

XXIV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS  
EMALCA-VENEZUELA 2011

---

LA TRICOTOMÍA DE ZILBER:  
UNA BREVE INTRODUCCIÓN  
GEOMÉTRICA

Andrés Villaveces

MÉRIDA, VENEZUELA, 4 AL 10 DE SEPTIEMBRE DE 2011



XXIV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS  
EMALCA – VENEZUELA 2011

---

LA TRICOTOMÍA DE ZILBER: UNA BREVE INTRODUCCIÓN  
GEOMÉTRICA

Andrés Villaveces

Universidad Nacional de Colombia  
Bogotá

[avillavecesn@unal.edu.co](mailto:avillavecesn@unal.edu.co)

---

MÉRIDA, VENEZUELA, 4 AL 10 DE SEPTIEMBRE DE 2011

## XXIV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las siguientes instituciones: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Universidad de Oriente y Universidad Simón Bolívar, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana.

La XXIV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS recibió apoyo financiero de: Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, Banco Central de Venezuela, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), Fundacite Mérida, Unión Matemática de América Latina y el Caribe, y CIMPA (Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées).

2010 Mathematics Subject Classification: 03C45, 03C35

©Ediciones IVIC

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

RIF: G-20004206-0

**La tricotomía de Zilber: una breve introducción geométrica**

Andrés Villaveces

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas

Preprensa e impresión: Gráficas Lauki C. A.

Depósito legal If66020115102606

ISBN 978-980-261-127-0

Caracas, Venezuela

2011

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Estructuras: las bases</b>                             | <b>5</b>  |
| 1.1. Estructuras, lenguajes . . . . .                        | 5         |
| 1.2. Compacidad . . . . .                                    | 7         |
| 1.3. Aplicaciones de Compacidad . . . . .                    | 9         |
| 1.3.1. Modelos no estándar . . . . .                         | 10        |
| 1.4. Equivalencia elemental e inmersiones . . . . .          | 13        |
| 1.4.1. Extensiones elementales . . . . .                     | 16        |
| 1.4.2. Modelos generados . . . . .                           | 18        |
| 1.4.3. El criterio de Tarski-Vaught . . . . .                | 19        |
| <b>2. Teoría de modelos</b>                                  | <b>23</b> |
| 2.1. Tipos, saturación, homogeneidad. . . . .                | 23        |
| 2.1.1. Ejercicios . . . . .                                  | 27        |
| 2.1.2. Saturación y homogeneidad. . . . .                    | 27        |
| 2.2. Eliminación de cuantificadores . . . . .                | 29        |
| 2.2.1. Ejemplos . . . . .                                    | 31        |
| <b>3. Estabilidad geométrica.</b>                            | <b>33</b> |
| 3.1. Geometría combinatoria. . . . .                         | 34        |
| 3.2. Estructuras minimales y fuertemente minimales . . . . . | 35        |
| 3.3. Pregeometrías, geometrías . . . . .                     | 36        |
| 3.3.1. De pregeometría a geometría . . . . .                 | 37        |
| 3.4. Localizar pregeometrías. . . . .                        | 39        |
| 3.5. Dimensión . . . . .                                     | 39        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 3.5.1.    | Ejercicio . . . . .                               | 42        |
| 3.6.      | Minimalidad fuerte . . . . .                      | 42        |
| 3.7.      | Rango de Morley . . . . .                         | 45        |
| 3.7.1.    | Grado de Morley . . . . .                         | 49        |
| 3.7.2.    | Estabilidad clásica . . . . .                     | 51        |
| <b>4.</b> | <b>Tricotomía débil.</b>                          | <b>55</b> |
| 4.1.      | Geometrías clásicas. . . . .                      | 55        |
| 4.2.      | Pseudoplanos. . . . .                             | 58        |
| 4.3.      | Configuración de Zilber . . . . .                 | 59        |
| 4.4.      | Tricotomía débil . . . . .                        | 63        |
| <b>5.</b> | <b>La conjetura de tricotomía</b>                 | <b>67</b> |
| 5.1.      | Homogeneidad . . . . .                            | 69        |
| <b>6.</b> | <b>Después de la conjetura.</b>                   | <b>75</b> |
| 6.1.      | El contraejemplo de Hrushovski. . . . .           | 76        |
| 6.1.1.    | Un caso minimal: el bosque aleatorio . . . . .    | 77        |
| 6.1.2.    | Estilos de construcciones de Hrushovski . . . . . | 79        |
| 6.2.      | Geometrías de Zariski. . . . .                    | 79        |
| 6.3.      | Exponencial compleja. . . . .                     | 80        |
| 6.3.1.    | El campo de Zilber . . . . .                      | 81        |
| 6.4.      | Cubiertas finitas. . . . .                        | 82        |
| <b>7.</b> | <b>Líneas nuevas.</b>                             | <b>83</b> |

# Agradecimientos

Agradezco enormemente a Carlos Di Prisco su invitación a escribir este pequeño libro para la Escuela Venezolana de Matemáticas. En 1991 asistí como estudiante a la escuela, en una oportunidad en que Carlos dio un curso de Teoría Descriptiva de Conjuntos. Desde entonces matemáticamente han pasado, para mí, una cantidad de cosas - un camino ya bastante largo que se inicia en esa época hace veinte años y para el cual el paso por Mérida fue una etapa muy positiva.

Regreso en 2011 a Mérida, esta vez para dar el curso sobre Tricotomía de Zilber, una rama extraña y (espero) fascinante, de la Teoría de Modelos. La presencia de Carlos Di Prisco en la Lógica Matemática de América Latina ha sido fundamental. Su trabajo, bien articulado con el de otros lógicos latinoamericanos, ha permitido el crecimiento de varios eventos, la formación de un buen número de estudiantes en Venezuela, Colombia y otros países, y la consolidación de investigación de nivel mundial en nuestra zona.

Agradezco también a Neptalí Romero su enorme paciencia con el tema de la edición de este libro.

El resto de mis agradecimientos van hacia una comunidad de gente de teoría de modelos y otros matemáticos, que incluye a Boris Zilber, a John Baldwin, a Tim Gendron, Rami Grossberg y Tapani Hyttinen en los temas específicos de este libro. A través de múltiples encuentros, discusiones, simposios, a lo largo de esta última década, la importancia del tema aquí tratado ha ido volviéndose más clara para mí.

Las discusiones (matemáticas y filosóficas) sobre la tricotomía de Zil-

ber con Fernando Zalamea y Alejandro Martín iluminan parte de este escrito. Mi gratitud hacia Fernando y Alejandro es inmensa, por toda esa red de discusiones que me han ayudado a “tejer” allá en Bogotá.

Agradezco muy profundamente a María Clara Cortés el haberme acompañado durante este tiempo de escritura del libro. De alguna manera, hablando de temas completamente distintos, a veces estamos hablando (también) de la tricotomía de Zilber.

# Introducción

Hace casi exactamente diez años, en febrero de 2001, hubo un encuentro (MAMLS Meeting) en Rutgers que fue memorable por muchas razones. Una de esas razones fue que durante ese encuentro, con la presencia de Shelah y Zilber, de Baldwin y Grossberg, de VanDieren y Lessmann, tuvo lugar la primera fusión sólida entre dos áreas hasta entonces bastante alejadas dentro de la teoría de modelos. Al final de la charla de Zilber planteé preguntas sobre existencia de modelos primos sobre cierto diagrama de configuración de independencia, y quienes estábamos entre el público y trabajábamos en Clases Elementales Abstractas casi literalmente saltamos al final de la charla a hablar con Zilber. La pregunta de Zilber era acerca de configuraciones complicadas en la pseudo-exponencial compleja, y de alguna manera era muy parecida a temas que estábamos estudiando al tratar de entender la teoría de *clases excelentes* de Shelah. Hasta la época no había ejemplos matemáticos de ese estilo de clases elementales abstractas, y tampoco había una técnica para capturar bien las preguntas de Zilber.

Esas preguntas tenían su historia vieja en la Conjetura de Tricotomía, en su formulación, en la falla inicial de ésta y los ámbitos de solución que armaron con Hrushovski, y finalmente en el intento de entender la “cuarta parte” de la tricotomía (sí, al igual que en la famosa novela de Dumas, la Tricotomía de Zilber parece admitir una cuarta parte, completamente distinta de las otras tres).

El ámbito es teoría de modelos.

En teoría de modelos usamos *lógica* para entender (es decir, clasificar,

encontrar invariantes, construir nuevas versiones de modelos):

- ¿Cómo están encajados unos modelos en otros?
- ¿Cómo podemos descomponer un modelo complicado en “ladrillos básicos” (y posiblemente reconstruir un modelo grande en términos de trozos pequeños)?
- ¿Qué estructuras admiten “geometría interna”? ¿Cuáles no? En el primer caso, ¿cómo podemos sacar jugo de la geometría?

En vez de mirar la clase de todos los grupos abelianos, o campos, o anillos locales, estudiamos **propiedades comunes** de todas estas clases y usamos LÓGICA. Los conjuntos *definibles* (o, de manera más general, *tipo-definibles*) juegan un papel crucial en teoría de modelos.

La teoría de modelos ha tenido varias definiciones a lo largo de su existencia. Por ejemplo, en el texto clásico de 1973, C. C. Chang y H. J. Keisler la definieron mediante la ecuación

$$\text{teoría de modelos} = \text{álgebra universal} + \text{lógica}$$

Después de veinte años de muchísima actividad en teoría de modelos, la ecuación había cambiado y en el texto de Hodges a principios de los años 1990 era la siguiente:

$$\text{teoría de modelos} = \text{geometría algebraica} - \text{campos}$$

Otras ecuaciones similares han aparecido. Una descripción informal más contemporánea (2007), debida a Hrushovski, es la siguiente, que en muchos sentidos captura el espíritu de gran parte de la investigación actual en teoría de modelos — uso de estabilidad y de estabilidad geométrica (salidas de consideraciones inicialmente muy abstractas) para hallar aplicaciones cada vez más ambiciosas a geometría algebraica, teoría de números, campos valuados, álgebras de operadores:

**La teoría de modelos es la geografía de la matemática dócil.**

El punto principal de estas definiciones es que reflejan, por un lado, la interacción (cada vez más intensa) entre la teoría de modelos y otras ramas de la matemática, y por otro lado el crecimiento activo y dinámico de una disciplina matemática.

La teoría de modelos también es una de las cuatro ramas principales de la lógica matemática. Tiene aplicaciones a álgebra (teoría de campos, geometría algebraica, teoría de números y teoría de grupos), análisis (no estándar, geometría de espacios de Banach, teoría de operadores) y computación teórica. Por otro lado, tiene conexiones profundas (y cruciales) con la teoría de conjuntos.

La teoría de modelos básica estudia entonces la clasificación de las estructuras matemáticas, las inmersiones (elementales o no) entre estas y varios subconjuntos de su conjunto potencia (por ejemplo, variedades algebraicas), por medio de fórmulas lógicas. Adicionalmente, caracteriza propiedades *estructurales* (semánticas) de las clases de modelos y les asocia propiedades *combinatorias* (sintácticas) de sus teorías. También da herramientas para construcciones de modelos (ultraproductos y variantes de estos, modelos de Ehrenfeucht-Mostowski, clausuras definibles y algebraicas, etc.) que terminan afectando la manera como estudiamos la clase de modelos.

Por ejemplo, en lugar de estudiar la estructura de los complejos “mirando solamente”  $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$  la teoría de modelos estudia la clase de *todos* los modelos de la teoría de los complejos (y demuestra, como veremos, que esta teoría tiene las siguientes propiedades:

- es axiomatizable recursivamente,
- es decidible,
- es categórica en todos los cardinales no contables<sup>1</sup>,
- es completa,
- etc.)

---

<sup>1</sup>Este hecho es clásico - es el teorema de Steinitz de principios del siglo XX pero que la teoría de modelos retoma y generaliza de manera enorme en los años 1960 y 1970.

Estudia también muchísimos modelos de la teoría de los números complejos distintos del “modelo estándar”  $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ : modelos contables, modelos de tamaños infinitos arbitrarios, modelos pequeños (primos, atómicos), grandes (con mayor o menor grado de saturación, homogéneos, universales, etc.).

Lo anterior es solamente un ejemplo del tipo de cosas que hace la teoría de modelos - el caso de los números complejos  $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$  y el estudio de su teoría (llamada  $ACF_0$ ) y finalmente la clase de modelos  $\text{Mod}(ACF_0)$  es sencillamente emblemático de muchas construcciones más complicadas o más abstractas.

Finalmente, en este curso estudiaremos varias etapas del fenómeno llamado “tricotomía de Zilber”. Se trata de un caso de estudio en el cual uno puede aprender (una parte de) teoría de modelos, muy acotada al ámbito de las pregeometrías que aparecen en las estructuras fuertemente minimales, y a la vez empezar el camino hacia conexiones nuevas, en múltiples direcciones (ver último capítulo).

Las fuentes son múltiples. En los primeros capítulos no hay fuente precisa, pues sencillamente recuento ciertos hechos básicos de teoría de modelos que son necesarios para entender lo que sigue. La primera parte del curso es una introducción rápida a *algunos temas* de teoría de modelos - con omisiones fuertes, pero no graves para nuestro tema. Los siguientes temas (capítulos 3 y 4) se basan fuertemente en dos fuentes: el libro de Zilber de 2010 [Zi10] y su artículo [Zi03]. La prueba de tricotomía débil y del lema de configuración geométrica está casi literalmente tomada de esas fuentes - mi única contribución fue revisar algunos casos, pero en esas demostraciones hay aún campo para mejorar la presentación. Finalmente, los últimos capítulos son casi un ensayo sobre las direcciones que toma el tema. Planeo cubrir construcciones muy concretas en el curso (construcciones de Fraïssé y de Hrushovski relativamente sencillas) y dejar indicado hacia dónde van los temas.

*Bellaterra, Cataluña - julio de 2011.*

# Capítulo 1

## Estructuras: las bases

### 1.1. Estructuras, lenguajes

En teoría de modelos los objetos de estudio son **clases de estructuras** de un mismo “tipo” fijo, definidas y controladas por *lógica* (por ejemplo, por lógica de primer orden). Ejemplos de estas clases pueden ser muy variados pero en la mayoría de los casos interesantes serán clases de modelos de una *teoría*. Muchos de los casos en los cuales hay teoremas más interesantes corresponderán a teorías *completas*.

Algunos ejemplos de *clases de estructuras* para las cuales la teoría de modelos da información.

- Grupos abelianos libres de torsión.
- Campos algebraicamente cerrados de característica cero.
- Campos algebraicamente cerrados de característica  $p$ ,  $p \geq 0$ .
- Campos real-cerrados.
- La clase de todos los modelos de ZFC.
- Campos diferencialmente cerrados.
- ...

El punto de agarre para controlar esas clases de estructuras, en nuestro caso, es la lógica. Más específicamente, se fija de antemano un *lenguaje* o *vocabulario*  $\tau$  que consta de símbolos de relación, de función o de constante:

Un vocabulario  $\tau$  consta de tres conjuntos  $\mathcal{R}_\tau$  (símbolos de relación),  $\mathcal{F}_\tau$  (símbolos de función) y  $\mathcal{C}_\tau$  (símbolos de constante, junto con funciones

$$\text{ar} : \mathcal{R}_\tau \rightarrow \mathbb{Z}_+ \quad \text{y} \quad \text{ar} : \mathcal{F}_\tau \rightarrow \mathbb{Z}_+.$$

Una  $\tau$ -estructura es entonces un objeto de la forma

$$\mathfrak{A} = (A, R_1^{\mathfrak{A}}, R_2^{\mathfrak{A}}, \dots, f_1^{\mathfrak{A}}, f_2^{\mathfrak{A}}, \dots, c_1^{\mathfrak{A}}, c_2^{\mathfrak{A}}, \dots).$$

donde

- $A$  es un conjunto no vacío,
- $R_i^{\mathfrak{A}} \subset A^{\text{ar}(R_i)}$  es la interpretación de  $R_i$  en  $\mathfrak{A}$ ,
- $f_j^{\mathfrak{A}} : A^{\text{ar}(f_j)} \rightarrow A$  es la interpretación del símbolo de función  $f_j$  en  $\mathfrak{A}$ ,
- $c_k^{\mathfrak{A}}$  es un elemento de  $A$  - la interpretación del símbolo de constante  $c_k$  en  $A$ .

