta de  $M$  que contiene  $p$ .*

**Ejercicio:** Demostrar la proposición anterior.

*Sugerencia:* Una forma geométrica de demostrar esta afirmación es considerar el plano tangente  $T_p M$  como una aproximación local de  $M$ . El vector normal  $n(p)$  es perpendicular a  $T_p M$  y por lo tanto, las rectas paralelas a  $n(p)$  son transversales a  $M$  en un abierto adecuado de  $M$  que contiene  $p$ , simplemente por la continuidad de los planos tangentes a  $M$  en una vecindad de  $p$ . Y en particular, existe un abierto  $V_p \subset M$  que contiene  $p$  donde para todo  $q \in V_p$  se tiene que la intersección con  $V_p$  de la recta paralela a  $n(p)$  que pasa por  $q$  es exactamente  $q$ . Sea  $U \subset T_p M$  el conjunto de puntos de intersección  $x_q$  de las rectas  $r_q(t) = q + tn(p)$  con  $T_p M$ . Para cada  $q \in V_p$ , el punto  $x_q$  es único. Supongamos ahora que  $n(p)$  es el vector  $(0, 0, 1)$ . Entonces la función  $t : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$t(x) = t(x_q),$$

donde  $r_q(t(x_q)) = x_q$ , tiene como gráfico el conjunto  $V_p$  de  $M$ . Demostrar que esta función es diferenciable. Qué pasa si  $n(p)$  no es vertical?

### 1.2.2. Superficies de nivel

Otra categoría importante de ejemplos de superficies en  $\mathbb{R}^3$  proviene del conjunto de superficies de nivel de funciones  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables. Un conjunto de nivel de  $F$  está definido por una ecuación de la forma

$$F(x, y, z) = c,$$

donde  $c$  es un valor real constante. Suponer que en  $p = (x_0, y_0, z_0)$  alguna derivada parcial de  $F$  es no nula, digamos  $\frac{\partial F}{\partial z}(p) \neq 0$ . El punto  $p$  se conoce en la literatura como **punto regular** de  $F$ . Entonces el teorema de la función implícita nos garantiza que existe una vecindad abierta  $U \subset \mathbb{R}^2$ , que contiene  $(x_0, y_0)$ , tal que el conjunto de nivel  $F(x, y, z) = c$  restringido a  $U$  tiene la forma

$$F(x, y, h(x, y)) = c,$$

donde  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable. Así que el conjunto de nivel en una vecindad abierta de  $p$  admite una parametrización  $\Phi : U \rightarrow V$  dada por

$$\Phi(x, y) = (x, y, h(x, y)),$$

o sea, el conjunto de nivel en una vecindad de  $p$  es el gráfico de una cierta función diferenciable  $h$ . Los planos tangentes, la normal asociada a la parametrización, pueden ser calculados de acuerdo a la formulación de la subsección anterior. En efecto, los vectores tangentes asociados a la parametrización  $h$  pueden ser obtenidos a partir de las derivadas parciales de  $F$  usando el teorema de la función implícita y la regla de la cadena. Otra forma más concisa de obtener la ecuación del plano tangente es con el gradiente de  $F$

$$\nabla_p F = \left( \frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p), \frac{\partial F}{\partial z}(p) \right),$$

porque sabemos que el gradiente es perpendicular a los vectores tangentes de la parametrización (verificar como ejercicio). De esta forma, la ecuación del plano tangente en  $(x_0, y_0, z_0)$  a  $F = c$  es

$$\langle \nabla_{(x_0, y_0, z_0)} F, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0.$$

En este caso, el campo gradiente puede ser de mejor utilidad que el vector normal asociado a la parametrización en lo que respecta a aplicaciones, pues la parametrización es dada implícitamente mientras que la función  $F$  es un dato explícito del problema.

### 1.2.3. La esfera

La esfera de radio 1 centrada en el origen,  $S_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  es una superficie de clase  $C^\infty$  (incluso analítica. Pertenece a la categoría de superficies de nivel regulares (o sea, donde todo punto de la superficie es regular) de la función  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . La esfera es un ejemplo simple de superficie que no se puede cubrir con una parametrización, se necesitan por lo menos dos parametrizaciones para este fin. Antes de obtener cualquier parametrización para la esfera, observamos que en cada punto  $p$  de la misma, el propio  $p$  considerado como un vector es perpendicular a la esfera. Por lo que el plano tangente en  $p(x_0, y_0, z_0)$  a  $S_1$  es

$$\langle p, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0.$$

No necesitamos tener alguna parametrización a la mano para obtener la ecuación del plano tangente en cada punto. Usaremos esta observación en diversas oportunidades durante la exposición.

Existen varias formas de parametrizar  $S_1$ . Una de ellas, tal vez la más obvia, sea parametrizarla con gráficos de las funciones

$$f_1(x, y) = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

definida en el abierto  $U_1 = \{x^2 + y^2 < 1\}$ ,

$$f_2(y, z) = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \sqrt{1 - y^2 - z^2},$$

definida en el abierto  $U_2 = \{y^2 + z^2 < 1\}$ , y

$$f_3(x, z) = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \sqrt{1 - x^2 - z^2},$$

definida en el abierto  $U_3 = \{x^2 + z^2 < 1\}$ . Son 6 funciones, cuyos gráficos describen hemisferios de  $S_1$ , y su unión cubre la superficie. Parecen muchas parametrizaciones, de hecho se puede cubrir  $S_1$  con dos parametrizaciones, por medio de la llamada proyección estereográfica. Sea  $P_N : \{z = 1\} \rightarrow S_1$  la aplicación definida asociando a cada punto

$(x, y, 1)$  del plano  $z = 1$  el punto de intersección entre  $S_1$  y la recta que pasa por  $(x, y, 1)$  el polo sur  $(0, 0, -1)$ . La imagen de esta aplicación es  $S_1$  menos el polo sur  $S$ .

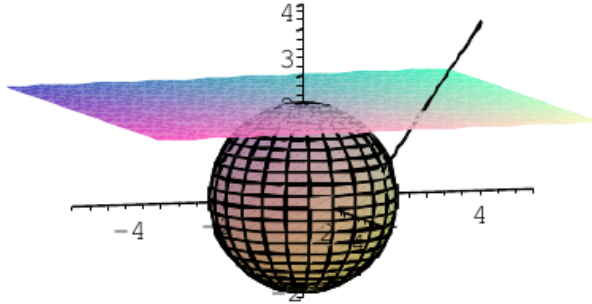


Figura 1.2: Proyección estereográfica

**Ejercicio:** Encuentre la expresión de  $P_N$  en coordenadas cartesianas, y demuestre que es una biyección diferenciable en  $S_1$  menos el polo sur.

Definamos de forma análoga la proyección  $P_S : \{z = -1\} \rightarrow S_1$ , cuya imagen cubre  $S_1$  menos el polo norte  $(0, 0, 1)$ . La unión de las imágenes de  $P_N$ ,  $P_S$  cubre  $S_1$ , y ambas satisfacen las condiciones que caracterizan las parametrizaciones de clase  $C^\infty$ .

**Ejercicio:** Calcule las fórmulas de cambios de coordenadas de  $S_1$  en el atlas formado por la unión de las parametrizaciones anteriores.

Otra manera de parametrizar  $S_1$  en los cursos de cálculo es usando coordenadas esféricas o cilíndricas. Estas no son parametrizaciones en el sentido definido en el presente texto, pues tanto las coordenadas esféricas como las cilíndricas en  $S_1$  tienen puntos donde no son inyectivas, o no son diferenciables, o son diferenciables pero no de rango 2 (verificar). En la siguiente subsección comentaremos en detalle la parametrización en coordenadas cilíndricas.

### 1.2.4. Superficies de revolución

Una superficie de revolución es obtenida haciendo girar una curva plana en  $\mathbb{R}^3$ , llamada con frecuencia curva generadora, en torno a una recta contenida en el mismo plano de la curva. Esta recta es llamada eje de revolución. Tomemos como ejemplo las superficies de revolución cuyo eje es la recta vertical  $r(t) = (0, 0, t)$ , o sea, el eje  $z$  en  $\mathbb{R}^3$ , cuyas curvas generadoras están en el plano  $(x, 0, z)$ . Una curva como esta tiene la forma

$$c(t) = (x(t), 0, z(t)),$$

$t \in I$ , y al girar en torno al eje  $z$  por las rotaciones que fijan este eje, analíticamente lo que hacemos es multiplicar la ecuación de la curva  $c(t)$  por las matrices  $R_\alpha$  que fijan el vector  $(0, 0, 1)$  y rotan por ángulo  $\alpha \in \mathbb{R}$  los vectores del plano  $z = 0$ :

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) & 0 \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De forma que se obtiene una función  $G : I \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  de la forma

$$G(t, \alpha) = R_\alpha(c(t)) = (\cos(\alpha)x(t), \text{sen}(\alpha)x(t), z(t)).$$

Las coordenadas  $t, \alpha$  son denominadas en los textos de cálculo **coordenadas cilíndricas**, pero en realidad no son coordenadas según la definición de superficies. Sencillamente porque en general la función  $G(t, \alpha)$  no es necesariamente una parametrización, aunque le falte poco para serlo. De hecho, el dominio  $I \times [0, 2\pi)$  no es un abierto del plano, además, la función  $G$  podría no ser inyectiva. La esfera  $S_1$ , así como las esferas de cualquier radio, son superficies de revolución (ejercicio: verificar). Para obtener verdaderas parametrizaciones a partir de esta construcción, es necesario imponer algunas condiciones sobre la curva  $c$ , por ejemplo, que sea simple, que el intervalo  $I$  sea abierto, que la curva  $c$  no interseque el eje de revolución, o que si lo interseca que lo haga perpendicularmente. Además, es necesario en general descomponer la función  $G$  en dos funciones con dominios diferentes:  $G_1(t, \alpha) = G(t, \alpha)$  restringida a  $(t, \alpha) \in I \times (0, 2\pi)$ ; y  $G_2(t, \alpha) = G(t, \alpha)$  restringida a  $I \times (-\pi, \pi)$ . Las funciones  $G_1$  y  $G_2$  son un par de parametrizaciones que forman un atlas para la superficie.

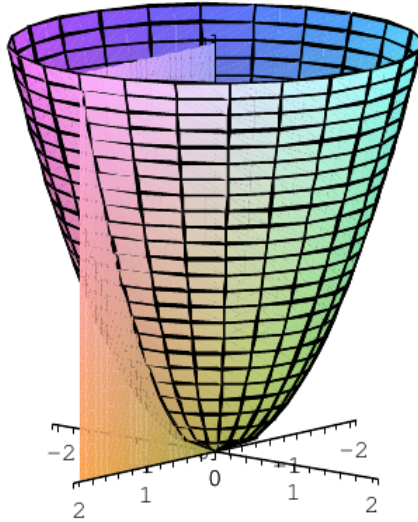


Figura 1.3: Paraboloide  $f(x, y) = x^2 + y^2$  con meridianos y paralelos

Los vectores tangentes coordenados son

$$\partial_t = (\cos(\alpha)x'(t), \sin(\alpha)x'(t), z'(t)),$$

$$\partial_\alpha = (-\sin(\alpha)x(t), \cos(\alpha)x(t), 0).$$

Una de las particularidades de las superficies de revolución es que las coordenadas cilíndricas proporcionan un sistema de vectores tangentes perpendiculares en todo punto. Esta propiedad es bastante conveniente y será usada en diversas oportunidades en la exposición. Los vectores normales asociados a las parametrizaciones anteriores son

$$n(G(t, \alpha)) = (-z'(t)x(t)\cos(\alpha), -z'(t)x(t)\sin(\alpha), x'(t)x(t))$$

cuyas normas son

$$\|n(G(t, \alpha))\| = |x(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Los llamados paralelos de la superficie de revolución son las curvas de la forma

$$G_t : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$G_t(\alpha) = G(t, \alpha),$$

donde  $t$  es fijo. Son círculos horizontales de radio  $\sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2}$ , siempre tangentes a los vectores  $\partial_\alpha$ . Los meridianos de la superficie de revolución son las curvas

$$G^\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$G^\alpha(t) = G(t, \alpha),$$

donde  $\alpha$  es fijo. Son curvas contenidas en los planos verticales que contienen el eje  $z$  y forman ángulo  $\alpha$  con el plano  $y = 0$ . En particular, la curva  $c(t)$  es un meridiano, los otros meridianos son nada más que las rotaciones de  $c(t)$  por ángulo  $\alpha$ . Los meridianos son tangentes a los vectores  $\partial_\alpha$ .

**Ejercicio:** Parametrizar el paraboloido  $x^2 + y^2 = z$ , y el cono  $x^2 + y^2 = z^2$  usando coordenadas cilíndricas.

### 1.3. Campos vectoriales, derivaciones, producto de Lie

Un campo vectorial  $X : M \longrightarrow TM$  es una función que asocia a cada  $p \in M$  un vector  $X(p) \in T_pM$ . Observemos que esta función define claramente una función con dominio en  $M$  e imagen en  $\mathbb{R}^3$ , por lo que diremos que  $X$  es de clase  $C^k$  si como función entre  $M$  y  $\mathbb{R}^3$  es una función de clase  $C^k$ .

**Ejemplo 1:** Los vectores tangentes asociados a una parametrización local de  $M$  definen campos vectoriales en una vecindad de  $M$ .

**Ejemplo 2:** Dada una función diferenciable  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ , el campo gradiente  $\nabla f$  es un campo tangente a la superficie definido de la siguiente forma: dado un vector  $v \in T_pM$ , el campo gradiente  $\nabla_p f$  calculado en el punto  $p$  viene dado por la relación

$$D_p f(v) = \langle \nabla_p f, v \rangle,$$

donde  $\langle w, \sigma \rangle$  es el producto interno Euclidiano restringido a los vectores tangentes en  $T_pM$ .

bf Ejercicio: Verificar que si  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es de clase  $C^k$ , entonces el gradiente en  $p \in M$  de la restricción de  $F$  a una superficie  $M$  es la proyección ortogonal del gradiente de  $F$  en  $\mathbb{R}^3$  en el plano  $T_pM$ .

Una derivación  $\delta : C^k(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $C^k(M, \mathbb{R})$  es el conjunto de las funciones de  $M$  en  $\mathbb{R}$  de clase  $C^k$ , es una función lineal que cumple la regla de Leibnitz. O sea, si  $f, g$  son dos funciones en  $C^k(M, \mathbb{R})$ , se tiene que

$$\delta(f.g) = \delta(f).g + f.\delta(g).$$

**Ejemplo 1:** Las derivadas parciales de funciones escalares en  $M$  con respecto a coordenadas locales de una parametrización dada son derivaciones.

**Ejemplo 2:** Dado un campo vectorial  $X$  de clase  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , la aplicación  $\delta_X : C^k(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$(\delta_X(f))(p) = D_p f(X(p))$$

es una derivación. Esta derivación con frecuencia es llamada derivada direccional con respecto al campo  $X$ , y aplicada a una función  $f$  es denotada también por  $X(f)$ .

**Ejemplo 3:** El producto de Lie de dos campos vectoriales  $X, Y$  diferenciables en una superficie  $M$ , está definido por

$$[X, Y](f)(p) = X(Y(f))(p) - Y(X(f))(p).$$

Notemos que  $[X, Y]$  involucra dos derivadas sucesivas, sin embargo afirmamos que es una derivación (verificar esta afirmación como ejercicio). Una forma de interpretar el significado del producto de Lie de dos campos es la siguiente: si  $X = \partial_x$ ,  $Y = \partial_y$  son campos tangentes asociados a una parametrización local de  $M$ , entonces  $[X, Y](f)$  es igual a la diferencia entre las derivadas mixtas de  $f$ , o sea cero, para toda  $f$  escalar de clase  $C^2$ . Es posible demostrar que el producto de Lie de dos campos localmente definidos es cero en una vecindad de  $M$  si y solo si ellos corresponden a los campos coordenados de una cierta parametrización de  $M$ . No haremos la demostración de esta afirmación en el texto, el lector

interesado puede consultarla en las referencias del capítulo. El producto de Lie es un objeto importante en física- matemática, en particular en geometría diferencial. Tendrá un papel importante en la descripción de la geometría local de las superficies, como constataremos en las próximas páginas.



## Capítulo 2

# Superficies como Estructuras Riemannianas, geodésicas

Este capítulo tiene como objetivo hacer una introducción al estudio de las superficies en  $\mathbb{R}^3$  como espacios métricos, y al estudio de las geodésicas. Haremos una breve comparación entre la noción de geodésica en el mundo griego y la noción de geodésica surgida del cálculo variacional del siglo XVIII. Terminaremos el capítulo analizando algunos ejemplos de superficies de revolución y sus geodésicas.

### 2.1. Espacios métricos, Grecia antigua y geodésicas

Un espacio métrico  $(X, d)$  es un conjunto  $X$  donde está definida una distancia  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , caracterizada por las siguientes propiedades:

1.  $d(p, q) \geq 0$  para todo  $p, q \in X$ , y  $d(p, q) = 0$  si y solo si  $p = q$ .
2.  $d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q)$  para todo  $p, x, q \in X$  (desigualdad triangular).

Un ejemplo bien conocido de todos es  $\mathbb{R}^n$  con la métrica Euclidiana  $d(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2}$ , donde  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ .

Uno podría preguntarse si en una superficie cualquiera en  $\mathbb{R}^3$  sería posible definir una distancia.

La noción de espacio métrico responde en muchos sentidos a la formulación rigurosa de varios problemas físicos que surgen naturalmente al hacer mediciones. Desde la Grecia antigua, se sabía que la tierra no era plana. Los griegos, basados en observaciones astronómicas, llegaron a la conclusión de que la tierra era redonda, o esférica. Y se preguntaron entonces algo bastante sencillo: ¿cuál sería el camino más corto entre dos puntos de la superficie terrestre? (Uno podría imaginarse que en el mundo antes de Cristo, época en la que el desplazamiento humano era árduo y sacrificado, una pregunta como ésta tendría gran relevancia). Esta cuestión llevó a los griegos a descubrir el número  $\pi$  y la **longitud de un arco** de circunferencia de radio  $r > 0$  cualquiera. Y lo que para los griegos era la distancia entre dos puntos de la superficie terrestre era justamente la longitud del camino más corto entre estos puntos.

El camino más corto entre dos puntos de la superficie terrestre era llamado **geodésica** por los griegos, cuya raíz "geo" significa tierra. Este concepto es uno de los legados más importantes de la geometría griega a la matemática.

A partir del origen de las geodésicas nos queda claro que la forma tal vez más ingenua de definir una distancia en una superficie en  $\mathbb{R}^3$ , estableciendo que la distancia entre dos puntos es la misma distancia entre ellos en  $\mathbb{R}^3$ , no es la más natural ni la más conveniente. De hecho, esta definición no permite encontrar una curva en la superficie uniendo los dos puntos cuya longitud sea exactamente la distancia. Porque la distancia Euclidiana es la mínima longitud posible entre las curvas que unen los puntos, y se alcanza justamente en el segmento de recta que los une. De esta forma, a menos que la superficie contenga este segmento de recta, no será posible encontrar en la superficie una curva con longitud mínima conectando los puntos. La idea griega sobre las geodésicas fue formalizada en los siglos XVIII y XIX por físicos y matemáticos como parte de una teoría que ahora se conoce como **cálculo variacional**. Daremos una idea de esta teoría en las secciones siguientes, pero antes describiremos otro punto de vista de naturaleza física que permite una interpretación y definición diferentes de las geodésicas.

## 2.2. Derivada covariante y mecánica Newtoniana

Una de las características notables de las geodésicas en el espacio Euclidiano, o sea, las rectas, es que son las únicas curvas diferenciables con aceleración nula en todo punto. De acuerdo a la segunda ley de Newton, las trayectorias  $c(t)$  de movimientos de cuerpos con masa constante  $m$  producidos por un campo de fuerzas  $F(p)$  obedecen la ley  $F(c(t)) = mc''(t)$ . Es decir, la fuerza en  $c(t)$  es proporcional al vector aceleración  $c''(t)$ . Aplicando esta ley a las rectas en el plano podemos concluir que las mismas son trayectorias de movimientos libres de fuerzas, o movimientos libres simplemente. Estos movimientos tienen velocidad  $\|c'(t)\|$  constante, y dado un punto  $p \in \mathbb{R}^n$  y un vector  $v \in T_p\mathbb{R}^n$ , existe una única trayectoria del movimiento que pasa por  $p$  y tiene velocidad inicial  $v$ . Esta propiedad es típica de soluciones de una ecuación diferencial de orden 2, una relación del tipo

$$c''(t) = G(t, c(t), c'(t)),$$

siendo la ley de Newton un ejemplo particular. Se tiene el siguiente teorema que asumiremos sin demostración (que será importante desde el punto de vista teórico pero que no será usado en las aplicaciones”

**Teorema 2.2.1.** *Dada una ecuación diferencial de orden  $n$*

$$\frac{\partial^n c}{\partial t^n}(t) = G(t, c(t), c'(t), \dots, \frac{\partial^{n-1} c}{\partial t^{n-1}}(t)),$$

donde  $G$  es una función de clase  $C^1$  en un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , dado un punto  $(t_0, (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})) \in \mathbb{R}^{n+1}$  existe una única solución  $x(t)$  de la ecuación tal que  $x(t_0) = v_0$ , y  $\frac{\partial^n x}{\partial t^i}(t_0) = v_i$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

El teorema anterior es conocido como el **teorema de existencia y unicidad** de las ecuaciones diferenciales. Usando parametrizaciones locales, el teorema se extiende fácilmente a las superficies.

Así que la mecánica nos da otra interpretación de las geodésicas en el espacio Euclidiano, son las trayectorias que representan los movimientos libres de fuerzas. Podríamos preguntarnos si existe algo equivalente en las superficies de  $\mathbb{R}^3$ .

Esta pregunta nos lleva a otra pregunta: qué es aceleración en una superficie? Si  $c(t)$  es una curva en una superficie  $M$ , su vector tangente  $c'(t)$  es también tangente a la superficie para todo  $t$ , pero su vector aceleración  $c''(t)$  no es en general tangente a  $M$ . Pensando nuevamente en la segunda ley de Newton, una fuerza aplicada en la superficie  $M$  solo producirá algún movimiento a partir del reposo si tiene alguna componente no nula en los planos tangentes a la superficie. En efecto, si aplicamos una fuerza perpendicular a  $T_p M$  en el punto  $p$ , este punto no se moverá a partir del reposo. Dicha observación nos conduce naturalmente a una noción de "aceleración tangente" de curvas, que se conoce en geometría como **derivada covariante**.

**Definición 2.2.1.** *Dados un campo vectorial  $X : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $C^2$  tangente a la superficie  $M$ , definido en un abierto  $U$  en  $M$ , y una curva  $c : (a, b) \rightarrow M$  de clase  $C^2$ , la derivada covariante  $\nabla_{c'(t_0)} X$  de  $X$  a lo largo de  $c(t)$  en  $c(t_0)$  es la proyección ortogonal del vector  $\frac{\partial}{\partial t}(X \circ c(t))|_{t=t_0}$  en  $T_{c(t_0)} M$ .*

Resulta un poco inconveniente que la notación de derivada covariante sea muy parecida a la notación de campo gradiente de una función escalar. Ambas notaciones son bastante usadas en la literatura, y procuraremos dejar bien claro en lo que sigue cuando se trate de una o del otro. Podemos verificar sin dificultad que si  $X, Y$  son dos campos vectoriales definidos en un abierto  $U \subset M$  tales que  $X(c(t)) = Y(c(t))$  para todo  $t \in (a, b)$ , entonces sus derivadas covariantes  $\nabla_{c'(t)} X$  y  $\nabla_{c'(t)} Y$  son iguales en todo  $t$ . La definición anterior nos dice que la derivada covariante  $\nabla_{c'(t_0)} X$  es la parte tangente a la superficie del vector  $\frac{\partial}{\partial t}(X \circ c(t))|_{t=t_0}$ , y este concepto nos conduce de forma natural a una noción de aceleración tangente a la superficie, a saber, la aceleración tangente de  $c(t)$  es la proyección ortogonal de  $c''(t)$  en  $T_{c(t)} M$ . Como la derivada covariante  $\nabla_{c'(t)} X$  no depende de la extensión del campo  $X(t)$  fuera de la curva  $c(t)$ , nuestra definición de aceleración tangente de la curva  $c(t)$  corresponde a la derivada covariante

$$\nabla_{c'(t)} c'(t),$$

donde  $c'(t)$  es en verdad una extensión del campo de vectores  $c'(t)$  a una vecindad de  $c(t)$  en  $M$ . Y a su vez, esta idea de aceleración tangente nos lleva a una generalización, de la idea de geodésica.

Enunciamos a continuación algunas propiedades de la derivada covariante que nos serán útiles durante la exposición.

**Proposition 2.2.1.** *Sea  $M$  una superficie de clase  $C^3$  en  $\mathbb{R}^3$ . Sean  $c : I \rightarrow M$  una curva de clase  $C^2$ ,  $X, Y$  campos vectoriales tangentes a  $M$  de clase  $C^1$  definidos en una vecindad de  $c$  en  $M$ . Entonces*

1.  $\nabla_{c'(t)}(X + Y) = \nabla_{c'(t)}X + \nabla_{c'(t)}Y$ , para cada  $t \in I$ .
2. Si  $f : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función escalar de clase  $C^1$ , entonces para todo  $t \in I$  se tiene

$$\nabla_{c'(t)}(fX) = \langle D_{c(t)}f, c'(t) \rangle X + f(c(t))\nabla_{c'(t)}X,$$

$$\nabla_{f c'(t)}(X) = f \nabla_{c'(t)}X.$$

3. Para todo  $t \in I$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle X(c(t)), Y(c(t)) \rangle &= \langle \nabla_{c'(t)}X(c(t)), Y(c(t)) \rangle \\ &+ \langle X(c(t)), \nabla_{c'(t)}Y(c(t)) \rangle, \end{aligned}$$

relación que generaliza la regla de Leibnitz de la derivación usual.

4.  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ .

La demostración de la proposición la dejamos como ejercicio al lector. Es consecuencia directa de las definiciones dadas: observemos que todas las propiedades enunciadas en la proposición valen en el caso del espacio Euclidiano con el producto interno y la derivada usuales. Como la derivación covariante consiste en tomar la parte tangente a la superficie de la derivada usual de  $\mathbb{R}^3$ , todas las ecuaciones anteriores son obtenidas usando las derivadas de  $\mathbb{R}^3$  proyectando luego ortogonalmente en  $TM$ .

**Definición 2.2.2.** *Una geodésica  $c : I \rightarrow M$  en  $M$  es una curva diferenciable tal que*

$$\nabla_{c'(t)}c'(t) = 0$$

para todo  $t \in I$ .

La interpretación física de las geodésicas definidas de esta forma es clara, describen el movimiento libre de fuerzas en la superficie  $M$ . Y permite una caracterización geométrica de las geodésicas bastante sencilla e interesante:  $c(t)$  es geodésica de  $M$  si y solo si su vector aceleración  $c''(t)$  es siempre perpendicular a  $T_{c(t)}M$  para todo  $t$ . Como en el caso del espacio Euclidiano, la definición "mecánica" de las geodésicas conlleva a una ecuación de orden 2 en la superficie, como es fácil constatar.

**Ejemplo 1:** En la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , las únicas curvas cuya aceleración es siempre perpendicular a la esfera son las circunferencias máximas de radio  $r$  contenidas en la esfera, parametrizadas con velocidad constante. En efecto, observar que las circunferencias máximas son las únicas curvas planas contenidas en la esfera cuyos vectores normales (como curvas en  $\mathbb{R}^3$ ) son perpendiculares a la esfera. Y dado un punto  $p$  en la esfera, y una dirección  $v \in T_pM$ , existe una única circunferencia máxima por  $p$  tangente a  $v$ . Por el teorema de existencia y unicidad, dicha circunferencia máxima es la única geodésica por  $p$  tangente a  $v$ .

**Ejemplo 2:** Los meridianos de las superficies de revolución son siempre geodésicas. La demostración es una generalización del argumento utilizado en el caso de la esfera. Observar que los meridianos son obtenidos intersectando la superficie de revolución con planos que contienen el eje de revolución. Y estos planos son siempre perpendiculares a la superficie. Sea entonces  $c(t)$  un meridiano contenido en un plano  $P$ , podemos parametrizarlo por longitud de arco de forma que  $\|c'(t)\| = 1$  para todo  $t$ . Su vector aceleración  $c''(t)$  estará contenido en el plano  $P$ , y por tener velocidad constante,  $c''(t)$  será además perpendicular a  $c'(t)$ . Como el vector  $c'(t)$  está en la única recta de intersección entre el plano  $P$  y el plano  $T_{c(t)}M$ , todo vector en  $P$  que sea perpendicular a  $c'(t)$  será perpendicular a  $T_pM$ . Concluimos entonces que  $c''(t)$  es perpendicular a  $T_{c(t)}M$  para todo  $t$ .

Ya con los paralelos de una superficie de revolución no pasa lo mismo. Se puede demostrar (ejercicio) que un paralelo es una geodésica si y solo si la distancia del paralelo al eje de revolución es un punto crítico de la distancia entre la superficie y el eje de revolución. En particular, los paralelos que están más próximos al eje de revolución son geodésicas, así como los paralelos más distantes del eje de revolución.

**Ejercicio:** Demostrar que si un plano  $\Pi$  es de simetría de una superficie  $M$ , entonces la intersección de este plano y la superficie es una geodésica. El plano  $\Pi$  es de simetría de  $M$  si al reflejar  $M$  en torno a  $\Pi$  su imagen está contenida en  $M$ .

Las observaciones anteriores nos muestran la riqueza y la utilidad de este concepto de geodésicas. Pero, cuál es la relación entre estas geodésicas y las geodésicas "griegas"? O sea, cuál es la relación entre estas geodésicas "mecánicas" y las curvas de longitud mínima que unen dos puntos en la superficie?. En la próxima y última sección del capítulo respondemos esta pregunta.

### 2.3. Un poco de cálculo variacional

Volvemos al concepto griego de geodésicas en superficies, para analizarlo de forma más detenida. La idea de curva de longitud mínima como realización "física" de la distancia entre puntos necesita por supuesto de una noción de longitud en la superficie. Para ello, nos basta con la longitud de una curva diferenciable en  $\mathbb{R}^3$ , si  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  es una curva diferenciable, entonces su longitud es

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

donde  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ . Así que es fácil definir una longitud para curvas en una superficie, lo que no es fácil es encontrar las curvas de longitud mínima.

Es en este punto que el llamado cálculo variacional muestra su fuerza. El cálculo variacional en pocas palabras, plantea el problema de hallar las curvas de longitud mínima conectando dos puntos como un problema de optimización: existe una función, la función longitud, que hay que minimizar en el espacio de las curvas que unen dos puntos. Si se tratase de  $\mathbb{R}^n$ , lo que haríamos sería derivar la función y encontrar sus puntos críticos. Dentro de estos puntos se encuentran los mínimos, que podemos seleccionar aplicando un criterio de derivada segunda. Parece sencillo, el punto es que el espacio de las curvas que unen dos puntos tiene dimensión infinita, y ¿cómo se define derivada de una función en un espacio de dimensión infinita?

La idea del cálculo variacional es intentar aproximar de alguna forma el espacio de las curvas por espacios de dimensión finita. El concepto clave es el de **variación** por curvas diferenciables.