Por ejemplo, el vocabulario de anillos ordenados  $\tau_{\text{ring}}$  consta de dos símbolos de función  $+$  y  $\cdot$  con  $\text{ar}(+) = \text{ar}(\cdot) = 2$ , un símbolo de relación  $<$  con  $\text{ar}(<) = 2$ , un símbolo de relación  $P$  con  $\text{ar}(P) = 1$ , y dos símbolos de constante  $0$  y  $1$ , y un anillo ordenado es claramente una  $\tau_{\text{ring}}$ -estructura. El vocabulario usual de la teoría de conjuntos consta tan solo del símbolo de relación binario  $\in$ .

Pasamos rápidamente por los resultados más clásicos básicos de la teoría de modelos: **compacidad** (y su rol en la construcción de modelos), **eliminación de cuantificadores**, que en un caso particular famoso corresponde a que las variedades algebraicas son cerradas bajo proyecciones (Tarski-Chevalley), **categoricidad** (que en casos algebraicos tiene un sabor similar a “equivalencia débil implica isomorfismo, dentro de una clase de

cardinalidad”, una situación que recuerda la Conjetura de Poincaré (equivalencia homotópica en la misma dimensión implica isomorfismo).

## 1.2. Compacidad

**Teorema 1.1** (Compacidad). *Una teoría  $T$  tiene modelos si y solo si todo subconjunto finito  $T_0 \subset T$  tiene modelos.*

En lógica de primer orden, la compacidad es una herramienta muy útil para *construir modelos* y para demostrar propiedades de regularidad.

DEMOSTRACIÓN

**(mediante ultraproductos)** Demostramos compacidad usando ultraproductos - el teorema de Łoś. La idea de la demostración es “pegar” de manera astuta los modelos. Arrancamos con modelos de cada subteoría finita y armamos (a partir de todos estos modelos) un modelo para la teoría.

1. Fijamos  $L = L(T)$ , el vocabulario asociado a  $T$ . Sean  $I$  un conjunto no vacío,  $\mathcal{U}$  un ultrafiltro sobre  $I$  y  $(\mathfrak{A}_i | i \in I)$  una familia de  $L$ -estructuras. El *ultraproducto*  $\prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}_i$  de  $(\mathfrak{A}_i | i \in I)$  es la siguiente estructura:

- a) El universo es el cociente del producto cartesiano  $\prod_{i \in I} A_i$  por la siguiente relación (de equivalencia):

$$f \sim_{\mathcal{U}} g \stackrel{\text{def}}{\iff} \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}.$$

- b) La interpretación de un símbolo de relación  $R$  en  $\prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}_i$  viene dada por

$$R \prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}_i ([f_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [f_n]_{\mathcal{U}}) \stackrel{\text{def}}{\iff} \{i \in I \mid (f_1(i), \dots, f_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i}\} \in \mathcal{U}.$$

- c) La interpretación de un símbolo de función  $F$  en  $\prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}_i$  vie-

ne dada por

$$\mathbb{F}\prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}_i ([f_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [f_m]_{\mathcal{U}}) = [g]_{\mathcal{U}} \stackrel{\text{def}}{\iff}$$

$$\{i \in I \mid \mathbb{F}^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \dots, f_m(i)) = g(i)\} \in \mathcal{U}.$$

d) La interpretación de un símbolo de constante  $c$  en  $\prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}_i$  viene dada por

$$c \prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}_i = [f_c]_{\mathcal{U}} \text{ where } f_c(i) \stackrel{\text{def}}{=} c^{\mathfrak{A}_i}.$$

2. Cuando todos los  $\mathfrak{A}_i$  son la misma estructura  $\mathfrak{A}$ , el ultraproducto correspondiente se llama la *ultrapotencia* de  $\mathfrak{A}$  a lo largo de  $\mathcal{U}$ , y se denota  $\prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}$  (o simplemente  $\mathfrak{A}^{\mathcal{U}}$ ).
3. Los resultados fundamentales sobre ultraproductos y ultrapotencias son el Teorema de Łoś y el Teorema de Keisler-Shelah.

**Teorema 1.2** (Łoś). *Dado un ultraproducto de L-estructuras  $\prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}_i$ , y dada una L-formula  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  y funciones  $f_1, \dots, f_n \in \prod_{i \in I} A_i$ ,*

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}_i \models \varphi([f_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [f_n]_{\mathcal{U}}) \iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(f_1(i), \dots, f_n(i))\} \in \mathcal{U}.$$

*En particular, toda estructura  $\mathfrak{A}$  es elementalmente equivalente a cualquiera de sus ultrapotencias  $\mathfrak{A}^{\mathcal{U}}$ .*

*Más aún, identificando una “copia” de  $\mathfrak{A}$  dentro de  $\mathfrak{A}^{\mathcal{U}}$  (dada por las  $\mathcal{U}$ -clases de funciones constantes  $f_a$  ( $a \in A$ ) en el producto cartesiano de  $A$ ) tenemos también que*

$$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}^{\mathcal{U}}.$$

4. Hacemos la siguiente construcción: sea  $I = \mathcal{P}^{\text{fin}}(T)$ . Tomamos, para cada  $i \in I$ , un modelo  $\mathfrak{A}_i \models i$ .
5. Definimos ahora un ultrafiltro: Primero tomamos la familia  $S$  de todos los subconjuntos de  $I$  de la forma  $I_{\sigma} = \{i \in I \mid \sigma \in i\}$ . Observamos que  $S$  tiene la propiedad de intersecciones finitas:

$\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \in I_{\sigma_1} \cap \dots \cap I_{\sigma_n}$ . Tomamos un ultrafiltro cualquiera que contenga a  $S$ .

6. Ahora, verificamos que el ultraproducto  $\prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}_i \models T$ . Si  $\sigma \in T$ , entonces si  $\sigma \in i$ ,  $\mathfrak{A}_i \models \sigma$  - por lo tanto  $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \sigma\} \supset I_\sigma$  y  $I_\sigma \in \mathcal{U}$ . Por el Teorema de Łoś, tenemos que  $\prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{A}_i \models \sigma$ .  $\square_{\text{ultrapr.}}$

Vale la pena recordar otro tipo de demostración, basada en el teorema de completitud de la lógica de primer orden:

**DEMOSTRACIÓN** (usando Completitud): Claramente, si  $T$  tiene modelos, todo subconjunto finito  $T_0 \subset T$  tiene modelos. Para la otra dirección aplicamos el teorema de compacidad (es decir,  $T$  tiene un modelo si y solo es consistente<sup>1</sup>).

Si  $T$  no tiene modelos, entonces es inconsistente, y entonces (dado que las  $T$ -deducciones son finitísticas) existe  $T_0 \subset^{\text{fin}} T$  tal que  $T_0 \vdash \sigma \wedge \neg \sigma$ . Por lo tanto,  $T_0$  no puede tener modelos.  $\square$

### 1.3. Aplicaciones de Compacidad

Mencionamos aquí –no incluimos casi ninguna demostración– algunas aplicaciones importantes de compacidad. Estas combinan la *limitación del poder expresivo de la lógica de primer orden* con una mayor *capacidad para producir cantidades enormes de modelos de teorías dadas*.

**Teorema 1.3** (NoFin). *Inexpresabilidad de la finitud: no existe una sentencia  $\sigma$  tal que  $\mathfrak{A} \models \sigma$  ssi  $A$  es finito.*

**Teorema 1.4** (NoBO). *Inexpresabilidad del buen orden: no existe una sentencia  $\sigma$  tal que  $(A, <, \dots) \models \sigma$  ssi  $(A, <)$  está bien ordenado.*

El siguiente es uno de los teoremas más importantes de la teoría de modelos - permite construir extensiones arbitrariamente grandes de cualquier estructura infinita.

<sup>1</sup>Esto es,  $T$  no implica formalmente contradicciones - para ningún  $\sigma$  se tiene que simultáneamente  $T \vdash \sigma \wedge \neg \sigma$ .

**Teorema 1.5** (Löwenheim-Skolem ascendente). *Sea  $T$  una teoría en un lenguaje contable  $L$ , con algún modelo infinito. Entonces para cada cardinal infinito  $\kappa$  existe un modelo  $\mathfrak{A}$  de  $T$  de cardinal mayor o igual a  $\kappa$ .*

**DEMOSTRACIÓN** Sea  $L' = L \cup \{c_i \mid i < \kappa\}$  una extensión de  $L$  mediante  $\kappa$  símbolos de constante nuevos. Sea  $T'$  la  $L'$ -teoría  $T' = T \cup \{c_i \neq c_j \mid i < j < \kappa\}$ . Entonces

1.  $T'$  es finitamente satisfactible: todo subconjunto finito de  $T'$  tiene un modelo. [¡Revisar por qué!]
2. Por lo tanto,  $T'$  tiene un modelo  $\mathfrak{A}$ . Como dentro de  $\mathfrak{A}$  hay interpretaciones de todas las constantes  $c_i$  (para  $i < \kappa$ ) implica que  $\mathfrak{A}$  tiene cardinal al menos  $\kappa$ . □

De hecho, por el teorema descendente de Löwenheim-Skolem (que no demostramos aquí), el modelo  $\mathfrak{A}$  de la demostración anterior tiene un submodelo *elemental* de tamaño exactamente  $\kappa$ .

### 1.3.1. Modelos no estándar

Otro tipo de aplicación importante de compacidad es la construcción de modelos no estándar (de la aritmética, campos real-cerrados, etc.). He aquí algunos de los pasos de esa construcción.

**NNoEst** Modelos no estándar de la aritmética:

1. Existe una extensión *elemental*  $\mathfrak{A}$  de  $(\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$  tal que para algún elemento  $a \in A$ , todo número primo estándar  $p$  divide a  $a$  en  $\mathfrak{A}$ , por compacidad.
2. Existe un elemento  $b$  en  $A$  tal que  $b > a$  y para todo número natural  $n$ ,  $b > a + n$ . Elementos como  $a$  o  $b$  son “naturales no estándar” de  $\mathfrak{A}$ . En el orden de  $\mathfrak{A}$ , todos los elementos no estándar son mayores que todos los elementos estándar.

3. En  $\mathfrak{A}$ , si  $a$  es no estándar, tenemos los siguientes elementos

$$\dots, a - n, \dots, a - 3, a - 2, a - 1, a, a + 1, a + 2, a + 3, \dots, a + n, \dots$$

(Note que podemos restar números naturales estándar arbitrarios  $n$  de  $a$ .)

4. Dado cualquier elemento no estándar  $a \in A$ , denotamos mediante  $K_a := \{\dots, a - n, \dots, a - 3, a - 2, a - 1, a, a + 1, a + 2, a + 3, \dots, a + n, \dots\}$  la *mónada* de  $a$ . Note que  $(K_b, < \upharpoonright K_b)$  es isomorfo al orden  $(\mathbb{Z}, <)$ . También, si  $b$  y  $c$  son no estándar y  $K_b \neq K_c$ ,  $K_b \cap K_c = \emptyset$ .
5. Si  $b_1 < b_2$  son no estándar y las mónadas  $K_1, K_2$  son disjuntas, existen  $c, d, e$  no estándar tales que las mónadas correspondientes son disjuntas y

$$K_c < K_{b_1} < K_d < K_{b_2} < K_e.$$

Así, las mónadas están densamente ordenadas dentro de  $\mathfrak{A}$ , no hay mínima mónada no estándar, y no hay máxima mónada.

6. Lo anterior se denota así (en notación de Hausdorff):

$$\text{tipo de orden}(A, <) = \omega + (\omega^* + \omega) \cdot \bar{\eta}$$

donde  $\omega$  denota el tipo de orden de los naturales,  $\omega^*$  el orden inverso y  $\bar{\eta}$  el tipo de orden lineal denso sin extremos (no especificamos cardinal).

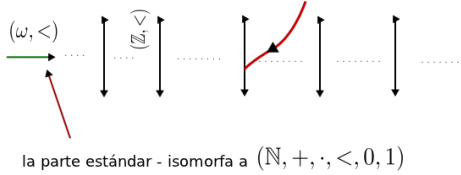
7. Si cierta fórmula  $\varphi(x)$  es tal que  $\mathbb{N} \models \varphi(n)$  para todo natural estándar  $n$ , entonces  $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$  para todo  $a \in A$ . Por otro lado, si cierto natural *no estándar*  $b$  satisface cierta fórmula  $\psi(x)$  en  $\mathfrak{A}$ , entonces existen naturales *estándar* arbitrariamente altos que satisfacen  $\psi(x)$ .

### **NonStR** Modelos no estándar de la teoría de los reales<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Los reales  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$  son modelo de la teoría RCF de “campos real-cerrados”. La

la estructura de orden de  $\mathfrak{A} = (A, +, \cdot, <, 0, 1)$

la mónada  $K_a$



1. Usando compacidad, armamos una extensión elemental

$$(\mathbb{R}^*, +, \cdot, <, 0, 1)$$

de  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$  propia. Entonces, existe cierto elemento  $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$  tal que

- $\varepsilon < \frac{1}{n}$  para todo número natural  $n$ ,
- $0 < \varepsilon$ .

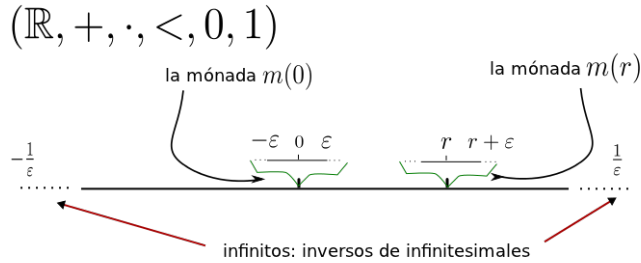
Esto resulta dando una extensión propia, *no arquimedea*na, de los reales<sup>3</sup>

2. En “los” reales no estándar<sup>4</sup> para cada elemento  $r$  existen infinitos elementos  $s$  tales que  $|r - s| > 0$  pero  $|r - s| < \frac{1}{n}$  para todo natural  $n$ . Estos elementos, “infinitamente cercanos” a  $r$ , conforman la *mónada* alrededor de  $r$ ; podemos denotarla mediante  $m(r)$ .

axiomatización, y muchos detalles interesantes sobre la teoría RCF se pueden encontrar en muchos libros de teoría de modelos.

<sup>3</sup>Y de paso esto demuestra que la arquimedianidad no es una propiedad que se pueda expresar en la lógica de primer orden, otra de las famosas consecuencias de compacidad. En la lógica  $L_{\omega_1, \omega}$  sí se puede expresar la arquimedianidad.

<sup>4</sup>Conviene alertar aquí sobre el uso poco cuidadoso, pero muy común y no problemático cuando el contexto es claro, de expresiones como “los” reales no estándar. En realidad, hay toda una **clase propia** de modelos no estándar de la teoría de los reales - sin embargo, ciertos argumentos valen para todos estos modelos.