**Definición 2.3.1.** *Dada una curva  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  diferenciable, una variación por curvas diferenciable por partes de  $\gamma$  es una función continua  $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$  que cumple las siguientes propiedades:*

1. *Existe un conjunto de puntos  $\{t_1, t_2, \dots, t_m\} \subset [0, a]$  tal que las curvas  $f_s(t) = f(s, t)$ , son diferenciables en  $[0, a] - \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ ,*
2.  *$f_0(t) = f(0, t) = \gamma(t) \forall t \in [0, a]$ .*

Si  $f(s, 0) = \gamma(0)$ ,  $f(s, a) = \gamma(a) \forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$ , decimos que la variación  $f$  tiene **extremos fijos** o es **propia**. Vamos a suponer que la curva  $\gamma(t)$  está parametrizada por longitud de arco, o sea,  $\|\gamma'(t)\| = 1$ . La noción de derivación covariante nos permite derivar la función longitud restringida a una variación. Sea  $W(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ , el campo tangente a la variación  $f$  en la dirección  $\frac{\partial}{\partial s}$  restringido a la curva  $f_0(t) = \gamma(t)$ .

**Lema 2.3.1.** (Fórmula de la primera variación). *Sea  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  una curva de clase  $C^2$  parametrizada por longitud de arco, y sea  $f(s, t)$  una variación de  $\gamma$  tal como fue definida anteriormente. Sea  $L(s) = l(f_s)$  la longitud de la curva  $f_s$ . Entonces*

$$\begin{aligned} L'(0) &= \langle W(a), \gamma'(a) \rangle - \langle W(0), \gamma'(0) \rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \langle W(t - i), \gamma'(t - i^+) - \gamma'(t - i^-) \rangle - \int_0^a \langle W(t), \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle dt, \end{aligned}$$

donde

$$\gamma'(t - i^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_i \\ t > t_i}} \gamma'(t), \quad \gamma'(t - i^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_i \\ t < t_i}} \gamma'(t).$$

En particular, si la variación  $f$  es propia, tenemos,

$$L'(0) = - \sum_{i=1}^m \langle W(t_i), \gamma'(t - i^+) - \gamma'(t - i^-) \rangle - \int_0^a \langle W(t), D_{\gamma'} \gamma' \rangle dt$$

*Demostración.* Una demostración completa y rigurosa de este lema sería técnicamente algo complicada. Como nos proponemos hacer una introducción al estudio de las superficies nos contentaremos con esbozar las ideas principales de la prueba, una demostración completa se puede consultar por ejemplo en [4], [2]. Para comenzar, vamos a suponer que tanto  $f$  como  $\gamma$  son diferenciables, o sea, el conjunto  $\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  es vacío. En este caso, el segundo término a la derecha de la fórmula desaparece. Tenemos que

$$\begin{aligned} L'(0) &= \frac{\partial}{\partial s} l(f_s)_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \int \sqrt{\left\langle \frac{\partial f_s}{\partial t}, \frac{\partial f_s}{\partial t} \right\rangle} \right)_{s=0} \\ &= \int_0^a \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{\left\langle \frac{\partial f_s}{\partial t}, \frac{\partial f_s}{\partial t} \right\rangle} \Big|_{s=0} dt \\ &= \int_0^a \left\langle \frac{\partial f_0}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial t} \right\rangle^{-1/2} \left\langle \nabla_W \frac{\partial f_0}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial t} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

En la última ecuación notemos que fue usada la Proposición 2.2.1. Siendo que  $f_0(t) = \gamma(t)$ , podemos escribir la fórmula anterior de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_0^a \left\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \right\rangle^{-1/2} \left\langle \nabla_W \gamma'(t), \gamma'(t) \right\rangle dt \\ &= \int_0^a \left\langle \nabla_W \gamma'(t), \gamma'(t) \right\rangle dt; \end{aligned}$$

en la última igualdad usamos el hecho que  $\|\gamma'(t)\|^2 = g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 1$ .

Por la Proposición 2.2.1 tenemos que

**Afirmación:**

$$\nabla_W \gamma' = \nabla_{\gamma'} W.$$

Esto se debe a que los campos  $W$  y  $\gamma'$  coinciden con los campos  $\frac{\partial f}{\partial s}$  y  $\frac{\partial f}{\partial t}$  respectivamente, y el producto de Lie de estos campos es nulo como fue observado en el capítulo 1 (notemos que  $s, t$  son las coordenadas de una parametrización). Por las propiedades de la derivación covariante enunciadas en la Proposición 2.2.1, se tiene entonces

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} \frac{\partial f}{\partial t} - \nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial s} = \left[ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right] = 0 \Rightarrow \nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} \frac{\partial f}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial s},$$

En particular a lo largo de la curva  $\gamma(t)$  tenemos  $\frac{\partial f}{\partial s} = W$ ,  $\frac{\partial f}{\partial t} = \gamma'$ , y  $\nabla_W \gamma' = \nabla_{\gamma'} W$ , lo que prueba la afirmación.

Volviendo a  $L'(0)$ , podemos reescribir

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_0^a \langle \nabla_W \gamma', \gamma' \rangle dt = \int_0^a \langle \nabla_{\gamma'} W, \gamma' \rangle dt \\ &= \int_0^a \frac{\partial}{\partial t} \langle W, \gamma' \rangle - \langle W, \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle dt \\ &= \langle W(a), \gamma'(a) \rangle - \langle W(0), \gamma'(0) \rangle - \int_0^a \langle W, \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle dt. \end{aligned}$$

□

**Corollary 2.3.1.** *Si una curva diferenciable  $\gamma$  es geodésica “griega”, entonces  $\gamma$  tiene aceleración nula relativa a la superficie  $M$ :  $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ .*

*Demostración.* La demostración del corolario aplica la fórmula de la primera variación:

$$L'(0) = - \int_0^a \langle W(t), \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle dt = 0,$$

donde  $W(t)$  es un campo variacional **cualquiera** proveniente de una variación de  $\gamma$  por curvas diferenciables. Ahora, se puede demostrar (pero no lo haremos por ser muy técnico, lo dejamos al lector como ejercicio), que cualquier campo vectorial diferenciable en una vecindad de  $\gamma$  se puede obtener como campo variacional de  $\gamma$ . En particular, el campo  $\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t)$  es el campo variacional de una variación de  $\gamma$  por curvas diferenciables y entonces

$$L'(0) = - \int_0^a \langle \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t), \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) \rangle dt = 0,$$

lo que implica claramente que  $\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = 0$  para todo  $t$  por ser un campo vectorial con norma nula en todo punto. □

En realidad, el método anterior es más potente, permite demostrar que si  $\gamma$  es una curva diferenciable por partes, geodésica “griega”, entonces  $\gamma$  es diferenciable y además tiene aceleración nula relativa a la superficie  $M$ .

Recapitulando las ideas de la sección: suponiendo que una curva diferenciable tiene longitud mínima en el conjunto de las curvas que unen dos puntos dados, obtenemos una condición necesariamente satisfecha por dicha curva, su aceleración covariante es nula. Esto no significa que la condición sea suficiente, si lo fuese tendríamos una equivalencia entre la noción de geodésica "griega" y la noción proveniente de la mecánica Newtoniana. Lo que se tiene en realidad es lo siguiente:

**Teorema 2.3.1.** *Sea  $\gamma : I \rightarrow M$  una curva tal que  $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$  para todo  $t \in I$ . Entonces existe un intervalo  $(a, b) \subset I$  donde la longitud de  $\gamma([a, b])$  es la menor posible en el conjunto de las longitudes de curvas que unen  $\gamma(a)$  y  $\gamma(b)$ .*

Es decir, localmente los dos conceptos de geodésicas expuestos en el capítulo son equivalentes. En general, los dos conceptos no son equivalentes de forma global. Por ejemplo, en la esfera de radio  $r > 0$  las circunferencias máximas son curvas de aceleración covariante nula. Pero no todo arco de circunferencia máxima es minimizante de la longitud de curvas que unen sus extremos: si el arco tiene longitud mayor que media circunferencia es claro que su longitud no minimiza. El conjunto de geodésicas donde la longitud de todo arco minimiza la longitud de las curvas que unen los extremos del arco, son llamadas **geodésicas minimizantes**, y en general son un subconjunto del total de las curvas con aceleración covariante nula. Por este motivo, a partir de este capítulo, adoptaremos como definición de geodésicas la definición de la mecánica clásica.

**Definición 2.3.2.** *Una geodésica de una superficie  $M$  de clase  $C^2$  es una curva diferenciable  $\gamma$  tal que  $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$  para todo  $t$ .*

Esta es la definición empleada en todos los textos de geometría. Notemos que en la definición no estamos suponiendo que  $\gamma$  tenga velocidad constante. De hecho, la norma del vector  $\gamma'(t)$  es constante dado que  $\gamma$  tiene aceleración nula (verificar como ejercicio).



## Capítulo 3

# Segunda forma fundamental y curvatura de Gauss

El tema del capítulo es la geometría local de las superficies en  $\mathbb{R}^3$ . Así como existen herramientas para estudiar la geometría de las curvas en  $\mathbb{R}^3$ , funciones como curvatura y torsión de curvas espaciales tienen aplicaciones importantes en física y matemática, existe un concepto de curvatura para superficies. Nos proponemos hacer una introducción al estudio de la curvatura de Gauss de superficies, incluyendo algunas aplicaciones. En el capítulo asumimos que toda superficie es de clase  $C^\infty$ .

### 3.1. Aplicación normal de Gauss y curvatura de superficies

#### 3.1.1. Geometría de curvas en $\mathbb{R}^3$

Comenzamos por motivar las construcciones que presentaremos en el capítulo con un recuento de las principales funciones geométricas de las curvas en  $\mathbb{R}^3$ . Dada una curva regular (o sea,  $c'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ ) de clase  $C^3$   $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , el vector tangente unitario  $T(t)$  se define como

$$T(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|},$$

su vector normal  $N(t)$  se define por

$$N_c(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|},$$

y su vector binormal  $B(t)$  es

$$B(t) = T(t) \times N_c(t),$$

donde  $v \times w$  representa el producto vectorial. Estos vectores satisfacen las conocidas relaciones

$$T'(t) = \kappa(t)N_c(t),$$

$$N'_c(t) = -\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t),$$

$$B'(t) = -\tau(t)N_c(t),$$

que son llamadas relaciones de Frenet, y la terna  $\{T, N_c, B\}$  es denotada por **triedro de Frenet**. Estas ecuaciones describen totalmente la geometría de una curva y caracterizan a menos de movimientos rígidos la curva  $c(t)$ . La curvatura  $\kappa(t)$  de  $c(t)$  es la variación del vector tangente, representa la aceleración, la torsión  $\tau(t)$  mide de alguna forma el desvío de la curva  $c(t)$  del plano generado por  $c'(t)$  y  $N_c(t)$ . Los siguientes resultados de rigidez geométrica dan interpretaciones precisas de  $\kappa$  y  $\tau$ .

**Lema 3.1.1.** *Una curva regular de clase  $C^2$  conexa tiene curvatura  $\kappa$  igual a cero en todo punto si y solo si la curva es un subconjunto de una recta.*

**Lema 3.1.2.** *Una curva regular plana de clase  $C^2$  conexa tiene curvatura  $\kappa$  constante en todo punto si y solo si la curva es un subconjunto de una circunferencia.*

**Lema 3.1.3.** *Una curva regular de clase  $C^3$  conexa tiene torsión  $\tau$  nula en todo punto si y solo si la curva está contenida en un plano.*

En el caso de una superficie parametrizada  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , una primera aproximación al estudio de la geometría local nos llevaría a considerar todas las curvas en la superficie junto con sus funciones

geométricas. Un concepto de curvatura basado en apenas un vector tangente no tendría mucha utilidad pues cada punto de la superficie tiene un plano de vectores tangentes. Siguiendo esta argumentación nos veríamos obligados a considerar infinitas curvaturas en cada punto, al menos una para cada vector tangente. Matemáticos de los siglos XVIII y XIX, entre los cuales Gauss tiene destaque especial, propusieron una forma de simplificar el estudio de los cuantificadores geométricos de una superficie concentrándose en el comportamiento del campo de vectores normales. En lugar de estudiar la variación de los vectores tangentes a curvas en la superficie, estudiar la variación del campo de vectores **normales unitarios** de la parametrización. El vector normal unitario asociado a la parametrización  $\Phi$  es

$$N(\Phi(x, y)) = n(\Phi(x, y)) / \|n(\Phi(x, y))\|.$$

Este vector es único, y si bien en el caso de curvas en  $\mathbb{R}^3$  no sea la única dirección normal a la curva, en el caso de curvas planas si lo es. Esto es consecuencia de lo que llamamos **codimensión** de un objeto: lo que sumado a la dimensión es igual a la dimensión del espacio ambiente. Es más, si  $c$  es una curva plana parametrizada por longitud de arco, el módulo de la curvatura  $\kappa(t)$  de  $c(t)$  es exactamente la norma de la derivada del vector normal unitario.

Motivados por este modo distinto de ver una superficie en  $\mathbb{R}^3$ , no como un objeto bidimensional en el espacio sino como un objeto de codimensión 1, consideramos a partir de este momento la aplicación que asocia a cada punto de la superficie su normal unitaria con respecto a una parametrización dada. Esta función es conocida como aplicación normal de Gauss.

**Definición 3.1.1.** *Dada una parametrización  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de una superficie  $M$ , y su normal unitaria asociada  $N$ , definimos la **aplicación de Weingarten** como la diferencial de  $N$  en cada punto  $p$ ,*

$$D_p N : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

**Lema 3.1.4.** *La imagen de la aplicación de Weingarten es un subespacio de  $T_p M$ .*

*Demostración.* Debemos demostrar que la imagen de todo vector  $v \in T_p M$  por  $D_p N$  es un vector en  $T_p M$ . Consideremos el producto interno

$$\langle D_p N(v), N(p) \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} N(c(t)) \Big|_{t=0}, N(p) \right\rangle .$$

Es suficiente probar que el producto anterior es cero para todo  $v \in T_p M$ . Veamos: por la regla de Leibnitz del producto interno usual tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle N(c(t)), N(c(t)) \rangle = 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial t} N(c(t)), N(c(t)) \right\rangle ,$$

por lo que en  $t = 0$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle N(c(t)), N(c(t)) \rangle \Big|_{t=0} &= 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial t} N(c(t)) \Big|_{t=0}, N(c(0)) \right\rangle \\ &= \langle D_p N(v), N(p) \rangle . \end{aligned}$$

Pero la norma de  $N(c(t))$  es 1 para todo  $t$  lo que implica que el lado izquierdo de la ecuación anterior es cero.  $\square$

**Lema 3.1.5.** *Dado  $p \in M$ , la función  $k_p(v) = - \langle D_p N(v), v \rangle$ , definida en los vectores tangentes en  $p$  de norma 1, es la curvatura de la curva (parametrizada por longitud de arco) obtenida al intersectar  $M$  con el plano generado por  $N(p)$  y el vector  $v$ .*

**Ejercicio:** Demostrar este lema.

Este Lema es bastante elocuente en lo que se refiere a  $D_p N$ , nos dice que condensa la información sobre todas las curvaturas de curvas en  $M$  obtenidas intersectando la superficie con planos que contienen  $N(p)$ .

## 3.2. La curvatura de Gauss-Kronecker

**Definición 3.2.1.** *La curvatura de Gauss-Kronecker  $K(p)$  (o simplemente curvatura de Gauss) de la superficie parametrizada  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  en el punto  $p$  es el determinante de la matriz de la aplicación de Weingarten en una base ortonormal de  $T_p M$ .*

La matriz de la aplicación de Weingarten en una base ortonormal de vectores coordinados normalizados es conocida como la **segunda**

**forma fundamental** de la parametrización. Su notación es  $II_p$ . Es siempre posible escoger parametrizaciones de una superficie tales que en un punto  $p$  dado los vectores coordenados son perpendiculares. Por lo que en principio sería siempre posible obtener  $II_p$ . Pero en realidad lo que importa para fines geométricos son los autovalores de dicha matriz y su determinante, que no dependen de la base escogida para representar la transformación de Weingarten.

### Ejemplos:

1) Un plano en el espacio Euclidiano tiene curvatura cero como era de esperarse. La aplicación normal de Gauss es constante y por lo tanto su derivada es idénticamente cero en todos los puntos.

2) La esfera de radio  $r$   $S_r = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$  tiene curvatura  $\frac{1}{r^2}$ . Pues en cada punto  $p \in S_r$  el vector normal unitario coincide con  $\frac{p}{\|p\|} = \frac{p}{r}$  salvo orientación (multiplicación por 1 o  $-1$ ). La aplicación de Weingarten es entonces

$$D_p N = \frac{1}{r} I$$

donde  $I$  es la matriz identidad, y por lo tanto su determinante es  $\frac{1}{r^2}$ .

3) Superficies de revolución de la forma

$$G(t, \alpha) = R_\alpha(c(t)) = (\cos(\alpha)x(t), \sin(\alpha)x(t), z(t)),$$

obtenidas girando una curva plana  $c(t) = (x(t), 0, z(t))$  en torno al eje vertical, tienen aplicación normal de Gauss

$$N(G(t, \alpha)) = n(G(t, \alpha)) / \|n(G(t, \alpha))\|,$$

donde  $n(G(t, \alpha)) = (-z'(t)x(t)\cos(\alpha), -z'(t)x(t)\sin(\alpha), x'(t)x(t))$ .

Suponiendo que  $x(t) > 0$  para todo  $t$ , tenemos

$$\begin{aligned} N(G(t, \alpha)) &= n(G(t, \alpha)) / \|n(G(t, \alpha))\| \\ &= (-z'(t)\cos(\alpha), -z'(t)\sin(\alpha), x'(t)) / \sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2}, \end{aligned}$$

y suponiendo además que la curva generadora  $c(t)$  está parametrizada por longitud de arco,

$$\begin{aligned} N(G(t, \alpha)) &= n(G(t, \alpha)) / \|n(G(t, \alpha))\| \\ &= (-z'(t)\cos(\alpha), -z'(t)\sin(\alpha), x'(t)). \end{aligned}$$

Los vectores tangentes coordenados son perpendiculares, y normalizados son

$$\begin{aligned}\partial_t / \|\partial_t\| &= (\cos(\alpha)x'(t), \sin(\alpha)x'(t), z'(t)), \\ \partial_\alpha / \|\partial_\alpha\| &= (-\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0).\end{aligned}$$

Las derivadas de  $N$  en las direcciones coordenadas son

$$\begin{aligned}D_p N(\partial_t) &= \frac{\partial}{\partial t} N(G(t, \alpha)) = (-z''(t)\cos(\alpha), z''(t)\sin(\alpha), x''(t)), \\ D_p N(\partial_\alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} N(G(t, \alpha)) = (z'(t)\sin(\alpha), -z'(t)\cos(\alpha), 0).\end{aligned}$$

Observemos que por el hecho de tener  $c(t)$  velocidad constante 1,  $(x'(t))^2 + (z'(t))^2 = 1$ , se tiene

$$x'x'' + z'z'' = 0$$

lo que implica

$$-z'' = x'x''/z'.$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación de  $D_p N(\partial_t)$  obtenemos

$$D_p N(\partial_t) = \frac{x''}{z'} \partial_t,$$

o sea, el vector  $\partial_t$  tangente a los meridianos es un autovector de la aplicación de Weingarten. Lo mismo pasa con los vectores tangentes a los paralelos,

$$D_p N(\partial_\alpha) = -\frac{z'}{\|\partial_\alpha\|} \partial_\alpha = -\frac{z'}{x} \partial_\alpha.$$

Así que en este caso es sencilla la expresión de la matriz de  $D_p N$  en la base ortonormal  $\partial_t / \|\partial_t\|, \partial_\alpha / \|\partial_\alpha\|$ :

$$II_p = \begin{pmatrix} -\frac{x''}{z'} & 0 \\ 0 & \frac{z'}{x} \end{pmatrix}.$$

De esta manera, concluimos que la curvatura de Gauss de la superficie de revolución está dada por la función

$$K(G(t, \alpha)) = -x''/x.$$

**Ejercicio:** Calcule la aplicación de Weingarten y la curvatura de Gauss en los puntos de un gráfico  $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , donde  $f$

es de clase  $C^3$ . Cómo es la aplicación de Weingarten en los puntos críticos de  $f$ ? Una forma de calcular la curvatura es aprovechando la forma simplificada que tiene dicha aplicación en los puntos críticos.

Uno de los resultados más importantes de la teoría fundamental de las superficies es el llamado Teorema Egregio de Gauss:

**Teorema 3.2.1.** *La curvatura de Gauss es invariante por isometrías del espacio Euclidiano. O sea, si  $M$  es una superficie en  $\mathbb{R}^3$ , y  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una isometría, entonces la curvatura de Gauss  $K(p)$  de  $M$  en el punto  $p$  es igual a la curvatura de Gauss  $K(T(p))$  de  $T(M)$  en el punto  $T(p)$ .*

En realidad, este teorema vale en el conjunto de las superficies en general, pero lo enunciamos restringiéndonos al conjunto de las superficies en  $\mathbb{R}^3$ . La demostración, que dejamos al lector, es relativamente sencilla: basta verificar que los coeficientes de la segunda forma fundamental de  $M$  en  $p$  con respecto a una parametrización  $\Phi$  coinciden con los coeficientes de la segunda forma fundamental de  $T(M)$  en  $T(p)$  con respecto a la parametrización  $T(\Phi)$ .

Otro resultado importante de la geometría de las superficies en  $\mathbb{R}^3$  que generaliza el Lema 3.1.2 es

**Teorema 3.2.2.** *Toda superficie compacta sin borde en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura Gaussiana constante es una esfera de radio  $r > 0$ .*

El teorema anterior es conocido como el teorema de la esfera, no lo demostraremos aquí por motivos de tiempo. El lector interesado puede ver la prueba en [2] por ejemplo. Este teorema nos dice que las esferas son las únicas superficies compactas de curvatura constante, así como los círculos son las únicas curvas planas compactas de curvatura constante.

**Ejercicio:** Si la curva generadora de una superficie de revolución es una recta, demostrar que la curvatura de Gauss es cero en todo punto. Así que los planos no son las únicas superficies en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura de Gauss cero.

**Ejercicio:** Si una superficie de clase  $C^2$  en el espacio Euclidiano tiene la propiedad de que por todo punto de la misma pasa una recta que está a su vez contenida en la superficie, demostrar que la curvatura de Gauss

es cero en todo punto de la superficie. Estas superficies son conocidas como superficies *regladas*.

En la próxima sección obtendremos otros teoremas de rigidez que generalizan resultados conocidos para curvas planas.

### 3.3. Curvaturas principales y puntos umbílicos

En esta sección haremos un análisis más detallado de la aplicación de Weingarten. El primer resultado, fundamental para los objetivos de la sección, es el siguiente:

**Lema 3.3.1.** *La aplicación de Weingarten es una transformación lineal simétrica.*

*Demostración.* Una transformación lineal simétrica  $A : T_pM \rightarrow T_pM$  está caracterizada por la siguiente propiedad:

$$\langle A(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$$

para todo par de vectores  $v, w$  en  $T_pM$ . Sea  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  una parametrización de un abierto de  $p$ , sean  $\partial_u, \partial_s$  los vectores coordenados de  $\Phi(u, s)$ . Supongamos también que  $\Phi(0, 0) = p$ . Tenemos entonces

$$\langle D_p N(\partial_u), \partial_s \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial u} N(\Phi(u, 0) \Big|_{u=0}, \partial_s(\Phi(0, 0)) \right\rangle .$$

Por la regla de Leibnitz del producto interno,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial u} N(\Phi(u, 0) \Big|_{u=0}, \partial_s(\Phi(0, 0)) \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial u} \langle N(\Phi(u, 0)), \partial_s(\Phi(u, 0)) \Big|_{u=0} \\ &\quad - \langle N(\Phi(u, 0) \Big|_{u=0}, \partial_u(\partial_s(\Phi(u, 0)) \Big|_{u=0}) \rangle . \end{aligned}$$

Notemos que  $\frac{\partial}{\partial u} \langle N(\Phi(u, 0)), \partial_s(\Phi(u, 0)) \rangle = 0$  porque  $N$  es siempre perpendicular a la superficie. Y además,  $\partial_u(\partial_s) = \partial_s(\partial_u)$ , dado que estamos considerando vectores coordenados y por lo tanto el producto de Lie  $[\partial_u, \partial_s]$  se anula. Así que

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial}{\partial u} N(\Phi(u, 0) \Big|_{u=0}, \partial_s(\Phi(0, 0)) \right\rangle \\ &= - \langle N(\Phi(u, 0) \Big|_{u=0}, \partial_s(\partial_u(\Phi(u, 0)) \Big|_{u=0}) \rangle \\ &= - \left( \frac{\partial}{\partial s} \langle N(\Phi(u, 0)), \partial_u(\Phi(u, 0)) \rangle \Big|_{u=0} \right. \\ &\quad \left. - \langle \partial_s N(\Phi(u, 0)) \Big|_{t=0}, \partial_u(\Phi(0, 0)) \rangle \right) . \end{aligned}$$

Repetiendo el argumento anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle D_p N(\partial_u), \partial_s \rangle &= \langle \partial_s N(\Phi(u, 0)) |_{t=0}, \partial_u(\Phi(0, 0)) \rangle \\ &= \langle D_p N(\partial_s), \partial_u \rangle \end{aligned}$$

probando la simetría de la aplicación de Weingarten en el par de vectores coordenados.

Finalmente, el álgebra lineal de transformaciones lineales nos dice que si la matriz de una transformación  $A$  lineal en una base de vectores es simétrica, entonces  $A$  es simétrica.  $\square$

El resultado anterior nos dice que la segunda forma fundamental es siempre diagonalizable.

**Definición 3.3.1.** *Dado  $p \in M$ , un valor principal de curvatura es un autovalor de la aplicación de Weingarten, y una dirección principal de curvatura es un autovector de la aplicación de Weingarten.*

En la sección anterior ya calculamos los autovalores y autovectores de ciertas aplicaciones de Weingarten, en casos en los cuales la matriz de la misma era diagonal. En el caso de la esfera todos los autovalores son iguales y todo vector es autovector. En general, los valores principales de curvatura  $\lambda_1(p) \leq \lambda_2(p)$  son la menor y la mayor curvatura posibles en el conjunto de curvas por  $p$  con velocidad unitaria obtenidas intersectando  $M$  con planos que contienen  $N(p)$ .

**Definición 3.3.2.** *Un punto  $p \in M$  es llamado umbílico si la aplicación de Weingarten es un múltiplo de la identidad.*

**Proposition 3.3.1.** *Si  $p \in M$  no es umbílico, existe una vecindad abierta  $U \subset M$  de  $p$  donde existen un par de campos vectoriales diferenciables  $X, Y$  perpendiculares entre sí y tangentes a la superficie  $M$ , tales que  $X(q), Y(q)$  son direcciones principales de curvatura.*

*Demostración.* Daremos apenas una idea de la demostración, que es bastante geométrica. Si  $p$  no es umbílico, los autovectores de la segunda forma fundamental  $II_p$  son dos únicas direcciones tangentes en  $T_p M$ . Por continuidad de  $II_p$ , existe una vecindad abierta  $U$  de  $p$  donde lo mismo pasa en todo  $q \in U$ . Por lo tanto, las direcciones principales de curvatura de  $II_q$  forman un campo de rectas en  $U$ , que son perpendiculares en

cada punto (pues la matriz  $II_p$  es simétrica). Podemos escoger campos unitarios  $X, Y$  tangentes a cada uno de los campos de rectas, de forma que sean continuos (diferenciables en realidad).  $\square$

Estos campos  $X, Y$  son llamados campos de líneas de curvatura y las curvas tangentes a cada uno de ellos (existen en todo punto de  $U$  por la teoría de las ecuaciones diferenciales) son llamados **líneas de curvatura**.

A continuación, mostraremos algunas aplicaciones de los conceptos de la sección a problemas de clasificación y rigidez de superficies. El próximo resultado es una caracterización de la esfera y el plano en términos de puntos umbílicos.

**Teorema 3.3.1.** *Una superficie  $M$  conexa donde todos los puntos son umbílicos es parte de un plano o de una esfera.*

*Demostración.* Si todos los puntos de  $M$  son umbílicos,  $D_p N(v) = \lambda(p)v$  para todo  $v \in T_p M$ , donde  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $C^1$ . Si tomamos una parametrización  $\Phi(x, y)$  de un abierto  $U$  conteniendo  $p \in M$ , tenemos

$$D_q N(\partial_x) = \frac{\partial}{\partial x} N(q) = \lambda(q)\partial_x,$$

$$D_q N(\partial_y) = \frac{\partial}{\partial y} N(q) = \lambda(q)\partial_y,$$

para todo  $q \in U$ . Como las derivadas mixtas de  $N$  conmutan, se tiene que  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} N$ . Además, recordemos que el producto de Lie de los campos coordenados es cero. Aplicando estas observaciones a las ecuaciones anteriores concluimos que

$$\frac{\partial}{\partial y} \lambda \partial_x = \frac{\partial}{\partial x} \lambda \partial_y,$$

en todo punto de  $U$ . Como los vectores coordenados son linealmente independientes, las funciones  $\frac{\partial}{\partial y} \lambda$  y  $\frac{\partial}{\partial x} \lambda$  deben anularse en  $U$ . Y siendo  $\lambda$  una función de clase  $C^1$  deducimos que  $\lambda$  debe ser constante en  $U$ . Por la conexidad de  $M$ ,  $\lambda$  debe ser constante en  $M$  y por lo tanto, o es cero siempre y la aplicación normal de Gauss es constante, o es siempre no nula. En el primer caso la superficie es subconjunto de un plano,

en el segundo podemos suponer que es siempre positiva (cambiando la orientación de la normal si fuera necesario). Por el Lema 3.1.5, toda curva en  $M$  obtenida intersectando un plano que contiene  $N(p)$  con  $M$  tiene curvatura constante  $\lambda$ . Por los resultados de geometría plana sobre curvas, las curvas anteriores están contenidas en círculos de radio  $\frac{1}{\lambda}$  que pasan por  $p$  y son todos tangentes a  $T_pM$ . La unión de estos círculos es una esfera.  $\square$

Las líneas de curvatura, así como las geodésicas, forman parte de una familia de curvas en las superficies que son denominadas líneas especiales (existen otros tipos). El nombre "especial" refleja la especificidad de la propiedad geométrica que las caracteriza. Los siguientes resultados nos ayudan a entender mejor la geometría subyacente a los conceptos anteriores.

**Lema 3.3.2.** *Sea  $M$  una superficie de clase  $C^3$ . Entonces toda geodésica plana en  $M$  es una línea de curvatura.*

*Demostración.* En la demostración usaremos el triedro de Frenet. Si  $\gamma : I \rightarrow M$  es una geodésica plana parametrizada por longitud de arco, su vector normal  $N_\gamma$  está contenido en el plano  $\Pi$  que contiene la curva, y al mismo tiempo coincide con el vector  $N(\gamma)$  normal unitario de una parametrización conveniente de la superficie. Por las fórmulas de Frenet,

$$N'_\gamma(t) = -\kappa(t)T(t),$$

lo que implica que

$$N'_\gamma(t) = D_{\gamma(t)}N(\gamma'(t)) = D_{\gamma(t)}N(T(t)) = -\kappa(t)T(t),$$

caracterizando  $T(t)$  como autovector de la aplicación de Weingarten.  $\square$

Observemos que la afirmación recíproca del lema anterior es falsa, porque ya vimos que los paralelos de una superficie de revolución son líneas de curvatura. Como en general no son geodésicas, y siempre son curvas planas, muestran que no toda línea de curvatura plana es geodésica. El próximo resultado prueba que la combinación de dos propiedades especiales en una curva de la superficie es algo realmente excepcional.

**Proposition 3.3.2.** *Sea  $M$  una superficie conexa en  $\mathbb{R}^3$ . Toda curva de clase  $C^3$   $\gamma : I \rightarrow M$  que sea una geodésica cuyos vectores tangentes son direcciones principales de curvatura, es una curva plana.*

*Demostración.* Comenzamos por escribir la ecuación de la torsión  $\tau$  de una curva  $\gamma(t)$ ,  $t \in I$ , de clase  $C^3$ :

$$B(t) = T(t) \times N_\gamma(t)$$

$$B'(t) = -\tau(t)N_\gamma(t).$$

Calculando  $B'(t)$ , aplicando la regla de Leibnitz de la derivación del producto vectorial de funciones vectoriales, tenemos

$$B'(t) = T'(t) \times N_\gamma(t) + T(t) \times N'_\gamma(t) = T(t) \times N'_\gamma(t),$$

donde el primer sumando es cero dado que  $T'(t) = \kappa(t)N_\gamma(t)$ . Ahora, supongamos que  $\gamma(t)$  es geodésica parametrizada por longitud de arco. Entonces el vector  $N_\gamma(t)$  es perpendicular a la superficie y por lo tanto,  $N_\gamma(t)$  es la aplicación normal de Gauss restringida a  $\gamma(t)$ . Así, como en el lema anterior, se tiene que  $N'_\gamma(t) = D_{\gamma(t)}N(\gamma'(t))$ , y si suponemos además que  $\gamma'(t)$  es autovector de la aplicación de Weingarten, obtenemos que  $N'_\gamma(t) = \lambda(t)\gamma'(t) = \lambda(t)T(t)$ . Substituyendo esta ecuación en la expresión de  $B'(t)$  concluimos que  $B'(t) = 0$  para todo  $t \in I$ , lo que implica que  $\tau(t) = 0$  para todo  $t \in I$  y por lo tanto la curva  $\gamma$  es una curva plana.  $\square$

### 3.4. Ejercicios complementarios

En esta sección final enunciamos algunos resultados importantes de la teoría fundamental de las superficies en  $\mathbb{R}^3$  sin demostraciones, que dejamos al lector por falta de tiempo.

**Ejercicio:** Calcular los valores principales y las direcciones principales de curvatura del gráfico de  $f(x, y) = x^2 - y^2$  en el punto  $(0, 0, 0)$ . Calcular la curvatura de Gauss en todo punto y constatar que es negativa.

**Ejercicio:** Sean  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  dos funciones escalares de clase  $C^3$  tales que  $f(0, 0) = g(0, 0)$ , sus gráficos son horizontales en  $(0, 0, 0)$ , y satisfacen

$$f(x, y) \leq g(x, y)$$

para todo  $(x, y)$  en una vecindad abierta de  $(0, 0)$ . Demostrar que

$$K_f(0, 0) \geq K_g(0, 0)$$

donde  $K_f$ ,  $K_g$  son las curvaturas Gaussianas de los gráficos de  $f$  y  $g$  respectivamente.

**Ejercicio:** Demuestre usando el ejercicio anterior que toda superficie compacta  $M$  en  $\mathbb{R}^3$  tiene un punto de curvatura positiva.

(Sug.: Existe una esfera centrada en el origen tangente a  $M$  en el punto de  $M$  de mayor norma.)



## Capítulo 4

# Clasificación de las superficies de revolución con curvatura constante

El objetivo de este capítulo es describir analíticamente todas las superficies de revolución que tienen curvatura de Gauss constante. Buena parte del trabajo está hecha, en efecto, en el capítulo anterior demostramos que la curvatura de Gauss de una superficie de revolución definida en coordenadas cilíndricas por

$$\Phi(t, \alpha) = (x(t)\cos(\alpha), x(t)\sin(\alpha), z(t)),$$

generada por la rotación de una curva regular  $c(t) = (x(t), 0, z(t))$  de clase  $C^3$  en torno al eje vertical es

$$K(\Phi(t, \alpha)) = -\frac{x''(t)}{x(t)},$$

siempre que la curva  $c$  esté parametrizada por longitud de arco, o sea,  $\sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2} = 1$ .

Esto nos dice que si la curvatura es constante la coordenada  $x(t)$  de la curva generadora satisface

$$x''(t) + Kx(t) = 0$$

donde  $K$  es una constante. Esta ecuación diferencial es bastante conocida en física, es la ecuación del oscilador armónico simple sin roce ni

fuerzas externas. En geometría esta ecuación es parte de una familia de ecuaciones llamadas **ecuaciones de Jacobi**, cuyas soluciones pasamos a describir a continuación.

## 4.1. Ecuaciones diferenciales de orden 2 con coeficientes constantes

La ecuación de Jacobi  $x''(t) + Kx(t) = 0$  es una ecuación diferencial de orden 2 con coeficientes constantes. Resolver la ecuación diferencial consiste en encontrar todas las funciones  $x(t)$  que satisfacen la ecuación. Por lo tanto, enunciaremos antes que nada algunas propiedades básicas del conjunto de soluciones de ecuaciones de orden 2 con coeficientes constantes.

**Lema 4.1.1.** *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. Una solución  $x(t)$  de la ecuación de Jacobi está determinada (únicamente) por los valores  $x(t_0)$ ,  $x'(t_0)$  para un  $t_0$  cualquiera donde  $x(t)$  esté definida.
2. El conjunto de las soluciones de una ecuación de Jacobi es un espacio vectorial de dimensión dos de funciones diferenciables.
3. Considerar el polinomio  $p(z) = z^2 + K$ . Las raíces de  $p(z)$ ,  $\sqrt{-K}$ ,  $-\sqrt{-K}$  determinan una base del espacio de las soluciones: las funciones

$$x_+(t) = e^{\sqrt{-K}t}$$

$$x_-(t) = e^{-\sqrt{-K}t}$$

son una base del espacio de las soluciones.

4. Si  $K > 0$  una base del espacio de las soluciones con valores reales es

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{-K}t} + e^{-\sqrt{-K}t}) = \cos(\sqrt{K}t)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2i}(e^{\sqrt{-K}t} - e^{-\sqrt{-K}t}) = \text{sen}(\sqrt{K}t).$$

Dejamos la demostración del lema al lector, quien probablemente ya estudió estas ecuaciones en los cursos de física elemental o cálculo. Llamamos la atención apenas sobre la demostración del primer ítem, que necesita el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias, ya enunciado anteriormente.

## 4.2. Superficies de revolución con curvatura cero

Las superficies con curvatura cero son descritas por la ecuación  $x''(t) = 0$ , lo que implica que  $x(t) = at + b$  con  $a, b$  constantes reales. La ecuación de la curva  $c(t)$  es

$$c(t) = (at + b, 0, z(t)).$$

Para obtener la expresión de  $z(t)$  aplicamos la relación

$$z'(t) = \sqrt{1 - (x'(t))^2} = \sqrt{1 - a^2},$$

que es constante. Por lo que la expresión de  $c(t)$  es

$$c(t) = (at + b, 0, At + B),$$

donde  $A = \sqrt{1 - a^2}$  y  $B$  es una constante real. La superficie de revolución satisface la ecuación cartesiana

$$(z - B)^2 = \frac{A^2}{a^2}(x - b)^2$$

que es la ecuación de un cono con eje vertical de simetría. Notemos que si  $a^2 = 1$  la superficie es un plano horizontal.

## 4.3. Superficies con curvatura negativa constante

Si tenemos que  $K < 0$ , una base para el espacio de las soluciones de la ecuación de Jacobi es

$$x_+(t) = e^{\sqrt{-K}t}$$

$$x_-(t) = e^{-\sqrt{-K}t},$$

por lo que la solución general de la ecuación es

$$x(t) = Ae^{\sqrt{-K}t} + Be^{-\sqrt{-K}t},$$

y de la relación  $(z'(t))^2(t) = 1 - (x'(t))^2$  deducimos

$$z'(t) = \sqrt{1 - (Ae^{\sqrt{-K}t} + Be^{-\sqrt{-K}t})^2}.$$

Para obtener la expresión de  $z(t)$  sería necesario integrar la función anterior, no parece fácil. Sin embargo, podemos hacer algunas observaciones basadas en la expresión anterior.

1. No toda solución de la ecuación de Jacobi corresponde a una superficie de revolución diferenciable con curvatura negativa. En efecto, si la superficie de revolución generada por  $c$  contiene algún punto del eje vertical  $(0, 0, z)$  entonces no puede ser diferenciable en este punto. El motivo es sencillo: como estamos rotando la curva en torno al eje vertical, para que la superficie sea diferenciable en un punto de dicho eje el plano tangente a la superficie en este punto debe ser horizontal. Esto implica que la derivada de la curva  $c(t)$  en este punto debe ser horizontal de la forma  $c'(t_0) = (b, 0, 0)$ . Como la curvatura de la superficie es constante no nula, la curvatura de la curva  $\kappa(t)$  en este punto no será cero. Pero al rotar una curva con estas propiedades en torno al eje vertical siempre obtenemos una superficie con curvatura *positiva* en una vecindad del punto en el eje vertical.
2. Las soluciones  $x(t)$  donde  $A > 0$ ,  $B > 0$  definen superficies de revolución diferenciables con curvatura constante negativa. Observemos que estas superficies nunca intersectan el eje de rotación. Las curvas generadoras son curvas convexas planas en  $\mathbb{R}^3$ .

Una descripción más detallada de estas superficies puede ser encontrada en [4].

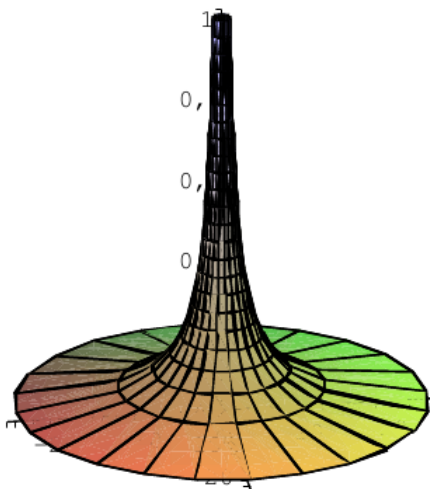


Figura 4.1: Superficie de revolución completa de curvatura negativa

#### 4.4. Superficies con curvatura positiva constante: esferas

Consideremos ahora el caso que más nos interesa para los fines de la exposición: curvatura constante positiva. Las soluciones de la ecuación de Jacobi son generadas por

$$x_1(t) = \cos(\sqrt{K}t)$$

$$x_2(t) = \text{sen}(\sqrt{K}t),$$

y la solución general puede ser escrita de la forma

$$x(t) = A\cos(\sqrt{K}t + B)$$

con  $A, B$  constantes. Como la función  $\frac{x''(t)}{x(t)}$  coincide con la curvatura de la curva  $c(t)$ , entonces la curva  $c(t)$  (que es una curva plana) debe ser un arco de círculo de radio  $\frac{1}{\sqrt{K}}$ . Este resultado conocido en el plano puede ser verificado directamente usando las ecuaciones anteriores. En efecto, supongamos que la curva  $c(t)$  tiene un punto  $c(t_0)$  que está en el eje vertical, o sea  $c(t_0) = (0, 0, z(t_0))$ . Supongamos también que  $B = 0$ , el

caso general se reduce sin dificultad a este caso. Tenemos entonces que  $x(t_0) = 0 = A \cos(\sqrt{K}t_0)$ , lo que implica que

$$t_0 = \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{K}},$$

donde  $k$  es un entero. Como observamos anteriormente,  $c'(t_0)$  debe ser un vector horizontal y por lo tanto

$$(z'(t_0))^2 = 1 - (x'(t_0))^2 = 1 - A^2 K \operatorname{sen}^2(\sqrt{K}t_0).$$

Consideremos  $k = 1$ , el resto de los casos es similar. Tenemos

$$\operatorname{sen}(\sqrt{K}t_0) = 1 = \frac{1}{A\sqrt{K}}$$

y por lo tanto,

$$A = \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

La ecuación de  $x(t)$  es entonces

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{K}} \cos(\sqrt{K}t)$$

y la ecuación de  $z(t)$  es

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{sen}(\sqrt{K}t),$$

lo cual caracteriza un círculo de radio  $\frac{1}{\sqrt{K}}$ .

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema principal de la exposición.

## Capítulo 5

# Rigidez geométrica y geodésicas

En este capítulo llegamos a la conclusión de la exposición, vamos a demostrar que

**Teorema 5.0.1.** *Toda superficie  $M$  conexa en  $\mathbb{R}^3$  de clase  $C^3$  tal que toda geodésica es una curva plana, tiene que ser parte de una esfera o de un plano.*

Dividimos la demostración en varias etapas.

### 5.1. Geodésicas e intersecciones de la superficie con planos

En primer lugar, demostramos algunas propiedades especiales satisfechas por superficies en las condiciones del teorema principal, que generalizan características de la esfera de radio  $r > 0$ .

**Lema 5.1.1.** *Un plano  $P$  corta la superficie  $M$  en una geodésica  $\gamma_P$  si y solo si  $P$  es perpendicular a la superficie  $M$  a lo largo de la curva regular  $\gamma_P$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\gamma(t)$  es geodésica y está en la intersección de  $M$  con un plano  $P$ . El vector  $N_{\gamma(t)}$  normal a la curva en  $\mathbb{R}^3$  está contenido en  $P$  y por definición de geodésica,  $N_{\gamma(t)}$  debe ser perpendicular a  $T_{\gamma(t)}M$  para todo  $t$ . Así que el plano  $P$  contiene todos los

vectores normales a la superficie por los puntos de  $\gamma(t)$ , lo que implica que  $P$  corta  $M$  perpendicularmente en  $\gamma(t)$ .

Supongamos ahora que un plano  $P$  corta la superficie  $M$  perpendicularmente a lo largo de una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  diferenciable y regular, parametrizada por longitud de arco. El vector normal  $N_\gamma$  de la curva está contenido en  $P$ , y es perpendicular a  $\gamma'(t)$ . Como  $\gamma'(t)$  es tangente a  $T_{\gamma(t)}M$ , tenemos que  $T_{\gamma(t)}M \cap P$  consiste justamente en la recta generada por  $\gamma'(t)$  y por lo tanto, el vector  $N_\gamma$  es también perpendicular a  $T_{\gamma(t)}M$ . Así,  $N_{\gamma(t)}$  coincide con el vector normal a  $M$  en  $\gamma(t)$ ,  $N(\gamma(t))$ , lo que implica que  $\gamma(t)$  es geodésica por definición.  $\square$

**Lema 5.1.2.** *Suponer que toda geodésica de la superficie  $M$  es plana. Entonces todo plano  $P$  que es perpendicular a  $M$  en un punto debe ser perpendicular a  $M$  a lo largo de  $M \cap P$ , y la curva  $M \cap P$  es una geodésica.*

*Demostración.* Sea  $P$  un plano que es perpendicular a  $M$  en un punto  $p \in M \cap P$ . El plano  $P$  contiene la dirección del vector  $N(p)$  que es perpendicular a la recta  $T_pM \cap P$ . Considerar la geodésica por  $p$  cuyo vector tangente en  $p$  es un vector unitario  $v$  en la dirección de la recta  $T_pM \cap P$ , llamemos esta geodésica de  $\gamma_{(p,v)}(t)$ . Esta geodésica existe y es única por el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Y por hipótesis, los vectores normales  $N_{\gamma_{(p,v)}}(t)$  de la curva  $\gamma_{(p,v)}(t)$  en  $\mathbb{R}^3$  están todos contenidos en el mismo plano de  $\mathbb{R}^3$ . Por lo tanto, todos están contenidos en  $P$  donde está el vector  $N_{\gamma_{(p,v)}}(0) = N(p)$ . Esto nos dice que la geodésica  $\gamma_{(p,v)}(t)$  es una curva contenida en el plano  $P$ , y  $P$  es perpendicular a  $M$  a lo largo de toda  $\gamma_{(p,v)}(t)$ . Un argumento sencillo de extensión prueba que  $T_pM \cap P$  debe ser una curva regular en la cual  $P$  es perpendicular a  $M$  y que debe ser una geodésica.  $\square$

## 5.2. Gráficos donde toda geodésica es una curva plana

A continuación, estudiamos el problema propuesto por el teorema principal en el caso de gráficos parametrizados por  $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , donde  $f$  es una función de clase  $C^3$ . En toda la sección supondremos que toda geodésica de  $M$  es una curva plana.

**Lema 5.2.1.** *Sea  $M$  el gráfico de una función escalar  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^3$ ,  $U$  abierto conexo. Dado  $p = \Phi(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in M$ , las curvas de nivel de  $f$  son círculos concéntricos en  $p$ .*

*Demostración.* Como vimos en la sección anterior, la intersección  $T_p M \cap P$  es una geodésica para todo plano  $P$  que contiene el vector normal  $N(p)$ . Como  $M$  es un gráfico, todo vector  $w \in T_p M$  está contenido en la intersección de algún plano  $P_w$  con  $T_p M$ . Supongamos sin perder generalidad que  $T_p M$  es horizontal, que  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , y que  $f(x_0, y_0) = 0$ . De esta manera,  $p = (0, 0, 0)$ , las rectas  $T_p M \cap P_w$  son  $r_w(t) = tw$ ,  $t \in \mathbb{R}^2$ , y las intersecciones  $M \cap P$  son justamente las imágenes por  $\Phi$  de dichas rectas,  $\gamma_{(p,w)}(t) = (tw_x, tw_y, f(tw))$ , donde  $w = (w_x, w_y)$  son las coordenadas de  $w$ .

Tomemos  $w$  de norma 1. El vector tangente unitario de  $\gamma_{(p,w)}$  es

$$T(t) = \frac{\gamma'_{(p,w)}(t)}{\|\gamma'_{(p,w)}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla_{\gamma_{(p,w)}(t)} f(w)\|^2}} (w_x, w_y, \nabla_{\gamma_{(p,w)}(t)} f(w))$$

donde  $\nabla_q f$  es el gradiente de  $f$  en el punto  $q$ . El vector  $N(\gamma_{(p,w)}(t))$  es

$$N(\gamma_{(p,w)}(t)) = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_{(p,w)}(t)), -\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma_{(p,w)}(t)), 1 \right).$$

El vector  $N_{\gamma_{(p,w)}}(t)$  es paralelo a  $T'(t)$ ,

$$\begin{aligned} T'(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} (0, 0, \langle Hess(f)(w), w \rangle) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\langle Hess(f)(w), w \rangle}{(1 + \|\nabla f\|^2)^{-3/2}} (w_x, w_y, \nabla_{\gamma_{(p,w)}(t)} f(w)), \end{aligned}$$

donde  $Hess(f)$  es la matriz Hessiana de  $f$ , o la matriz de las derivadas segundas. El paralelismo entre  $N_{\gamma_{(p,w)}}(t)$  y  $T'(t)$  implica que existe una función  $a_w(t) \neq 0$  para todo  $t$  tal que  $T'(t) = a_w(t)N_{\gamma_{(p,w)}}(t)$  para todo  $t$ , lo que nos lleva a una relación entre las coordenadas de dichos vectores de la forma

$$b_w(t)w = a_w(t) \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_{(p,w)}(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma_{(p,w)}(t)) \right).$$

donde  $b_w(t) = \frac{1}{2} \frac{\langle Hess(f)(w), w \rangle}{(1 + \|\nabla f\|^2)^{-3/2}}$ . Notemos que si  $\langle Hess(f)(w), w \rangle \neq 0$ , o equivalentemente,  $\nabla_{r_w(t)} f \neq 0$ , entonces la función  $b_w(t)$  no se anula y el gradiente de  $f$  en  $r_w(t) = tw$  es paralelo a  $w$ , es un vector radial. Esto implica que

**Afirmación 1:** Si  $r_w(t_0)$  es un punto regular de  $f$  entonces existe una vecindad  $V$  de  $r_w(t_0)$  donde las curvas de nivel de  $f$  por cada  $(x, y) \in V$  es un círculo con centro en  $(0, 0)$ . Además, en dicha curva de nivel no existen puntos singulares o críticos de  $f$ .

En efecto, si  $\nabla_{r_w(t_0)} f \neq 0$ , entonces existe una vecindad  $V$  de  $r_w(t_0)$  donde  $\nabla_{(x,y)} f \neq 0$  para todo  $(x, y) \in V$ . En esta vecindad el gradiente de  $f$  es radial por la observación anterior y por lo tanto, las curvas de nivel de  $f$  por los puntos de  $V$  son perpendiculares a las direcciones radiales que parten del origen  $(0, 0)$ . Por el teorema de la función implícita, las curvas de nivel de  $f$  en  $V$  son diferenciables y tangentes a un campo vectorial diferenciable, perpendicular a estas direcciones radiales. Pero este campo es tangente a la familia de círculos con centro en  $(0, 0)$ . Por el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales de orden 1, estos círculos son las únicas curvas que tienen esta propiedad.

Falta verificar que si  $C$  es una curva de nivel de  $f$  que intersecta  $V$ , entonces  $V$  no contiene puntos críticos de  $f$ . Esto se debe a que el valor de  $f$  en la curva es constante e invariante por rotaciones del plano  $\mathbb{R}^2$ . Por lo que si  $(x, y) \in V$  es un punto regular, la función  $f$  será monótona localmente en la recta  $r_{(x,y)}(t) = t(x, y)$  y este comportamiento geométrico es preservado por rotaciones en el plano. Así que basta que una curva de nivel  $C$  tenga un punto regular de  $f$  para que toda la curva  $C$  se constituya de puntos regulares. Esto prueba totalmente la afirmación.

La afirmación 1 nos demuestra que todos los valores de  $f$  son invariantes por rotaciones del plano. De hecho, acabamos de demostrarlo para valores regulares, que son un conjunto abierto del dominio de  $f$ . Pero observar que el mismo argumento nos garantiza que los valores críticos de  $f$  también son invariantes por rotaciones (si una curva de nivel contiene un punto crítico, ella no puede contener puntos regulares pues la afirmación 1 implicaría que toda la curva sería regular). Así, las curvas de nivel son círculos con centro en  $(0, 0)$ , y aplicando una isometría conveniente deducimos el lema.  $\square$

### 5.3. Geodésicas planas y superficies de revolución

Los resultados de la sección anterior nos muestran la contundencia de la restricción impuesta sobre las geodésicas de la superficie  $M$ , y en esta sección nuestro objetivo es establecer una conexión entre dichos resultados y superficies de revolución de curvatura constante. Comenzamos por

**Lema 5.3.1.** *Si en las hipótesis del teorema principal,  $M$  el gráfico de una función escalar  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^3$ ,  $U$  abierto conexo, entonces dado  $p = \Phi(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in M$  existe una superficie de revolución  $S_p$  cuyo eje de rotación es la recta por  $p$  paralela a  $N_p$ , que contiene  $M$ .*

*Demostración.* Supongamos como en la demostración del lema anterior que  $p = (0, 0, 0)$ ,  $f(0, 0) = 0$  por lo tanto, y que  $T_p M$  es horizontal. Si los valores de  $f$  son invariantes por rotaciones que fijan el origen, entonces la superficie  $M$  es subconjunto de una superficie de revolución, obtenida de la siguiente forma. Considere la unión  $U' \supseteq U$  de los círculos centrados en  $(0, 0)$  que contienen puntos en las curvas de nivel de  $f$ . Extendemos  $f$  a  $\bar{f} : U' \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\bar{f}(x, y) = f(C(x, y))$ , donde  $C(x, y)$  es el círculo por  $(x, y)$  que contiene la curva de nivel  $C$  que pasa por  $U$ , y definir la superficie de revolución como el gráfico de  $\bar{f}$  en  $U'$ .  $\square$

El Lema anterior nos dice algo notable sobre la superficie  $M$ : tiene infinitos ejes de simetría. Esto ocurre raramente en superficies de revolución, la esfera y el plano son ejemplos, pero podríamos mencionar otros? El siguiente resultado responde esta pregunta.

**Lema 5.3.2.** *Sea  $M$  una superficie conexa y suponer que por  $p \in M$  pasa un eje de simetría de  $M$ . Entonces  $p$  es un punto umbílico.*

*Demostración.* Si por el punto  $p$  pasa un eje de simetría de  $M$ , entonces la segunda forma fundamental de  $M$  en  $p$ , que es invariante por isometrías, debe ser un múltiplo de la identidad. Las curvaturas principales y las direcciones principales de curvatura son invariantes por isometrías de la superficie, por lo que las curvaturas principales son constantes. Esto caracteriza un punto umbílico de  $M$ .  $\square$

**Corollary 5.3.1.** *Sea  $M$  una superficie conexa de revolución tal que todo punto es un eje de rotación de  $M$ . Entonces  $M$  tiene curvatura constante.*

*Demostración.* El lema anterior nos garantiza que la superficie  $M$  debe ser totalmente umbílica, por lo que aplicando el Teorema 3.3.1 deducimos que  $M$  tiene curvatura constante.  $\square$

### **Demostración del Teorema 5.0.1**

Sea entonces  $M$  una superficie conexa donde toda geodésica es una curva plana. Como toda superficie en  $\mathbb{R}^3$  es localmente el gráfico de una función escalar, podemos aplicarle a  $M$  los resultados obtenidos en este capítulo en vecindades abiertas adecuadas. Cubriendo  $M$  con un conjunto enumerable de tales vecindades, la conexidad de  $M$  en conjunto con el Lema 5.3.1 y el corolario anterior nos permiten afirmar que  $M$  tiene curvatura constante. Según la clasificación de las superficies de revolución con tal propiedad, tenemos que  $M$  es un subconjunto de un plano, o  $M$  tiene curvatura positiva y es subconjunto de una esfera, o tiene curvatura negativa. El punto final de la demostración es la observación siguiente: las superficies de revolución de curvatura negativa no tienen infinitos ejes de revolución. Como fue observado en el capítulo anterior, una superficie de revolución diferenciable de curvatura negativa no puede intersectar su eje de revolución, lo que descarta dichas superficies de nuestra argumentación debido al Lema 5.3.1. De esta forma, terminamos la demostración del Teorema principal y alcanzamos nuestro objetivo.

## Capítulo 6

# Superficies abstractas y Geometría Riemanniana

Teniendo ya una idea del significado de las geodésicas en superficies del espacio Euclidiano, podemos partir hacia el estudio de geodésicas en espacios más generales: las superficies abstractas. En un primer momento nuestro objetivo es hacer un recuento de varios conceptos básicos de geometría diferencial que serán fundamentales para la exposición. Nos limitaremos en muchos casos a enunciar resultados de la teoría básica sin mayores detalles, ya que gran parte de los mismos son generalizaciones naturales de los resultados de los capítulos anteriores. El lector interesado podría encontrar en los libros de Spivak [11], O'Neill [10], o Hicks [2] los detalles que falten en nuestra exposición.

### 6.1. Variedades diferenciables

Una *Variedad diferenciable*  $M$  de dimensión  $n$  y clase  $C^k$ ,  $k \geq 0$ , es un conjunto que admite un cubrimiento por subconjuntos  $U_i$ , o sea  $M = \cup_i U_i$ , que tienen la siguiente propiedad: existen biyecciones  $\Phi_i : U_i \rightarrow V_i$ , donde  $V_i$  es un abierto conexo de  $\mathbb{R}^n$ , tales que las funciones compuestas

$$\Phi_j(\Phi_i^{-1}) : V_i' \subset V_i \rightarrow V_j$$

son funciones de clase  $C^k$  como aplicaciones entre subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . La colección  $\{(U_i, \Phi_i)\}$  es denominada un atlas diferenciable de clase  $C^k$

de  $M$ , las funciones  $\Phi_i$  son llamadas coordenadas locales de  $M$  (o cartas locales), y las funciones  $\Phi_j(\Phi_i^{-1})$  son llamadas cambios de coordenadas. Una variedad es un conjunto que localmente puede ser parametrizado por un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , en particular  $\mathbb{R}^n$  es una variedad diferenciable. La definición implica que toda variedad hereda de  $\mathbb{R}^n$  una estructura de espacio topológico, y normalmente se asume que  $M$  como espacio topológico satisfaga los axiomas de enumerabilidad (primero y segundo) de los espacios topológicos abstractos, y que  $M$  sea un espacio Hausdorff. Recordemos que un espacio topológico  $X$  satisface el primer axioma de enumerabilidad si todo punto del espacio tiene una base enumerable de vecindades abiertas de la topología. El segundo axioma de enumerabilidad es un poco más fuerte que el primero: el espacio topológico  $X$  satisface el segundo axioma de enumerabilidad si posee una base enumerable de abiertos. Una base  $\mathcal{U}$  de  $X$  es un conjunto de abiertos del espacio tales que

1. Todo abierto de  $X$  contiene un abierto en  $\mathcal{U}$ ,
2. Intersecciones finitas y uniones cualesquiera de conjuntos de  $\mathcal{U}$  son integrantes de  $\mathcal{U}$ .

Todo subconjunto abierto de una variedad es una variedad con la misma clase de diferenciabilidad. Se dice que dos atlas de clase  $C^k$  de  $M$  son compatibles si la unión de ambos, que define otro atlas de  $M$ , es un atlas diferenciable de  $M$ . La compatibilidad define una relación de equivalencia entre los atlas de  $M$ , y diremos que una estructura diferenciable de clase  $C^k$  de  $M$  es una clase de equivalencia de atlas  $C^k$  compatibles. Siempre que hagamos referencia a una variedad diferenciable de clase  $C^k$  estaremos hablando de la variedad con su estructura diferenciable. Una función  $f : M \rightarrow N$  entre variedades  $C^\infty$   $M$  de dimensión  $m$ , y  $N$  de dimensión  $n$ , es de clase  $C^r$  si dados atlas  $\{U_i, \Phi_i\}$  de  $M$ , y  $\{A_j, \Psi_j\}$  de  $N$ , se tiene que las funciones  $\Psi_j(f(\Phi_i^{-1}))$  son funciones de clase  $C^r$  entre subconjuntos de  $\mathbb{R}^m$  y  $\mathbb{R}^n$ . Es simple verificar que la noción de diferenciabilidad de funciones no depende de los atlas escogidos en la definición siempre y cuando definan la misma estructura diferenciable en  $M, N$ . Para ejercitarse un poco en el manejo de estas definiciones sugerimos al lector la verificación de los siguientes enunciados:

**Ejemplo 1:** Superficies en  $\mathbb{R}^3$  son variedades diferenciables de dimensión 2.

**Ejemplo 2:** El Plano proyectivo real  $\mathbb{P}(\mathbb{R}, 2)$  definido como el conjunto de clases de equivalencia de rectas por el origen en  $\mathbb{R}^3$  por la relación:  $L$  es equivalente a  $R$  si son paralelas; es una superficie abstracta. Se puede parametrizar localmente con proyecciones estereográficas desde el origen en la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . En efecto, dado un hemisferio abierto de la esfera existe una correspondencia biunívoca entre sus puntos y las clases de las rectas por el origen determinadas por estos puntos. De forma que un hemisferio abierto parametriza un abierto del conjunto de las clases, y es posible cubrir el plano proyectivo con un conjunto finito de subconjuntos homeomorfos a hemisferios abiertos de la esfera.

**Ejemplo 3:** Grupos de matrices son ejemplos bastante usuales de variedades. El conjunto de matrices  $n \times n$  es una variedad de dimensión  $n^2$ , así como el conjunto de matrices inversibles; el conjunto de matrices de determinante 1 es una variedad de dimensión  $n^2 - 1$ , y el conjunto de matrices simétricas es una variedad de dimensión  $\frac{1}{2}n(n - 1)$ .

**Ejemplo 3:** Si  $(U, \Phi)$  es una carta local de  $M$  de dimensión  $m$ , entonces podemos escribir  $\Phi(p) = (x_1(p), x_2(p), \dots, x_m(p))$ , y las funciones  $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  son llamadas funciones coordenadas. Verificar que las funciones coordenadas son diferenciables.