3. Buena parte del Cálculo y el Análisis se pueden desarrollar sobre  $\mathbb{R}^*$  en lugar de desarrollarlos sobre los reales estándar  $\mathbb{R}$ . A nivel elemental inicial, las definiciones y propiedades básicas de derivadas e integrales se pueden llevar a cabo “estilo Leibniz”, con infinitesimales en lugar de definiciones tipo  $\varepsilon, \delta$  (argumentos de continuidad, teorema del valor intermedio, reglas de l’Hôpital, etc.). En este camino hay resultados de investigación en áreas como economía matemática (varios trabajos de Keisler) o incluso una teoría de modelos de procesos estocásticos en trabajos de Fajardo y Keisler [FK]. Este trabajo fue iniciado por Abraham Robinson hace unos cincuenta años. Hoy continúa siendo usado, sobre todo con fines de enseñanza alternativa del cálculo (trabajos de Hrbacek, Lessmann, Keisler, etc.).

Esos dos ejemplos de modelos no estándar de teorías familiares son aplicaciones muy directas de compacidad. En ambos casos temas que usualmente se trabajan “en los naturales” o “en los reales” pueden tener soluciones distintas (“más” soluciones) en esos modelos no estándar. En el siguiente capítulo abordamos parcialmente el problema de

## 1.4. Equivalencia elemental e inmersiones

En teoría de modelos de primer orden controlamos las clases de estructuras mediante sus teorías. Una situación bastante básica, pero ilustrativa, sigue estos tres pasos:

**Fije M:** fije cierta estructura  $M$  que quiere estudiar (por ejemplo un espacio vectorial  $V$  sobre un campo  $K$ , o algún campo algebraicamente cerrado  $(F, +, \cdot, 0, 1)$ , o un campo valuado  $(F, +, \cdot, \Gamma, v)$ , algún árbol infinito, algún grafo, etc.), en algún vocabulario apropiado  $L = L(M)$ .

**Tome la teoría de M:** el conjunto de todas las  $L$ -sentencias válidas en  $M$ . Así,  $T = \text{Th}(M) = \{\sigma \in \text{Sent}(L) \mid M \models \sigma\}$ .

**Regrese a la clase de modelos:** de nuevo el énfasis pasa a

$$\text{Mod}(T) = \text{Mod}(\text{Th}(M)).$$

Al estudiar muchas variantes de esos modelos (variantes “no estándar” del modelo original  $M$  - se puede entender  $M$  también:

- ¿Qué tanto depende  $M$  de sus trozos pequeños (por ejemplo, contables)?
- ¿Cómo se pueden generar extensiones de  $M$  que tengan, por ejemplo, muchos automorfismos? ¿Que sean “rígidas”?
- ¿Es categórica la teoría de  $M$ ?
- Si encuentro una solución a cierta ecuación en una extensión, ¿cuándo puedo afirmar que eso implica que debía haber una solución en un modelo más pequeño?

Lo anterior está lejos de describir exhaustivamente lo que sucede al considerar modelos, sus teorías, las clases de modelos. Hay situaciones en las cuales *no se parte* de un modelo inicial que se quiera estudiar, sino es la misma teoría de modelos la que sugiere el paso 2, por analogía con otros casos.

Por ejemplo, trabajos clásicos de Abraham Robinson llevaron a Lenore Blum en su tesis doctoral de 1968 a axiomatizar correctamente la teoría DCF de *campos diferencialmente cerrados*, por analogía clara con el caso de los campos algebraicamente cerrados (modelos de ACF). En el caso de campos algebraicamente cerrados, el modelo de

partida había sido los complejos  $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ . En el caso de los campos diferencialmente cerrados, **no hay** tal modelo de partida, no hay modelo canónico.

La teoría surgida de los trabajos de Robinson y Blum ha tenido un impacto brutal en la conexión entre teoría de modelos y el resto de la matemática, posterior y completamente independiente de los trabajos iniciales de esos autores. Parte importante de la famosa prueba de Hrushovski de la Conjetura de Mordell-Lang, a mediados de la década de 1990, usa propiedades estructurales sofisticadas de la teoría DCF, surgidas de la Teoría de la Clasificación de Shelah.

Las siguientes definiciones capturan de manera concreta las bases de la discusión anterior. Conectan teorías con (clases de) modelos.

Fijamos un lenguaje  $L$ .

**Definición 1.6.** *La **teoría** (la  $L$ -teoría, realmente) de una  $L$ -estructura  $M$  es el conjunto de  $L$ -sentencias que son válidas en  $M$ .*

Por ejemplo,  $\text{Th}(\mathbb{N})$ , la “verdadera aritmética”, o  $\text{Th}(\mathbb{C})$ , la teoría de los complejos<sup>5</sup>.

**Definición 1.7.** *Dos  $L$ -estructuras  $M$  y  $N$  son elementalmente equivalentes si  $\text{Th}(M) = \text{Th}(N)$ , ésto es, cuando todas las  $L$ -sentencias válidas en  $M$  son válidas en  $N$  y viceversa.*

La dualidad básica *teorías versus clases de modelos* queda capturada en la siguiente lista de conexiones:

**Hecho 1.8.** *Lo siguiente vale para  $L$ -teorías  $T, T_1, T_2$  arbitrarias, clases de  $L$ -estructuras  $\mathcal{K}, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$  arbitrarias.*

1.  $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \implies \text{Th}(\mathcal{K}_1) \supset \text{Th}(\mathcal{K}_2)$

---

<sup>5</sup>La primera es “salvaje” desde el punto de vista tradicional de la teoría de modelos, la segunda es “dócil”: nociones de dimensión, independencia, etc. que se generalizan de manera bastante extrema en el trabajo de Shelah en Teoría de la Clasificación.  $\text{Th}(\mathbb{C})$  tiene la axiomatización recursiva  $\text{ACF}_0$  - campos algebraicamente cerrados de característica cero.

2.  $T_1 \subset T_2 \implies \text{Mod}(T_1) \supset \text{Mod}(T_2)$
3.  $T_1 \text{ equiv } T_2 \iff \text{Mod}(T_1) = \text{Mod}(T_2)$
4.  $\text{Mod}(\text{Th}(\mathcal{K})) \supset \mathcal{K}$ ; son iguales si  $\mathcal{K}$  es axiomatizable
5.  $\text{Th}(\mathcal{K})$  contiene todas sus consecuencias lógicas
6.  $\text{Th}(\text{Mod}(T)) \supset T$ ;  $T$  axiomatiza a  $\text{Th}(\text{Mod}(T))$ .

Finalmente, vale la pena mencionar este resultado de Keisler en un caso particular (luego extendido por Shelah a situaciones más generales). Es un resultado que enlaza la relación (lógica)  $\equiv$  con la relación (algebraica)  $\approx$ . Aunque  $\equiv$  es mucho más débil, y cantidades enormes (clases propias) de estructuras que no son isomorfas sí son elementalmente equivalentes, es importante saber que se puede caracterizar la equivalencia elemental mediante la existencia de ciertas ultrapotencias isomorfas.

**Teorema 1.9** (Keisler-Shelah). *Dado cualquier par de L-estructuras  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$ , tenemos que  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$  si y solo si existen ultrapotencias  $\mathfrak{A}^{\mathfrak{U}}$  y  $\mathfrak{B}^{\mathfrak{U}}$  tales que  $\mathfrak{A}^{\mathfrak{U}} \approx \mathfrak{B}^{\mathfrak{U}}$ .*

### 1.4.1. Extensiones elementales

La noción de “extensión elemental” (o “subestructura elemental”) es la conexión entre estructuras más importante de toda la teoría de modelos (incluso fuera de “Primer Orden” o clases elementales).

Inicialmente, definimos extensión “a secas”.

**Definición 1.10** (Extensión, submodelo). *Dadas dos L-estructuras  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$ , decimos que  $\mathfrak{A}$  es extensión de  $\mathfrak{B}$  ( $\mathfrak{A}$  es subestructura de  $\mathfrak{B}$ ) si*

- $A \subset B$
- $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \upharpoonright A^{\text{ar}(f)}$  para cada símbolo de función  $f$ ,
- $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^{\text{ar}(R)}$  para cada símbolo de relación  $R$ ,
- $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$  para cada símbolo de constante  $c$ .

Usamos la notación  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ .

El ejemplo clásico de esto es la cadena siguiente.

$$(\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1) \subset (\mathbb{Z}, +, \cdot, <, 0, 1) \subset (\mathbb{Q}, +, \cdot, <, 0, 1) \subset (\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1).$$

Estos ejemplos muestran cómo la satisfacción de una sentencia puede variar enormemente al pasar a una extensión.

La noción de extensión robusta es la de extensión *elemental*. El análogo en geometría algebraica serían las extensiones de campos en las cuales los abiertos de Zariski del campo pequeño son los mismos que en el grande.

**Definición 1.11** (Extensión elemental, subestructura elemental). *Dadas dos L-estructuras  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$ , decimos que  $\mathfrak{A}$  es una subestructura elemental de  $\mathfrak{B}$  o equivalentemente que  $\mathfrak{B}$  es una extensión elemental de  $\mathfrak{A}$  ( $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ ) si*

1.  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ , y
2. Para toda  $\bar{a} \in A$  y toda L-fórmula  $\varphi(\bar{x})$ , tenemos que

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a}).$$

La noción  $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$  es por lo tanto una “mezcla fuerte” entre  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$  and  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ . De hecho,  $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$  si y sólo si  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$  y  $\text{Th}_{\mathcal{L}}(\mathfrak{A}) = \text{Th}_{\mathcal{L}}(\mathfrak{B})$  (aquí,  $\text{Th}_{\mathcal{L}}(\mathfrak{A}') = \{\sigma \in \text{Sent}(\mathcal{L}_{\mathcal{A}}) \mid \mathfrak{A}' \models \sigma\}$ ).

## Ejemplos

- $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \subset (\mathbb{N}, <)$ ,
- $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \equiv (\mathbb{N}, <)$  (ya que la función “sumar 1” de hecho da la conclusión más fuerte  $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \approx (\mathbb{N}, <)$ ); sin embargo,
- $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \not\prec (\mathbb{N}, <)$  (pues 1 es el mínimo en la estructura pequeña pero no en la más grande).

- $(\mathbb{Q}^{\text{alg}}, +, \cdot, 0, 1) \prec (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <, 0, 1) \not\prec (\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$
- NULLSTELLENSATZ/TEOREMA DE LOS CEROS DE HILBERT Si  $F_1$  y  $F_2$  son campos algebraicamente cerrados y  $F_1 \subset F_2$  entonces  $F_1 \prec F_2$ .

### 1.4.2. Modelos generados

La construcción de modelos de una teoría es una de las líneas centrales de trabajo en teoría de modelos. Damos aquí varias maneras adicionales de *construir nuevos modelos dentro de una clase* (hasta ahora tenemos el teorema de Löwenheim-Skolem). Ésto refina nuestro conocimiento de elementos de una clase de la forma  $\text{Mod}(T)$  para una teoría de primer orden  $T$ .

La primera construcción nos permite calcular “clausuras lógicas” de conjuntos dentro de modelos - un proceso similar a tomar “subcampos generados” o “subespacios generados” - pero que tiene como resultado subestructuras *elementales*: el teorema descendente de Löwenheim-Skolem. No incluimos la demostración (solo mencionamos que involucra calcular una clausura de carácter lógico — formalmente, una clausura de Skolem, es decir, bajo términos en un lenguaje típicamente muy enriquecido con respecto al lenguaje original  $L$ ).

**Teorema 1.12** (Löwenheim-Skolem descendente). *Dado un modelo infinito  $\mathfrak{A}$ , y  $X \subset A$ , existe  $\mathfrak{B}$  tal que:*

1.  $X \subset \mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ ,
2.  $|\mathfrak{B}| \leq |X| + \aleph_0 + |L|$ .

$\mathfrak{B}$  es por lo tanto una especie de clausura de  $X$  dentro de  $\mathfrak{A}$  - con cardinalidad pequeña (controlada por  $|X|$ ), pero subestructura elemental de  $\mathfrak{A}$ .

### 1.4.3. El criterio de Tarski-Vaught

Este es uno de los criterios más útiles para decidir cuándo una estructura  $\mathfrak{A}$  es subestructura elemental de  $\mathfrak{B}$ . Dice, básicamente, que las “existenciales bajan”: que lo único que hay que revisar cuando ya se sabe que  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ , es que toda fórmula existencial con parámetros en  $A$  que valga en  $\mathfrak{B}$  vale en  $\mathfrak{A}$  con un testigo de  $A$ .

**Teorema 1.13** (Tarski-Vaught). *Sea  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ . Entonces son equivalentes:*

1.  $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ .
2. Dada cualquier fórmula  $\varphi(\bar{x}, y)$ , y dado cualquier  $\bar{a} \in A$  de longitud igual a la de  $\bar{x}$ , si existe  $b \in B$  tal que  $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a}, b)$ , entonces existe  $b' \in A$  tal que  $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a}, b')$ .

**PROOF** Sean  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ . Demostramos primero “1  $\rightarrow$  2”. Supongamos entonces que  $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ , y sean  $\varphi(\bar{x}, y)$  una fórmula,  $\bar{a} \in A$ ,  $b \in B$  tales que  $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a}, b)$ . Entonces  $\mathfrak{B} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)$ . Los parámetros de esta última fórmula son de  $A$ , y por lo tanto  $\mathfrak{A} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)$ , pues  $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ . Pero entonces debe existir algún  $b' \in A$  tal que  $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}, b')$ . De nuevo, como todos los parámetros están en  $A$ , tenemos que  $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a}, b')$ .  $\square_{1 \rightarrow 2}$ .

Demostración de “2  $\rightarrow$  1”: usamos inducción sobre la complejidad de  $\varphi(\bar{x})$  para probar que para todo  $\bar{a} \in A$ ,  $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$  si y solo si  $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$ . El paso crucial es el existencial. [Los otros pasos son más sencillos, y son un ejercicio.] Suponga entonces que  $\varphi(\bar{x}) = \exists y \psi(y, \bar{x})$  y supongamos primero que  $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ , es decir,  $\mathfrak{A} \models \exists y \psi(y, \bar{a})$ . Pero entonces realmente existe un elemento  $b \in A$  tal que  $\mathfrak{A} \models \psi(b, \bar{a})$ . Por la hipótesis de inducción, también tenemos que  $\mathfrak{B} \models \psi(b, \bar{a})$  - ésto da inmediatamente que  $\mathfrak{B} \models \exists y \psi(y, \bar{a})$ . Finalmente, el caso interesante: supongamos que  $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$ , o sea que  $\mathfrak{B} \models \exists y \psi(y, \bar{a})$ . Esto nos da un testigo  $b \in B$  tal que  $\mathfrak{B} \models \psi(b, \bar{a})$ . Usamos ahora la hipótesis (2): debe existir entonces  $b' \in A$  tal que  $\mathfrak{B} \models \psi(b', \bar{a})$ . Lo importante es que ahora sí todos los parámetros están en  $A$ , y podemos usar la hipótesis de inducción para concluir que  $\mathfrak{A} \models \psi(b', \bar{a})$ . Con ésto ahora sí tenemos que  $\mathfrak{A} \models \exists y \psi(y, \bar{a})$ , es decir,  $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$ .  $\square$

Observe que el criterio nos da  $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$  en términos de satisfacción en  $\mathfrak{B}$  (y no en  $\mathfrak{A}$ , a diferencia de la definición). Este hecho es útil a la hora de armar por modelos como “clausuras” de un modelo grande, pues la verificación final de  $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ , y la construcción, sólo dependen de evaluar sentencias en  $\mathfrak{B}$ .

**Teorema 1.14** (Łoś-Tarski- uniones de cadenas). *Dada una cadena  $\prec$ -creciente de modelos  $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \dots \prec \mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}_{i+1} \dots$  para  $i < \alpha$ , se tiene que  $\mathfrak{A}_j \prec \bigcup_{i < \alpha} \mathfrak{A}_i$  para todo  $j < \alpha$ .*

PROOF Una aplicación del criterio de Tarski-Vaught para ser subestructura elemental.  $\square$

**Observación 1.15.** *Es fácil construir  $\subset$ -cadenas de modelos  $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{A}_n \subset \dots$  tales que  $\text{Th}(\mathfrak{A}_n) = \text{Th}(\mathfrak{A}_m)$  para todo  $m, n$  pero  $\text{Th}(\bigcup_n \mathfrak{A}_n) \neq \text{Th}(\mathfrak{A}_0)$ .*

La observación anterior muestra que la clausura bajo uniones de cadenas dada por el teorema de Łoś-Tarski es una propiedad estructural fuerte de la relación  $\prec$ .

Damos ahora un criterio importante para la completitud de una teoría. Es un puente interesante entre la semántica y la sintaxis: la noción (muy semántica) de categoricidad queda relacionada con la completitud.

**Teorema 1.16** (Criterio de Vaught-Completitud). *Sea  $T$  una  $L$ -teoría consistente (sobre  $L$  contable) sin modelos finitos. Entonces, si  $T$  es categórica en algún cardinal infinito  $\lambda$ , se tiene que  $T$  es completa.*

DEMOSTRACIÓN Suponga que no. Sea entonces  $\sigma$  tal que  $T \not\models \sigma$  y  $T \models \neg\sigma$ . Existen entonces modelos  $\mathfrak{A}_1$  y  $\mathfrak{A}_2$  tales que  $\mathfrak{A}_1 \models T \cup \{\sigma\}$  y  $\mathfrak{A}_2 \models T \cup \{\neg\sigma\}$ . Como  $\mathfrak{A}_1$  y  $\mathfrak{A}_2$  son ambos modelos infinitos de  $T$ , por Löwenheim-Skolem (ascendente o descendente, según el cardinal de cada uno de estos modelos), sabemos que existen  $\mathfrak{B}_1$  y  $\mathfrak{B}_2$ , ambos de cardinal  $\lambda$ , tales que  $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{B}_1$  y  $\mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{B}_2$ . Como  $\mathfrak{B}_1$  y  $\mathfrak{B}_2$  son modelos de  $T$  de cardinal  $\lambda$ , deben ser isomorfos (y en particular son elementalmente equivalentes, con lo cual obtenemos que  $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{B}_2 \equiv \mathfrak{A}_2$ . Pero ésto es imposible, dado que  $\mathfrak{A}_1 \models \sigma$  y  $\mathfrak{A}_2 \models \neg\sigma$ .  $\square$

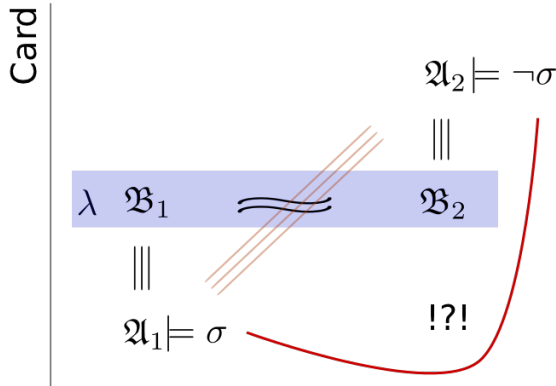


Figura 1.1: El criterio de Vaught.

**Corolario 1.17.** *La teoría  $\text{Th}(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$  del campo complejo es decidible.*

DEMOSTRACIÓN    Ejercicio. Usar el criterio de Vaught y el hecho clásico (teorema de Steinitz) que dice que los campos algebraicamente cerrados de característica fija  $p$  ( $p$  primo o  $0$ ) son  $\lambda$ -categóricos, si  $\lambda \geq \aleph_1$ .     $\square$



## Capítulo 2

# Teoría de modelos

### 2.1. Tipos, saturación, homogeneidad.

Los objetos de trabajo básicos en teoría de modelos, y aún más, en teoría de estabilidad, son los “tipos”. Estos se pueden ver como fórmulas generalizadas - o como intersecciones infinitas de conjuntos definibles mediante fórmulas.

Siguiendo la analogía expresada en varios puntos, los definibles (básicos) se pueden ver como una versión (muy generalizada) de conjuntos algebraicos.

El conjunto algebraico clásico

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4 \mid x^2 - y^3 + (w - 7)^5 + z = 0\}$$

se puede ver como el conjunto definido por la fórmula

$$\psi_0(x, y, z, w, 7) = x^2 - y^3 + (w - 7)^5 + z = 0$$

(claramente escrita en el lenguaje de teoría de anillos  $\{+, \cdot, 0, 1\}$  con ayuda del parámetro 7), en la estructura

$$(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1).$$

Ese “conjunto solución” o “conjunto definible” que usualmente se denota en teoría de modelos de manera general como

$$\psi(\mathfrak{A}, \mathbf{b}) := \{\bar{a} \in A^{\text{ar}(\psi)} \mid \mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, \mathbf{b})\}$$

en este caso concreto sería  $\psi_0(\mathbb{C}, 7)$ .

Desde este punto de vista es que los tipos son fórmulas generalizadas, o definibles generalizados.

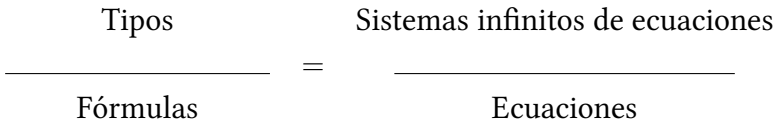


Figura 2.1: La Estación de Francia en Barcelona: un ejemplo de superficie algebraica. Los tipos se pueden entender como superficies algebraicas generalizadas.

La definición formal es la siguiente:

**Definición 2.1.** *Dado  $\mathfrak{A} \models T$ ,  $X \subset A$ ,  $a \in A$ , el tipo de  $a$  sobre  $X$  en  $\mathfrak{A}$  es el conjunto*

$$\text{tp}(a/X; \mathfrak{A}) = \{\varphi(x, \bar{b}) \mid \mathfrak{A} \models \varphi(a, \bar{b}), \varphi(x, \bar{y}) \in \text{Fml}(L), \bar{b} \in X\}.$$

De manera más general, un tipo  $\pi$  en  $x_1, \dots, x_n$  es un subconjunto de  $\text{Fml}(L)$  tal que para todo  $\varphi \in \pi$ , las variables libres de  $\varphi$  están todas en

$x_1, \dots, x_n$ . Tal subconjunto puede ser o no *consistente* con una L-teoría dada. Cuando es consistente con  $T$ , decimos que  $\pi$  es un *tipo parcial* de  $T$ .

Cuando además resulta completo, decimos que  $\pi$  es un *tipo completo* de  $T$ , o (a secas) que  $\pi$  es un tipo de la teoría  $T$ . Usualmente en ese caso en lugar de usar una letra griega como  $\pi$ , usamos las letras  $p, q, p_1, \dots$  para denotar los tipos.

### Ejemplos: tipos en $\text{ACF}_0$ , DLO, etc.

1. El tipo  $\frac{3}{4}$  sobre  $\mathbb{Q}$  en  $(\mathbb{C}, \dots)$  está determinado por una fórmula  $x = \frac{3}{4}$ . Esto es un caso muy extremo - cuando sucede, se dice que el tipo es *principal*. En este caso las cosas son aún más simples: el número  $\frac{3}{4}$  es la única "solución" posible del tipo.
2. El tipo de  $\sqrt{2}$  sobre  $\mathbb{Q}$  en  $(\mathbb{C}, \dots)$ ,  $\text{tp}(\sqrt{2}/\mathbb{Q}; (\mathbb{C}, \dots))$  también es principal. Pero en este caso existen *dos* soluciones distintas al tipo en cualquier campo algebraicamente cerrado de característica 0. Ésto es el prototipo de los **tipos algebraicos**: número finito de soluciones en cualquier modelo.
3. El tipo de  $\pi$  sobre  $\mathbb{Q}$  en  $(\mathbb{C}, \dots)$ . Note que este tipo no es principal y tampoco es algebraico. Además, todo par de números trascendentes (por ejemplo,  $\pi$  y  $e$ ) tienen el mismo tipo sobre  $\mathbb{Q}$ :

$$\text{tp}(\pi/\mathbb{Q}; (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)) = \text{tp}(e/\mathbb{Q}; (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)).$$

La razón es que, al poder usar solamente fórmulas del lenguaje, y parámetros de  $\mathbb{Q}$ , lo único que puede decir el tipo  $p_{\text{tr}}(x)$  de un trascendente es que dado un polinomio  $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ,  $P(x) \neq 0$ :

$$p_{\text{tr}}(x) \supset \{\neg(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0) \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}.$$

4. El tipo de un elemento no estándar sobre  $\emptyset$ , dentro de un modelo no estándar de la aritmética (ver análisis de estos modelos en el capítulo

anterior):

$$p_{\text{noest}}(x) = \{\neg(x = \underbrace{1 + \dots + 1}_n) \mid n < \omega\}.$$

5. Los cortes de Dedekind están incluidos en tipos de reales sobre los racionales. Los reales no estándar también pueden ser descritos mediante tipos.

**Teorema 2.2** (Realización de tipos). *Dado un tipo consistente  $p$  de una teoría  $T$  y dado  $\mathfrak{A} \models T$ , existen  $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$  y  $a \in B$  tales que  $a \models p$  en  $\mathfrak{B}$ .*

DEMOSTRACIÓN Armamos la teoría siguiente, en el lenguaje  $L_c = L(T) \cup \{c\}$ , donde  $c$  es un símbolo de constante nuevo:

$$\text{Th}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}) \cup \{\varphi(c) \mid \varphi(x) \in p\}.$$

Ahora usamos la consistencia del tipo con  $T$  para concluir que esta teoría es consistente. Un modelo  $\mathfrak{B}$  de esta teoría sin pérdida de generalidad extiende a  $\mathfrak{A}$  y realiza  $p$ .  $\square$

En general, armar un modelo de una teoría donde cierto tipo se **omita** es mucho más difícil que realizarlo. A diferencia del teorema anterior, cuya prueba es una aplicación sencilla de compacidad, el Teorema de Omisión de Tipos (que no incluimos aquí) requiere varias cosas:

- Que el tipo que se quiere omitir no sea principal<sup>1</sup>.
- Que el lenguaje sea contable. Existen versiones (muy parciales) de omisión de tipos en lenguajes no contables - pero todas requieren algún contexto especial.

La demostración del teorema de omisión de tipos es de la familia de la demostración del Teorema de Categoría de Baire (y, para aquellos que saben teoría de conjuntos, de la demostración de existencia de genéricos para familias numerables de densos - lo que se llamaría allá  $MA_{\aleph_0}$  pero

<sup>1</sup>Los tipos principales son imposibles de omitir. Lo interesante es que ésa sea, en esencia la *única* obstrucción.

no se menciona pues es una simple consecuencia de ZFC). Esto muestra, además, por qué la Omisión de Tipos es un fenómeno (en principio) reducido a lenguajes contables, a familias contables de tipos. Las versiones no contables (que existen - la más famosa es la de Morley) son bastante distintas.

### 2.1.1. Ejercicios

**Cortes de Dedekind.** Describa el tipo de  $\sqrt{2}$  sobre  $\mathbb{Q}$  en  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ . Compárelo con el corte de Dedekind “usual” de  $\sqrt{2}$ . Considere de nuevo el tipo  $p = \text{tp}(\sqrt{2}/\mathbb{Q}; (\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1))$ . ¿Es principal? ¿Es algebraico? ¿Es trascendente? Arme el “corte de Dedekind al infinito” de un elemento mayor que todos los racionales. ¿Es consistente? ¿De serlo, dónde habría realizaciones de este tipo?

**Tipos en  $\text{ACF}_0$ .** Tenemos tipos algebraicos (es decir, con finitas soluciones), como el tipo  $\text{tp}(\sqrt{5}/\mathbb{Q})$ . Observe que la noción de “algebraico” y “trascendente” depende del conjunto de parámetros. Por ejemplo,  $\text{tp}(\pi/\mathbb{Q}; \mathbb{C})$  es trascendente pero  $\text{tp}(\pi/\mathbb{C}; \mathbb{C})$  es algebraico. Generalice e intente describir todos los tipos algebraicos y todos los tipos trascendentes dentro de  $\mathbb{C}$ .

**Tipos de reales no estándar.** El tipo

$$p_{0+} = \{x > 0\} \cup \underbrace{\{x + \dots + x < 1 \mid n < \omega\}}_n$$

es consistente con la teoría de los reales. Los reales lo omiten (es decir, no hay real que realice ese tipo). Como es consistente con la teoría de los reales, se realiza en alguna parte. Cualquier realización  $\varepsilon$  es un infinitesimal positivo. Explique todo esto.

### 2.1.2. Saturación y homogeneidad.

Una manera de construir modelos grandes, donde “muchas soluciones existen” es “saturar” los modelos: extenderlos elementalmente, pero

realizando más y más tipos.

**Definición 2.3.** *Un modelo  $\mathfrak{A}$  es  $\lambda$ -saturado si dado cualquier  $D \subset A$  de tamaño  $< \lambda$ , y dado cualquier tipo  $p \in S(D)$  (esto quiere decir que los parámetros de  $p$  están en  $D$ ),  $p$  es realizado en  $\mathfrak{A}$ .*

Es decir, “todo lo que sea consistente con  $\mathfrak{A}$  y se pueda expresar usando menos que  $\lambda$ -parámetros” de hecho ya tiene solución en  $\mathfrak{A}$ .

## Ejemplos

- No es difícil ver que  $(\mathbb{Q}, <)$  es  $\aleph_0$ -saturado, pero no es  $\aleph_1$ -saturado.
- $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$  también es  $\aleph_0$ -saturado. De hecho, también es  $\aleph_1$ -saturado ... aún más (?), es  $(2^{\aleph_0})$ -saturado.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$  no es  $\aleph_1$ -saturado.
- (Más difícil:) ningún modelo *contable* de ZFC puede ser  $\aleph_0$ -saturado. No es complicado, pero requiere saber un poco de estabilidad (o sencillamente, armar  $2^{\aleph_0}$  tipos distintos sobre  $\emptyset$ ).
- Similar al caso, anterior, ningún modelo contable de PA o de la verdadera aritmética  $\text{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$  es  $\aleph_0$ -saturado.

Note que el máximo grado de saturación de un modelo  $\mathfrak{A}$  siempre es  $|A|$ .

**Ejercicio:** Demuestre que si  $\mathfrak{A}$  es infinito y es  $\kappa$ -saturado, entonces  $|A| \geq \kappa$ . Demuestre que si  $\mathfrak{A}$  es saturado ( $=|A|$ -saturado) y  $B \subset A$  es definible en  $\mathfrak{A}$  e infinito, entonces  $|B| = |A|$ .

La siguiente definición es una variante de saturación (de modelos “grandes”), con un sabor muy distinto. En lugar de concentrarnos en la realización de muchos tipos (tantos como sea posible en el caso de los modelos saturados), nos concentramos en la posibilidad de extender monomorfismos elementales de trozos de la estructura a automorfismos de la estructura.

**Definición 2.4.** Una estructura  $\mathfrak{A}$  es **homogénea** si dado cualquier monomorfismo elemental  $\alpha : B \rightarrow B'$  entre subconjuntos de  $A$  de tamaño estrictamente menor que  $|A|$ ,  $\alpha$  se puede extender a un automorfismo  $\hat{\alpha}$  de  $\mathfrak{A}$ .

Si los modelos saturados son grandes en el sentido de que tienen muchas “soluciones” a todos los sistemas “posibles”, los modelos homogéneos son “grandes” en un sentido muy distinto: tienen una cantidad enorme de “simetrías”. Si un par de trozos pequeños son similares (caso atestiguado por un monomorfismo elemental  $\alpha$  como en la definición), entonces la similitud, la simetría se extiende al modelo entero. El modelo entero “ve” todas las “posibles simetrías” entre sus trozos pequeños.