## 6.2. Subvariedades, Espacio tangente

Un subconjunto  $S$  de una variedad  $M$  de dimensión  $m$  y clase  $C^\infty$  es llamado *Subvariedad* de  $M$  de clase  $C^k$  y dimensión  $s$  si dado un punto  $p \in S$  existe una carta local de  $M$ ,  $(U, \Phi)$  de clase  $C^k$ ,  $\Phi : U \rightarrow B$ ; donde  $B$  es un abierto de  $\mathbb{R}^m$  que contiene el origen; tal que  $\Phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$ , y la imagen  $\Phi(S \cap U)$  es un subconjunto abierto del plano  $x_{s+1} = x_{s+2} = \dots = x_m = 0$ . Las subvariedades tienen una estructura de variedad diferenciable naturalmente inducida por la estructura de  $M$ . A saber, dado un atlas de clase  $C^k$   $\{(U_i, \Phi_i)\}$  de  $M$ , donde las restricciones de las funciones  $\Phi_i$  a  $S$  satisfazan la condición anterior (es decir, la restricción de  $\Phi_i$  a  $S$  parametriza  $U_i \cap S$  como un subconjunto de un hiperplano de dimensión  $s$ ), los pares  $\{(U_i \cap S, \Phi_i|_{U_i \cap S})\}$  constituyen un atlas de  $S$  de clase  $C^k$ . De esta forma, las restricciones de funciones diferenciables definidas en  $M$  son funciones diferenciables de la subvariedad con esta estructura inducida (verificar como ejercicio), y toda función

diferenciable de  $S$  se extiende a una función diferenciable de  $M$  (ejercicio interesante). Como ejercicio, el lector puede demostrar que los gráficos de funciones diferenciables  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  son subvariedades de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , y que las superficies en  $\mathbb{R}^3$  son subvariedades de  $\mathbb{R}^3$ .

El *Espacio tangente* en  $p \in S$  a una subvariedad  $S$  de  $\mathbb{R}^m$  es el conjunto de vectores de  $\mathbb{R}^m$  tangentes a  $S$  en el punto  $p$ . La notación usual para este espacio es  $T_p S$ . El conjunto  $T_p S$  es un plano de igual dimensión que  $S$ , y corresponde a nuestra intuición de plano tangente a un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ . Lo que no es tan obvio es que podemos generalizar esta noción de espacio tangente a una variedad cualquiera, sea ella subvariedad de  $\mathbb{R}^m$  o no. Hay varias formas abstractas de definir el espacio tangente a un punto en una variedad  $M$  de dimensión  $m$ , todas equivalentes. Una forma de hacerlo, es definir en el conjunto  $\Lambda_p$  de curvas diferenciables  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ , tales que  $c(0) = p$ , la relación de equivalencia siguiente: dos curvas  $\alpha(t), \beta(t)$  en  $\Lambda_p$  son equivalentes si tomando una carta local  $(U, \Phi)$  de  $M$  que contenga  $p$ , se tiene que las curvas  $\Phi(\alpha(t))$  y  $\Phi(\beta(t))$  tienen el mismo vector tangente en  $t = 0$  (observar que dichas curvas son curvas en  $\mathbb{R}^m$ ). Se puede comprobar que esta relación no depende de la carta local que contenga  $p$ , y que el conjunto resultante de clases de equivalencia admite una estructura de espacio vectorial de dimensión  $m$  (buen ejercicio ..). La unión de los espacios tangentes de  $M$  se llama *Fibrado tangente* de  $M$ , y se denota por  $TM$ .

**Ejercicio:** Demostrar que  $TM$  es una variedad diferenciable de clase  $C^{k-1}$  si  $M$  es de clase  $C^k$ . Si  $M$  es de clase  $C^\infty$  entonces  $TM$  también lo es. La dimensión de  $TM$  es  $2m$ , si  $m$  la dimensión de  $M$ .

Con la noción de espacio tangente es posible definir la diferencial de funciones diferenciables entre dos variedades. En efecto, si  $f : M \rightarrow N$  es una función de clase  $C^1$  entre dos variedades  $M$  y  $N$ , decimos que la diferencial de  $f$  en el punto  $p \in M$ , que denotaremos por  $D_p f$ , es una transformación lineal  $D_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  que asocia a un vector tangente  $v = \alpha'(0) \in T_p M$ , donde  $\alpha(t)$  es curva diferenciable en  $M$  con  $\alpha(0) = p$ , el vector tangente a la curva  $\beta(t) = f(\alpha(t))$  en  $t = 0$ . Es fácil verificar que la definición de  $D_p f(v)$  no depende de la curva  $\alpha(t)$  con tal de que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = v$ . La aplicación diferencial de  $f$ , denotada por  $Df$  está definida por

$$Df : TM \rightarrow TN,$$

$$Df(v) = D_p f(v),$$

para todo  $v \in T_p M$ ,  $p \in M$ . Siendo de naturaleza local, los teoremas de la función inversa y función implícita, herramientas fundamentales del cálculo diferencial en  $\mathbb{R}^n$ , se extienden a variedades por medio de cartas locales.

Utilizando el concepto de vectores tangentes es posible así mismo extender la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias de  $\mathbb{R}^n$  a una variedad. En efecto, usando vectores tangentes podemos definir un campovectorial  $X$  en una variedad:  $X : M \rightarrow TM$  asocia a cada punto  $p \in M$  un vector tangente  $X(p)$ . Como  $TM$  tiene estructura de variedad diferenciable podemos definir campos vectoriales diferenciables en  $M$ , y tomando cartas locales en  $M$  estos campos se transforman en campos diferenciales definidos en abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto, los teoremas de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales se extienden a la variedad  $M$  tomando cartas locales.

**Ejercicio:** Probar que si una variedad  $M$  es compacta, entonces todo campo vectorial de clase  $C^1$  es completo, o sea, toda solución de la ecuación diferencial  $y'(t) = X(y(t))$  en  $M$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Para terminar esta sección, nos gustaria mencionar un teorema importante debido a Whitney, que afirma que toda variedad  $M$  admite una submersión  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  en  $\mathbb{R}^k$ , donde  $k$  depende en general de la dimensión de la variedad, y  $F(M)$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^k$ . Una submersión  $F : M \rightarrow N$  de una variedad  $M$  de dimensión  $m$  en una variedad  $N$  de dimensión  $n \geq m$  es una función diferenciable que es inyectiva y cuya diferencial tiene rango idénticamente igual a la dimensión de  $M$  (observar que  $D_p F$  es una transformación lineal y por lo tanto su rango es la dimensión de la imagen de la misma). Este teorema implica que toda variedad diferenciable puede ser considerada una subvariedad de  $\mathbb{R}^k$  para algún  $k$  suficientemente grande, lo que nos dice que a fin de cuentas los conceptos abstractos de función diferenciable y espacio tangente se reducen a los usuales en  $\mathbb{R}^k$ . El lector puede cuestionarse si vale la pena entonces entender estos objetos de forma abstracta cuando ellos corresponden a la intuición que de ellos tenemos en el espacio Euclidiano. Sin embargo, para fines de muchas aplicaciones importantes es mucho más simple usar las nociones abstractas de función diferenciable y

espacio tangente de forma intrínseca, olvidando el teorema de Whitney. En la práctica, es difícil construir una submersión de una variedad en  $\mathbb{R}^k$ , y su obtención no disminuye sustancialmente el grado de dificultad de muchos problemas importantes en la teoría de variedades.

## Capítulo 7

# Planos Euclidiano e Hiperbólico

Una introducción al estudio de geodésicas en superficies no puede prescindir de la presentación de los modelos de la geometría plana: la geometría Euclidiana y la geometría Hiperbólica. Haremos una breve descripción de dichos modelos inspirándonos en la concepción de geometría plana que proponía Euclides: una geometría plana es un sistema de “puntos”, “rectas”, y “transformaciones” entre puntos y rectas que cumplen ciertos postulados. Para formular rigurosamente los objetos de estudio de las geometrias planas necesitaremos nociones básicas de Geometría Riemanniana.

A partir de este capítulo utilizaremos con frecuencia la notación  $M^n$  para designar una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Comenzaremos por recordar que una *Variedad Riemanniana* es un par  $(M^n, g)$ , donde  $M^n$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $g$  es una *métrica Riemanniana*:  $g : M \rightarrow S_n$  es una función diferenciable definida en  $M$  con imagen en la variedad  $S_n$  de las  $n \times n$  formas cuadráticas simétricas positivas definidas. Dado  $p \in M$ , la imagen  $g(p)$ , la cual denotaremos también por  $g_p$ , induce de forma natural un producto interno en  $T_p M \times T_p M$  que depende del punto  $p$ . Una variedad Riemanniana adquiere de esta forma una estructura de *espacio métrico*: definimos una distancia

$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$  asociada a la métrica  $g$  por

$$d(p, q) = \inf_{\substack{\gamma: [0,1] \rightarrow M \\ \gamma(0)=p, \gamma(1)=q}} \left\{ \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt \right\}$$

donde  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  es una curva diferenciable por partes, y el integrando  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}$  es la norma del vector tangente  $\gamma'(t)$  de  $\gamma(t)$  con respecto al producto interno  $g_{\gamma(t)}$ . La variedad Riemanniana  $(M, g)$  se dice *completa* si es completa como espacio métrico. Dados  $p, q \in M$ , toda curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  con  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$  cuya *longitud*  $\ell_g(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$  sea igual a la distancia  $d(p, q)$ , es llamada *geodésica* de la variedad Riemanniana  $(M, g)$ . Por lo tanto, la noción de geodésica corresponde a la idea intuitiva del camino mas corto entre dos puntos del espacio y extiende naturalmente la idea de “recta Euclidiana”. Un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  se llama *isometría* de  $(M, g)$  si  $\forall p \in M, \forall v, w \in T_p M$ , tenemos que  $g_{f(p)}(D_p f(v), D_p f(w)) = g_p(v, w)$ . Las isometrías de  $(M, g)$  preservan las distancias entre puntos,  $d(p, q) = d(f(p), f(q))$ , y preservan también las geodésicas: si  $\gamma$  es una geodésica que une  $p$  y  $q$ , entonces  $f(\gamma)$  es una geodésica que une  $f(p)$  y  $f(q)$ . La noción de isometría generaliza naturalmente la noción de transformación rígida del plano Euclidiano (el grupo de Galileo generado por las rotaciones y las translaciones), que son justamente las transformaciones del plano Euclidiano que preservan las rectas.

Desde el punto de vista de la geometría Riemanniana, el plano Euclidiano es el par  $(\mathbb{R}^2, g)$  donde  $g_p((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = v_1 w_1 + v_2 w_2$ , es el producto interno usual entre las coordenadas cartesianas de los vectores  $v = (v_1, v_2)$  y  $w = (w_1, w_2)$ . Observar que en este caso especial, la forma cuadrática  $g_p$  *no depende de  $p$* . La norma del vector tangente  $v \in T_p = \mathbb{R}^2$  es  $\|v\|_p = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ , la longitud de una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  diferenciable es  $\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)} dt$ , las rectas son las geodésicas de  $(\mathbb{R}^2, g)$ , y el grupo de isometrías es generado por las rotaciones y las translaciones, como ya fue observado anteriormente.

El plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  es una variedad Riemanniana de dimensión dos cuya métrica es obtenida multiplicando la métrica Euclidiana en el semiplano superior de  $\mathbb{R}^2$ , el conjunto  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y), y > 0\}$  por la

función  $f(x, y) = \frac{1}{y^2}$ . O sea, si  $g(x, y)$  es la métrica Euclidiana,  $\mathbb{H}^2$  es el par  $(\mathbb{R}_+^2, g^h)$ , donde  $g_{(x,y)}^h = \frac{g(x,y)}{y^2} = f(x, y)g(x, y)$ .

La norma de un vector  $v = (v_1, v_2) \in T_{(x,y)}\mathbb{H}^2$  escrito en coordenadas cartesianas en  $\mathbb{H}^2$  es dada por  $\|v\|_h = \frac{\|v\|}{y} = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{y}$ . Usualmente, las variedades Riemannianas de dimensión 2 son llamadas superficies.

Dada una variedad Riemanniana  $(M, g)$ , toda métrica Riemanniana  $\tilde{g}$  obtenida de la forma  $\tilde{g}_p = f(p)g_p$ , donde  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $C^\infty$  se llama *conforme a g*, o decimos que  $g$  y  $\tilde{g}$  son *conformemente equivalentes*. El simple hecho de multiplicar una métrica Riemanniana por una función positiva produce cambios drásticos en la geometría de la variedad Riemanniana. El contraste entre las geometrías Euclidiana y hiperbólica en el semiplano superior ilustra perfectamente esta afirmación. A continuación, expondremos algunas de las diferencias básicas mas importantes entre las geodésicas e isometrías Euclidianas e hiperbólicas.

1) La recta vertical  $r(t) = (0, t)$  es una geodésica de  $\mathbb{H}^2$ ; dados,  $a < b$ , el segmento de recta  $r(t)$ ,  $t \in [a, b]$  minimiza la longitud en el conjunto de todas las curvas diferenciables por partes que unen  $r(a)$  y  $r(b)$ . Efectivamente, sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ ,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ , una curva diferenciable por partes tal que  $\gamma(0) = r(a)$ ,  $\gamma(1) = r(b)$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\gamma$  es diferenciable. La norma hiperbólica del vector  $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$  es

$$\|\gamma'(t)\|_h = \frac{\sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)}}{\gamma_2(t)} \geq \frac{|\gamma_2'(t)|}{\gamma_2(t)}.$$

Por lo tanto, la longitud hiperbólica de  $\gamma$  satisface la siguiente desigualdad:

$$\ell_{g^h}(\gamma) \geq \int_0^1 \frac{|\gamma_2'(t)|}{\gamma_2(t)} dt.$$

Considerar la función  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ ,  $\alpha(t) = (0, \gamma_2(t))$ . Esta es una curva diferenciable contenida en el semi-eje vertical positivo  $0 \times \mathbb{R}^+$ , su longitud satisface la desigualdad

$$\ell_{g^h}(\alpha) \leq \int_0^1 \frac{|\gamma_2'(t)|}{\gamma_2(t)} dt \leq \ell_{g^h}(\gamma)$$

que es menor o igual a la longitud de  $\gamma$  (ver figura). Observar que la curva  $\alpha$  contiene el intervalo vertical  $0 \times [\min_{t \in [0,1]} (\gamma_2(t)), \max_{t \in [0,1]} (\gamma_2(t))] = 0 \times [\bar{a}, \bar{b}] \supset 0 \times [a, b]$ . Por lo tanto,  $\ell_{gh}(\alpha) \geq \ell_{gh}(0 \times [\bar{a}, \bar{b}]) \geq \ell_{gh}(0 \times [a, b]) = \ell_{gh}(r_a^b)$ , lo que implica que  $\ell_{gh}(\gamma) \geq \ell_{gh}(\alpha) \geq \ell_{gh}(r_a^b)$  demostrando el enunciado.

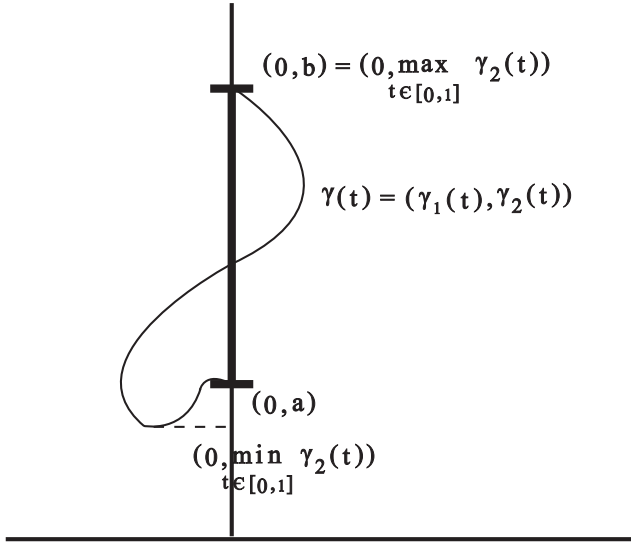


Figura 7.1: Rectas verticales son geodésicas hiperbólicas

2) El grupo de isometrías  $I(\mathbb{H}^2)$  de  $\mathbb{H}^2$  es isomorfo (como grupo algebraico) al grupo de transformaciones de Moebius que preservan el semiplano superior. Las transformaciones de Moebius del plano complejo  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$  están definidas por  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc \neq 0$ . El lector puede demostrar como ejercicio la afirmación anterior así como las siguientes propiedades de las transformaciones de Moebius:

1. El grupo de transformaciones de Moebius está generado por las homotecias  $f(z) = az$ , las translaciones  $f(z) = a+z$ , y las inversiones  $f(z) = \frac{1}{z}$ .
2. Toda transformación de Moebius está determinada únicamente por las imágenes de tres puntos del plano complejo, o en otras palabras, dadas dos ternas de puntos del plano complejo,  $\{p_1, p_2, p_3\}$ ,

$\{q_1, q_2, q_3\}$ , existe una única transformación de Moebius  $T$  tal que  $T(p_i) = q_i$ .

3. Las transformaciones de Möebius que preservan el semiplano superior, o sea,  $f(\mathbb{R}_+^2) = \mathbb{R}_+^2$ , preservan necesariamente la recta real, lo que implica que  $a, b, c, d$  deben ser números reales.
4. Las transformaciones  $f$  que preservan orientación son aquellas donde  $ad - bc > 0$ .

3) Las transformaciones de Moebius que preservan el semiplano superior transforman rectas verticales en rectas verticales o círculos perpendiculares al eje real, y transforman círculos perpendiculares al eje real en rectas o círculos con la misma propiedad. Esta afirmación puede ser verificada fácilmente como ejercicio. Por otro lado, el hecho que dos ternas de puntos determinen una transformación de Moebius (afirmación n. 2 del párrafo anterior), sumado a la invariancia de la familia de rectas y círculos perpendiculares al eje horizontal bajo la acción del grupo de transformaciones, nos permite deducir que dado un círculo perpendicular  $C$  al eje horizontal existe una transformación de Möebius  $T$  tal que  $T(r) = C$ . Por lo tanto, las rectas y los círculos perpendiculares al eje horizontal son geodésicas de  $\mathbb{H}^2$  porque el eje vertical es geodésica y las transformaciones de Moebius son isometrías. Observamos también que no toda recta puede ser geodésica hiperbólica. La única recta que pasa por el punto  $(0, 1)$  que es geodésica hiperbólica es el eje vertical (lo que puede ser demostrado directamente haciendo actuar en el eje vertical al subgrupo de las transformaciones de Möebius que fijan el punto  $(0, 1)$ ).

Las geometrías Euclidiana e Hiperbólica cumplen un postulado fundamental de la axiomática de Euclides: *dados dos puntos del espacio, existe una única geodésica que une estos puntos*. Pero la geometría hiperbólica no cumple el quinto postulado o axioma de las paralelas.

**Ejercicio:** Demostrar que dos rectas verticales no se encuentran a distancia constante en la geometría hiperbólica. De hecho, la distancia hiperbólica entre dos rectas verticales tiende a 0 si la altura de dichas rectas tiende a  $+\infty$ .

Es importante resaltar que la unicidad del camino más corto entre dos puntos no es una propiedad general de las variedades Riemannianas, aún

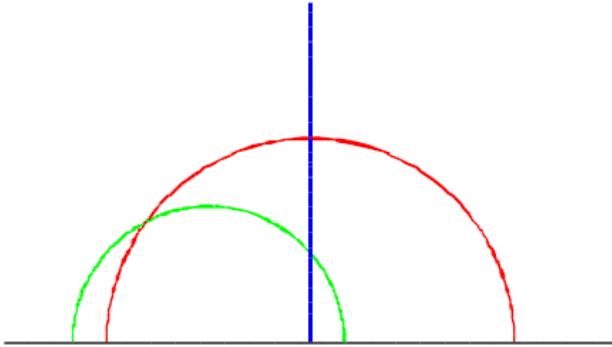


Figura 7.2: Geodésicas hiperbólicas determinando los vértices de un triángulo hiperbólico

cuando sean difeomorfos a  $\mathbb{R}^n$ . Volveremos a referirnos a este punto en las próximas secciones, cuando discutamos la teoría local de las geodésicas.

## Capítulo 8

# Geodésicas en variedades Riemannianas

Las ecuaciones relativamente simples de las métricas Euclidiana y Hiperbólica en el plano permitieron, en la sección 1, clasificar las curvas que son geodésicas en cada una de estas geometrías. A partir de las propiedades de los grupos de isometrías, fue posible deducir que dado cualquier par de puntos del espacio (Euclidiano o Hiperbólico) existe una geodésica cuyos extremos son estos puntos. Esta propiedad de los planos Euclidiano y Hiperbólico es de hecho una propiedad general del conjunto de las variedades Riemannianas completas, forma parte de uno de los resultados fundamentales de la geometría global y se conoce en la literatura como el Teorema de Hopf-Rinow. El objetivo de este capítulo es presentar un esquema (bastante completo valga decir) de la demostración de este teorema, que a pesar de ser bastante intuitiva, tiene algunos detalles técnicos que no pretendemos discutir en este texto. Una demostración completa puede ser encontrada en cualquier referencia básica de geometría Riemanniana (por ejemplo Do Carmo [4], o Fomenko-Novikov [5]). Nos proponemos describir de forma más completa las ideas de la prueba del Teorema de Hopf-Rinow que desempeñen papeles más importantes en los próximos capítulos.

**Teorema 8.0.1.** *Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana de clase  $C^\infty$  conexa y completa. Dados  $p, q \in M$ , existe una geodésica uniendo  $p$  y  $q$ .*

## 8.1. Conexión de Levi-Civita y derivación covariante

Sea  $\mathfrak{X}(M)$  el conjunto de los campos vectoriales  $C^\infty$  en  $M$ ,  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  el conjunto de las funciones  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$ .

Dado un campo vectorial  $X : U \rightarrow TM$  de clase  $C^\infty$  definido en un abierto  $U \subset M$ , y una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$ , usaremos la notación  $X(f)$  para definir la función  $X(f)_p = \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \psi_t(p))_{t=0}$ , donde  $\psi_t(p)$  es la trayectoria del campo  $X$  que en el tiempo  $t = 0$  pasa por el punto  $p$ :  $\psi_t(p)_{t=0} = p$ ,  $\frac{d}{dt}(\psi_t(p)) = X(\psi_t(p))$ . Es simple comprobar que  $X(f)_p$  no depende de la curva tangente al vector  $X(p)$  que pase por  $p$  y que el operador  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow X(f)$  define lo que se conoce como una *derivación*:  $X(f \cdot g) = fX(g) + gX(f)$ ,  $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Por lo tanto, la definición de  $X(f)_p$ , tiene sentido puntualmente, y de esta manera induce un operador sobre los vectores tangentes de la variedad  $M$ ; para todos los fines podemos suponer que  $X(p)$  es simplemente un vector tangente y no necesariamente la imagen de un campo vectorial en  $p$ . Así, es posible demostrar la existencia de un isomorfismo (de espacios vectoriales) entre el espacio de los campos vectoriales en  $TM$  y el conjunto de los operadores de derivación en  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ : un campo vectorial  $X$  de clase  $C^\infty$  determina un único operador  $\partial_X : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  de derivación dado por  $\partial_X(f) = X(f)$ . Otra operación importante que necesitamos mencionar es el *producto de Lie* de dos campos vectoriales diferenciables  $X, Y$ . Esta operación asocia a un par de campos diferenciables  $X, Y$  otro campo vectorial  $[X, Y]$  definido por la siguiente ecuación : se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^\infty$ , entonces  $[X, Y](f)_p = X(Y(f))_p - Y(X(f))_p$  (observar que por la identificación entre campos y derivaciones, basta demostrar que el lado derecho de la ecuación anterior define una derivación para concluir que  $[X, Y]$  es de hecho un campo vectorial. Esta verificación es consecuencia directa de la definición de derivación y se la dejamos al lector).

Un operador de conexión  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  está caracterizado por las siguientes propiedades: se  $X, Y, Z$  son campos diferenciables en  $M$  entonces

- i)  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- ii)  $\nabla_X(fY) = X(f)\nabla_X Y + f\nabla_X Y \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$
- iii)  $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

La conexión de Levi-Civita de la métrica  $g$  es un operador de conexión que satisface las siguientes propiedades:

$$A) Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

(compatibilidad con la métrica  $g$  o regla de Leibnitz relativa a  $g$ )

$$B) (\text{Sin torsión}) [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

Un resultado fundamental debido a Levi y Civita afirma que dada una métrica Riemanniana  $g$  existe un único operador de conexión con las propiedades (A) y (B). Como ejemplo, en el plano Euclidiano, el operador de conexión es la derivación usual de campos vectoriales: si  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , y  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita del plano Euclidiano, y  $Y = (y_1, y_2)$  son las coordenadas cartesianas del campo  $Y$ , entonces

$$\nabla_X Y = (X(y_1), X(y_2))$$

**Ejercicio:** Demostrar que la conexión de Levi-Civita de una superficie en  $\mathbb{R}^3$  con la métrica inducida por la restricción de la métrica Euclidiana es la proyección ortogonal de la derivada usual de campos en el espacio tangente de la superficie. Como la derivación usual de campos en  $\mathbb{R}^3$  es la conexión de Levi-Civita del espacio Euclidiano, esta proyección es llamada con frecuencia la *parte tangente de la conexión ambiente*. En general, si  $S \subset M$  es una subvariedad cuya métrica es la restricción de la métrica de  $M$ , se tiene que la conexión de Levi-Civita de  $S$  es la parte tangente a  $S$  de la conexión de  $M$ .

En general la ecuación en coordenadas locales del operador de conexión de Levi-Civita es más complicada. Procederemos al cálculo de esta ecuación porque la misma dará origen a la ecuación diferencial satisfecha por las geodésicas. Sea  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset M$  una parametrización local de un abierto  $U$  en  $M$ , sean  $e_1, e_2, \dots, e_n$  las imágenes por la parametrización de los campos engendrados por las funciones coordenadas canónicas de  $\mathbb{R}^n$ , y consideremos los *coeficientes de Cristoffel*  $\Gamma_k^{ij}$  de la parametrización:

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_k^{ij} e_k$$

La ecuación anterior es consecuencia del hecho de que podemos escribir todo campo vectorial  $X$  en  $M$  como combinación lineal de los campos  $e_i$ .

Sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . Entonces tenemos  $Y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ , y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X \left( \sum_j y_j e_j \right) = \sum_j \nabla_X (y_j e_j) = \sum_j (X(y_j) e_j + Y_j \nabla_X e_j) \\ &= \sum_j (X(y_j) e_j + y_j \sum_i x_i \nabla_{e_i} e_j) = \sum_j (X(y_j) e_j + y_j \sum_i x_i \sum_k \gamma_k^{ij} e_k) \\ &= \sum_k \left( \sum_{i,j} x_i Y_j \Gamma_k^{ij} + X(y_k) \right) e_k. \end{aligned}$$

Esto demuestra que  $(\nabla_X Y)_p$  depende de  $X(p)$ ,  $Y(p)$ , y de las derivadas  $X(y_k)$  en  $p$ . En particular, el vector  $(\nabla_X Y)_p$  no depende de la extensión del vector  $X(p)$  a un campo vectorial en una vecindad de  $p$ : si  $\bar{X}$  es campo vectorial  $C^\infty$  en  $M$  tal que  $X(p) = \bar{X}(p)$ , entonces  $(\nabla_X Y)_p = (\nabla_{\bar{X}} Y)_p$ . Esta observación permite definir una derivada de campos vectoriales a lo largo de curvas, la llamada *derivada covariante*, dada por la siguiente fórmula:

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una curva diferenciable, y  $X$  es un campo vectorial *definido a lo largo de  $\gamma$* , entonces definimos la derivada covariante de  $X$  con respecto a  $\gamma$ , denotada por  $D_\gamma X$ , como el campo vectorial (a lo largo de  $\gamma(t)$ ) cuyo valor está dado por  $(D_\gamma X)_{\gamma(t)} = (\nabla_{\gamma'(t)} X)_{\gamma(t)}$ .

**Definición 8.1.1.** *Un campo  $X$  definido a lo largo de  $\gamma(t)$  es paralelo si  $D_\gamma X \equiv 0$ .*

De la ecuación de la conexión en coordenadas locales, tenemos que un campo paralelo  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  a lo largo de  $\gamma(t)$  es solución de un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\gamma'(x_k) + \sum_{i,j} \gamma'_i x_j \Gamma_k^{ij} = 0,$$

donde  $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t))$  son las coordenadas del vector  $\gamma'(t)$ .

## 8.2. Fórmula de la primera variación, ecuación diferencial de las geodésicas

Con la conexión de Levi-Civita y la noción de derivada covariante de curvas proveniente de dicha conexión, podemos generalizar los resultados sobre cálculo variacional para superficies descritos en el Capítulo

2. Dados  $p, q \in M$ , sea  $\Omega_{pq}$  el espacio de las curvas diferenciables por partes cuyos extremos son  $p$  y  $q$ . La longitud  $\ell_g(\gamma)$  de una curva  $\gamma$ ,  $\ell_g(\gamma) = \int \|\gamma'(t)\| dt$ , define una función  $\ell_g : \Omega_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}$ . Una geodésica con extremos  $p$  y  $q$  es un “punto crítico” de esta función. Las mismas dificultades técnicas que aparecen en la formulación rigurosa de este problema en el caso de superficies en  $\mathbb{R}^3$  están presentes aquí. El solo hecho de que el dominio de la función longitud no es un espacio de dimensión finita conlleva a una serie de dificultades técnicas de análisis. El conjunto  $\Omega_{pq}$  es un espacio de Hilbert, en el cual es posible formular rigurosamente la diferenciabilidad de  $\ell_g$  y la determinación de sus puntos críticos. Remitimos al lector a Do Carmo [4], o Klingenberg [8]) para los detalles. Nos limitaremos en la presente sección a enunciar los principales resultados de cálculo variacional que caracterizan a las geodésicas. Como sus demostraciones son generalizaciones directas de las presentadas en el Capítulo 2 en el caso de superficies, le dejamos al lector completarlas como ejercicio. La palabra “directa” puede ocultar la importancia de la existencia de la conexión de Levi-Civita en el tema, es este operador el que permite literalmente transcribir ciertas demostraciones de cálculo variacional de superficies para variedades Riemannianas de cualquier dimensión.

Dada una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  diferenciable en  $[0, 1] - \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ , una *variación* de  $\gamma$  por curvas es una función  $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$  que cumple las siguientes propiedades:

- i) Las curvas  $f_s(t) = f(s, t)$ , son diferenciables en  $[0, 1] - \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$
- ii)  $f_0(t) = f(0, t) = \gamma(t) \forall t \in [0, 1]$ .

Si  $f(s, 0) = \gamma(0)$ ,  $f(s, a) = \gamma(a) \forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$ , decimos que la variación  $f$  tiene *extremos fijos* o es *propia*. Vamos a suponer que la curva  $\gamma(t)$  está parametrizada por longitud de arco, o sea,  $\|\gamma'(t)\| = 1$  cada vez que  $\gamma'(t)$  exista. La noción de derivación covariante nos permite derivar la función longitud restringida a una variación. Sea  $W(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ , el campo tangente a la variación  $f$  en la dirección  $\frac{\partial}{\partial s}$  restringido a la curva  $f_0(t) = \gamma(t)$ . Como en el caso de superficies en  $\mathbb{R}^3$ , tenemos,

**Lema 8.2.1.** (Fórmula de la primera variación). *Sea  $L(s) = \ell_g(f_s)$ .*

Entonces

$$\begin{aligned} L'(0) &= g(W(a), \gamma'(a)) - g(W(0), \gamma'(0)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m g(W(t-i), \gamma'(t-i^+) - \gamma'(t_i^-)) \\ &\quad - \int_0^a G(W(t), D_{\gamma'}\gamma') dt \end{aligned}$$

donde

$$\gamma'(t-i^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_i \\ t > t-i}} \gamma'(t), \quad \gamma'(t-i^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow t-i \\ t < t_i}} \gamma'(t).$$

En particular, si la variación  $f$  es propia, tenemos,

$$L'(0) = - \sum_{i=1}^m g(W(t_i), \gamma'(t-i^+) - \gamma'(t-i^-)) - \int_0^a g(W(t), D_{\gamma'}\gamma') dt$$

Tal como en el caso de superficies, obtenemos,

**Corollary 8.2.1.** *Si  $\gamma$  es geodésica según la definición del Capítulo 2, entonces  $\gamma$  es una curva diferenciable que satisface  $D_{\gamma'}\gamma' = 0$ .*

**Definición 8.2.1.** *Una curva  $\gamma$  diferenciable por partes es geodésica de  $(M, g)$  si  $D_{\gamma'}\gamma' = 0$ .*

### 8.3. Propiedades importantes de las geodésicas, minimización local y global de la longitud de arco

1) **Existencia y unicidad de las geodésicas.** Dado  $p \in M$  y  $v \in T_pM$ , existe una única geodésica  $\gamma(t)$  tal que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v$ .

Esto se debe esencialmente a que al final de la sección 1 de este capítulo verificamos que la ecuación  $D_{\gamma'}\gamma' = 0$  es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 2 en la variedad, o de primer orden en los coeficientes del vector  $\gamma'$ . Una solución corresponde de hecho a una curva  $c(t) = (\gamma(t), \gamma'(t))$  de vectores tangentes a  $\gamma(t)$ . La forma misma de la ecuación nos indica entonces que  $D_{\gamma'}\gamma' = 0$  define una ecuación diferencial de primer orden en el espacio tangente  $TM$ ,

que es una variedad de dimensión  $2m$  si  $m$  es la dimensión de  $M$ . Pero entonces, el teorema de existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden en variedades implica que dada una condición inicial  $(p, v) \in TM$ , existe una única solución de la ecuación tal que  $(\gamma(0), \gamma'(0)) = (p, v)$ .

2) Si  $(M, g)$  es completo, las geodésicas de  $M$  son soluciones completas de  $D_X X = 0$ , o sea, toda geodésica  $\gamma$  está definida en  $\mathbb{R}$ ,  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ . Esto es una consecuencia directa de un argumento standard de prolongamiento de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria, le dejamos al lector completar los detalles de la prueba.

3) **El flujo geodésico.** La velocidad de una geodésica, o sea, la norma del vector velocidad de la misma, es *constante*. Esta propiedad conocida como *homogeneidad* es consecuencia de la ecuación de las geodésicas: si  $\gamma(t)$  es una geodésica, la ecuación  $D_{\gamma'} \gamma' = 0$  implica que

$$\begin{aligned} \gamma'(t)(g(\gamma'(t), \gamma'(t))) &= \frac{\partial}{\partial t} g(\gamma'(t), \gamma'(t)) \\ &= 2g(D_{\gamma'(t)} \gamma'(t), \gamma'(t)) = 0, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos la regla de Leibnitz de la derivación del producto interno  $g(X, Y)$  de dos campos con respecto a un campo cualquiera (ver la definición de la conexión de Levi-Civita en la sección 1 de este capítulo). Debido a la homogeneidad de las geodésicas, es común y práctico parametrizar las geodésicas por longitud de arco: si  $\gamma(t)$  es geodésica, entonces  $\beta(t) = \gamma(\frac{t}{\|\gamma'(t)\|})$  también es geodésica, ambas parametrizan la misma curva  $\gamma$  y  $\|\beta'(t)\| = 1$ . Esto implica que las geodésicas pueden ser consideradas de forma natural como curvas de lo que se conoce como *fibrado tangente unitario* de  $(M, g)$ , que denotamos por  $T_1 M$ , definido como el conjunto de vectores de  $TM$  que tienen norma 1 en la métrica  $g$ . Desde el punto de vista de la mecánica clásica, las geodésicas son soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange de un Lagrangiano mecánico,  $L(p, v) = \frac{1}{2}g_p(v, v)$ , sin energía potencial, y por lo tanto la energía total que coincide con la energía cinética es una integral primera del sistema de Euler-Lagrange.

**Lema 8.3.1.** *Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana completa. Entonces la ecuación diferencial de las geodésicas determinada por el paralelismo*

de sus vectores tangentes con respecto a la conexión de Levi-Civita induce un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales de primer orden definido en el fibrado unitario  $T_1M$  donde las soluciones satisfacen el teorema de existencia y unicidad. Por lo tanto, dichas soluciones definen un flujo completo  $\phi_t : T_1M \rightarrow T_1M$  que actúa de la forma siguiente: si  $(p, v) \in T_1M$ , entonces  $\phi_t(p, v) = (\gamma(t), \gamma'(t))$ , donde  $\gamma(t)$  es la (única) geodésica con condiciones iniciales  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v$ .

El flujo  $\phi_t$  es llamado *flujo geodésico* de  $(M, g)$ .

### 3) Propiedades minimizantes de las geodésicas.

**Definición 8.3.1.** Una geodésica  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  es *minimizante* si  $\forall 0 < t_1 < t_2 < a$ , la curva  $\gamma|_{[t_1, t_2]}$  minimiza la longitud de las curvas diferenciables por partes con extremos en los puntos  $\gamma(t_1)$  y  $\gamma(t_2)$ .

Toda curva  $\gamma$  diferenciable por partes que minimiza la longitud de las curvas entre  $\gamma(0)$  y  $\gamma(a)$  es una solución de  $D_{\gamma'}\gamma' = 0$ ; **pero no toda solución de  $D_{\gamma'}\gamma' = 0$  minimiza necesariamente la longitud de variaciones propias.** En general, si una variedad es compacta existen geodésicas soluciones de  $D_{\gamma'}\gamma' = 0$  que no minimizan la longitud de variaciones, como verificamos en el Capítulo 2 en el caso de la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^3$  y las circunferencias máximas. Observar que por definición, si una geodésica minimiza la longitud de las curvas que unen  $p$  y  $q$ , entonces su longitud es la distancia  $d(p, q)$  en la métrica considerada. En general, si  $M$  es compacta, la longitud de las geodésicas  $D_{\gamma'}\gamma' = 0$  minimizantes es menor o igual que el diámetro de  $(M, g)$  como espacio métrico.

A pesar de que las geodésicas pueden no ser minimizantes cuando las consideramos en toda su extensión, es posible probar el siguiente resultado, que enunciaremos sin demostración.

**Teorema 8.3.1.** Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana completa de clase  $C^\infty$ . Dado  $p \in M$  existe una vecindad  $V \subset M$  del punto  $p$  tal que dados  $x, y \in V$ , existe una única geodésica  $\gamma$  uniendo  $x$  y  $y$ , diferenciable, que minimiza la longitud en el conjunto de las curvas rectificables con extremos en  $x$  y  $y$ .

O sea, las geodésicas son *minimizantes locales*, si dos puntos están suficientemente próximos existe una única geodésica que los une cuya

longitud es la distancia entre dichos puntos. Este teorema es una de las aplicaciones básicas más importantes de la relación entre geodésicas y ecuaciones diferenciales ordinarias. La herramienta fundamental de la demostración del mismo es la llamada *aplicación exponencial*  $\exp_p : T_pM \rightarrow M$  que definimos de la siguiente forma: si  $v \in T_p$ , el punto  $\exp_p(v)$  es obtenido calculando en  $t = 1$  la geodésica  $\gamma_v(t)$  definida por las condiciones iniciales  $\gamma_v(0) = p$ ,  $\gamma'_v(0) = v$ . Debido a la homogeneidad de la velocidad de las geodésicas, es simple demostrar que  $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . A partir de la definición de la aplicación exponencial y usando la igualdad anterior, se tiene que la diferencial de la exponencial en el vector  $(p, 0) \in T_pM$  es la identidad, lo que garantiza que dicha aplicación es un difeomorfismo local por el teorema de la función inversa. Esta propiedad de la exponencial es muy importante en la prueba del teorema anterior. En el libro de Manfredo Do Carmo, [4], se encuentra una exposición clara y simple de la teoría básica de la aplicación exponencial, que recomendamos al lector interesado. Este análisis motiva la definición principal del capítulo.

**Definición 8.3.2.** *Una geodésica con velocidad constante  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  de una variedad Riemanniana  $(M, g)$  de clase  $C^\infty$  es llamada **minimizante global** si la longitud de  $\gamma[a, b]$  es la distancia en  $(M, g)$  entre  $\gamma(a)$  y  $\gamma(b)$  para todo  $a \leq b$  en  $\mathbb{R}$ .*

Toda geodésica del espacio Euclidiano, así como del plano hiperbólico, es minimizante global. Sin embargo, las variedades compactas no tienen geodésicas minimizantes globales, y en muchas variedades importantes el conjunto de geodésicas minimizantes globales es un subconjunto relativamente pequeño del total de las geodésicas. Estas consideraciones conducen de forma natural al examen de las geodésicas en un espacio no compacto asociado a toda variedad Riemanniana, el recubrimiento universal. La relación entre el recubrimiento universal, el grupo fundamental de la variedad, y las geodésicas minimizantes globales, será el tema de los próximos capítulos. Para finalizar el presente, demostramos algunos resultados generales sobre la estructura de las geodésicas minimizantes globales que tienen importantes aplicaciones en geometría.

## 8.4. Co-compacidad de la familia de las geodésicas

Las primeras aplicaciones importantes que presentamos sobre la relación entre geodésicas y ecuaciones diferenciales ordinarias se refieren a la completitud del espacio de las geodésicas como espacio topológico. Una topología natural en el espacio de las geodésicas es la llamada topología compacta-abierta: decimos que una sucesión  $\gamma_n : \mathbb{R} \rightarrow M$  de geodésicas de  $(M, g)$  converge a  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  en la topología compacta-abierta si dados  $\epsilon > 0$ ,  $a < b$ , existe  $n_0 = n_0(\epsilon, a, b)$  tal que  $d(\gamma_n(t), \gamma(t)) \leq \epsilon$   $\forall t \in [a, b]$ ,  $\forall n \geq n_0$ , donde  $d$  es la distancia asociada a la métrica  $g$ .

**Lema 8.4.1.** *Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana completa, y sea  $\gamma_n : \mathbb{R} \rightarrow M$  una sucesión de geodésicas tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$  en la topología compacta-abierta. Entonces  $\gamma$  es una geodésica de  $(M, g)$ .*

*Demostración.* Dados  $\epsilon > 0$ ,  $T > 0$ , existe  $n_0 = n_0(\epsilon, T)$  tales que para todo  $t \in [0, T]$  y  $n \geq n_0$ ,  $d(\gamma_n(t), \gamma(t)) \leq \epsilon$ . Sea  $v_n = \gamma'_n(0)$  la sucesión de vectores tangentes iniciales de las geodésicas, que podemos suponer unitarios. Esta sucesión de vectores tiene una subsucesión convergente  $v_{n_k}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_k} = v_\infty$ . Por el Teorema de la dependencia continua de las soluciones de una E.D.O. con respecto a las condiciones iniciales, tenemos que la geodésica  $\gamma_{v_\infty}(t)$  con condiciones iniciales  $\gamma_{v_\infty}(0) = \gamma(0)$ ,  $\gamma'_{v_\infty}(0) = v_\infty$ , es tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{n_k}(t) = \gamma_{v_\infty}(t) \forall t \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, la geodésica  $\gamma_{v_n}(t)$  coincide con la curva  $\gamma_\infty(t)$ , demostrando el lema.  $\square$

Un razonamiento análogo al de la demostración del lema anterior permite concluir lo siguiente:

**Corollary 8.4.1.** *Sea  $(M, g)$  variedad compacta. Entonces toda sucesión de geodésicas en  $(M, g)$  posee una subsucesión convergente, cuyo límite es una geodésica.*

*Demostración.* Si  $\gamma_n : \mathbb{R} \rightarrow M$  es una sucesión de geodésicas en  $M$ , basta tomar  $v_n = (\gamma_n(0), \gamma'_n(0))$  como sucesión de puntos en  $T, M$  que es compacto, y por lo tanto posee una subsucesión convergente  $v_{n_k} \rightarrow v_\infty = (p, \theta)$ . Por la continuidad de las soluciones de una E.D.O. con respecto a las condiciones iniciales, tenemos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{n_k}(t) = \gamma_{v_\infty}(t)$

$\forall t$ , donde  $\gamma_{v_\infty}$  es la geodésica con condiciones iniciales  $\gamma_{v_\infty}(0) = p$ ,  $\gamma'_{v_\infty}(0) = \theta$ .  $\square$

Continuando la misma línea de argumentación, podemos demostrar que el conjunto de las “geodésicas minimizantes” en  $T_1M$  es cerrado.

**Lema 8.4.2.** *Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana completa, y sea  $\Lambda \subset T_1M$  el conjunto de los  $(p, v)$  en  $T_1M$  tales que la geodésica  $\gamma_{(p,v)}(t)$  es minimizante global. Entonces  $\Lambda$  es un subconjunto cerrado.*

*Demostración.* Probaremos que el complemento  $\Lambda^c$  de  $\Lambda$  es una subconjunto abierto, lo que es equivalente al enunciado. Sea  $(p, v) \in \Lambda^c$ , y sea  $\gamma_{(p,v)}$  la geodésica con condiciones iniciales  $\gamma_{(p,v)}(0) = p$ ,  $\gamma'_{(p,v)}(0) = v$ . Como  $\gamma_{(p,v)}$  no es minimizante global, existen  $a < b$  y una geodésica  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow M$  que contiene a  $\gamma_{(p,v)}(a) = B(0)$  y  $\gamma_{(p,v)}(b) = B(T)$  tales que  $\beta[0, T]$  es el segmento de geodésica de menor longitud cuyos extremos son  $\gamma_{(p,v)}(a)$  y  $\gamma_{(p,v)}(b)$ , y

$$T < |b - a| = \text{lg}(\gamma_{(p,v)}[a, b]).$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $a = 0$ , y entonces  $T < b = \text{lg}(\gamma_{(p,v)}[0, b])$ , y que toda geodésica está parametrizada por longitud de arco.

**Afirmación:** Existe una vecindad abierta  $V$  de  $(p, v)$  en  $T_1M$  tal que ninguna geodésica con condiciones iniciales en  $V$  es globalmente minimizante.

Efectivamente, sea  $\epsilon = \frac{b-T}{4}$ , y considerar a vecindad abierta  $V$  de  $(p, v)$ , determinada por el Teorema de la dependencia continua de las soluciones de una E.D.O. con respecto a las condiciones iniciales, dada por:

$\forall (q, w) \in V$ , la geodésica  $\gamma_{(q,w)}$  satisface  $d(\gamma_{(q,w)}(t), \gamma_{(p,v)}(t)) < \epsilon \forall t \in [-2b, 2b]$ .

Considerar la geodésica quebrada  $\alpha_q$  obtenida como unión de las siguientes geodésicas:

– la geodésica  $[p, q] = [p, \gamma_{(q,w)}(0)] = [\beta(0), \gamma_{(q,w)}(0)]$

– la geodésica  $\beta[0, T]$ ,

– la geodésica  $[\beta(T), \gamma_{(q,w)}(b)]$  de menor longitud con extremos  $\beta(T)$

y  $\gamma_{(q,w)}(b)$ .

De esta forma,

$$\alpha_q = [p, \gamma_{(q,w)}(0)] \cup \beta[0, T] \cup [\beta(T), \gamma_{(q,w)}(b)],$$

y por lo tanto

$$\lg(\alpha_q) = \lg([p, \gamma_{(q,w)}(0)]) + \lg(\beta[0, T]) + \lg([\beta(T), \gamma_{(q,w)}(b)]) < 2\epsilon + T.$$

Podemos concluir entonces que

$$\lg(\alpha_q) - \lg(\gamma_{(q,w)}[0, b]) < 2\epsilon + T - b = T - b + 2 \left( \frac{b - T}{4} \right) = \frac{1}{2}(T - b) < 0,$$

dado que  $T < b$ , lo cual implica que  $\gamma_{(q,w)}[0, b]$  no es una de las geodésicas cuya longitud minimiza la longitud entre todas las curvas con extremos  $\gamma_{(q,w)}(0) = q$  y  $\gamma_{(q,w)}(b)$ . Esto demuestra la afirmación, y el lema.  $\square$

## 8.5. El Teorema de Hopf-Rinow

Terminamos el capítulo con la demostración del Teorema de Hopf-Rinow: la existencia de geodésicas que unen dos puntos cualesquiera en una variedad Riemanniana completa. En realidad, el enunciado completo del Teorema de Hopf-Rinow contiene varias afirmaciones equivalentes a la completitud de la variedad Riemanniana (ver por ejemplo en el libro de Manfredo Do Carmo, Geometría Riemanniana), que no son difíciles de demostrar a partir de la completitud geodésica. De hecho, la completitud geodésica es la parte esencial del Teorema de Hopf-Rinow.

Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana conexa y completa. Por los resultados de la sección anterior sabemos que dos puntos suficientemente próximos están conectados por una (única) geodésica minimizante. Sean  $p, q \in M$ , y sea  $c_n: [0, 1, ] \rightarrow M$  una sucesión de curvas diferenciables por partes tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_g(c_n) = d(p, q)$ . Dado  $\epsilon > 0$ , tomar  $n_\epsilon > 0$  tal que  $\forall n \geq n_\epsilon, |l_g(c_n) - d(p, q)| < \epsilon$ . Como la distancia entre los puntos de  $c_n$  es menor o igual a la longitud  $l_g(c_n)$ , tenemos que las curvas  $c_n, n \geq n_\epsilon$ , están todas dentro de una bola compacta  $B_p$  centrada en  $p$  cuyo radio es  $r = d(p, q) + 1$ . Sea  $\{V_{p_i}, i = 1, 2, \dots, m\}$  un cubrimiento finito de  $B_p$  por abiertos  $V_{p_i}$  donde  $V_{p_i}$  es la vecindad descrita en el Teorema 8.3.1. En particular, toda curva  $c_n, n \geq n_\epsilon$  está cubierta

por un número menor o igual a  $m$  de vecindades  $V_{p_i}$ . Podemos escoger una colección finita de puntos  $\{c_n(t_j), 0 \leq j \leq N_m\}$  en la curva  $c_n$ , de forma tal que  $t_j \leq t_{j+1} \forall j$ , y existe un  $p_{ij} \in \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  tal que  $c_n(t_j) \in V_{p_{ij}}$ . El número  $N_m$  depende apenas de  $m$ . Por el Teorema 8.3.1 existe una geodésica minimizante uniendo  $c_n(t_j)$  y  $c_n(t_{j+1})$  que denotaremos por  $[c_n(t_j), c_n(t_{j+1})]$ . Considerar la geodésica “quebrada” o diferenciable por partes  $\gamma_n = \bigcup_j [c_n(t_j), c_n(t_{j+1})]$ . Es claro que  $l_g(\gamma_n) \leq l_g(c_n) \Rightarrow |l_g(\gamma_n) - d(p, q)| \leq \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon$ , y existen subsucesiones convergentes de los puntos  $\{c_n(t_j) < n \in \mathbb{N}\}$ , digamos  $\{c_{n_k}(t_j)\}$ , con  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_{n_k} = x_j$  (notar que la colección de subíndices  $n_k$  no depende de  $j$ , verificar como ejercicio que tal colección de subíndices existe). Como las geodésicas  $[c_{n_k}(t_j), c_{n_k}(t_{j+1})]$  convergen a las geodésicas  $[x_j, x_{j+1}]$  (que son únicas por la naturaleza de las vecindades  $V_{p_i}$ ), obtenemos una geodésica “quebrada”  $\gamma = \bigcup_i [x_j, x_{j+1}]$  uniendo  $p$  y  $q$ , tal que  $l_g(\gamma) = d(p, q)$ . En particular,  $\gamma$  es minimizante, o sea, minimiza la longitud de las curvas con extremos en *cualquier par de puntos* contenidos en  $\gamma$ , y por lo tanto, por el Teorema 8.3.1,  $\gamma$  es una geodésica diferenciable.



## Capítulo 9

# El recubrimiento universal, el grupo fundamental y las minimizantes globales

El propósito de este capítulo es hacer un recuento de los principales resultados de la teoría de los espacios de recubrimiento y el grupo fundamental. Este tema forma parte de los cursos de topología general frecuentemente, el lector interesado en profundizar su conocimiento al respecto encuentra una exposición sencilla y completa por ejemplo el libro de Gamelin-Green [6].

### 9.1. Espacios de recubrimiento

Recordemos la definición de un espacio topológico mencionada en el primer capítulo.

**Definición 9.1.1.** *Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{U}$  una colección de subconjuntos de  $X$ . El par  $(X, \mathcal{U})$  es denominado espacio topológico si la colección  $\mathcal{U}$  satisface las propiedades siguientes:*

1. *La intersección finita de dos elementos de  $\mathcal{U}$  está en  $\mathcal{U}$ .*
2. *La unión de elementos de  $\mathcal{U}$  está en  $\mathcal{U}$ .*
3.  *$\mathcal{U}$  contiene  $X$  y el conjunto vacío.*

Los elementos de  $\mathcal{U}$  son llamados conjuntos abiertos de  $X$ , los complementos de los abiertos son llamados conjuntos cerrados. Ejemplos conocidos de tales espacios: recta real y uniones de intervalos abiertos; espacio euclidiano y uniones de conjuntos abiertos por la distancia euclidiana; superficies, variedades. Diferentes colecciones de subconjuntos de  $X$  pueden definir diferentes espacios topológicos, y a pesar de que existen muchos ejemplos de tales espacios bastante diferentes de variedades no entraremos en detalles sobre el tema. Por convención, denotaremos por  $X$  al espacio topológico  $(X, \mathcal{U})$ , mencionando la colección  $\mathcal{U}$  apenas cuando sea estrictamente necesario.

Una función *continua*  $f : X \rightarrow Y$  entre dos espacios topológicos es una aplicación tal que la preimagen de todo abierto de  $Y$  es un abierto de  $X$ .

Un *homeomorfismo*  $h : X \rightarrow Y$  entre dos espacios topológicos  $X, Y$  es una biyección continua con inversa continua.

**Definición 9.1.2.** *Dados dos espacios topológicos  $E, X$ , y un abierto  $U \subset X$ , toda función  $P : E \rightarrow X$  tal que  $P^{-1}(U)$  consista en una unión disjunta de abiertos  $V_i$  de  $E$ ,  $i$  variando en un cierto conjunto de índices, donde  $P : V_i \rightarrow U$  es un homeomorfismo, es llamada *recubrimiento propio* de  $U$ . Una función sobreyectiva  $P : E \rightarrow X$  es llamada **recubrimiento** de  $X$  si todo punto  $p \in X$  posee una vecindad abierta  $U_p$  donde  $P$  es un recubrimiento propio de  $U_p$ .*

### Ejemplos

1)  $E = \mathbb{R}$ ,  $X = S^1 =$  círculo unitario en el plano,  $P : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $P(t) = e^{2\pi it}$ .

2)  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $X$  espacio cociente de  $\mathbb{R}^2$  por la siguiente relación de equivalencia:  $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$  están en la misma clase de equivalencia si  $(x - a, y - b)$  es un punto de coordenadas enteras. Es sencillo verificar que el conjunto de las clases de equivalencia (llamado espacio cociente) es un espacio topológico, es más, es una superficie abstracta que llamamos el toro  $T^2$ .

**Ejercicio:** Demostrar usando el ejemplo n. 1 que el toro  $T^2$  es difeomorfo a  $S^1 \times S^1$ .

**Ejercicio:** Demostrar que el toro es difeomorfo al espacio cociente  $Y$  obtenido a partir de  $\mathbb{R}^2$  según la siguiente relación de equivalencia: dos

puntos  $(x, y), (a, b)$  son equivalentes si existe una translación de la forma  $T(s, t) = (s + n, t + m)$ , con  $n, m$  enteros, tal que  $T(a, b) = (x, y)$ .

**Ejercicio:** Demostrar que el toro es difeomorfo a la superficie de revolución obtenida girando el círculo  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$  en torno al eje vertical (ver figura).

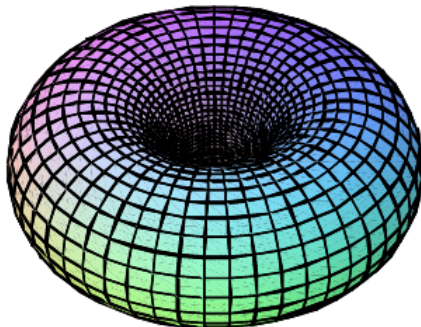


Figura 9.1: Toro de revolución

Cocientes de variedades por relaciones de equivalencia aparecen frecuentemente en geometría y en teoría de grupos de Lie, los mismos constituyen una familia importante de ejemplos de variedades. Otra relación de equivalencia muy conocida es la que define el espacio proyectivo real de dimensión  $n$ ,  $P(\mathbb{R}, n)$ : es el conjunto de clases de equivalencia de rectas por el origen en  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  identificadas entre sí si son paralelas. Esta relación define una aplicación de recubrimiento de la esfera  $S^n$  en el espacio proyectivo.

## 9.2. Clases de homotopía, grupo fundamental

En esta sección supondremos que nuestro espacio topológico es una variedad conexa  $M$ , a pesar de que los argumentos que serán expuestos se aplican a espacios más generales conocidos como espacios topológicos arco-conexos.

**Definición 9.2.1.** Dadas dos curvas continuas  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $\beta : [0, 1] \rightarrow M$ , una **homotopía** entre  $\gamma$  y  $\beta$  es una función continua

$$f : [0, a] \times [0, 1] \rightarrow M$$

tal que

1.  $f(0, t) = \gamma(t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ ,
2.  $f(a, t) = \beta(t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Si  $\gamma(0) = \beta(0) = p$  o sea, las curvas tienen el mismo punto inicial, una homotopía  $f$  tal que  $f(s, 0) = p$  para todo  $s \in [0, a]$  se conoce como homotopía con punto base  $p$ . Si  $\gamma$  y  $\beta$  son curvas cerradas,  $\gamma(0) = \gamma(1)$ ,  $\beta(0) = \beta(1)$ , entonces una homotopía con punto base  $p = \gamma(0) = \beta(0)$  se define como una homotopía que cumple  $f(s, 0) = p$  y  $f(s, 1) = p$  para todo  $s \in [0, a]$ . Una homotopía que no preserva el punto inicial de las curvas se conoce como homotopía libre.

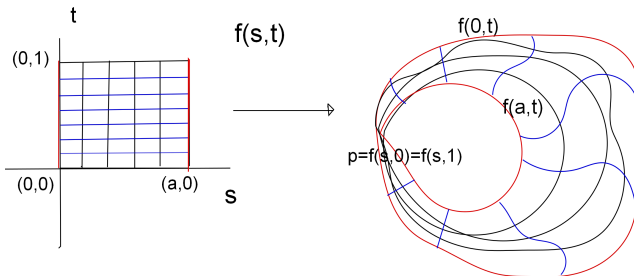


Figura 9.2: Homotopía entre curvas cerradas con punto base  $p$

Una homotopía es un movimiento continuo entre curvas de la variedad, una manera de "deformar" continuamente una curva hasta obtener otra. Las curvas  $\gamma$  y  $\beta$  se denominan homotópicas, y se puede probar sin mucha dificultad que la homotopía entre curvas continuas  $c : [0, 1] \rightarrow M$  define una relación de equivalencia en dicho conjunto de curvas. Denotaremos la clase de la curva  $c$  por  $[c]$ .

**Definición 9.2.2.** *El grupo fundamental con punto base  $p \in M$ , denotado por  $\pi_1^p(M)$ , es el conjunto de clases de equivalencia de homotopía con punto base  $p$  de curvas cerradas continuas  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  con  $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ : dos curvas son equivalentes si existe una homotopía con punto base  $p$  entre las dos.*

*El conjunto de las clases de equivalencia entre curvas por homotopías libres es llamado grupo de homotopía libre de  $M$ , denotado por  $G(M)$ .*

**Ejemplo:** Los meridianos del toro de revolución son libremente homotópicos. Los paralelos también son libremente homotópicos.

En la definición anterior la palabra grupo hace referencia a una estructura de grupo algebraico que el conjunto de clases  $\pi_1^p(M)$  posee de forma natural. Con efecto, es bien conocido que si dos curvas  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $\beta : [0, 1] \rightarrow M$ , ahora no necesariamente cerradas, satisfacen  $\gamma(1) = \beta(0)$ , entonces podemos definir la composición de curvas  $\gamma * \beta : [0, 1] \rightarrow M$ . Esta nueva curva es otra curva continua tal que  $\gamma * \beta(0) = \gamma(0)$ ,  $\gamma * \beta(1) = \beta(1)$ , y además

$$\gamma * \beta(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & \text{para todo } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t - 1), & \text{para todo } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

La composición de curvas es una forma de definir una curva a partir de una unión de curvas "contiguas". Se puede verificar sin mayores problemas que esta operación entre curvas induce una operación de grupo  $[\gamma] * [\beta]$  en el conjunto de las clases  $\pi_1^p(M)$ , donde la identidad del grupo es la clase de las curvas que son homotópicas a un punto, las llamadas **curvas contráctiles**. El inverso de una clase  $[\gamma]$  es la clase de la curva obtenida a partir de  $\gamma$  invirtiendo el sentido de su parametrización. Una variedad conexa  $M$  tal que  $\pi_1^p(M)$  es apenas la identidad se denomina **simplemente conexa**.

**Ejercicio:** Demostrar que  $\pi_1^p(M)$  y  $\pi_1^q(M)$  son isomorfos para todo par de puntos  $p, q \in M$ .

Este ejercicio justifica que en la mayor parte de las referencias sobre el grupo fundamental se omite el punto  $p$  en la notación del grupo: la notación más usada es  $\pi_1(M)$ . Existe claramente una biyección entre  $\pi_1(M)$  y el grupo de homotopía libre  $G(M)$ : dado  $p \in M$  y una curva cerrada  $\gamma$  podemos conectarla a  $p$  a través de una curva simple sin lazos  $c : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $c(0) = p$ ,  $c(1) = \gamma(0)$ , y formar así una curva con punto base  $p$  libremente homotópica a  $\gamma$ . Esta correspondencia induce a su vez una operación de grupo en  $G(M)$ .

### 9.3. Recubrimiento universal, isometrías de recubrimiento

El recubrimiento universal  $\tilde{M}$  es un espacio topológico simplemente conexo que cubre  $M$  en el sentido definido en la sección anterior: existe una función continua  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  sobreyectiva tal que todo punto  $p \in M$  tiene una vecindad abierta  $U$  donde  $\pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$  es un homeomorfismo local. El objetivo de la sección es describir brevemente este espacio y enunciar algunas de sus propiedades principales.

Para comenzar, fijamos un punto  $p \in M$  que llamaremos punto base. Consideremos el conjunto  $\tilde{M}$  de los pares  $(x, [\gamma])$ , donde  $x \in M$  y  $[\gamma]$  es la clase de homotopía de una curva continua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = x$ . Dada una vecindad abierta  $U_x \subset M$  de  $x$  simplemente conexa (siempre existe ..) consideremos el conjunto  $\tilde{U}_{(x, [\gamma])}$  de pares  $(q, [\gamma] * [\alpha])$  donde  $\alpha : [0, 1] \rightarrow U_x$  es una curva que comienza en  $\alpha(0) = \gamma(1) = x$  y termina en  $\alpha(1) = q \in U_x$ .