La homogeneidad de los modelos es importante en la discusión en torno a la conjetura de tricotomía (ver Capítulo 5).

## 2.2. Eliminación de cuantificadores

La eliminación de cuantificadores es una propiedad muy fuerte que puede tener o no tener una teoría dada. Intuitivamente, dice que todas las fórmulas se pueden reducir (dentro de la teoría) a fórmulas sin cuantificadores. Si se interpreta ésto en términos de los conjuntos definibles que aparecen, quiere decir que los definibles se logran todos en dos etapas:

- Se escogen unos conjuntos “básicos” para generar todos los definibles.
- Se toman combinaciones booleanas de los básicos (uniones, intersecciones, complementos).

Lo anterior se itera un número finito de veces. Note que en ese caso *no es necesario tomar proyecciones!*. Es decir, cuando hay eliminación de cuantificadores el álgebra booleana de definibles (la “jerarquía boreliana”, la “jerarquía proyectiva”, etc.) son triviales.

Más precisamente, lo anterior quiere decir que si uno toma unos básicos  $B_{ij}$ , los cierra bajo combinaciones booleanas finitas, digamos  $B =$

$\cup_i \cap_j B_{ij}$ , y luego toma una proyección de  $B$ , ¡la imagen bajo proyección ya estaba en la familia original!

Que una teoría tenga eliminación de cuantificadores tiene consecuencias enormes.

Demstrar eliminación de cuantificadores es un verdadero arte, que usualmente requiere entender bastante bien la teoría de la cual se está demostrando la eliminación. Tesis enteras de doctorado han tenido partes sustanciales consistentes en lograr alguna eliminación de cuantificadores en algún contexto algebraico específico. Usualmente hay que *enriquecer* ligeramente los lenguajes para obtener la eliminación.

**Definición 2.5.**  $T$  admite eliminación de cuantificadores (QE) si para cada fórmula  $\varphi(x)$  de  $L$  existe una fórmula libre de cuantificadores  $\psi(x)$  tal que

$$T \models \forall x[\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)].$$

Note que  $T$  no necesariamente es completa en esta definición. En muchos ejemplos concretos la completitud de una axiomatización dada puede ser bastante difícil de demostrar. Sin embargo, cuando  $T$  tiene QE la completitud se puede reducir a una condición fácil de verificar, por el hecho siguiente.

**Hecho 2.6.** Dada una teoría consistente  $T$ , son equivalentes:

1.  $T$  es completa para sentencias libres de cuantificadores.
2. Todos los modelos de  $T$  tienen la misma “característica” (es decir, la subestructura generada por  $\emptyset$  es siempre la misma en cualquier modelo, módulo isomorfismo).

Cuando  $T$  tiene QE, estas condiciones corresponden a la completez de  $T$ .

Note que para lograr QE basta eliminar los cuantificadores de las fórmulas existenciales.

**Teorema 2.7** (Criterio de QE). Sean  $T$  completa, y  $\mathcal{C} \models T$  un modelo saturado. Entonces, son equivalentes:

1.  $T$  admite QE.

2. Para cada par  $a \equiv_0 c$  y cada  $b$ , existe  $d$  tal que  $ab \equiv_0 cd$ .

**Teorema 2.8** (QE “criterio de vaivén”). *Sea  $T$  completa para las sentencias libres de cuantificadores, con  $|L| = \kappa$ . Entonces son equivalentes:*

1.  $T$  admite QE.

2. Si  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$  son tales que  $|A| \leq \kappa$  y  $\mathfrak{B}$  es  $\kappa^+$ -saturado,  $\mathfrak{A}_0 \subsetneq \mathfrak{A}$  y  $f$  es una inmersión de  $\mathfrak{A}_0$  en  $\mathfrak{B}$ , entonces  $f$  se puede extender propiamente a una inmersión de alguna subestructura  $\mathfrak{C}$  de  $\mathfrak{A}$  en  $\mathfrak{B}$ .

### 2.2.1. Ejemplos

**Teorema 2.9.** 1. *La teoría de órdenes lineales densos sin extremos admite QE.*

2. *La teoría ACF admite QE.*

El segundo es uno de los hechos fundamentales de la parte “clásica” de la teoría de modelos. Muchas otras teorías algebraicas admiten eliminación de cuantificadores<sup>2</sup>: DCF (campos diferencialmente cerrados - tesis de Lenore Blum de 1968), campos  $p$ -ádicos, campos valuados. Las pruebas usan criterios similares a los presentados arriba, pero para lograr las amalgamaciones requieren uso de lemas, teoremas, herramientas, métodos sofisticados de cada una de las áreas a las cuales se refieren. “Eliminar cuantificadores” (es decir, probar alguna de las amalgamaciones mencionadas) es casi un verdadero arte, que requiere entender a fondo la otra disciplina.

**DEMOSTRACIÓN** Verificamos la condición para ACF. Como el lenguaje de ACF es contable,  $\kappa = \omega$ . Entonces, considerando campos algebraicamente cerrados  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  con  $\mathfrak{A}$  contable y  $\mathfrak{B}$   $\aleph_1$ -saturado, sea  $\mathfrak{A}_0$  una subestructura propia de  $\mathfrak{A}$ , y  $f$  una inmersión de  $\mathfrak{A}_0$  en  $\mathfrak{B}$ . Sea  $\mathfrak{B}_0$  la imagen de  $f$ ; entonces  $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$  y  $f$  es un isomorfismo de  $\mathfrak{A}_0$  en  $\mathfrak{B}_0$ . Sea  $a \in A \setminus A_0$ .

<sup>2</sup>Y también admiten eliminación de imaginarios, un tema debido a Shelah que no tocamos en estas notas y que permite “cerrar bajo cocientes definibles” los modelos de muchas teorías.

$\mathfrak{A}_0$  es un subanillo de  $\mathfrak{A}$ . Extendamos  $f$  a un subcampo de  $\mathfrak{A}$ , generado por  $\mathfrak{A}_0$ . Sin pérdida de generalidad,  $\mathfrak{A}_0$  es subcampo de  $\mathfrak{A}$ .

Caso I:  $a$  es algebraico sobre  $\mathfrak{A}_0$ . Sea  $p(x)$  el polinomio mínimo de  $a$  sobre  $\mathfrak{A}_0$ . Sea  $q(x)$  el polinomio correspondiente en  $\mathfrak{B}_0(x)$  (aplique  $f$  a los coeficiente de  $p(x)$ ). Entonces  $q(x)$  es irreducible en  $\mathfrak{B}_0[x]$ ... pues  $\mathfrak{B}$  es algebraicamente cerrado,  $q(x)$  tiene una raíz en  $\mathfrak{B}$ . Sea  $b$  una de esas raíces. Claramente, decretar  $f(a) = b$  nos da un isomorfismo de  $\mathfrak{A}_0(a)$  en  $\mathfrak{B}$ .

Caso II:  $a$  es trascendente sobre  $\mathfrak{A}_0$ .  $\mathfrak{B}$  debe ser no enumerable (pues es  $\aleph_1$ -saturado). Por lo tanto, hay un  $b \in \mathfrak{B}$ , trascendente sobre  $\mathfrak{B}_0$ . Extendemos  $f$  a un encaje de  $\mathfrak{A}_0(a)$  en  $\mathfrak{B}$  definiendo  $f(a) = b$ .  $\square$

**Corolario 2.10** (Tarski-Chevalley). 1. *La proyección de un conjunto construible es construible.*

2. *La teoría  $\text{Th}(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$  del campo complejo es decidible.*

- Ejemplos:  $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, <) \leftrightarrow (\mathbb{N}, <)$  (shifts, ultrapotencias, extensiones de campos (extensión algebraica de  $\mathbb{Q}$  no, extensión de un ACF a un ACF)...
- Definición de Categoricidad - discusión básica (analogía con conjetura de Poincaré)
- Ejemplos: DLO (Back and Forth), ACF, Conjuntos infinitos

## Capítulo 3

# Estabilidad geométrica.

Con las bases de teoría de modelos e inicio de estabilidad dadas en el capítulo anterior, podemos arrancar nuestro camino hacia la tricotomía de Zilber. El contexto general es el de estructuras fuertemente minimales, que definimos más adelante.

Cuando tenemos una estructura suficientemente “bien comportada” desde el punto de vista de la teoría de estabilidad, veremos que se puede “extraer” contenido “geométrico” implícito en los modelos de la teoría; contenido “geométrico” de carácter similar al de los espacios vectoriales (dimensión, independencia, generación), los campos algebraicamente cerrados, o estructuras similares.

Lo interesante es que ciertas hipótesis *lógicas* terminen dando lugar a *geometría* en sentido amplio, es decir, presencia de las siguientes propiedades:

- Nociones de independencia,
- Dimensión,
- Grupos actuando/controlando la estructura,
- Grupos de enlace/cubiertas.

La tricotomía de Zilber (el teorema de tricotomía, en los casos donde se tiene, la conjetura, incluso sus contraejemplos posteriores) se basa

completamente en la presencia de estas nociones. Más adelante veremos que en el caso más general deben ser completadas con nociones “topológicas”: que la sola geometría que subyace a las estructuras (fuertemente minimales) no es suficiente.

### 3.1. Geometría combinatoria.

**Definición 3.1** (Clausura algebraica). *Dada una estructura  $\mathfrak{A}$  y dado un subconjunto  $B \subset A$ , la **clausura algebraica** de  $B$  es el conjunto  $\text{acl}(B) = \{a \in A \mid \exists b \in B^n, m \in \mathbb{N}, \varphi(u, v) \text{ tales que } \mathfrak{A} \models \varphi(a, b) \wedge \exists^{\leq m} v \varphi(v, b)\}$ .*

Es decir, la clausura algebraica de  $B$  es el conjunto de todos los  $a \in A$  que satisfacen alguna fórmula con parámetros en  $B$  que *solo un número finito* de elementos de  $A$  satisface (decimos que la clausura algebraica consta de todos aquellos elementos “con órbita finita” sobre  $B$ ).

**Observación 3.2.** *En la definición,  $\text{acl}(B)$  **no** depende de  $\mathfrak{A}$ .*

**DEMOSTRACIÓN** Formalmente, la definición parece depender de la estructura  $\mathfrak{A}$  - pero si  $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{A}$  es tal que  $B \subset A_1$ , entonces podemos sumergir ambas en una extensión elemental  $\mathfrak{A}_2 \succ \mathfrak{A}$ . Si  $a \in A$  tiene órbita finita (por ejemplo, con  $m$  elementos) sobre  $B$ ,  $\mathfrak{A} \models \exists^m v \varphi(v, b)$ . Como esto es cierto también en  $\mathfrak{A}_2$  los  $m$  elementos de la órbita deben ser los mismos entre  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{A}_2$ , luego entre  $\mathfrak{A}_2$  y  $\mathfrak{A}_1$  □

**Hecho 3.3.** *En cualquier estructura se tienen las siguientes propiedades de  $\text{acl}$ .*

$$A \subset \text{acl}(A) \tag{3.1}$$

$$A \subset B \rightarrow \text{acl}(A) \subset \text{acl}(B) \tag{3.2}$$

$$\text{acl}(\text{acl}(A)) = \text{acl}(A). \tag{3.3}$$

### Ejemplos

- Si  $K$  es un campo (en el lenguaje usual de anillos  $\tau_{\text{ring}}$ ) y  $A \subset K$ ,  $\text{acl}(A)$  contiene a la clausura algebraica usual (de teoría de campos)

de  $A$  en  $K$ .

- Si  $\mathfrak{A} = A$  es un conjunto puro ( $\tau = \tau_\infty = \langle \rangle$ ), entonces para todo  $B \subset A$ ,  $\text{acl}(B) = B$ .
- Si  $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0)$ ,  $\text{acl}(\emptyset) = \mathbb{N}$ . En general, si  $\mathfrak{A}$  es cualquier modelo no estándar de la aritmética,  $\text{acl}(\emptyset) \supset \mathbb{N}$  (donde  $\mathbb{N}$  denota la “parte estándar” de  $\mathfrak{A}$ ).

**Lema 3.4.** *Dada una estructura  $\mathfrak{A}$ , todo monomorfismo elemental  $f$  entre  $B, B' \subset A$  se puede extender a  $f : \text{acl}(B) \rightarrow \text{acl}(B')$ .*

DEMOSTRACIÓN Enumeramos  $\text{acl}(B) \setminus B$  como  $(b_i)_{i < \gamma}$  y usamos inducción transfinita para ir extendiendo  $f$  a  $B \cup \{b_i \mid i < \gamma\}$  así: para cada  $b_\gamma$  encontramos  $b'_\gamma \in \text{acl}(B')$  una realización del tipo

$$f(\text{tp}(b_\gamma / (B \cup \{b_i \mid i < \gamma\})))$$

(que se obtiene reemplazando los elementos de  $\text{cl}(B)$  por los que les corresponden mediante la función ya construida en el tipo  $\text{tp}(b_\gamma / (B \cup \{b_i \mid i < \gamma\}))$ ). Es un ejercicio verificar que este proceso es exhaustivo *en ambos lados* ( $\text{acl}(B)$  y  $\text{acl}(B')$ ).  $\square$

### 3.2. Estructuras minimales y fuertemente minimales

Suponemos que el lenguaje es contable.

Los modelos minimales/fuertemente minimales son aquellos donde el álgebra booleana de definibles es la mínima posible.

**Definición 3.5.** *Un modelo  $\mathfrak{A}$  es **minimal** si todo subconjunto definible (con parámetros) de  $A$  es finito o cofinito.*

El lema fundamental es el siguiente.

**Hecho 3.6.** [Intercambio] En modelos minimales vale la **propiedad de intercambio**:

$$\text{Dados } B \subset A, \quad b, c \in A \quad b \in \text{acl}(B, c) \setminus \text{acl}(B) \rightarrow c \in \text{acl}(B, b). \quad (3.4)$$

DEMOSTRACIÓN Suponga que  $b \in \text{acl}(B, c) \setminus \text{acl}(B)$ . Sean entonces  $\varphi(x, y)$  una fórmula con parámetros en  $B$  y  $m < \omega$  que atestigüen lo primero:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(b, c) \wedge \exists^{\leq m} x \varphi(x, c). \quad (3.5)$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\mathfrak{A} \models \varphi(b, y) \wedge \exists^{\leq m} x \varphi(x, y). \quad (3.6)$$

Hay que ver que  $c \in \text{acl}(B, b)$ . Basta ver que el conjunto  $\varphi(b, \mathfrak{A}) := \{d \in A \mid \mathfrak{A} \models \varphi(b, d)\}$  es finito. Supongamos que no. Entonces su complemento  $\neg\varphi(b, \mathfrak{A})$  debe ser finito (por minimalidad). Suponga entonces que es de tamaño  $\leq k$ , es decir que  $\mathfrak{A} \models \exists^{\leq k} y \neg\varphi(b, y)$ . Pero entonces

$$D = \{b' \in A \mid \mathfrak{A} \models \exists^{\leq k} y \neg\varphi(b', y)\}$$

(la “órbita” de  $b$  sobre  $B$  para la fórmula  $\exists^{\leq k} y \neg\varphi(b, y)$ ) debe ser infinito, ya que  $b \notin \text{acl}(B)$ . Podemos entonces tomar  $m + 1$  elementos distintos  $d_1, \dots, d_{m+1}$  en  $D$ . Con ésto,

$$\varphi(b_1, \mathfrak{A}) \cap \dots \cap \varphi(b_{m+1}, \mathfrak{A})$$

debe ser infinito - por lo tanto no vacío, y contiene un punto  $c'$ . Esto contradice la Ecuación 3.6.  $\square$

### 3.3. Pregeometrías, geometrías

Las pregeometrías de van der Waerden (también llamadas “matroides” en combinatoria finita) ocurren de manera *natural* en el contexto minimal.

**Definición 3.7** (Pregeometría). Una *pregeometría abstracta* es un conjunto  $M$  dotado de un operador

$$\text{cl} : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$$

que satisface (para todo  $A, B \subset M$ ):

**Carácter Finito**  $\forall A \subset M \text{ cl}(A) = \bigcup \{ \text{cl}(A') \mid A' \subset A \text{ finito} \}$ .

**Crecimiento**  $A \subset \text{cl}(A)$ .

**Monotonía**  $A \subset B \rightarrow \text{cl}(A) \subset \text{cl}(B)$ .

**Idempotencia**  $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$ .

**Intercambio**  $b \in \text{cl}(A, c) \setminus \text{cl}(A) \rightarrow c \in \text{cl}(A, b)$ .

Por la sección anterior (Hecho 3.6), si  $\mathfrak{A}$  es una estructura minimal, la clausura algebraica  $\text{acl}$  en los subconjuntos de  $A$  da lugar a una pregeometría.

**Definición 3.8.** [Geometría combinatoria] Una *geometría* es una pregeometría  $(M, \text{cl})$  tal que

$$\text{para todo } a \in M, \quad \text{cl}(\{a\}) = \{a\}. \quad (3.7)$$

### 3.3.1. De pregeometría a geometría

La diferencia entre pregeometrías y geometrías está en el comportamiento de  $\text{cl}$  en los puntos. El paso de pregeometría a geometría es el natural en este caso: dada una pregeometría  $(M, \text{cl})$ , definimos la relación  $\sim$  en  $M \setminus \text{cl}(\emptyset)$  así:

$$x \sim y \quad \text{ssi} \quad \text{cl}(\{x\}) = \text{cl}(\{y\}).$$

Claramente,  $\sim$  es una relación de equivalencia. Note que (por la propiedad de intercambio), se tiene  $x \sim y$  si y solo si  $y \in \text{cl}(\{x\})$ .

Ahora, la geometría correspondiente a  $(M, \text{cl})$  tiene como soporte el conjunto

$$\hat{M} := (M \setminus \text{cl}(\emptyset)) / \sim.$$

Todo punto de  $\hat{M}$  es entonces de la forma  $\hat{a} = \text{cl}(a) \setminus \text{cl}(\emptyset)$  para algún  $a \in M \setminus \text{cl}(\emptyset)$ . Ahora definimos, para  $\hat{A} = \{\hat{a} | a \in A\} \subset \hat{M}$  la clausura

$$\text{cl}(\hat{A}) := \{\hat{b} | b \in \text{cl}(A)\}.$$

**Proposición 3.9.** *Si  $(M, \text{cl})$  es una pregeometría, la construcción anterior da lugar a una geometría  $(\hat{M}, \text{cl})$ .*

DEMOSTRACIÓN Basta revisar que  $\sim$  respeta las cinco propiedades.  $\square$

## Ejemplo

Sea  $M$  un espacio vectorial. No es difícil ver que  $M$  es minimal (los subconjuntos de  $M$  definibles con parámetros son todos combinaciones booleanas finitas de soluciones de ecuaciones lineales - luego son combinaciones booleanas finitas de singletons [o de  $M$  mismo o el conjunto  $\emptyset$ ]: conjuntos finitos o cofinitos).

La pregeometría asociada a la clausura algebraica en  $M$ ,  $\text{acl}$  da lugar mediante el procedimiento anterior al **espacio proyectivo** asociado con  $M$ :  $\hat{M}$  es exactamente lo que en geometría se llama el espacio proyectivo (asociado a  $M$ ).

El **espacio afin** asociado a un espacio vectorial  $M$  es la pregeometría con el mismo soporte  $M$  y la nueva clausura

$$\text{cl}_{\text{aff}}(A) = A + \text{span}(A - A)$$

donde  $A - A = \{a - b | a, b \in A\}$ .

### 3.4. Localizar pregeometrías.

El paso de pregeometrías a geometrías es una versión del paso de (la pregeometría de) un espacio vectorial a (la geometría de) un espacio proyectivo. Otra construcción (sumamente importante) se llama “localización”.

**Definición 3.10** (Localización). *Dada una pregeometría  $(M, \text{cl})$  y dado un subconjunto  $D \subset M$ , la **localización** de  $(M, \text{cl})$  con respecto a  $D$  es la siguiente pregeometría  $(M_D, \text{cl}_D)$ :*

$$M_D = M \quad \text{cl}_D(A) = \text{cl}(D \cup A). \quad (3.8)$$

**Hecho 3.11.** *Todo espacio afín es una geometría. Su localización con respecto a cualquier punto es una pregeometría isomorfa a la del espacio vectorial inicial.*

DEMOSTRACIÓN Es una verificación inmediata. □

#### Ejemplo

**Grupos minimales:** sea  $(G, +)$  un grupo minimal. De nuevo se puede armar el “espacio afín” asociado a  $G$ , con los mismos puntos pero con la nueva noción de clausura  $\text{cl}_{\text{aff}}(A) = A + \langle A - A \rangle$ . Y de nuevo se tiene que si se localiza esta construcción a cualquier elemento  $g \in G$ , se recupera el grupo inicial.

Así, algunos pares afín/localización se describen a veces en términos de “olvidar el 0/recuperar un 0”.

### 3.5. Dimensión

La manera usual de tratar las nociones de *independencia*, *generadores*, *dimensión* en espacios vectoriales se generaliza a todas las pregeometrías.

**Definición 3.12** (Independencia/Bases). *En una pregeometría  $(M, \text{cl})$  se dice que un conjunto  $A \subset M$  es **independiente** si  $\text{cl}(B) \neq \text{cl}(A)$  si  $B \subsetneq A$ . Un subconjunto independiente maximal de  $A$  es una **base** de  $A$ .*

**Lema 3.13.** *Todo par de bases  $B$  y  $C$  de un conjunto  $A$  tienen el mismo cardinal.*

DEMOSTRACIÓN Consideramos primero el caso en que  $B$  tiene  $n$  elementos,  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ . Como  $B$  es independiente, se tiene

$$\text{cl}(b_1, \dots, b_n) \setminus \text{cl}(b_1, \dots, b_{n-1}) \neq \emptyset.$$

Como  $\text{cl}(B) = A = \text{cl}(C)$ , existe  $c \in C$  tal que

$$c \in \text{cl}(b_1, \dots, b_n) \setminus \text{cl}(b_1, \dots, b_{n-1}).$$

Usando intercambio, podemos concluir que  $\{c, b_1, \dots, b_{n-1}\}$  es base de  $A$  [como  $c \in \text{cl}(b_1, \dots, b_n) \setminus \text{cl}(b_1, \dots, b_{n-1})$ ,  $b_n \in \text{cl}(c, b_1, \dots, b_{n-1})$ ; pero así, tenemos  $\{b_1, \dots, b_n\} \subset \text{cl}(c, b_1, \dots, b_{n-1})$  con lo cual  $A = \text{cl}(b_1, \dots, b_n) \subset \text{cl}(\text{cl}(c, b_1, \dots, b_{n-1})) = \text{cl}(c, b_1, \dots, b_{n-1})$ ; por otro lado, como  $c \in C \subset A$ , se tiene  $\{c, b_1, \dots, b_{n-1}\} \subset A$  con lo cual  $\text{cl}(c, b_1, \dots, b_{n-1}) \subset \text{cl}(A) = \text{cl}(\text{cl}(B)) = \text{cl}(B) = A$ .]

En  $M_c$  (la localización en  $c$ ), los conjuntos  $\{b_1, \dots, b_{n-1}\}$  y  $C \setminus \{c\}$  son bases de  $A$  [¡verificar por qué!]. Por inducción sobre  $n$  se sigue el teorema para el caso de bases finitas: la hipótesis de inducción daría que  $C \setminus \{c\}$  debe tener  $n - 1$  elementos.

Ahora, si  $B$  y  $C$  son ambos infinitos, usamos el carácter finito de  $\text{cl}$ : podemos enumerar  $B$  y  $C$  y armar una biyección usando vaivén [Ejercicio].

□

Con lo anterior, tiene sentido definir dimensión exactamente como se hace en espacios vectoriales, o como se define el grado de trascendencia en teoría de campos.

**Definición 3.14** (Dimensión). *Sea  $(M, \text{cl})$  una pregeometría. Dado un subconjunto  $A \subset M$ , la **dimensión** (combinatoria) de  $A$  es el cardinal de*

una base de  $A$ . Denotamos este cardinal mediante  $\dim_{\text{cl}}(A)$  o simplemente  $\dim(A)$  cuando no hay ambigüedad. Si  $B \subset A$ , la dimensión relativa es la dimensión de  $A$  en la pregeometría (localizada)  $M_B$ ; la denotamos  $\dim(A/B)$ .

**Lema 3.15** (Fórmula de adición).

$$\dim(A/B) + \dim(B) = \dim(A).$$

DEMOSTRACIÓN    Ejercicio.

## Ejemplos

- La dimensión en espacios vectoriales (coincide con la dimensión combinatoria cuando se toma  $\text{cl} = \text{span}$ ).
- En el caso de campos algebraicamente cerrados (modelos de ACF), la dimensión combinatoria correspondiente a la pregeometría es precisamente el famoso *grado de trascendencia*. Como todo campo se puede extender a uno algebraicamente cerrado, la definición se puede extender a subconjuntos de cualquier campo.
- En el caso de estructuras puras, la dimensión combinatoria coincide con la *cardinalidad*.

¿Qué pasa con los “trozos” de un conjunto y la dimensión combinatoria? ¿Cómo se combinan entre sí? El siguiente lema resultará parcialmente familiar: cuando la desigualdad  $\leq$  es una igualdad, es una propiedad básica y muy útil de la dimensión en espacios vectoriales. En nuestro caso, el que se tenga (o no) la igualdad resultará fundamental.

**Lema 3.16.** *Dada una pregeometría  $M$ , y dados  $X, Y \subset M$ ,*

$$\dim_{\text{cl}}(X \cup Y) \leq \dim_{\text{cl}} X + \dim_{\text{cl}} Y - \dim_{\text{cl}}(X \cap Y).$$

DEMOSTRACIÓN Sea  $Z$  una base de  $X \cap Y$ , y sean  $Z \cup X_0$  base de  $X$ ,  $Z \cup Y_0$  base de  $Y$ . Entonces  $\text{cl}(X_0 \cup Z \cup Y_0) = \text{cl}(X \cup Y)$ , con lo cual  $\dim_{\text{cl}}(X \cup Y) \leq |X_0 \cup Z| + |Y_0 \cup Z| - |Z| = \dim_{\text{cl}} X + \dim_{\text{cl}} Y - \dim_{\text{cl}}(X \cap Y)$ .  $\square$

### 3.5.1. Ejercicio

- Verifique que en la pregeometría de clausura algebraica de estructuras triviales (infinitas) y de espacios vectoriales, la anterior es una igualdad.
- ¿Se tiene la igualdad en espacios afines?
- Verifique mediante un ejemplo que la igualdad falla en la pregeometría de acl asociada al campo complejo  $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ . (Pista: use tres complejos mutuamente trascendentes.)

**Hecho 3.17.** *Toda estructura minimal  $\mathfrak{A}$  en un lenguaje enumerable es homogénea.*

DEMOSTRACIÓN Suponga que  $B, B' \subset A$  son de cardinal  $< |A|$ , y  $\alpha : B \rightarrow B'$  es un monomorfismo elemental. Entonces  $\dim B = \dim B'$  [ejercicio]. Además,  $\dim B < |A|$ ; con ésto, por la fórmula de adición

$$\dim(A/B) + \dim B = \dim A = \dim(A/B') + \dim B',$$

se tiene que  $\dim(A/B) = \dim(A/B')$ . Extendamos ahora  $B$  a  $C$  y  $B'$  a  $C'$  para formar una base de  $\mathfrak{A}$  sobre  $B$  y  $B'$  respectivamente. Como  $|C \setminus B| = |C' \setminus B'|$  podemos tomar una biyección  $\gamma : C \rightarrow C'$  que extiende a  $\alpha$ . Es un ejercicio verificar que  $\gamma$  es monomorfismo elemental (basta verificar los tipos de las  $n$ -tuplas en las bases). Por el Lema 3.4 se puede extender  $\gamma$  a un automorfismo de  $\mathfrak{A}$  y terminar la demostración.  $\square$

## 3.6. Minimalidad fuerte

La noción de minimalidad de una estructura es suficiente para basar en ella una pregeometría con acl: si una estructura es minimal, la clausura

algebraica satisface intercambio. Sin embargo, una estructura  $\mathfrak{A}$  puede ser minimal pero ser elementalmente equivalente a otra estructura  $\mathfrak{B}$  que no lo sea.

En muchos casos importantes, uno requiere que las propiedades que estudia resulten cerradas bajo  $\equiv$ ; éste es un criterio de qué tan “modelo-teórica” es una propiedad. En este sentido, la minimalidad no es muy robusta modelo-teóricamente. Por eso en muchos tratamientos del tema se prefiere trabajar directamente con estructuras *fuertemente minimales*, que sí resultan cerradas bajo equivalencia elemental (por definición). Además, la minimalidad fuerte (como muchas buenas propiedades en matemática) es una noción *natural*, como lo atestigua el hecho de que tenga muchas definiciones equivalentes que usan ideas distintas<sup>1</sup>.

Antes de definir la minimalidad fuerte, examinamos la conexión entre la saturación de una estructura y su dimensión combinatoria.

**Teorema 3.18.** *Toda estructura minimal de dimensión infinita es saturada.*

**DEMOSTRACIÓN** Cuando  $\mathfrak{A}$  es de dimensión infinita, se tiene  $\dim_{\text{acl}}(\mathfrak{A}) = |A|$ , por el carácter finito de  $\text{acl}$ . Sea  $\varphi(x)$  una fórmula con parámetros en un conjunto  $B$  con cardinal  $|B| < |A|$ . El conjunto  $\varphi(\mathfrak{A})$  es finito o cofinito, por minimalidad. En el segundo caso además tenemos que

$$A \setminus \text{acl}(B) \subset \varphi(\mathfrak{A}) :$$

si  $a \in A$  es tal que  $\mathfrak{A} \not\models \varphi(a)$ , entonces  $\mathfrak{A} \models \neg\varphi(a)$ , pero como  $\varphi(\mathfrak{A})$  es cofinito, se tendría que  $a \in \neg\varphi(\mathfrak{A})$ , un conjunto finito definido sobre  $B$ , es decir  $a \in \text{acl}(B)$  - contradicción.

Por lo tanto, dado cualquier tipo  $p \in S(B)$ , por ejemplo  $p = \{\varphi_i(x, \bar{b}_i) \mid i < |B|\}$ , hay que ver que existe  $b \in \mathfrak{A}$  que realiza  $p$ .

Basta observar que dado cualquier conjunto consistente de fórmulas

---

<sup>1</sup>En el caso general,  $M$  es fuertemente minimal si es elementalmente equivalente a una estructura minimal de dimensión infinita, o bien si es de rango de Morley igual a 1 y grado de Morley igual a 1.

$\varphi_i$  con parámetros en  $B$ , la intersección

$$\bigcap_i \varphi_i(\mathfrak{A})$$

o bien contiene el conjunto (no vacío, pues  $|B| < |A|$ )  $A \setminus \text{acl}(B)$ , o bien es un subconjunto no vacío de algún  $\varphi_i(\mathfrak{A})$  finito.