Tomando el conjunto de intersecciones finitas y uniones de un número cualquiera de conjuntos  $\tilde{U}_{(x, [\gamma])}$  generamos una topología para el conjunto  $\tilde{M}$  (ejercicio).

**Afirmación:** La función  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  dada por  $\pi(y, [\gamma]) = y$  es una aplicación de recubrimiento.

En efecto,  $\pi$  es continua y su restricción a  $\tilde{U}_{(x, [\gamma])}$  es un homeomorfismo. Veamos: si  $\tilde{q} \in \tilde{U}_{(x, [\gamma])}$  se tiene que  $\tilde{q} = (q, [\gamma] * [\alpha])$  para alguna curva  $\alpha$  contenida en  $U_x$  que une  $x = \gamma(1)$  a  $q$ . Como  $U_x$  es simplemente conexa, la clase de homotopía de  $\alpha$  es la identidad, por lo que  $\tilde{q} = (q, [\gamma])$  para todo  $\tilde{q} \in \tilde{U}_{(x, [\gamma])}$ . Ahora, observemos que la correspondencia  $(q, [\gamma]) \rightarrow q$  restringida al conjunto  $\tilde{U}_{(x, [\gamma])}$  es una biyección continua con imagen  $U_x$ .

Esto es suficiente para demostrar que  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  es una aplicación de recubrimiento.

**Definición 9.3.1.** *El espacio topológico  $\tilde{M}$  es el recubrimiento universal de  $M$ .*

Observemos que  $\tilde{M}$  es una variedad con las mismas dimensión y clase de diferenciabilidad que  $M$ . El término *universal* en la denominación de  $\tilde{M}$  se justifica por las siguientes propiedades.

**Teorema 9.3.1.** 1. *El espacio  $\tilde{M}$  es simplemente conexo.*

2. Existe una biyección entre  $\pi_1^p(M)$  y  $\pi^{-1}(p)$  para todo  $p \in M$ .
3. Si  $\Pi : E \rightarrow M$  es otra aplicación de recubrimiento donde  $E$  es simplemente conexo, entonces  $E$  y  $\tilde{M}$  son homeomorfos.

El ítem (3) nos dice que el espacio  $\tilde{M}$  que construimos anteriormente es esencialmente único. La idea principal de la demostración de este Teorema es una característica especial de las aplicaciones de recubrimiento, conocida como la propiedad de **levantamiento de curvas**.

**Lema 9.3.1.** *Sea  $\Pi : E \rightarrow M$  una aplicación de recubrimiento. Dada una curva continua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  donde  $\gamma(0) = p$ , y dado  $\tilde{p} \in \Pi^{-1}(p)$ , existe una única curva continua  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow E$  tal que  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ , y  $\Pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ .*

Dejamos la demostración de este lema como ejercicio al lector. Disponiendo de este resultado, ya podemos demostrar el ítem (2) del Teorema 9.3.1. Escogiendo un punto base  $p \in M$  y una preimagen por  $\pi$  de  $p$ ,  $\tilde{p} \in \tilde{M}$ , levantamos toda curva cerrada de  $M$  con base en  $p$  a una curva en  $\tilde{M}$  que comienza en  $\tilde{p}$ . La propiedad de levantamiento de curvas permite levantar homotopías de curvas en  $M$  a  $\tilde{M}$ , y por la definición de  $\tilde{M}$  constatamos que dos curvas cerradas homotópicas con punto base  $p$  se levantan a curvas que comienzan en  $\tilde{p}$  y deben tener el mismo punto final en  $\pi^{-1}(p)$ . Así se construye una correspondencia entre las preimágenes de  $p$  por la función  $\pi$  y las clases de homotopía de curvas cerradas con punto base  $p$ , que resulta ser biunívoca (ejercicio).

La demostración del ítem (1) es consecuencia del ítem (2): si  $\beta : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  es una curva cerrada tal que  $\beta(0) = \beta(1) = \tilde{p}$ , entonces la curva cerrada  $\pi(\beta) : [0, 1] \rightarrow M$  tiene punto base  $p$  y por la propiedad de levantamiento, su único levantamiento a partir de  $\tilde{p} = (p_0, e)$  es  $\beta$ , donde  $e$  es la identidad en  $\pi_1^p(M)$ . Como  $(p_0, [\pi(\beta)])$  es el punto final del levantamiento de  $\pi(\beta)$  que comienza en  $\tilde{p}$ , y  $\beta(0) = \tilde{p} = \beta(1)$ , concluimos que  $[\pi(\beta)] = e$  y por lo tanto,  $\pi(\beta)$  es contráctil. Levantando una homotopía entre  $\pi(\beta)$  y el punto  $p$  a  $\tilde{M}$  con punto base  $\tilde{p}$ , conseguimos una homotopía entre  $\beta$  y el punto  $\tilde{p}$ , o sea,  $\beta$  es contráctil también. Como este argumento se aplica a cualquier punto base en  $M$ , deducimos que  $\tilde{M}$  es simplemente conexo.

Para demostrar el ítem (3) del teorema, basta observar que la propiedad de levantamiento de curvas permite construir un homeomorfismo

entre cualquier recubrimiento de  $M$  que sea simplemente conexo y el espacio  $\tilde{M}$  (ejercicio).

**Ejemplos:**

1) El recubrimiento universal del círculo es la recta real, el grupo fundamental  $\pi_1^p(S^1)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  para todo punto base  $p$ . Esto se puede verificar a partir de la aplicación de recubrimiento sobre  $S^1$  construida en la Sección 1: las preimágenes de  $e^0 \in S^1$  son los números enteros. El grupo fundamental de  $S^1$  es de gran importancia en topología, está estrechamente relacionado a la noción de índice de curvas y a la teoría de grado de aplicaciones.

2) El recubrimiento universal del toro  $T^2$  es el plano  $\mathbb{R}^2$ , su grupo fundamental es isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Podemos demostrar esta afirmación usando la aplicación de recubrimiento sobre  $T^2$  de la Sección 1 del presente capítulo. Las preimágenes de la clase de  $(0, 0)$  por la relación de equivalencia que define  $T^2$  es el conjunto de pares  $(n, m)$  de puntos del plano con coordenadas enteras. Este conjunto es justamente  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Construyendo una aplicación de recubrimiento para el toro de revolución utilizando las coordenadas cilíndricas del mismo, se puede demostrar que un meridiano nunca es homotópico a un paralelo.

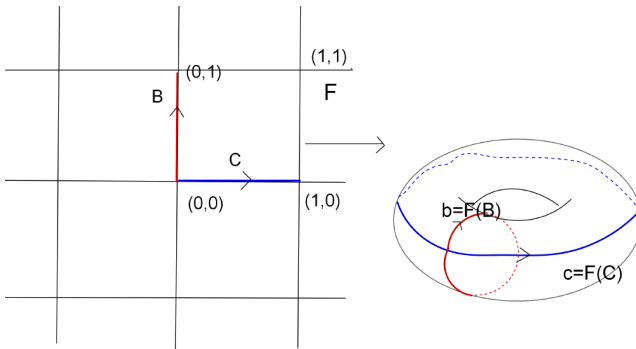


Figura 9.3: levantamiento de un par de lazos del toro que generan el grupo fundamental

3) El recubrimiento universal del espacio proyectivo  $P(\mathbb{R}, n)$  es la esfera  $S^n$ , su grupo fundamental es  $\mathbb{Z}_2$ , el grupo cíclico con dos elementos.

**Definición 9.3.2.** *Dada una clase de homotopía  $[\gamma]$ , la transformación de recubrimiento  $T_{[\gamma]} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$  asociada a  $[\gamma]$  está definida de la siguiente forma:  $T_{[\gamma]}(x)$  es el punto final del levantamiento a partir de  $x$  de una curva cerrada  $c_x : [0, 1] \rightarrow M$  libremente homotópica a  $\gamma$ , tal que  $c_x(0) = \pi(x) = c_x(1)$ .*

Se puede demostrar sin mayores dificultades que  $T_{[\gamma]}(x)$  no depende de la curva  $c_x$  en la clase de homotopía libre de  $\gamma$ . El siguiente resultado ilustra algunas propiedades relevantes del conjunto de las transformaciones de recubrimiento que usaremos con frecuencia en los próximos capítulos. Denotaremos  $\pi_1^p(M)$  por  $\pi_1(M)$ , ya que todos los enunciados son válidos para todos los grupos fundamentales con punto base.

**Proposition 9.3.1.** *1.  $T_{[\gamma]} \circ T_{[\beta]} = T_{[\gamma]*[\beta]}$ , para todo par  $[\gamma], [\beta] \in \pi_1(M)$ . Por lo tanto, el conjunto  $T(M)$  de transformaciones de recubrimiento es un grupo.*

*2. La correspondencia  $\Psi : \pi_1(M) \rightarrow T(M)$  dada por  $\Psi([\gamma]) = T_{[\gamma]}$  es un isomorfismo de grupos.*

*3.  $M$  es difeomorfa al espacio cociente obtenido a partir de  $\tilde{M}$  aplicando la siguiente relación de equivalencia: dos puntos  $x, y \in \tilde{M}$  son equivalentes si y solo si existe una transformación de recubrimiento  $T_{[\gamma]}$  tal que  $T_{[\gamma]}(x) = y$ .*

*4. La acción del grupo  $T(M)$  en  $\tilde{M}$  es propiamente discontinua, o sea, dado un subconjunto compacto  $K \subset \tilde{M}$  el número de transformaciones  $T \in T(M)$  con la propiedad  $T(K) \cap K \neq \emptyset$  es finito. En particular, el grupo  $T(M)$  es discreto.*

*5. Existe un subconjunto cerrado conexo  $D \subset \tilde{M}$  con la siguientes propiedades:*

- *$D$  contiene por lo menos una preimagen de todo punto de  $M$  por la aplicación de recubrimiento universal.*
- *El interior de  $D$  contiene apenas una preimagen de cada punto en  $\pi(D) \subset M$ .*

*Este conjunto se llama **dominio fundamental** de  $M$ .*

*6. Si  $M$  es compacta, entonces  $D$  es compacto.*

7. Dada una transformación  $T_{[\gamma]}$  de recubrimiento, se tiene que el interior de  $T_{[\gamma]}(D) \cap D$  es o vacío o coincide con el interior de  $D$ .
8. La unión en  $[\gamma] \in \pi_1(M)$  de los conjuntos  $T_{[\gamma]}(D)$  es  $\tilde{M}$ .

La demostración de la Proposición 9.3.1 es un buen ejercicio que dejamos al lector. Su importancia reside en que nos da un punto de vista "dinámico" sobre el grupo fundamental: cada clase de homotopía se representa como una transformación de  $\tilde{M}$ . De hecho, en la literatura sobre el tema, se identifican con bastante frecuencia  $\pi_1(M)$  y  $T(M)$ , y la palabra "representación" tiene un significado bien preciso en teoría algebraica de grupos: una *representación* de un grupo  $G$  en otro  $H$  es un epimorfismo entre  $G$  y un subgrupo de  $H$ .

El dominio fundamental  $D$  es un objeto importante de la teoría de los espacios de recubrimiento. Se puede interpretar como el "mejor" subconjunto de  $\tilde{M}$  que representa  $M$ . De hecho, la identificación definida en el ítem (3) de la proposición anterior aplicada a  $D$  es difeomorfa a  $M$ .

**Definición 9.3.3.** Dada una variedad Riemanniana  $(M, g)$ , sea  $\tilde{g}$  la métrica Riemanniana en  $\tilde{M}$  definida por  $\tilde{g}_{\tilde{p}}(v, w) = g_{\pi(\tilde{p})}(d\pi(v), d\pi(w))$ , donde  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  es la aplicación de recubrimiento,  $v, w \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ .

Esta métrica Riemanniana es llamada en general el *pullback* de la métrica  $g$  por la aplicación de recubrimiento. En realidad es un ejercicio sencillo (a esta altura debería serlo ..) demostrar que  $\tilde{g}$  provee de hecho una métrica Riemanniana en  $\tilde{M}$ . La razón por la cual esto es cierto es porque  $\tilde{M}$  y  $M$  son localmente difeomorfos ( $\pi$  es un difeomorfismo local), y la definición de la métrica  $\tilde{g}$  es estrictamente local. Con esta estructura Riemanniana para  $\tilde{M}$  deducimos lo siguiente:

**Lema 9.3.2.** Las transformaciones de recubrimiento son isometrías de la variedad Riemanniana  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ .

### Ejemplos:

1) Las translaciones  $T_{(m,n)}(x, y) = (x + m, y + n)$  son isometrías de toda métrica Riemanniana definida en el toro  $T^2$  obtenido (como variedad diferenciable) como cociente del plano por la acción de dicho grupo de translaciones. Es claro que el toro puede admitir muchas métricas Riemannianas, todas ellas inducen métricas en el plano  $\mathbb{R}^2$  que tienen un

grupo discreto de isometrías que son translaciones. Ojo que no todas las translaciones son isometrías de cualquier métrica en el plano obtenida como pullback de una métrica en el toro, la única métrica en  $\mathbb{R}^2$  cuyas isometrías incluyen *todas* las translaciones Euclidianas es la métrica Euclidiana.

2) Los grupos fundamentales de superficies compactas de género mayor o igual a dos son isomorfos a subgrupos discretos de las llamadas transformaciones de Moebius del plano hiperbólico. Como en el caso anterior, aplicando un difeomorfismo a una superficie como esta podemos suponer sin pérdida de generalidad que el grupo fundamental es de hecho un subgrupo de transformaciones de Moebius. Estas son las conocidas isometrías del espacio hiperbólico que preservan orientación.

Los próximos capítulos será dedicados a estudiar la relación que existe entre el grupo fundamental y las geodésicas minimizantes globales.



## Capítulo 10

# Minimizantes globales y clases de homotopía en superficies

Las geodésicas que tienen propiedades minimizantes globales tienen una estrecha relación con la topología de una variedad  $M$  cuyo grupo fundamental no es simplemente la identidad. El objetivo del capítulo es presentar de forma detallada algunos de los principales resultados sobre este tema. Comenzamos por el famoso teorema atribuido a Cartan [4], resultado en el que también se reconoce la contribución de Birkhoff, sobre la existencia de geodésicas cerradas en cada clase de homotopía no trivial de una variedad compacta cuya longitud es mínima en dicha clase. Luego, nos concentraremos en el caso de superficies compactas, donde se puede probar que dicha geodésica cerrada  $\gamma$  que minimiza la longitud de arco en su clase  $[\gamma]$  tiene la propiedad especial siguiente: todo levantamiento de  $\gamma$  a  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  es una geodésica minimizante global.

### 10.1. Teorema de Cartan

En esta sección demostramos el siguiente resultado:

**Teorema 10.1.1.** *Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana compacta de clase  $C^\infty$ . Entonces dada una clase de homotopía libre  $a \in G(M)$  no trivial existe una geodésica cerrada diferenciable  $\gamma$  cuya longitud es la*

mínima posible en el conjunto de las curvas cerradas con la misma clase.

La demostración de este teorema aplica la siguiente observación que será de extrema importancia en todo lo que resta del texto.

**Definición 10.1.1.** *Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana completa  $C^\infty$ . Una vecindad abierta conexa  $V$  donde toda geodésica es minimizante se denomina vecindad normal.*

La existencia de vecindades normales en torno a un punto cualquiera de  $M$  es consecuencia del teorema 8.3.1.

**Lema 10.1.1.** *Sea  $(M, g)$  variedad Riemanniana completa  $C^\infty$ . Sea  $V$  una vecindad normal. Sean  $x, y, z$  tres puntos diferentes en  $V$ , y sean  $[x, y]$ ,  $[y, z]$ ,  $[x, z]$  las únicas geodésicas en  $V$  que unen  $x$  a  $y$ ,  $y$  a  $z$ ,  $x$  a  $z$ . Entonces las longitudes de dichas geodésicas cumplen la siguiente propiedad:*

$$l_g([x, y]) \leq l_g([x, z]) + l_g([z, y])$$

donde hay igualdad si y solo si los tres puntos están sobre una única geodésica de  $V$ .

*Demostración.* La demostración es consecuencia directa del hecho que en  $V$  las geodésicas son minimizantes, por lo que sus longitudes son distancias. Aplicando la desigualdad triangular de las distancias obtenemos la desigualdad entre las longitudes. La igualdad se verifica solo si los tres puntos están sobre una única geodésica diferenciable. Si no, se tendría que la distancia entre dos determinados puntos de la vecindad normal  $V$  correspondería a la longitud de una geodésica "quebrada." no diferenciable formada por la unión de dos geodésicas concurrentes que forman ángulo no nulo en su punto de intersección. Esto contradice el corolario 8.2.1: toda curva rectificable que sea un punto crítico de la longitud de variaciones propias es una curva diferenciable solución de una ecuación diferencial de orden 2.  $\square$

### **Demostración del teorema de Cartan.**

Sea  $a$  una clase de homotopía libre no trivial de  $M$ , y sea  $T_a$  la transformación de recubrimiento asociada a la clase  $a$ . La compacidad de  $M$  y la continuidad de  $T_a$  implican que existe un punto  $\tilde{p} \in \tilde{M}$  donde la función

$$f(x) = d(x, T_a(x))$$

alcanza un mínimo absoluto. Esta función se conoce como el desplazamiento de la transformación  $T_a$ . Sea  $\tilde{p}_0 = T_a(\tilde{p})$ , el cual es diferente a  $\tilde{p}$  porque  $a$  es una clase no trivial. Sea  $\gamma = [\tilde{p}, \tilde{p}_0]$  una geodésica minimizante en  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  que une los puntos  $\tilde{p}$  y  $\tilde{p}_0$ . Dicha geodésica existe por el teorema de Hopf-Rinow: la variedad  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  es completa si  $(M, g)$  es compacta. Parametricemos  $\gamma : [0, l] \rightarrow \tilde{M}$  por longitud de arco. Si  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  es la aplicación de recubrimiento, la curva  $\pi(\gamma)$  es una geodésica de  $(M, g)$  que define un lazo, una curva cerrada en  $\pi(\gamma(0)) = \pi(\gamma(l)) = p = \pi(\tilde{p})$ . Sea  $V$  una vecindad normal de  $p$ , que podemos suponer que sea una bola de radio  $\epsilon > 0$  pequeño centrada en  $p$ . Si los vectores tangentes de  $\pi(\gamma)$ ,  $d\pi(\gamma'(0))$  y  $d\pi(\gamma'(l))$  no coinciden, entonces la intersección de  $\pi(\gamma)$  con  $V$  tiene al menos una componente conexa formada por la unión de dos geodésicas concurrentes en el punto  $p$  que forman una geodésica quebrada, diferenciable por partes. Sean  $\pi(\gamma(\epsilon))$ ,  $\pi(\gamma(l - \epsilon))$  los puntos de intersección de dicha componente conexa de  $\pi(\gamma)$  con la frontera de la bola  $V$ . Por el lema 10.1.1 existe una geodésica  $\beta = [\pi(\gamma(\epsilon)), \pi(\gamma(l - \epsilon))]$  dentro de  $V$  minimizante, con longitud estrictamente menor que la suma de las longitudes de  $[p, \pi(\gamma(\epsilon))]$  y  $[p, \pi(\gamma(l - \epsilon))]$ . Consideremos la curva cerrada

$$\Gamma = \beta \cup \pi(\gamma[\epsilon, l - \epsilon]).$$

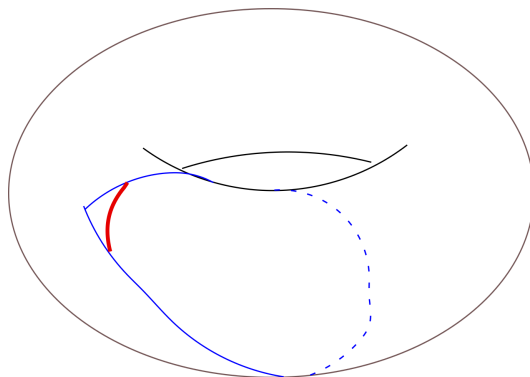


Figura 10.1: Un lazo más corto tomando un "atajo"

**Afirmación:**  $\Gamma$  y  $\pi(\gamma)$  son homotópicas.

Esto es relativamente fácil de demostrar porque la diferencia simétrica

entre las dos curvas es una curva cerrada que está contenida en una bola,  $V$ , que es simplemente conexa, a saber, la curva

$$\beta \cup [p, \pi(\gamma(\epsilon))] \cup [p, \pi(\gamma(l - \epsilon))].$$

Por lo tanto, existe una homotopía que deforma  $\beta$  en  $[p, \pi(\gamma(\epsilon))] \cup [p, \pi(\gamma(l - \epsilon))]$  dentro de  $V$  manteniendo el resto de  $\Gamma$  y  $\pi(\gamma)$  invariable. Esta deformación es una homotopía entre  $\Gamma$  y  $\pi(\gamma)$ .

Observemos que la longitud de  $\Gamma$  es estrictamente menor que la longitud de  $\pi(\gamma)$ , por lo que el levantamiento de  $\Gamma$  a partir de una preimagen  $\tilde{x}$  por  $\pi$  de cualquier punto  $x \in \Gamma$  será una curva más corta que  $\gamma$ . Pero ésto implica que el desplazamiento de  $\tilde{x}$ ,  $d(\tilde{x}, T_a(\tilde{x}))$ , es menor que el desplazamiento de  $\tilde{p}$ , porque  $T_a(\tilde{x})$  es el punto final del levantamiento de  $\Gamma$ . Esto contradice el hecho que  $d(\tilde{p}, T_a(\tilde{p}))$  fuera el mínimo desplazamiento posible de  $T_a$ , e implica que los vectores tangentes de  $\pi(\gamma)$  en  $p$ ,  $d\pi(\gamma'(0))$  y  $d\pi(\gamma'(l))$ , deben coincidir. De esta forma,  $\pi(\gamma)$  es una geodésica cerrada diferenciable con clase de homotopía libre  $a$  como queríamos probar.

## 10.2. La topología de los espacios de dimensión 2: Teorema de Jordan

En esta sección analizamos el comportamiento de geodésicas cerradas que minimizan longitud en su clase de homotopía libre. La dimensión baja (dos) tiene impacto importante en la topología y geometría global de dichas curvas.

El primer resultado fundamental sobre la topología del plano que necesitaremos es una especie de versión simplificada del famoso teorema de Jordan. Recordemos que una curva continua simple  $C$  en una variedad  $M$  es una curva que admite una parametrización de la forma  $c : S^1 \rightarrow M$  donde  $c$  es biyección sobre su imagen. O sea, una curva simple es una curva que no tiene auto-intersecciones.

**Teorema 10.2.1.** *El complemento de toda curva continua simple cerrada  $C$  del plano consiste en dos componentes conexas disjuntas.*

La versión simplificada que aplicaremos en el texto es la siguiente.

**Lema 10.2.1.** *Sea  $L$  una recta en  $\mathbb{R}^2$  y  $C$  una curva simple en  $\mathbb{R}^2$  contenida en una vecindad tubular de la recta  $L$  de radio  $A > 0$  para algún  $A$ . Entonces el complemento de  $C$  separa el plano en dos componentes conexas disjuntas.*

*Demostración.* En realidad esta afirmación puede ser deducida a partir de una versión del teorema de Jordan para la esfera  $S^2$  vista como la compactificación del plano. Sin embargo, demostrar que el complemento de una recta en el plano tiene dos componentes conexas es un ejercicio de cálculo. Y si una curva  $C$  simple en el plano está a distancia  $A$  de una recta es posible demostrar lo mismo (ejercicio) sin aplicar el teorema de Jordan.  $\square$

### 10.3. Primera aplicación del teorema de Jordan: ejes de transformaciones de recubrimiento

Para comenzar, fijemos la siguiente notación: dada una curva cerrada  $\gamma : S^1 \rightarrow M$ , definamos por  $\gamma^n : S^1 \rightarrow M$  la curva cerrada dada por  $\gamma^n(t) = \gamma(2\pi(n\frac{t}{2\pi} - \lfloor n\frac{t}{2\pi} \rfloor))$ , donde  $\lfloor a \rfloor$  es la parte entera de  $a$ . Esta es una forma de parametrizar  $\gamma$  de forma que sea recorrida totalmente  $n$  veces por la parametrización.

Observemos que un levantamiento  $\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \rightarrow \tilde{M}$  de una curva cerrada  $\gamma : S^1 \rightarrow M$  diferenciable se puede extender a una curva definida en todo  $\mathbb{R}$ : basta continuar el levantamiento de la curva a partir del punto  $\tilde{\gamma}(k2\pi)$  para obtener una curva diferenciable definida en  $[0, (k+1)2\pi]$ , donde  $k \in \mathbb{Z}$ . Para no sobrecargar la notación, llamaremos a esta curva  $\tilde{\gamma}$  también. Cuando convenga parametrizar una curva cerrada diferenciable  $\gamma$  por longitud de arco, el dominio  $S^1$  para la parametrización no será siempre adecuado. En este caso parametrizamos  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ , donde  $l > 0$  es el menor período positivo de  $\gamma$ ,  $\|\gamma'(t)\| = 1$  para todo  $t$ , y  $\gamma(0) = \gamma(l)$ ,  $\gamma'(0) = \gamma'(l)$ .

**Lema 10.3.1.** *El levantamiento  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$  de una geodésica cerrada con longitud mínima en su clase de homotopía tiene las siguientes propiedades:*

1. Si  $T_{[\gamma]}$  es la transformación de recubrimiento asociada a la clase  $[\gamma]$ , se tiene que  $T_{[\gamma]}(\tilde{\gamma}(t)) = \tilde{\gamma}(t + l)$ , donde  $l$  es el período de  $\gamma$ .

2.  $\tilde{\gamma}$  es una curva simple.

*Demostración.* Observemos que dado  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(\gamma(0)) \in \tilde{M}$ , el levantamiento  $\tilde{\gamma}$  de  $\gamma$  con  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$  es tal que  $\pi(\tilde{\gamma}(nl)) = p$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Por lo que la definición de  $T_{[\gamma]}$  implica que  $T_{[\gamma]}^n(\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(nl)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Tomando como punto base  $\tilde{\gamma}(t)$  donde  $t \in [0, l]$  la conclusión es la misma: la curva  $\tilde{\beta}(s) = \tilde{\gamma}(t+s)$  es un levantamiento de la curva cerrada  $\beta(s) = \gamma(t+s)$ ,  $s \in [0, l]$ , que es libremente homotópica a  $\gamma$  y con el mismo período mínimo  $l$ . Por lo tanto,

$$T_{[\gamma]}^n(\tilde{\beta}(0) = \tilde{\beta}(nl)$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$  y siendo  $t$  arbitrario, deducimos que  $T_{[\gamma]}^n(\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(t+nl)$  para todo  $t$  y  $n$ . Esto finaliza la demostración del item (1).

Para demostrar el item (2) notemos primero que  $\gamma$  no contiene lazos cerrados contráctiles. Porque si fuera el caso, sería posible eliminar el lazo y definir una nueva curva cerrada homotópica a  $\gamma$  con evidentemente menor longitud.

Ahora, sea  $\tilde{\gamma}(t)$  un levantamiento de  $\gamma$  a partir de  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ . Como el número de autointersecciones de una geodésica es finito, debe existir un primer  $t_0 > 0$  tal que  $\tilde{\gamma}(t_0) = \tilde{\gamma}(s_0)$ , donde  $s_0 < t_0$  y  $\tilde{\gamma}'(t_0) \neq \tilde{\gamma}'(s_0)$ . La curva  $\tilde{\gamma}[s_0, t_0]$  es un lazo cerrado en  $\tilde{M}$  cuya imagen por la aplicación de recubrimiento  $\pi$  es un subconjunto de  $\gamma$ . Pero recordemos que todo lazo cerrado en  $\tilde{M}$  tiene como imagen por  $\pi$  una curva cerrada contráctil. Así,  $t_0$  no puede existir y  $\tilde{\gamma}$  debe ser una curva sin autointersecciones, o sea, una curva simple.  $\square$

Para simplificar nuestra exposición en lo que resta del capítulo asumiremos que nuestra superficie es el toro  $T^2$ . Los resultados que demostraremos en la sección son en realidad válidos para toda superficie compacta orientable, sin embargo, los argumentos para superficies diferentes del toro exigen un conocimiento mayor de la teoría de la clasificación de superficies que no pretendemos abordar con profundidad. Al final del capítulo comentaremos brevemente en un apéndice cómo extender los resultados principales a una superficie orientable compacta cualquiera.

**Definición 10.3.1.** *Dada una clase de homotopía  $[\gamma]$ , toda geodésica minimizante global  $\alpha \subset \tilde{M}$  tal que  $T_{[\gamma]}(\alpha) = \alpha$  es llamada **eje** de la transformación de recubrimiento  $T_{[\gamma]}$ .*

Observemos que el lema 10.3.1 garantiza que levantamientos de geodésicas cerradas que minimizan longitud en su clase de homotopía son preservados por transformaciones de recubrimiento. Sin embargo, ésto no basta para afirmar que dichas geodésicas son ejes, debemos demostrar que son minimizantes globales.

**Teorema 10.3.1.** *Sea  $a \in G(T^2)$  una clase de homotopía libre no trivial. Entonces, si  $\gamma$  es una geodésica cerrada cuya longitud es el mínimo de las longitudes de las curvas cerradas en su clase, la curva  $\gamma^n$  es la geodésica cerrada que minimiza la longitud de las curvas cerradas en la clase  $a^n$ , donde  $a^n$  es la  $n$ -ésima potencia de  $a$  con respecto a la operación del grupo  $G(T^2)$ .*

*Demostración.* Dado  $n > 1$  sea  $\beta \subset T^2$  la geodésica cerrada cuya longitud minimiza la longitud en la clase de homotopía libre  $[\gamma]^n$ . Supongamos que

$$\gamma : [0, l] \longrightarrow T^2 \text{ y } \beta : [0, l_n] \longrightarrow T^2$$

están parametrizadas por longitud de arco, y que  $\gamma(0) = \beta(0) = \gamma(l) = \beta(l_n)$ . De esta forma, la longitud mínima en la clase de  $\gamma$  es  $l$ , y la longitud mínima en la clase de  $\beta$  es  $l_n$ . Si  $\gamma$  y  $\beta$  son geodésicas diferentes, podemos suponer que  $n > 0$  es el menor entero tal que ésto sucede. De esta forma, sus vectores tangentes iniciales  $\gamma'(0)$ ,  $\beta'(0)$  deben ser distintos. Escoger un punto  $\tilde{p} \in \tilde{T}^2$  tal que  $\pi(\tilde{p}) = p = \gamma(0)$ , y levantemos  $\gamma$  y  $\beta$  a partir de  $\tilde{p}$ . Llamemos  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \tilde{M}$ ,  $\tilde{\beta} : \mathbb{R} \longrightarrow \tilde{T}^2$  los respectivos levantamientos, con  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\beta}(0) = \tilde{p}$ .

Como la clase  $[\beta]$  es  $[\gamma]^n$ , se tiene que los puntos finales de los levantamientos de  $\gamma^n : [0, nl] \longrightarrow M$  y  $\beta : [0, l_n] \longrightarrow M$  son los mismos, o sea,  $\tilde{\gamma}(nl) = \tilde{\beta}(l_n)$ . El mismo argumento demuestra que

$$\tilde{\gamma}(knl) = \tilde{\beta}(kl_n)$$

para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Por el lema 10.3.1, las curvas  $\tilde{\gamma}$  y  $\tilde{\beta}$  son curvas simples.

En nuestro modelo del toro  $T^2$  el recubrimiento universal  $\tilde{T}^2$  es el plano, las transformaciones de recubrimiento son las translaciones  $T_{k,m}$ ,  $k, m \in \mathbb{Z}$ , donde  $T_{k,m}(x, y) = (x + k, y + m)$ , y por lo tanto existe una translación  $T = T_{k_0, m_0}$  tal que

1.  $\tilde{\gamma}(t + kl) = T^k(\tilde{\gamma}(t))$  para todo  $t \in [0, l]$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

2.  $\tilde{\beta}(t + ml_n) = T^{mn}(\tilde{\beta}(t))$  para todo  $t \in [0, l_n]$ , para todo  $m \in \mathbb{Z}$ .

Dicha translación  $T$  representa la clase de homotopía de  $\gamma$ . Así, existe una recta  $L$  en  $\mathbb{R}^2$  y existe una constante  $Q > 0$  tales que

1. Los puntos  $\tilde{\gamma}(kl)$ ,  $\tilde{\beta}(ml_n)$  pertenecen a la recta  $L$  para todo  $k, m \in \mathbb{Z}$ .
2. La distancia entre las curvas  $\tilde{\gamma}$ ,  $\tilde{\beta}$  y la recta  $L$  es menor o igual a  $Q$ .

Debido al lema 10.2.1, la curva  $\tilde{\gamma}$  separa el plano en dos componentes conexas disjuntas  $R^+$ ,  $R^-$ . Digamos que, escogiendo una orientación para la curva  $\tilde{\gamma}$ ,  $R^+$  está en la parte "superior" de la curva y  $R^-$  está en la parte "inferior" de la curva (ver figura).

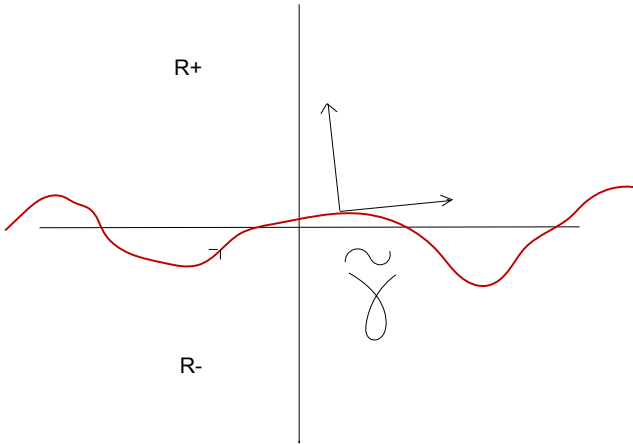


Figura 10.2: Partición del plano en dos regiones según la orientación de la curva

Como  $\tilde{\beta}'(0)$  es transversal a  $\tilde{\gamma}'(0)$ , la curva  $\tilde{\beta}$  atraviesa de una de las regiones anteriores hacia la otra, o sea, existe  $\epsilon > 0$  tal que

1.  $\tilde{\beta}(t)$  está en  $R^-$  para  $t \in (-\epsilon, 0)$  y  $\tilde{\beta}(t)$  está en  $R^+$  para  $t \in (0, \epsilon)$ ,
2. O  $\tilde{\beta}(t)$  está en  $R^+$  para  $t \in (-\epsilon, 0)$  y  $\tilde{\beta}(t)$  está en  $R^-$  para  $t \in (0, \epsilon)$ .

Podemos suponer sin perder generalidad que la primera posibilidad se verifica. Como las curvas  $\tilde{\gamma}$  y  $\tilde{\beta}$  son preservadas por las potencias de

la translación  $T$ , que son isometrías de  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g})$  y del plano euclidiano, tenemos que  $R^+$ ,  $R^-$  también son preservadas por  $T$  y además

$$\tilde{\beta}(t + kl_n) \in R^-$$

para  $t \in (-\epsilon, 0)$  y

$$\tilde{\beta}(t + kl_n)$$

está en  $R^+$  para  $t \in (0, \epsilon)$ . Es decir, la curva  $\tilde{\beta}$  atraviesa  $\tilde{\gamma}$  en los puntos  $\tilde{\gamma}(knl) = \tilde{\beta}(kl_n)$  con la misma orientación.

**Afirmación:** Existe un punto  $s \in (0, l_n)$  tal que  $\tilde{\beta}(s) \in \tilde{\gamma}$ .

En efecto, como  $\tilde{\beta}(t)$  está en  $R^+$  para  $t$  positivo pequeño, sea  $s \in (0, l_n)$  el supremo (positivo) de los valores para los cuales  $\tilde{\beta}(t) \in R^+$  para todo  $t \in (0, s)$ . Como  $\tilde{\beta}(t + l_n) \in R^-$  para  $t \in (-\epsilon, 0)$ , el valor de  $s$  es estrictamente menor que  $l_n$ . Por ser  $\tilde{\beta} : [0, l_n] \rightarrow \tilde{M}$  una curva compacta continua, este supremo corresponde a un punto de intersección entre las curvas  $\tilde{\beta}$  y  $\tilde{\gamma}$ .

El punto  $\tilde{\beta}(s)$  coincide con un punto  $\tilde{\gamma}(\rho)$  donde  $\rho \in (kl, (k + 1)l)$ , donde  $0 < k \leq n - 1$

**Afirmación:** Existe una curva cerrada en la clase de homotopía  $[\gamma]^{k+1}$  que tiene menor longitud que  $\gamma^{k+1}$ . Es más, si  $k + 1 = n$ , dicha curva tiene menor longitud que  $\beta$ .

Para demostrar la afirmación, usaremos el Teorema 8.3.1 en una bola normal  $B_r(\tilde{\gamma}(\rho))$  con radio  $r > 0$  suficientemente pequeño. Como los vectores  $\tilde{\beta}'(s)$  y  $\tilde{\gamma}'(\rho)$  son transversales, podemos conectar  $\tilde{\beta}(s - r)$  y  $\tilde{\gamma}(\rho + r)$  con una única geodésica minimizante local  $c$ . La longitud de  $c$  es estrictamente menor que  $2r$ , que es la suma de las longitudes de  $\tilde{\beta}[s - r, s]$  y  $\tilde{\gamma}([\rho, \rho + r])$ , debido al corolario 8.2.1. Así, es fácil verificar que la curva

$$\Gamma = \tilde{\beta}([0, s - r]) \cup c \cup \tilde{\gamma}([\rho + r, (k + 1)l])$$

cuya clase de homotopía es  $[\gamma]^{k+1}$ , tiene menor longitud que  $\gamma^{k+1}$ . Si  $k + 1 = n$ , el punto final de la curva  $\Gamma$  es  $\tilde{\gamma}(nl) = \tilde{\beta}(l_n)$ , y por lo tanto,  $\Gamma$  tendría menor longitud que  $\beta$ .

La afirmación anterior nos muestra que  $k + 1$  tiene que ser menor que  $n$ , pues al ser iguales las curvas  $\pi(\Gamma)$  y  $\pi(\beta) = \beta$  tienen la misma clase

de homotopía en  $M$  y  $\beta$  fue escogida como la curva de menor longitud en su clase de homotopía.

Por otro lado, si  $k+1 < n$  entonces existe una potencia de la clase  $[\gamma]$  menor que  $n$  donde la curva  $\gamma^n$  no minimiza la longitud de las curvas cerradas en la clase. Como  $n$  fue escogido como el mínimo de estos números, y para  $n=1$   $\gamma$  minimiza la longitud en su clase, obtenemos una contradicción. La contradicción surge al suponer que  $\beta'(0)$  es transversal a  $\gamma'(0)$ , por lo que  $\beta'(0) = \gamma'(0)$  y en este caso ambas geodésicas deben coincidir.

Concluimos entonces que  $\gamma^n$  minimiza la longitud de las curvas cerradas en su clase para todo  $n \in \mathbb{N}$ , argumento análogo se aplica para  $n < 0$ , lo que prueba el teorema.  $\square$

**Corollary 10.3.1.** *Un levantamiento  $\tilde{\gamma}$  de una geodésica cerrada  $\gamma$  cuya longitud es mínima en su clase de homotopía es una geodésica minimizante global. En particular, toda transformación de recubrimiento posee ejes.*

*Demostración.* Sea  $\gamma$  una geodésica cerrada de período  $l > 0$  que minimiza la longitud en su clase, y sea  $\tilde{\gamma}$  un levantamiento de la misma en  $\tilde{T}^2$ . Por el teorema anterior, la longitud de  $\tilde{\gamma}[-nl, nl]$  es la menor posible entre las longitudes de las curvas en  $\tilde{T}^2$  que unen  $\tilde{\gamma}(-nl)$  y  $\tilde{\gamma}(nl)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Esto garantiza que  $\tilde{\gamma}[a, b]$  es la curva más corta entre las curvas que unen  $\tilde{\gamma}(a)$  y  $\tilde{\gamma}(b)$  para todo  $-nl \leq a \leq b \leq nl$ . Como  $n$  es cualquier natural, concluimos que  $\tilde{\gamma}$  debe ser minimizante global.  $\square$

Llamamos la atención sobre la importancia del Corolario 10.3.1: el mismo mejora substancialmente el teorema de Hopf-Rinow que garantiza la existencia de minimizantes globales en  $\tilde{M}$ . El corolario 10.3.1 nos dice que existen muchas minimizantes globales, al menos una por cada clase de homotopía libre de  $M$ .

## 10.4. Apéndice: como generalizar los resultados anteriores a superficies compactas orientables

El objetivo de esta sección es explicar en líneas generales como se extienden los resultados de las secciones anteriores a una superficie compac-

ta, conexa, orientable cualquiera. La geometría del espacio hiperbólico y el teorema de clasificación de superficies compactas serán esenciales en la exposición.

La topología del plano interviene de forma fundamental en la argumentación del capítulo a partir del teorema 10.3.1: la versión simplificada del teorema de Jordan para curvas simples del plano que se encuentran en alguna vecindad tubular de una recta es ingrediente indispensable de su demostración.

Sabemos en el caso del toro que dichos levantamientos están en vecindades tubulares de rectas en el plano porque conocemos el recubrimiento universal del toro: el plano  $\mathbb{R}^2$ , y su grupo fundamental que se identifica con un subgrupo de translaciones isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Esta información sobre el recubrimiento fundamental no es puramente topológica, las translaciones son isometrías de la geometría Euclidiana y las rectas son, además de geodésicas del plano Euclidiano, preservadas por las translaciones y representantes de las clases de homotopía libre del toro (cuando pasan por puntos de coordenadas racionales en el plano).

En el caso de una superficie compacta orientable cualquiera, el grupo fundamental no es más isomorfo a un grupo de translaciones Euclidianas. El plano Euclidiano no es entonces un buen "candidato" a recubrimiento "geométrico" de la superficie. En la literatura sobre clasificación de variedades, se dice que la variedad admite una **estructura geométrica** sobre un espacio homogéneo  $G$  si la variedad es difeomorfa al cociente de  $G$  por un subgrupo discreto de isometrías de  $G$ . El toro es un ejemplo, admite una estructura geométrica sobre el espacio Euclidiano. El teorema de clasificación de las superficies compactas nos dice que toda superficie conexa, compacta orientable es difeomorfa a la esfera, al toro, o al cociente del plano hiperbólico por un subgrupo discreto de isometrías hiperbólicas. Es decir, superficies compactas orientables siempre admiten estructuras geométricas sobre espacios homogéneos.

Así que dada una superficie compacta  $S$  conexa orientable con grupo fundamental no trivial y no isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , se tiene que  $\pi_1(S)$  es isomorfo a un subgrupo discreto de isometrías hiperbólicas. No es difícil probar que toda isometría hiperbólica  $T$  en  $\pi_1(S)$  tiene un eje hiperbólico, una geodésica hiperbólica que es preservada por dicha isometría. La imagen por la aplicación de recubrimiento de tal eje es una curva en  $S$  que representa una clase de homotopía libre  $[\gamma]$ , y por lo tanto, el

levantamiento en el espacio hiperbólico de una geodésica cerrada  $\gamma$  de  $(S, g)$  que minimiza longitud en su clase estará en una vecindad tubular *hiperbólica* del eje hiperbólico de  $T$ .

Finalmente, recordemos que las geodésicas hiperbólicas son círculos y rectas perpendiculares al eje coordenado  $y = 0$  en el modelo del semiplano superior  $\mathbb{H}^2$ . Es más, existe un modelo del espacio hiperbólico llamado el disco de Poincaré  $D$ , que se obtiene como imagen isométrica de  $\mathbb{H}^2$  por una aplicación que lleva el semiplano superior al disco unitario, a saber

$$T(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

donde  $z = (x, y)$  es la representación compleja del punto  $(x, y)$ . Las geodésicas en este modelo son círculos perpendiculares al borde del disco unitario y rectas por el origen.

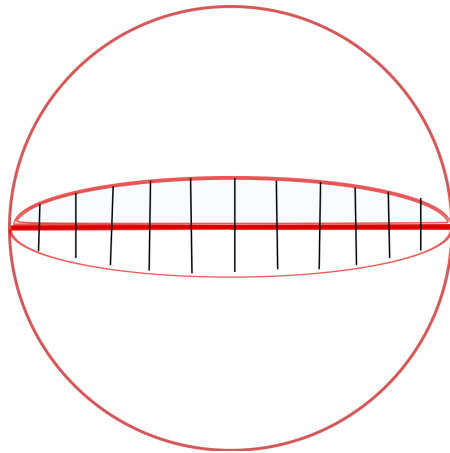


Figura 10.3: Vecindad tubular hiperbólica de una geodésica recta del disco de Poincaré

Como existe una isometría hiperbólica que transforma toda geodésica hiperbólica en la recta vertical  $x = 0$ , se tiene que toda geodésica hiperbólica en el disco de Poincaré se transforma en una recta por el origen aplicando alguna isometría. Por lo tanto, si el levantamiento  $\tilde{\gamma}$  de una geodésica cerrada de  $(S, g)$  en  $D$  está en la vecindad tubular *hiperbólica* de una geodésica hiperbólica de  $D$ , podemos aplicarle una isometría y

llevarla a una curva que está en una vecindad tubular *hiperbólica* de una recta en el disco.

El énfasis en la distinción de la vecindad como *hiperbólica* se debe justamente al hecho que una vecindad tubular hiperbólica no es una vecindad tubular euclidiana. Se puede demostrar que si una geodésica hiperbólica  $\beta \subset D$  tiene extremos  $a, b$  en la frontera de  $D$ , entonces la vecindad tubular  $V_r(\beta)$  de radio  $r$  de  $\beta$  es una región de  $D$  que contiene  $\beta$ , difeomorfa a un cilindro, y cuya frontera está formada por dos arcos de círculo que pasan por  $a, b$  con curvaturas hiperbólicas constantes (la constante es la misma para ambos círculos y depende de  $r$ ).

Esta configuración de las vecindades tubulares de geodésicas hiperbólicas permite aplicar el teorema de Jordan a  $\tilde{\gamma}$ : considerando la compactificación de  $D$  obtenemos una curva "compactificada" de  $\tilde{\gamma}$  que es cerrada, simple, en la compactificación  $S^2$ . Con el teorema de Jordan para levantamientos simples de geodésicas de la superficie  $(S, g)$  podemos extender la demostración del teorema 10.3.1 a cualquier superficie compacta conexa orientable.



# Capítulo 11

## Geodésicas minimizantes globales en el toro

Dedicaremos la última parte del texto al estudio de geodésicas minimizantes globales de una métrica Riemanniana en el toro  $T^2$ . Con excepción de los enunciados de la primera sección, los resultados del presente capítulo no se extienden a otras superficies.

Durante todo el capítulo consideraremos una estructura Riemanniana  $(T^2, g)$  de clase  $C^\infty$ , donde  $T^2$  será el espacio cociente del plano  $\mathbb{R}^2$  por la acción del grupo de traslaciones generado por  $T_1(x, y) = (x + 1, y)$ ,  $T_2(x, y) = (x, y + 1)$ . Cada cuadrado de la forma  $[n, n + 1] \times [k, k + 1]$  en  $\mathbb{R}^2$ , donde  $n, k \in \mathbb{Z}$ , es un dominio fundamental. Notemos que el recubrimiento universal es cubierto por la unión de las imágenes de un dominio fundamental fijo:  $[n, n + 1] \times [k, k + 1]$  es la imagen de  $[0, 1] \times [0, 1]$  por la traslación  $T_1^n \circ T_2^k$ . Esto nos da una noción dinámica de la acción del grupo fundamental en el recubrimiento universal, la "órbita" de un dominio fundamental por la acción del grupo cubre el recubrimiento. Esto es cierto en todas las variedades Riemannianas conexas completas. Emplearemos esta idea con frecuencia en la argumentación del capítulo.

El toro  $T^2$  hereda del plano Euclidiano una métrica "Euclidiana"  $(T^2, g_0)$ , obtenida simplemente como

$$g_0(v, w)_p = \langle d\pi^{-1}(v), d\pi^{-1}(w) \rangle_{\pi^{-1}(p)}$$

donde  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$  es la aplicación de recubrimiento (que es localmente un difeomorfismo),  $p \in T^2$ ,  $v, w \in T_p T^2$ ,  $\langle, \rangle$  el producto interno Eu-

clidiano. Notemos que a pesar de que  $\pi^{-1}(p)$  tiene infinitos elementos, el producto interno del lado derecho de la ecuación está bien definido porque el producto interno Euclidiano no depende de  $\pi^{-1}(p)$ .

Los levantamientos de las geodésicas de  $(T^2, g_0)$  en  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g}_0)$  son todos rectas, por lo tanto minimizantes globales.

Una recta  $L$  en  $\mathbb{R}^2$  que tiene inclinación racional  $\frac{m}{n}$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$ , es un eje de la translación  $T_1^n \circ T_2^m$  para la métrica  $(T^2, g_0)$ . Como cada translación del grupo fundamental representa una clase libre de homotopía, ya clasificamos todos los ejes de  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g}_0)$  que representan una determinada clase. El objetivo del capítulo es demostrar el siguiente resultado sorprendente de Hedlund [7].

**Teorema 11.0.1.** *Sea  $(T^2, g)$  una estructura Riemanniana  $C^\infty$  en el toro. Sea  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g})$  el levantamiento de la estructura del toro a su recubrimiento universal. Entonces existe una constante  $H > 0$  tal que toda geodésica minimizante global de  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g})$  se encuentra en la vecindad tubular de radio  $H$  de alguna recta del plano.*

Es decir, las minimizantes globales de **cualquier** métrica Riemanniana en el plano inducida por una métrica en el toro se comportan como rectas a grosso modo. La demostración tiene varias etapas que desarrollaremos en las próximas secciones.

## 11.1. Intersecciones entre minimizantes globales

Dos rectas en el plano que se intersectan o coinciden, o se encuentran en un único punto. Dos geodésicas hiperbólicas o son disjuntas o se intersectan en un único punto. Tanto en el plano Euclidiano como en el plano hiperbólico las geodésicas son minimizantes globales. Cabe entonces la pregunta: minimizantes globales tienen propiedades análogas de intersección? El objetivo de la sección es responder esta pregunta.

En la sección usaremos la notación  $[x, y]$  para designar la única geodésica minimizante con extremos  $x, y$  cada vez que  $x, y$  estén en una vecindad normal  $V(p)$  de un punto  $p \in M$ .

**Lema 11.1.1.** *Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana  $C^\infty$  completa y  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ ,  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow M$  dos geodésicas minimizantes globales para*

metrizadas por longitud de arco. Entonces  $\gamma$  y  $\beta$  se intersectan en un único punto o no se intersectan.

*Demostración.* La demostración es una aplicación más del teorema 8.3.1 y el corolario 8.2.1. Suponer que  $\gamma(0) = \beta(0)$  y que  $\gamma'(0)$  es transversal a  $\beta'(0)$ . Si existiera otro punto de intersección entre ellas, digamos  $\gamma(r) = \beta(r')$ ,  $r > 0$ , tendríamos que  $r = r'$  porque ambas son minimizantes y  $r, r'$  son parámetros de longitud de arco que satisfacen

$$r = d(\gamma(0), \gamma(r)) = d(\beta(0), \beta(r')) = r'.$$

Sea  $p = \gamma(0)$  y considerar una bola normal  $B_\rho(p)$  donde toda geodésica  $[x, y]$  con extremos  $x, y \in B_\rho(p)$  es única y contenida en  $B_\rho(p)$ . Definir la curva

$$\Gamma = [\gamma(-\rho), \beta(\rho)] \cup \beta[\rho, r].$$

Es una unión de geodésicas que conecta los puntos  $\gamma(-\rho)$  y  $\beta(r) = \gamma(r)$ , que tiene longitud estrictamente menor que  $\rho + r$ , la longitud de  $\gamma[-\rho, r]$ . Porque la longitud de  $[\gamma(-\rho), \beta(\rho)]$  es estrictamente menor que  $2\rho$ , la longitud de la geodésica "quebrada"  $\gamma[-\rho, 0] \cup \beta[0, \rho]$ , que no puede ser la de menor longitud entre las curvas que unen  $\gamma(-\rho)$  y  $\beta(\rho)$  por el corolario 8.2.1. Así,

$$l_g(\Gamma) = l_g([\gamma(-\rho), \beta(\rho)]) + l_g(\beta[\rho, r]) < 2\rho + r - \rho = r + \rho.$$

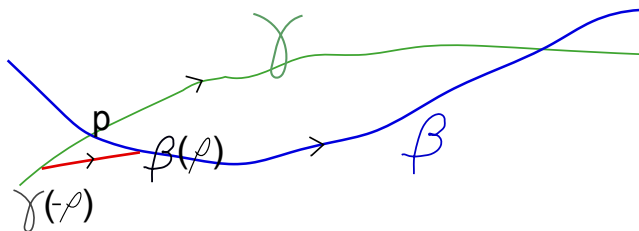


Figura 11.1: Atajo entre las geodésicas  $\gamma$  y  $\beta$

Sin embargo, la longitud de  $\gamma[-\rho, r]$  es  $\rho + r$  porque  $\gamma$  es minimizante global. Esto nos lleva a una contradicción porque  $\Gamma$  tiene los mismos extremos que  $\gamma$  y tiene menor longitud. La contradicción proviene de suponer que  $\gamma'(0)$  es transversal a  $\beta'(0)$  y que por lo tanto, existe un

”atajo” entre  $\gamma(-\rho)$  y  $\beta(\rho)$  que no pasa ni por  $\gamma$  ni por  $\beta$ . Concluimos que el conjunto de puntos de intersección entre  $\gamma$  y  $\beta$  consiste en un único punto.  $\square$

El lema anterior en realidad se puede mejorar. No solo dos minimizantes globales no se pueden intersectar en más de un punto sino que no puede haber aproximación asintótica entre dos minimizantes que se intersectan.

**Lema 11.1.2.** *Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana  $C^\infty$  completa. Dados  $\epsilon > 0$ ,  $p \in M$ , existe  $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$  tal que si  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ ,  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow M$  son dos geodésicas minimizantes globales parametrizadas por longitud de arco tales que*

1.  $\gamma(0) = \beta(0) = p$ ,
2.  $\gamma'(0)$ ,  $\beta'(0)$  son linealmente independientes y forman un ángulo mayor o igual a  $\epsilon$ ,

entonces la distancia  $d$  entre dichas geodésicas con respecto a la métrica  $g$  satisface

$$d(\gamma(t), \beta) \geq \delta$$

para todo  $t > 1$ . Además, si  $M$  es compacta,  $\delta$  no depende de  $p$ , solo de  $\epsilon$ .

*Demostración.* La demostración sigue la misma línea de raciocinio de la demostración del lema anterior. Suponer por contradicción que existen sucesiones  $t_n, s_n \rightarrow +\infty$  tal que

$$d(\gamma(t_n), \beta(s_n)) < \frac{1}{n},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $\rho > 0$  el radio de una vecindad normal para  $p$ . Observemos en primer lugar que  $t_n$  es la distancia entre  $p$  y  $\gamma(t_n)$ ,  $s_n$  es la distancia entre  $p$  y  $\beta(s_n)$ . Por la desigualdad triangular de la distancia,

$$t_n = d(p, \gamma(t_n)) \leq d(p, \beta(s_n)) + d(\beta(s_n), \gamma(t_n)) < s_n + \frac{1}{n}.$$

De forma análoga se tiene que  $s_n < t_n + \frac{1}{n}$ . Por lo que  $|t_n - s_n| < \frac{1}{n}$ .

Considerar la curva  $\Gamma_n$  formada por subconjuntos de geodésicas

$$\Gamma_n = [\gamma(-\rho), \beta(\rho)] \cup \beta[\rho, s_n] \cup [\beta(s_n), \gamma(t_n)].$$

La longitud de la geodésica  $[\gamma(-\rho), \beta(\rho)]$  es estrictamente menor que  $2\rho$ . O sea, existe  $a > 0$  tal que  $l_g([\gamma(-\rho), \beta(\rho)]) - 2\rho = -a < 0$ . La diferencia  $a$  depende del ángulo entre  $\gamma'(0)$  y  $\beta'(0)$ , y del punto  $p$ . Así la longitud de la curva  $\Gamma_n$  es menor que

$$(-a + 2\rho) + (s_n - \rho) + \frac{1}{n} = (\rho - a) + s_n + \frac{1}{n} < (\rho - a) + t_n + 2\frac{1}{n}.$$

De forma tal que existe un entero  $n_0$  grande a partir del cual la longitud de  $\Gamma_n$  es estrictamente menor que  $\rho + t_n$ . Sin embargo, la longitud de  $\gamma(-\rho, t_n)$ ,  $\rho + t_n$ , es la distancia entre  $\gamma(-\rho)$  y  $\gamma(t_n)$ , y la curva  $\Gamma_n$  conecta estos mismos puntos. Siendo una geodésica "quebrada",  $\Gamma_n$  no podría tener menor longitud que  $\gamma[-\rho, t_n]$  dado que  $\gamma$  es por hipótesis una geodésica minimizante global. Concluimos que las sucesiones  $t_n, s_n$  no pueden existir y por lo tanto, el ínfimo para  $t > 1$  de las distancias  $d(\gamma(t)\beta(t))$  debe ser estrictamente mayor que 0.

Si la variedad es compacta, el número  $a$  no depende del punto  $p \in M$ , depende apenas del ángulo entre los vectores iniciales de las geodésicas. Esto se puede verificar a partir de la continuidad de los radios de vecindades normales en  $M$ , una consecuencia del corolario 8.2.1 y del lema 8.3.1.  $\square$

Los resultados de esta sección son lo mejor que se puede afirmar sobre propiedades de intersección entre geodésicas minimizantes en cualquier dimensión. Otras preguntas naturales como la divergencia de las distancias entre minimizantes globales que se intersectan (como se verifica en los planos Euclidiano e hiperbólico) tienen respuestas negativas, inclusive en el mundo de las superficies.

## 11.2. Geodésicas cerradas que minimizan longitud en clases de homotopía son simples

A partir de esta sección los resultados del capítulo son específicos de métricas en el toro  $T^2$ .

**Teorema 11.2.1.** *Sea  $(T^2, g)$  una estructura Riemanniana  $C^\infty$  en el toro. Entonces toda geodésica cerrada  $\gamma$  que minimiza longitud en su clase de homotopía es una curva simple.*

*Demostración.* Sea  $\gamma : S^1 \rightarrow T^2$  una geodésica de  $(T^2, g)$  cuya longitud es mínima en su clase de homotopía  $[\gamma]$ . Por el corolario 10.3.1 sabemos que todo levantamiento de  $\gamma$  en  $\tilde{T}^2 = \mathbb{R}^2$  es una geodésica minimizante global de  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g})$ .

Suponer que  $\gamma$  tiene puntos de autointersección transversales, o sea, que existen  $t_1 \neq t_2$  tales que  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ ,  $\gamma'(t_1)$  y  $\gamma'(t_2)$  linealmente independientes. Supongamos sin perder generalidad que  $t_1 = 0$ ,  $t_1 < t_2$ , y parametricemos por longitud de arco  $\gamma : [0, l] \rightarrow T^2$  donde  $l$  es el período mínimo de  $\gamma$ .

Denotemos por  $\gamma_1 : [0, t_2] \rightarrow T^2$  el trecho de  $\gamma$  entre los parámetros 0 y  $t_2$ , y denotemos por  $\gamma_2 : [0, l - t_2] \rightarrow T^2$  el trecho de  $\gamma$  entre los parámetros  $t_2$  y  $l$ , con  $\gamma_2(0) = \gamma(t_2)$ . Las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son dos curvas cerradas en  $p$  con clases de homotopía  $[\gamma_1]$ ,  $[\gamma_2]$  diferentes de cero, porque sabemos que  $\gamma$  no contiene lazos contráctiles (Lema 10.3.1).

Sean  $\tilde{\gamma}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$   $i = 1, 2$ , levantamientos de  $\gamma_i$  a partir de  $\tilde{p}$ , donde  $\pi(\tilde{p}) = \gamma(0) = p$ . Observemos que ambas geodésicas son levantamientos **diferentes** de la misma curva  $\gamma$  a partir del mismo punto inicial  $\tilde{p}$ .

**Afirmación:**  $\tilde{\gamma}_1(l) = \tilde{\gamma}_2(l)$ .

En efecto, el punto  $\tilde{\gamma}_1(t_2)$  es a su vez el punto final del levantamiento de la curva cerrada en  $p$   $\gamma_1 : [0, t_2] \rightarrow T^2$  y por lo tanto corresponde a la imagen de  $\tilde{p}$  por la transformación de recubrimiento  $T_{[\gamma_1]}$ . Así mismo, el punto  $\tilde{\gamma}_1(l)$  es el punto final del levantamiento de  $\gamma_2 : [0, l - t_2] \rightarrow T^2$  a partir del punto  $\tilde{\gamma}(t_2) = T_{[\gamma_1]}(\tilde{p})$ . Por lo tanto, podemos escribir  $\tilde{\gamma}_1(l)$  como

$$\tilde{\gamma}_1(l) = T_{[\gamma_2]} \circ T_{[\gamma_1]}(\tilde{p}).$$

Aplicando el mismo argumento anterior al punto  $\tilde{\gamma}_2(l - t_2)$  obtenemos

$$\tilde{\gamma}_2(l - t_2) = T_{[\gamma_2]}(\tilde{p}),$$

$$\tilde{\gamma}_2(l) = T_{[\gamma_1]} \circ T_{[\gamma_2]}(\tilde{p}).$$

Ahora, observemos que el grupo fundamental de  $T^2$  es isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  y por lo tanto conmutativo. Esto demuestra la afirmación.

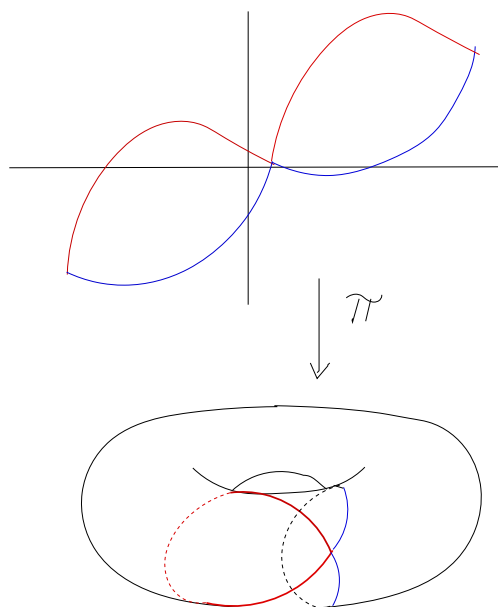


Figura 11.2: Dos levantamientos diferentes de una geodésica cerrada que no es simple

La afirmación representa claramente una contradicción, porque las dos geodésicas  $\tilde{\gamma}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, 2$ , son minimizantes globales y no pueden, por el Lema 11.1.1, tener más de un punto de intersección.  $\square$

La demostración del Teorema 11.2.1 es un bello ejemplo de la interacción entre la topología y la geometría de las geodésicas minimizantes: la conmutatividad del grupo fundamental de  $T^2$  es crucial para el argumento. De hecho, en cualquier superficie compacta con grupo fundamental no trivial, diferente del toro, la proyección de recubrimiento de una geodésica minimizante global tiene infinitas autointersecciones (ejemplo: una superficie obtenida como cociente del plano hiperbólico por la acción de un grupo discreto de isometrías).