Ésto implica que  $\mathfrak{A}$  es saturado.  $\square$

**Corolario 3.19** (Eliminación de  $\exists^\infty$ ). *Toda estructura elementalmente equivalente a una que sea minimal de dimensión infinita es minimal también, y **elimina el cuantificador**  $\exists^\infty$ : dada una fórmula  $\varphi(x, \bar{y})$ , existe un número natural  $m_\varphi$  tal que  $|\varphi(\mathfrak{A}, \bar{a})| > m_\varphi$  implica que  $\varphi(\mathfrak{A}, \bar{a})$  es infinito.*

Antes de iniciar la demostración, vale la pena contrastar ésto con el hecho general de Indefinibilidad de la Finitud (consecuencia inmediata de compacidad). Sucede aquí que ciertas teorías (por ejemplo, las fuertemente minimales), sí permiten eliminar el cuantificador  $\exists^\infty$ .

**DEMOSTRACIÓN** Suponga que no se elimina  $\exists^\infty$ : que la fórmula  $\varphi(x, \bar{y})$  es un contraejemplo dentro de cierta estructura  $\mathfrak{A}$  minimal de dimensión infinita. Entonces para cada  $m$  existe un conjunto  $\varphi(\mathfrak{A}, \bar{a}_m)$  finito de tamaño  $\geq m$ . El complemento  $\neg\varphi(\mathfrak{A}, \bar{a}_m)$  es por lo tanto infinito. Esto quiere decir que  $\bar{a}_m$  satisface la fórmula

$$\psi_m(\bar{y}) := \exists^{\geq m} x \varphi(x, \bar{y}) \wedge \exists^{\geq m} x \neg\varphi(x, \bar{y}).$$

Por lo tanto, el tipo  $p := \{\psi_m \mid m < \omega\}$  es consistente - como  $\mathfrak{A}$  es saturado por el Teorema 3.18, existe  $\bar{a} \in A$  tal que  $\bar{a} \models p$  - pero ésto quiere decir que  $\varphi(\mathfrak{A}, \bar{a})$  y  $\neg\varphi(\mathfrak{A}, \bar{a})$  son ambos infinitos, lo cual contradice la minimalidad de la estructura  $\mathfrak{A}$ .  $\square$

Los hechos anteriores justifican la siguiente definición de minimalidad fuerte.

**Definición 3.20** (Minimalidad fuerte). *Una estructura minimal  $\mathfrak{A}$  es **fuertemente minimal** si es elementalmente equivalente a una estructura minimal de dimensión infinita.*

En estructuras fuertemente minimales  $\mathfrak{A}$ , la minimalidad es una propiedad de primer orden: la teoría  $\text{Th}(\mathfrak{A})$  implica que todos los modelos son minimales.

**Hecho 3.21.** *Sea  $\mathfrak{A}$  minimal,  $X \subset A$  y  $\mathfrak{B} = \text{acl}(X)$  una subestructura infinita. Entonces  $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ .*

**DEMOSTRACIÓN** Por Tarski-Vaught, basta revisar que si una fórmula con parámetros en  $B$  tiene una realización en  $\mathfrak{A}$ , también tiene una realización en  $\mathfrak{B}$ . Si  $\varphi(\mathfrak{A})$  es finito, entonces  $\varphi(\mathfrak{A}) \subset B$  por ser  $B$  algebraicamente cerrado. Si  $\varphi(\mathfrak{A})$  es infinito, debe ser cofinito por la minimalidad de  $\mathfrak{A}$ , y por lo tanto  $\neg\varphi(\mathfrak{A})$  es finito y se debe tener  $\varphi(\mathfrak{A}) \cap B \neq \emptyset$ .  $\square$

### 3.7. Rango de Morley

Los rangos, entre éstos el rango de Morley, son usados a todo lo ancho de la teoría de estabilidad. Son medidas de “complejidad” de conjuntos definibles: capturan “qué tanto se puede descomponer” en trozos más sencillos un conjunto definible.

El uso de los rangos en teoría de modelos se remonta a los trabajos de Morley en la década de 1960. En la década siguiente, Shelah modificó los rangos y definió muchas variantes combinatorias que resultaron fundamentales para el desarrollo de la teoría de la estabilidad. Desde entonces, muchos rangos han seguido apareciendo, adaptados al tipo de situación modelo-teórica a estudiar.

La idea intuitiva es la siguiente: los rangos son ordinales (o en un casos extremos,  $-1$  o  $\infty$ ) que le asociamos a cada conjunto definible. Así, por ejemplo, el “rango  $R_2$ ” crece de la siguiente manera: un definible  $X$  tiene rango  $R_2(X) \geq 0$  si  $X$  no es vacío,  $R_2(X) \geq \alpha + 1$  si existen  $Y_1, Y_2 \subset X$ ,  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$  tales que  $R_2(Y_1) \geq \alpha$  y  $R_2(Y_2) \geq \alpha$ . Si  $\delta$  es ordinal límite,  $R_2(X) \geq \delta$  si  $R_2(X) \geq \alpha$  para todo  $\alpha < \delta$ . Finalmente, si  $R_2(X) \geq \alpha$  para todo ordinal  $\alpha$ , se dice que  $R_2(X) = \infty$ .

Nuestro enfoque en esta sección no es tan general. Aunque resulta equivalente en el caso de estructuras fuertemente minimales, la definición

y las propiedades estarán adaptadas a ese caso, y son (superficialmente) distintas de las usuales.

En el resto de esta sección  $\mathfrak{A}$  es fuertemente minimal, de dimensión infinita.

**Definición 3.22** (Rango de Morley). *Sea  $X \subset A$  finito y suponga que  $\mathfrak{A}$  es saturado. Dado un conjunto  $S \subset A^n$  definible sobre  $X$ , el **rango de Morley** de  $S$  es*

$$\text{RM}(S) := \max_{\langle s_1, \dots, s_n \rangle \in S} \dim_{\text{cl}}(\langle s_1, \dots, s_n \rangle / X).$$

Por la saturación de  $\mathfrak{A}$ , el valor del rango de Morley no depende de  $\mathfrak{A}$ : es igual en cual otra estructura saturada elementalmente equivalente a  $\mathfrak{A}$ . Tampoco depende de  $X$ .

En efecto, si  $\text{RM}(\varphi(\mathfrak{A})) = r$ , sea  $\{s_1, \dots, s_r\}$  una base de  $\langle s_1, \dots, s_n \rangle$  de dimensión maximal sobre  $X$ . Si  $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}$  es minimal y de dimensión infinita, y  $X \cup X' \subset A'$  y además  $\mathfrak{A}' \equiv_{X \cup X'} \mathfrak{A}$ , podemos escoger  $\{s'_1, \dots, s'_r\} \subset A'$  independientes sobre la unión  $X \cup X'$ . El tipo

$$p_{s_1, \dots, s_r} := \text{tp}(\langle s_1, \dots, s_n \rangle / \{s_1, \dots, s_r\} \cup A)$$

es algebraico (de hecho, principal), pues cada  $s_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) es algebraico sobre  $\{s_1, \dots, s_r\}$ . Reemplazando los  $s_i$  por los  $s'_i$  correspondientes en todas las fórmulas de  $p_{s_1, \dots, s_r}$  obtenemos un tipo  $p_{s'_1, \dots, s'_r}$ , algebraico (y principal) también, obviamente. Tiene entonces una realización  $\langle s_1, \dots, s_n \rangle$ . El tipo  $p_{s'_1, \dots, s'_r}$  satisface que  $\langle s_1, \dots, s_n \rangle$  está en  $\varphi(\mathfrak{A}')$  y tiene dimensión  $r$  sobre  $X \cup X'$ . Con esto,

$$\text{RM}(\varphi(\mathfrak{A})) \leq \text{RM}(\varphi(\mathfrak{A}')).$$

Igualmente, se obtiene que  $\text{RM}(\varphi(\mathfrak{A}')) \leq \text{RM}(\varphi(\mathfrak{A}))$ , y que el rango de Morley, calculado sobre  $X$ , es el mismo que calculado sobre  $X'$ .  $\square$

Con lo anterior, extendemos la definición a conjuntos definibles en cualquier modelo fuertemente minimal  $M$ :  $\text{RM}(\varphi(M))$  se define en general como el rango en cualquier extensión elemental saturada de  $M$ .

**Lema 3.23.** [*Propiedades del rango de Morley*] *En cualquier estructura*

fuertemente minimal  $M$  tenemos lo siguiente (para  $S, S_1, S_2 \subset M^n$  definibles):

1.  $\text{RM}(M^n) = n$ ,
2.  $\text{RM}(S) = 0$  ssi  $S$  es finito,
3.  $\text{RM}(S_1 \cup S_2) = \text{máx}\{\text{RM}(S_1), \text{RM}(S_2)\}$ ,
4. Si  $\text{pr} : M^n \rightarrow M^k$  (para  $k \leq n$ ) denota la proyección canónica, entonces

$$\text{RM}(S) \leq \text{RM}(\text{pr}(S)) + \text{máx}_{t \in \text{pr}(S)} \text{RM}(\text{pr}^{-1}(t) \cap S).$$

5. Si además suponemos que  $\text{RM}(\text{pr}^{-1}(t)) \cap S$  tiene el mismo valor para todo  $t \in \text{pr}(S)$ , tenemos que

$$\text{RM}(S) = \text{RM}(\text{pr}(S)) + \text{RM}(\text{pr}^{-1}(t) \cap S).$$

#### DEMOSTRACIÓN

1. Basta escoger  $n$  elementos independientes  $s_1, \dots, s_n$  en  $M$ .
2. Si  $\text{RM}(S) = 0$ , entonces  $S$  debe ser finito (si fuera infinito, por el Carácter Finito de  $\text{cl}$ , el rango de Morley debería ser un número  $\geq 1$ ). Si  $S$  es finito, se puede tomar  $X$  como  $S$  en la definición de  $\text{RM}$ . Entonces claramente  $\text{dim}_{\text{cl}}$  calculada en elementos de  $S$  sobre  $X$  (es decir, sobre  $S$ ) debe ser siempre 0.
3. Ejercicio.
4. Sea  $\langle s_1, \dots, s_n \rangle$  una  $n$ -tupla en  $S$  de dimensión maximal. Entonces

$$\begin{aligned} \text{RM}(S) &= \text{dim}(\{s_1, \dots, s_n\}/X) = \text{dim}(\{s_1, \dots, s_n\}/X \cup \{s_1, \dots, s_k\}) \\ &\quad + \text{dim}(\{s_1, \dots, s_k\}/X) \leq \text{RM}(\text{pr}^{-1}(\{s_1, \dots, s_k\}) \cap S) + \text{RM}(\text{pr}(S)). \end{aligned}$$

5. Suponga que  $\langle s_1, \dots, s_k \rangle$  es una  $k$ -tupla en  $\text{pr}(S)$  de dimensión maximal. Entonces podemos extenderla a una  $n$ -tupla de dimensión maximal *sobre*  $\langle s_1, \dots, s_k \rangle \cup X$  en  $S$ . Pero entonces

$$\dim(\{s_1, \dots, s_n\}/X \cup \{s_1, \dots, s_k\}) = \text{RM}(\text{pr}^{-1}(\langle s_1, \dots, s_k \rangle)),$$

y

$$\dim(\{s_1, \dots, s_n\}/X) = \text{RM}(\text{pr}(S)).$$

Por lo tanto,

$$\text{RM}(S) = \text{RM}(\text{pr}(S)) + \text{RM}(\text{pr}^{-1}(\langle s_1, \dots, s_k \rangle)).$$

Pero esto implica que

$$\text{RM}(S) = \text{RM}(\text{pr}(S)) + \text{RM}(\text{pr}^{-1}(t) \cap S).$$

□

Para la buena definición del grado de Morley (intuitivamente, el número de componentes irreducibles de misma dimensión en caso de variedades algebraicas), necesitamos definir *indiscernibles* y el siguiente lema sobre indiscernibilidad en estructuras fuertemente minimales.

Los indiscernibles (terminología inspirada, naturalmente, en Leibniz) son uno de los conceptos más útiles e importantes de toda la teoría de modelos, mucho más allá de nuestro ámbito fuertemente minimal. Usualmente, extraer indiscernibles requiere algo de combinatoria (Erdős-Rado o Ramsey) o, como en nuestro caso, hipótesis de estabilidad. Los indiscernibles *de orden* permiten una enorme flexibilidad en la construcción de modelos: esencialmente, proveen

- maneras de “estirar” modelos estirando órdenes lineales, y
- maneras de controlar propiedades como saturación y omisión de tipos en modelos de una teoría.

Vale la pena notar que los indiscernibles son útiles también en contextos

muy alejados de la lógica de primer orden. Definimos aquí los *conjuntos de indiscernibles*.

**Definición 3.24** (Indiscernibles). *Dados una estructura  $\mathfrak{A}$  y conjuntos  $X, Y \subset A$ , decimos que  $X$  es **indiscernible sobre  $Y$**  si*

$$\text{tp}(\bar{a}/Y) = \text{tp}(\bar{b}/Y)$$

para cualquier par de  $n$ -tuplas de elementos distintos de  $X$ , para cualquier  $n$ .

**Hecho 3.25.** *Sean  $M$  una estructura minimal,  $A, B \subset M$ , con  $A$  independiente sobre  $C$  en la pregeometría de  $M$ . Entonces  $A$  es indiscernible sobre  $C$ . Además, dado  $n$ , el tipo  $\text{tp}(\bar{a}/C)$  no depende de  $\bar{a}$ , para  $\bar{a} \in A$ .*

**DEMOSTRACIÓN** Inducción sobre  $n$ : sean  $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  y  $\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$  con coordenadas distintas de  $A$ . Si  $n = 1$ ,  $\text{tp}(a_1/C)$  consta de las fórmulas  $\varphi(x) \in L_C$  para las cuales  $\varphi(M)$  es infinito (por la independencia). Ésto vale claramente también para  $\text{tp}(b_1/C)$ . Si  $n > 1$  y el hecho vale hasta  $n$ , sean  $a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$  y  $b_{n+1} \in A \setminus \{b_1, \dots, b_n\}$  y consideremos  $\varphi(x_1, \dots, x_n, y) \in L_C$ . Entonces tenemos que  $\models \varphi(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$  si y solo si  $\varphi(a_1, \dots, a_n, M)$  es infinito si y solo si  $\varphi(b_1, \dots, b_n, M)$  es infinito si y solo si  $\models \varphi(b_1, \dots, b_n, b_{n+1})$ .  $\square$

### 3.7.1. Grado de Morley

Una de las propiedades más importantes del rango de Morley es que permite “descomposiciones minimales” en cada nivel. Específicamente, si cierto conjunto definible  $X$  tiene rango de Morley  $\alpha$ ,  $X$  se puede partir en subconjuntos (disyuntos) de rango  $\alpha$  *solamente una cantidad finita de veces*. El número máximo de pedazos disyuntos dentro de  $X$  que tienen el mismo rango de Morley de  $X$  es un invariante de  $X$ , el *grado de Morley* de  $X$ ,  $dM(X)$ .

**Lema 3.26.** *Dado un definible  $S \subset M^n$ , existe una cota máxima  $m \in \mathbb{N}$  tal*

que  $S$  se puede partir en  $m$  subconjuntos disyuntos

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_m,$$

con todos los  $S_i$  con rango de Morley igual a  $\text{RM}(S)$ .

**DEMOSTRACIÓN** Por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 1$ , es claro: como  $M$  es minimal, todo definible  $S$  es finito o cofinito. Si es finito,  $\text{RM}(S) = 0$  por el Lema 3.23. En ese caso,  $m = |S|$ . De lo contrario,  $\text{RM}(S) = 1$ , pero como  $S$  no se puede a su vez partir en dos subconjuntos disyuntos *infinitos* (por la minimalidad), se tiene que  $m$  debe ser igual a 1.