Las geodésicas minimizantes de  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g})$  que son ejes de transformaciones de recubrimiento tienen esta propiedad especial: no solo son curvas simples sino sus proyecciones de recubrimiento también lo son. Al final del capítulo demostraremos que esta propiedad se extiende a **toda** geodésica minimizante global.

### 11.3. Ejes son sombreados por rectas

El Teorema 11.2.1 es quiz'as el resultado más importante del capítulo. Sus reflejos en la geometría global de las minimizantes son fantásticos.

**Lema 11.3.1.** *Sea  $(T^2, g)$  una estructura Riemanniana en el toro. Sea  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  un eje de una transformación de recubrimiento  $T_{[\gamma]}$ . Sean  $x = \tilde{\gamma}(t_1)$ ,  $y = \tilde{\gamma}(t_2)$  tales que el segmento de recta  $L_{x,y}$  de extremos  $x, y$  intersecta  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  solamente en  $x, y$ . Entonces, la región del plano limitada por  $L_{x,y}$  y  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  no contiene ningún dominio fundamental de  $T^2$ .*

*Demostración.* Sea  $\sigma$  la curva formada por la unión de  $L_{x,y}$  y  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$ . Dicha curva es simple por las hipótesis, sea  $\Omega$  la región limitada por la curva  $\sigma$ . Sea  $L$  la recta determinada por los puntos  $x, y$ .

Si  $\Omega$  contiene un dominio fundamental  $D$  de  $T^2$  entonces existe una transformación  $T$  de recubrimiento tal que  $T(\tilde{\gamma}(t_2)) \in D$ . La recta  $T(L)$  paralela a  $L$  y disjunta de  $L$  claramente intersecta  $D$ . Los puntos de la curva  $T(\tilde{\gamma}([t_1, t_2]))$  no intersectan  $L$  ya que sus extremos  $T(\tilde{\gamma}(t_1)), T(\tilde{\gamma}(t_2))$  están en  $T(L)$  y cualquier otro punto de  $T(L)$  está más lejos de  $L$  que dichos extremos (recordemos que  $T$  es una translación).

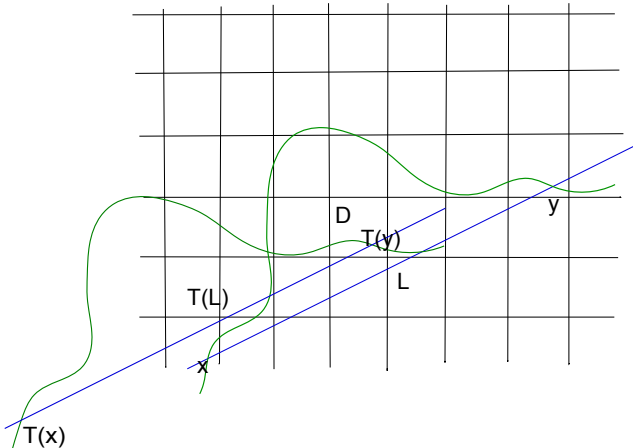


Figura 11.3: Levantamiento de  $\gamma$  que contiene puntos de un dominio fundamental  $D$  contenido en  $\Omega$

Sea  $\tilde{\gamma}(t_0)$  el punto más distante de  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  a la recta  $L$ . Si  $d_0$  es esta

distancia, entonces  $d_0$  también es la mayor distancia entre los puntos de  $\Omega$  y la recta  $L$ .

La distancia de  $T(\tilde{\gamma}(t_0))$  a  $T(L)$  es  $d_0$ , y como  $T(L)$  y  $L$  son disjuntas la distancia de  $T(\tilde{\gamma}(t_0))$  a  $L$  es mayor que  $d_0$ . Por lo tanto,  $T(\tilde{\gamma}(t_0))$  no puede pertenecer a  $\Omega$ , y entonces la curva  $T(\tilde{\gamma}([t_1, t_2]))$  tiene que intersectar el borde de  $\Omega$  (por el teorema de Jordan). Como todos sus puntos están a distancia positiva de  $L$  se tiene que solo puede intersectar el borde de  $\Omega$  atravesando la curva  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$ . Pero un punto de intersección entre  $\tilde{\gamma}$  y  $T(\tilde{\gamma})$  se proyecta por la aplicación de recubrimiento en un punto de autointersección de  $\gamma$ . De acuerdo con el teorema 11.2.1, no existen tales puntos en  $\gamma$ . La contradicción obtenida proviene de suponer que existe un dominio fundamental  $D$  en la región  $\Omega$ , lo que demuestra el lema.  $\square$

Consideremos una recta  $L$  del plano, supongamos que  $L$  no es vertical. Sean  $R^+$ ,  $R^-$  las componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 - L$ . Sea  $\mathcal{F}_0$  el conjunto de los dominios fundamentales que intersectan  $L$ . Son cuadrados de la forma  $[n, n + 1] \times [k, k + 1]$  donde  $n, k \in \mathbb{Z}$ . La región  $U_0$  formada por la unión de dichos conjuntos es la clausura de una vecindad abierta de la recta, cuya frontera esta constituida por una unión de segmentos de recta. Esta frontera tiene dos componentes conexas,  $\Gamma_0^+ \subset R^+$ ,  $\Gamma_0^- \subset R^-$ , una de cada lado de la recta.

Necesitaremos considerar así mismo el conjunto de los dominios fundamentales  $\mathcal{F}_1$  cuyas fronteras intersectan la frontera de  $U_0$ . Llamemos  $U_1$  a la unión de los mismos, y sea  $V(L) = U_0 \cup U_1$ .  $V(L)$  es la clausura de una vecindad tubular de  $L$ , su frontera tiene dos componentes conexas  $\Gamma_1^+$ ,  $\Gamma_1^-$ , que denotamos de forma coherente con las fronteras  $\Gamma_0^+$ ,  $\Gamma_0^-$ . Un dominio fundamental  $D$  de  $\mathcal{F}_1$  está totalmente contenido en  $R^+$  o totalmente contenido en  $R^-$ . Esto no sucede con los dominios fundamentales de  $\mathcal{F}_0$ . La orientación de la recta induce una orientación de  $\Gamma_1^+$ ,  $\Gamma_1^-$  y una enumeración de los dominios fundamentales  $D_{1i}$  que intersectan  $\Gamma_1^+$  por ejemplo, donde  $D_{10}$  puede ser determinado escogiendo un punto dado de  $L$  como referencia.

**Lema 11.3.2.** *Sea  $(T^2, g)$  una estructura Riemanniana en el toro. Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una geodésica minimizante global de  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g})$ . Dado un dominio fundamental  $D$  tal que  $\gamma \cap D \neq \emptyset$ , se tiene que el mayor trecho  $\gamma([t, r])$  de  $\gamma$  con la propiedad de tener sus extremos en  $D$  tiene longitud*

acotada por el diámetro  $\rho$  de  $D$ .

*Demostración.* Si  $\gamma(t), \gamma(r)$  están en  $D$ , entonces su distancia es justamente la longitud de  $\gamma([t, r])$ . Por definición de diámetro, la distancia entre dichos puntos es menor o igual al diámetro de  $D$ .  $\square$

**Corollary 11.3.1.** *Sea  $(T^2, g)$  una estructura Riemanniana en el toro. Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una geodésica minimizante global de  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g})$ . Dado un dominio fundamental  $D$  tal que  $\gamma \cap D \neq \emptyset$ , y dado  $\gamma([t, r])$  el mayor trecho de  $\gamma$  tal que  $\gamma(t), \gamma(r) \in D$ , se tiene que  $\gamma([t, r])$  no intersecta ningún dominio fundamental que se encuentre a distancia mayor o igual al diámetro  $\rho$  de  $D$ .*

*Demostración.* En efecto, si  $D'$  es un dominio fundamental que se encuentra a distancia mayor o igual a  $\rho$  de todo punto de  $D$ , entonces un punto  $\gamma(a) \in D'$  con  $a \in [t, r]$  define dos curvas  $\gamma([t, a])$ ,  $\gamma([a, r])$  disjuntas dentro de  $\gamma([t, r])$  cada una con longitud por lo menos  $\rho$ . Esto no es posible por el lema 11.3.2.  $\square$

Ahora, sea  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  un un eje de una transformación de recubrimiento  $T_{[\tilde{\gamma}]}$ , y sean  $x = \tilde{\gamma}(t_1)$ ,  $y = \tilde{\gamma}(t_2)$  puntos tales que el segmento de recta  $L_{x,y}$  de extremos  $x, y$  intersecta  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  solamente en  $x, y$ . Sea  $L$  la recta determinada por  $x, y$  y sea  $\Omega_{x,y}$  la región limitada por  $\gamma([t_1, t_2])$  y  $L_{x,y}$ , que podemos suponer contenida en  $R^+$ . La orientación de  $\tilde{\gamma}$  nos permite enumerar los dominios fundamentales de  $R^+$  que  $\tilde{\gamma}$  encuentra:  $D_1$  es el primero, que contiene  $\tilde{\gamma}(0)$ .  $D_1$  está en la colección  $\mathcal{F}_0$ , y sea  $\tilde{\gamma}([t_1, s_1])$  el mayor trecho de  $\tilde{\gamma}$  cuyos extremos están en  $D_1$ . Entonces  $\tilde{\gamma}(s_1 + \epsilon)$  está en otro dominio fundamental para  $\epsilon$  pequeño, llamemos a este dominio  $D_2$  y  $\tilde{\gamma}([s_1, s_2])$  el mayor trecho de  $\tilde{\gamma}$  cuyos extremos están en  $D_2$ . Por inducción, definimos  $D_k$  y  $\tilde{\gamma}([s_{k-1}, s_k])$  de la misma forma. El último dominio intersectado por  $\tilde{\gamma}$ ,  $D_m$ , contiene  $\tilde{\gamma}(t_2)$  y está en  $\mathcal{F}_0$ . Como consecuencia del corolario anterior tenemos

**Corollary 11.3.2.** *La longitud de  $\tilde{\gamma}([t_1, s_k])$  es menor o igual a  $k\rho$ .*

**Corollary 11.3.3.** *Existe  $\nu > 0$  tal que si  $D_k$  está en  $\mathcal{F}_1$ ,  $D_k = D_{1i}$ , entonces,  $\tilde{\gamma}([t_1, s_k])$  no intersecta ningún dominio  $D_{1j}$  si  $j \geq i + \nu$ .*

*Demostración.* Sea  $p = \tilde{\gamma}(t_1)$ , y sea  $B_r(p)$  la bola de radio  $r$  centrada en  $p$ . Basta demostrar que el número de los dominios de  $\mathcal{F}_1$  que cubren la

región  $V_k = V(L) \cap (B_{(k+1)\rho}(p) - B_{k\rho}(p))$  está acotado por una constante  $\nu > 0$  que no depende de  $k$ . Esto es cierto porque el diámetro de  $V_k$  es menor o igual a  $4\rho$  (ejercicio: verificar), lo que implica que podemos cubrir  $V_k$  con un número  $\nu$  de cuadrados de lado 1 que depende de  $4\rho$ . Como el crecimiento del índice  $i$  en  $D_{1i}$  sigue la orientación de la recta  $L$ , entonces los dominios fundamentales  $D_{1j}$  fuera de  $B_{(k+1)\rho}(p)$  tienen índice  $j > k$ . Y como para cubrir  $V_k$  se necesitan dominios en  $\mathcal{F}_0$  y  $\mathcal{F}_1$ , seguramente  $D_{1(k+j)}$  estará fuera de  $B_{(k+1)\rho}(p)$  para todo  $j \geq \nu$ . Por el corolario 11.3.2,  $\tilde{\gamma}([t_1, s_k])$  no interseca  $D_{1(k+j)}$  si  $j \geq i + \nu$ .  $\square$

**Teorema 11.3.1.** *Sea  $(T^2, g)$  una estructura Riemanniana en el toro. Existe una constante  $H > 0$  tal que si  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un eje de una transformación de recubrimiento  $T_{[\tilde{\gamma}]}$ ,  $x = \tilde{\gamma}(t_1)$ ,  $y = \tilde{\gamma}(t_2)$  son puntos tales que el segmento de recta  $L_{x,y}$  de extremos  $x, y$  interseca  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  solamente en  $x, y$ , entonces la distancia entre  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  y la recta  $L$  que contiene  $L_{x,y}$  es menor o igual a  $H$ .*

*Demostración.* Mantenemos las notaciones anteriores:  $\rho$  es el diámetro de un dominio fundamental,  $V(L)$  la vecindad de la recta  $L$  formada por la unión de los dominios fundamentales en  $\mathcal{F}_0$  y  $\mathcal{F}_1$ .

Supongamos que la región  $\Omega$  limitada por  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  y  $L_{x,y}$  está en  $R^+$ . Sea  $\Gamma^+$  la componente conexa de la frontera de  $V(L)$  en  $R^+$ .

La curva  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  es una curva compacta, que interseca un número finito de dominios fundamentales  $D_{1i}$ . Sea  $i_0$  el menor índice  $i$  tal que  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  interseca  $D_{1i}$  para algún  $i$ , y sea  $i_1$  el mayor de estos índices.

Si  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  no interseca ninguno de los  $D_{1i}$ 's, entonces  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  está contenida en la unión de los dominios fundamentales de  $\mathcal{F}_0$ . Porque sabemos que los extremos de  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  están en  $L$  y por lo tanto en dicha unión. Por otro lado, la unión de los dominios fundamentales de  $\mathcal{F}_1$  desconecta  $R^+$ , por lo que si existiesen puntos de  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  en el complemento de  $V(L)$  en  $R^+$  debería haber intersección entre  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  y la unión de los dominios en  $\mathcal{F}_1$  (nuevamente el teorema de Jordan), contradiciendo nuestra suposición. Por otro lado, si  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  no interseca ninguno de los  $D_{1i}$ 's, entonces su distancia a la recta  $L$  es menor o igual a  $\rho$  y el teorema está demostrado.

Supongamos entonces que  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  interseca los dominios  $D_{1i}$ 's. Si nunca sale de  $V(L)$  entonces su distancia a la recta  $L$  es menor o igual a  $2\rho$  y demostramos el teorema. Asumiendo que  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  puede tener

puntos fuera de  $V(L)$ , consideremos  $\tilde{\gamma}(\bar{t})$  un punto en  $\Gamma$  tal que  $\tilde{\gamma}(\bar{t}+s) \in R^+ - V(L)$  para todo  $s > 0$  suficientemente pequeño. Sea  $\Gamma^+(\bar{s}) = \tilde{\gamma}(\bar{t})$ .

**Afirmación 1:** Existe  $s' > \bar{s}$  tal que  $\Gamma^+(s') \in \tilde{\gamma}([t_1, t_2])$ .

En efecto, si no fuera cierta la afirmación  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  tendría un punto de autointersección, lo que no es posible por el lema 10.3.1 (verificar como ejercicio, aplicando el teorema de Jordan).

**Afirmación 2:** Sea  $k$  tal que  $\Gamma^+(s') = \tilde{\gamma}(t') \in D_{1k}$ . Entonces tenemos dos posibilidades:

1. O la distancia de  $\tilde{\gamma}(t')$  a  $\tilde{\gamma}(t_2)$  es menor o igual a  $3\rho$ ,
2. O existen  $r > 0$  y  $0 \leq j \leq \nu$  tales que  $\tilde{\gamma}(t' + r) \in D_{1(k+j)}$ .

Veamos: si la distancia  $d(\tilde{\gamma}(t'), \tilde{\gamma}(t_2)) = |t_2 - s_k|$  es mayor que  $3\rho$ , por la definición de  $\nu$  en el lema 11.3.3 se tiene que  $d(\tilde{\gamma}(t'), D_{1(k+j)}) \leq 3\rho$  para todo  $0 \leq j \leq \nu$ . Por la afirmación (1) existen  $r > 0$ ,  $i \geq k$  tales que  $\tilde{\gamma}(t' + r) \in D_{1i}$ . Manteniendo la notación de los lemas ??, 11.3.2, la curva  $\tilde{\gamma}([t_1, s_k])$  no interseca  $D_{1(k+j)}$  si  $j \geq \nu$ . Por lo tanto, si la curva  $\tilde{\gamma}([s_k, t_2])$  no interseca  $D_{1(k+j)}$  para algún  $j \leq \nu$  tendríamos que  $D_{1(k+j)}$  es disjunto de  $\tilde{\gamma}$  y subconjunto de  $\Omega$  (ver figura).

Pero el lema 11.3.1 nos dice que  $\Omega$  no puede contener dominios fundamentales. Así que  $\tilde{\gamma}([s_k, t_2])$  debe intersecar algún  $D_{1(k+j)}$ , con  $j \leq \nu$ .

Concluimos de la afirmación (2) que todo punto de  $\tilde{\gamma}([t_1, t_2])$  está a una distancia de  $H = 5\rho$  de la recta  $L_{x,y}$ , finalizando la demostración del lema.  $\square$

**Teorema 11.3.2.** *Sea  $(T^2, g)$  una estructura Riemanniana en el toro. Existe una constante  $H > 0$  tal que si  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un eje de una transformación de recubrimiento  $T_{[\gamma]} = T_{n,m} = T_1^n \circ T_2^m$ , entonces la distancia entre  $\tilde{\gamma}$  y la recta  $L$  de inclinación  $\frac{m}{n}$  que pasa por  $\tilde{\gamma}(0)$  es menor o igual a  $H$ .*

*Demostración.* Observemos en primer lugar que la recta  $L$  de inclinación  $\frac{m}{n}$  que pasa por  $\tilde{\gamma}(0)$  contiene toda la órbita  $T_{n,m}^k(\tilde{\gamma}(0))$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , ya que la clase de homotopía de  $\gamma$  está representada por  $T_{n,m}$ . De esta forma, la intersección entre  $L$  y  $\tilde{\gamma}$  contiene todos los puntos  $\tilde{\gamma}(0) + (kn, km)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Llamemos  $x_k = \tilde{\gamma}(0) + (kn, km)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , consideremos las curvas  $\tilde{\gamma}([t_k, t_{k+1}])$ , con extremos iguales a  $x_k, x_{k+1}$  respectivamente. Estas curvas se pueden descomponer en diferentes componentes conexas que están en  $R^+, R^-$ , cuyos extremos son puntos de la recta  $L$ . Aplicando el teorema 11.3.1 a cada una de estas componentes deducimos que la distancia de  $\tilde{\gamma}$  a  $L$  es menor o igual a  $H = 5\rho$ , lo que demuestra el corolario.  $\square$

El Teorema 11.3.2 es una parte del Teorema 11.0.1 de Hedlund, ejes de transformaciones de recubrimiento están en vecindades tubulares de rectas. Nos falta demostrar algo semejante para cualquier minimizante global con el fin de demostrar integralmente dicho enunciado.

## 11.4. Toda minimizante global es sombreada por una recta

En esta sección final extendemos los resultados de "sombreamiento" de geodésicas minimizantes globales por rectas obtenidos para ejes de transformaciones de recubrimiento a toda geodésica minimizante global. Comenzamos por la siguiente observación.

**Lema 11.4.1.** *Sea  $(T^2, g)$  una estructura Riemanniana en el toro. Sea  $\rho > 0$  el diámetro de un dominio fundamental con respecto a la métrica  $g$ , y sea  $H > 0$  la constante de sombreado del Teorema 11.3.2. Entonces, dada una recta  $L$  cualquiera en el plano existe una geodésica minimizante global  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g})$  que está contenida en una vecindad tubular de radio  $Q = 2\rho + 2H = 12\rho$  de  $L$ .*

*Demostración.* La recta  $L$  se puede trasladar por una transformación de recubrimiento  $T$  a una recta  $\bar{L}$  que intersecte el dominio fundamental  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Si demostramos que existe una minimizante global  $\alpha$  a distancia acotada por  $2\rho + 2H$  de  $\bar{L}$  tendremos que la minimizante global  $T^{-1}(\alpha)$  (recordemos que  $T$  es isometría de  $\mathbb{R}^2, \tilde{g}$ ) se encuentra a distancia de  $L$  acotada por  $\rho + 2H$ .

Sea  $L_0$  una recta paralela a  $\bar{L}$  que pasa por el origen. Existe una sucesión de rectas por el origen  $L_n, n \rightarrow \infty$  que tienen inclinaciones racionales y tienden uniformemente en compactos a  $\bar{L}$ . Esto se debe a la densidad de los racionales en los reales, por lo que la inclinación de  $\bar{L}$

puede ser aproximada por una sucesión de racionales que nos define las inclinaciones de la sucesión  $L_n$ .

**Afirmación:** Para cada  $n$  existe una geodésica minimizante global  $\gamma_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  que se encuentra en una vecindad tubular de radio  $\rho + 2H$  de la recta  $L_n$ .

En efecto, cada clase de homotopía  $[\alpha]$  del toro está representada por un eje  $\tilde{\alpha}$  en el recubrimiento universal que pasa por el dominio  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Dicho eje es subconjunto de la vecindad tubular de una recta  $L(\alpha)$  de inclinación racional  $r(\alpha)$  a distancia de  $\tilde{\alpha}$  acotada por  $H$  según el Teorema 11.3.2. Y toda inclinación racional a su vez representa una clase de homotopía. Por lo que para cada  $n$  existe una recta  $\bar{L}_n$  paralela a  $L_n$  y una geodésica minimizante global  $\gamma_n$  en la vecindad tubular de radio  $H$  de  $\bar{L}_n$ . Como  $L_n$  está en el dominio  $[0, 1] \times [0, 1]$  cuyo diámetro es  $\rho$ , la desigualdad triangular nos dice que la distancia máxima entre  $L_n$  y  $\gamma_n$  debe ser menor o igual a  $\rho + 2H$ .

Observemos que las geodésicas  $\gamma_n$  intersectan la bola  $B$  de radio  $2\rho + sH$  centrada en el origen. Existe entonces una subsucesión convergente de pares  $(\gamma_n(t_n), \gamma'_n(t_n))$  que tiende a un par  $(p, v)$ , donde  $v \in T_p\mathbb{R}^2$  es un vector unitario. Por el Lema 8.4.2, la geodésica  $\gamma_{(p,v)}$  cuyas condiciones iniciales son  $\gamma_{(p,v)}(0) = p$ ,  $\gamma'_{(p,v)}(0) = v$ , es una minimizante global. Y como la distancia máxima entre  $\gamma_n$  y  $L_n$  es  $\rho + 2H$ , lo mismo sucederá con la distancia máxima entre  $\gamma_{(p,v)}$  y  $L_0$ . La geodésica  $\tilde{\gamma}$  de nuestro enunciado es entonces  $T^{-1}(\gamma_{(p,v)})$ .  $\square$

**Corollary 11.4.1.** *La imagen de la geodésica  $\tilde{\gamma}$  del enunciado del Lema 11.4.1 por la aplicación de recubrimiento  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$  es una curva simple.*

*Demostración.* Esto se debe a dos factores:

1. Las geodésicas  $\pi(\gamma_n)$  son curvas simples por el Teorema 11.2.1.
2. Si una geodésica  $c$  es el límite uniforme en compactos de curvas simples entonces  $c$  es una curva simple.

Le dejamos al lector la verificación de la segunda afirmación.  $\square$

## Demostración del Teorema de Hedlund

Sea  $(T^2, g)$  una estructura Riemanniana en  $T^2$  de clase  $C^\infty$ . Consideremos una geodésica  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g})$  que sea minimizante global. Supongamos que exista un par de puntos  $x = \alpha(t)$ ,  $y = \alpha(s)$ ,  $t < s$  tales que la distancia máxima de la curva  $\alpha([t, s])$  al segmento de recta  $L_{x,y}$  que une  $x$  y  $y$  sea mayor que  $3Q$ , donde  $Q = 12\rho$  es la constante del Teorema 11.3.2 y  $\rho$  es el diámetro de un dominio fundamental. Sea  $L$  la recta determinada por  $L_{x,y}$ , y sean  $R^+$ ,  $R^-$  las componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 - L$ . Supongamos que  $\alpha([t, s]) \subset R^+$ . Por el Teorema 11.3.2 y el Lema 11.4.1, sabemos que existe una minimizante global  $\beta$  en la vecindad tubular de radio  $Q$  de  $L$ .

Sea  $\alpha(r)$  un punto tal que la distancia  $d(\alpha(r), L)$  sea máxima, y sea  $z \in L$  un punto donde esta distancia es alcanzada. Consideremos la geodésica minimizante  $[\alpha(r), z]$  que une  $\alpha(r)$  y  $z$ , y sea  $p$  su punto medio. Tenemos entonces que  $d(p, \alpha(r)) > \frac{3}{2}Q$ ,  $d(p, L) > \frac{3}{2}Q$  ( $d(p, L)$  es el mínimo de las distancias entre  $p$  y puntos de  $L$ ). El punto  $p$  está incluido en un dominio fundamental  $D$  cuyos puntos se encuentran distantes de  $\alpha(r)$  y de todo punto de  $L$  en por lo menos  $\frac{3}{2}Q - \rho = 17\rho > Q$ . Como existe una transformación de recubrimiento  $T$  tal que  $T(L)$  interseca  $D$ , la minimizante global  $T(\beta)$  se encuentra en la vecindad tubular de radio  $Q$  de  $T(L)$ . Observemos ahora que el complemento de la geodésica  $T(\beta)$  debe separar la vecindad tubular de radio  $17\rho$  de  $T(L)$  en dos componentes disjuntas no vacías  $R(\alpha(r))$ ,  $R(x)$  (Teorema de Jordan), donde  $R(p)$  es la componente que contiene el punto  $p$ . Notemos que  $R(x) = R(y)$ .

Pero ésto implica que  $T(\beta)$  debe intersectar  $\alpha$  en por lo menos dos puntos (ejercicio: verificar aplicando el Teorema de Jordan a la región limitada por  $\alpha([t, s])$  y  $L_{x,y}$ ), lo que no es posible por el Lema 11.1.1.

De esta forma, concluimos que la distancia de  $\alpha([t, s])$  al segmento  $L_{x,y}$  tiene que ser menor o igual a  $3Q$ . Como  $x, y$  son arbitrarios en  $\alpha$ , deducimos que existe una recta  $L$  cuya distancia a cualquier punto de  $\alpha$  es acotada por  $3Q$ , culminando así la demostración del Teorema de Hedlund.

El trabajo de Hedlund sobre geodésicas minimizantes globales contiene más resultados que los expuestos en este texto. Para cerrar la exposición mencionamos un resultado que generaliza el Teorema 11.2.1 y nos da una descripción de la geometría de toda minimizante global.

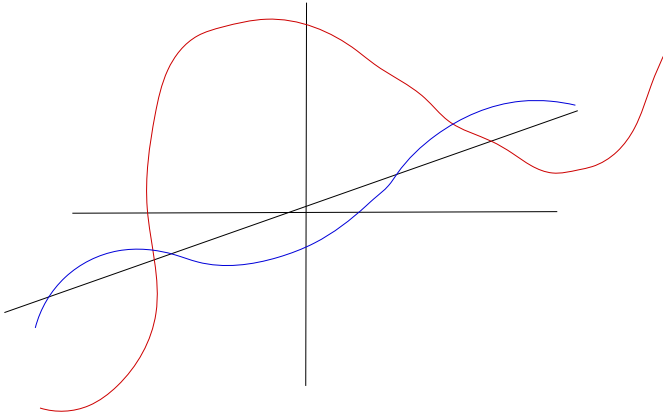


Figura 11.4: La geodésica  $\alpha$  tendría que intersectar en por lo menos dos puntos alguna minimizante

**Proposition 11.4.1.** *Sea  $(T^2, g)$  una estructura Riemanniana en el toro, sea  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$  la aplicación de recubrimiento. Entonces  $\pi(\gamma)$  es una curva simple para toda geodésica  $\gamma$  minimizante global de  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g})$ .*

La demostración se deriva de las ideas desarrolladas en este último capítulo. Invitamos al lector a realizar como ejercicio la prueba completa de la Proposición.

# Bibliografía

- [1] Apostol, T. : Calculus Vol. 1, 2. ISBN 0471000051, 0471000078.
- [2] Hicks, N.: Notas sobre geometría diferencial. Editorial HispanoEuropea, Barcelona, España. ISBN: 0-442-034059. Título original: Notes on differential geometry. Van Nostrand Reinhold Company, LTD, Londres.
- [3] Coddington, E., Levinson, N. : Theory of ordinary differential equations. Tata McGraw-Hill Publishing CO. LTD. New Delhi.
- [4] Do Carmo, M. : Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall. ISBN 0132125895.
- [5] Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T., Novikov, S. P.: Modern Geometry-methods and applications Part II. Graduate texts in Mathematics. Vol 104. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1985.
- [6] Gamelin, T. W., Greene, R. E. : Introduction to Topology. Second Edition. Dover Publications, INC. New York, 1999. ISBN 0-486-40680-6.
- [7] Hedlund, G. A.: Geodesics on a two-dimensional Riemannian manifold with periodic coefficients, Ann. of Math. **33** (1932), 719–739.
- [8] Klingenberg, W.: Riemannian Geometry. De Gruyter Studies in Mathematics I. Heinz Bauer, Jerry Kazdan, Eduard Zehnder Editors, 1991. ISBN 3-11-014593-6

- [9] Morse, H. M.: A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one, Transactions Am. Math. Soc. **26** (1924), 25–60.
- [10] O’Neill, B.: Elementary Differential Geometry. Elsevier Science, ISBN 9780080505428
- [11] Spivak, M.: A comprehensible introduction to differential geometry. Publish or perish. ISBN 091409873X.

## **Asociación Matemática Venezolana**

Presidente: Rafael Sánchez Lamonedá

### **Consejo Directivo Nacional**

Rafael Sánchez Lamonedá  
Capítulo Capital

Alexander Carrasco  
Capítulo de Centro Occidente

Oswaldo Araujo  
Capítulo de Los Andes

Said Kas-Danouche  
Capítulo de Oriente

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela.

Asociación Matemática Venezolana  
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela  
<http://amv.ivic.gob.ve>

# Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

## Consejo Directivo

### **Director**

Eloy Sira

### **Subdirector**

Alberto Quintero

### **Representantes del Ministerio del Poder Popular para la Ciencia, Tecnología e Innovación**

Guillermo Barreto

Juan Luis Cabrera

### **Representante del Ministerio del Poder Popular para la Educación Universitaria**

Prudencio Chacón

### **Representantes Laborales**

José Garzaro

Víctor Peña

William Espinoza (Suplente)

Sirvia Ávila (Suplente)

### **Gerencia General**

Lira Parra

## Comisión Editorial

Eloy Sira (Coordinador)

Lucía Antillano

Horacio Biord

Jesús Eloy Conde

María Teresa Curcio

Rafael Gassón

Pamela Navarro

Héctor Suárez

Erika Wagner



Gobierno **Bolivariano**  
de Venezuela

Ministerio del Poder Popular  
para **Ciencia, Tecnología e Innovación**