Si ahora tomamos  $n$  arbitrario, sea  $\text{RM}(S) = k$ . Entonces hay un elemento  $\langle s_1, \dots, s_n \rangle \in S$  con dimensión  $k$  atestiguada por algún  $\{s_{i_1}, \dots, s_{i_k}\}$  acl-independiente. Sin pérdida de generalidad,  $i_1 = 1, \dots, i_k = k$ . Entonces todo  $s_j \in \text{acl}\{s_1, \dots, s_k\}$  para  $j = 1, \dots, n$  con lo cual existe un número  $\ell = \ell_{i_1, \dots, i_k} < \omega$  tal que

$$M \models \exists^{\ell} \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in S[\langle x_1, \dots, x_k \rangle = \langle s_1, \dots, s_k \rangle],$$

por la propiedad (4) del lema 3.23. Lo anterior se puede capturar por una fórmula

$$\psi(y_1, \dots, y_k) := \exists^{\ell} \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in S[\langle x_1, \dots, x_k \rangle = \langle y_1, \dots, y_k \rangle].$$

Por la construcción,  $\psi(M)$  es un subconjunto de  $M^k$  de rango de Morley  $k$ . Asociamos ahora a ésto el conjunto  $S^{i_1, \dots, i_k} \subset S$  dado por

$$S^{i_1, \dots, i_k} := \{\langle s_1, \dots, s_n \rangle \in S \mid \psi(s_1, \dots, s_k)\}.$$

Claramente se tiene  $\text{RM}(S^{i_1, \dots, i_k}) = \text{RM}(\psi(M)) = \text{RM}(S) = k$ . Si ahora tenemos una partición de  $S^{i_1, \dots, i_k}$  así:

$$S^{i_1, \dots, i_k} = S_1 \cup \dots \cup S_p$$

con todos los sumandos definibles y de rango de Morley  $k$  sobre algún  $X'$ ,

entonces dado  $j \leq p$  existe  $\langle s_{j,1}, \dots, s_{j,n} \rangle \in S_j$  con las primeras  $k$  coordenadas independientes sobre  $X'$ . Por indiscernibilidad (Lema 3.25), se puede cuadrar que  $\langle s_{j,1}, \dots, s_{j,k} \rangle = \langle s_1, \dots, s_k \rangle$  para todo  $j \leq p$ . Así, necesariamente  $j \leq \ell$ . Tomando todos los posibles  $\langle i_1, \dots, i_k \rangle$ , tenemos que

$$m \leq \sum_{\{i_1, \dots, i_k\}} \ell_{i_1, \dots, i_k}$$

lo cual termina la inducción.  $\square$

Con lo anterior, queda claro que el grado de Morley  $dM$  está bien definido.

**Hecho 3.27.**  $1 \leq dM(X) < \omega$ , para todo conjunto definible  $X$ .

Es importante y útil notar la analogía con *conjuntos irreducibles* en geometría algebraica básica. Cada conjunto algebraico tiene un número natural fijo de componentes irreducibles de su misma dimensión. Ese número es en nuestro caso el grado de Morley.

### 3.7.2. Estabilidad clásica

Conviene que nos detengamos un momento antes de seguir las cuentas que nos llevarán a la tricotomía débil y a las conjeturas de Zilber. La estabilidad clásica es un tema inmenso, anclado en los resultados de Morley de mediados de los años 1960, pero desarrollada de manera impresionante por Shelah a partir de su tesis doctoral (1969), y a lo largo de varias décadas. El contexto pasó fuera de Primer Orden hacia finales de la década de 1970, pero ha continuado su desarrollo simultáneo (y muy robusto) tanto en Primer Orden como en ámbitos no elementales. El libro *Classification Theory* de Shelah [Sh c] (versiones de 1978 y 1990) es un hito enorme de la matemática de la segunda mitad del siglo XX, comparable tal vez solamente a nivel de obras del último medio siglo con la *œuvre* de Grothendieck a nivel de trascendencia matemática. En ese libro las bases de toda la teoría de estabilidad quedan fijadas, incluyendo la demostración del famoso teorema del *Main Gap*: dada una teoría  $T$ , la función  $I(\kappa, T)$  que arroja el

número de modelos (módulo isomorfismo) de  $T$  de cardinal  $\kappa$  siempre va a caer en una de dos grandes clases: asintóticamente,  $I(\kappa, T)$  será el número máximo (la exponencial de cardinales infinitos  $2^\kappa$ ) o bien quedará acotado por una función prácticamente lineal:  $I(\aleph_\alpha, T) < \beth_{\omega_1}(|\omega + \alpha|)$ .

Las teorías fuertemente minimales son casi la *base* de la “jerarquía de estabilidad”. Las teorías categóricas en cardinales no contables son aún más “básicas” que las fuertemente minimales: si una teoría es categórica en un cardinal no contable, tiene modelos fuertemente minimales. A la vez, estos tienen rango de Morley acotado - una de las caracterizaciones de uno de los “peldaños básicos” de la jerarquía: las teorías categóricas en cardinales no enumerables (por el teorema de Morley, también llamadas “teorías  $\aleph_1$ -categóricas” a secas, pues es equivalente que sean categóricas en  $\aleph_1$  a que lo sean en *todos* los cardinales no contables).

Más allá de las teorías “no contablemente categóricas”, la jerarquía tiene peldaños importantes:  $\aleph_0$ -estables, superestables, estables. Finalmente, más recientemente se ha “ampliado” la zona de efectividad de la teoría de la estabilidad a zonas inestables, pero con otras propiedades: las teorías *simples* y las teorías *dependientes* (también llamadas “NIP” por algunos autores - como abreviatura de “No Independence Property”).

La figura a continuación es un mapa muy general de algunas áreas importantes de la teoría de modelos actualmente. Observe que la zona de primer orden tiene varias líneas divisorias - correspondientes a teorías (en orden creciente de complejidad)  $\omega$ -estables, superestables, estables, y luego dos clases muy estudiadas en los últimos quince años: dependientes (NIP) y simples—extensiones “ortogonales” entre sí de la zona de teorías estables.

Una cantidad enorme de los resultados de la teoría de Estabilidad ha sido extendido (de maneras sofisticadas) al ámbito de las teorías simples y de las teorías dependientes.

Fuera de primer orden, están las clases definibles mediante sentencias en lógicas más fuertes (las más importantes de éstas tal vez son las de la forma  $\text{Mod}(\psi)$ , donde  $\psi$  es una sentencia de la lógica infinitaria  $L_{\omega_1, \omega}$ ). Luego están las clases elementales abstractas, definidas como cla-

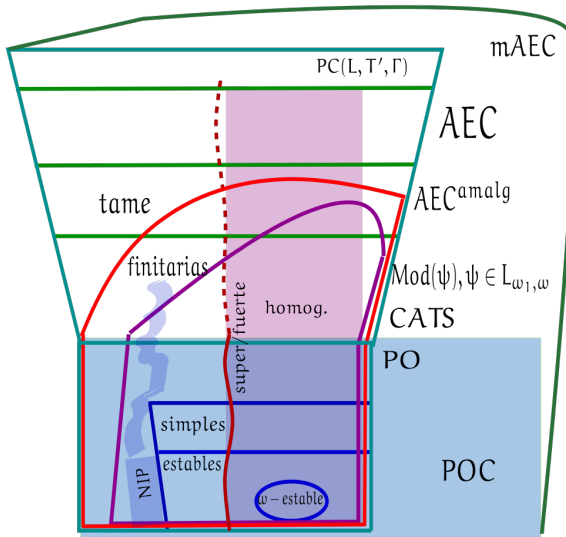


Figura 3.1: Un mapa de la teoría de modelos en 2011.

ses de modelos de cierto vocabulario fijo, pero no como los modelos que satisfacen cierta sentencia de una lógica dada, sino en términos de una propiedad de clausura (abstracta) de una relación  $\prec_{\mathcal{K}}$  que captura algunos de los puntos más importantes de la noción de subestructura elemental  $\prec$ .

La “zona azul” del mapa corresponde a la **lógica continua de primer orden**, desarrollo iniciado hace cuatro décadas por Keisler, pero continuado solo desde hace unos diez años por Ben Yaacov, Berenstein, Henson y Usvyatsov—extendiendo trabajos de Iovino y Henson de mediados de la década de 1990.

Lo que es importante notar es que todos los temas que discutimos (tricotomía débil, conjetura de tricotomía, etc., pregeometrías) se “ubican” en los niveles más bajos de esta jerarquía, en los que Zilber llama los “mejor comportados”, más dóciles, de la matemática.

Naturalmente, existen intentos, más o menos exitosos, de generalización de estos temas a lugares más altos de la jerarquía de estabilidad, o

lugares ubicados por fuera de las teorías de primer orden (clases “no elementales”).

## Capítulo 4

# Tricotomía débil.

El teorema débil de tricotomía, que exponemos de manera más o menos detallada en este capítulo, es una de las bases de la Conjetura de Tricotomía de Zilber. Su demostración se debe a Zilber e independientemente a Cherlin y Mills en su trabajo de clasificación de grupos finitos 2-transitivos.

### 4.1. Geometrías clásicas.

Las estructuras fuertemente minimales sirven de base para definir otro tipo de geometrías<sup>1</sup>. Esta construcción es clásica, y crucial para entender lo que sigue.

Fijemos  $F$  un campo algebraicamente cerrado. Sabemos que  $F$  es fuertemente minimal. Podemos construir el plano afín  $\mathbb{A}^2(F)$  sobre el campo  $F$ , así:

- Los **puntos** son los elementos de  $\mathbb{A}^2(F) = F \times F$ .
- Las **líneas rectas** ( $L^2(F)$ ) son las triplas  $(a, b, c) \in F^3$  tales que  $(a, b) \neq (0, 0)$ , divididas por la relación de equivalencia siguiente:

$$(a, b, c)E(a', b', c') \quad \text{ssi} \quad \exists \lambda \neq 0 (a, b, c) = \lambda(a', b', c').$$

---

<sup>1</sup>Zilber las llama “macro-geometrías”, por oposición con las “micro-geometrías” asociadas a las pregeometrías.

Cada (clase de equivalencia módulo  $E$ ) de una tripla  $(a, b, c)$  determina una “recta” correspondiente a la ecuación

$$ax + by + c = 0.$$

Otro plano, el “plano proyectivo”, se logra de manera igual, pero con una recta más correspondiente a la nueva tripla  $(0, 0, 1)$  en  $L^2(F)$  (la “recta al infinito”).

Consideramos ahora la estructura en dos “suertes”

$$(\mathbb{A}^2(F), L^2(F), I)$$

con una relación de incidencia  $I \subset \mathbb{A}^2(F) \times L^2(F)$  dada por la ecuación

$$(x, y)I(a, b, c) \quad \text{ssi} \quad ax + by + c = 0.$$

**Hecho 4.1.** *Todo par de puntos determinan una única recta. Todo par de rectas se intersectan en a lo sumo un punto y para **casi todo** par de líneas, la intersección es no vacía.*

Por el Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva, se puede *reconstruir* el campo  $F$  a partir del plano proyectivo  $(\mathbb{A}^2(F), L^2(F), I)$ .

Podemos construir ejemplos similares sobre espacios vectoriales y sobre la estructura trivial:

1. Sea  $k$  un campo y sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $k$ , de dimensión infinita.
  - Puntos: elementos de  $V^2$ ,
  - Líneas rectas: para cada  $\alpha \in k$ , la línea de pendiente  $\alpha$  que pasa por  $(x, y)$  es

$$\{(x, y) \in V^2 \mid \alpha(x - a) = y - b\}.$$

La relación de incidencia aquí es más sencilla que en el caso de geometría sobre un campo: hay exactamente

$$|k^*| = \begin{cases} |k| \text{ elementos} & \text{si } k \text{ es infinito.} \\ |k| - 1 \text{ elementos} & \text{si } k \text{ es finito.} \end{cases}$$

2. Sea ahora  $M$  un conjunto.

- Puntos: elementos de  $M^2$ ,
- La línea recta “a la izquierda” por el punto  $(a, b)$  es

$$\{(x, y) \in M^2 \mid x = a\};$$

la línea recta “a la derecha” que pasa por  $(a, b)$  es

$$\{(x, y) \in M^2 \mid y = b\}.$$

Aquí la relación de incidencia es casi trivial: casi ningún par de rectas se cortan, casi ningún par de puntos están sobre una misma línea recta.

Lo anterior justifica la siguiente definición de geometría “proyectiva” abstracta.

**Definición 4.2** (Geometría proyectiva abstracta). *Una **geometría proyectiva abstracta** es un conjunto de “puntos” y un conjunto de “líneas rectas”, junto con una relación de incidencia tales que*

- *por todo par de puntos pasa una línea,*
- *cada línea tiene al menos tres puntos,*
- *dos líneas distintas se cortan en a lo sumo un punto,*
- *dados cuatro puntos distintos  $a, b, c, d$ , si las líneas  $(a, b)$  y  $(c, d)$  se cortan, entonces  $(a, c)$  y  $(b, d)$  también se cortan.*

El siguiente teorema es clásico:

**Teorema 4.3.** *Toda geometría proyectiva abstracta generada por al menos cuatro puntos distintos es isomorfa a la geometría asociada a un anillo con división.*

## 4.2. Pseudoplanos.

Un pseudoplano (Lachlan) es una “geometría abstracta” dada en un vocabulario  $\tau_{pp} = \{P, L, I\}$ , donde  $P$  y  $L$  son predicados monádicos (los “puntos”  $P$  y las “líneas rectas”  $L$ ) y una relación de “incidencia”  $I$ ,  $I \subset P \times L$ . La idea intuitiva es que  $pI\ell$  formaliza lo que en geometría se llama “el punto  $p$  está en  $L$ ” o “el punto  $p$  es incidente a  $L$ ”. He aquí la definición formal.

**Definición 4.4** (Pseudoplano liso). *Una  $\tau_{pp}$ -estructura  $M = (P, L, I)$  es un pseudoplano liso si*

- $(P, L, I)$  es  $\aleph_0$ -estable,
- $\text{RM}(P) = 2 = \text{RM}(L)$ ,
- El conjunto de puntos incidentes con una línea  $\ell$  de  $L$  (que denotamos  $I\ell$  - así,  $I\ell := \{p \in P \mid pI\ell\}$ ) tiene rango de Morley 1,
- El conjunto de líneas incidentes con un punto  $p$  de  $P$  (que denotamos  $pI$  - así,  $pI := \{\ell \in L \mid pI\ell\}$ ) tiene rango de Morley 1,
- Dados  $\ell_1 \neq \ell_2 \in L$ , existen finitos  $p \in P$  tales que  $pI\ell_1$  y  $pI\ell_2$  (la “intersección” entre dos líneas es a lo sumo finita),
- Dados  $p_1 \neq p_2 \in P$ , existen finitas  $\ell \in L$  tal que  $p_1I\ell$  y  $p_2I\ell$  (por dos puntos distintos “pasan” solo finitas líneas).

### Ejemplos de pseudoplanos lisos

1. El plano euclídeo, con la interpretación usual.
2. Cualquier geometría finita desarguesiana.
3. Cualquier superficie algebraica (conjunto  $P$ ), con  $L$  interpretado como una familia de dimensión dos de curvas.
4. Un plano abstracto (afín o proyectivo). [Si satisface el teorema de Désargues, resulta *definiblemente* equivalente a un anillo con división  $F$ . Al ser  $\aleph_0$ -estable,  $F$  resulta ser un campo.]

**Teorema 4.5.** *Una geometría infinita localmente finita (si  $\mathcal{U}$  es finito,  $\text{cl}(\mathcal{U})$  es finito) es isomorfa a una de las siguientes tres posibilidades:*

1. *Geometría trivial.*
2. *Geometría proyectiva sobre un campo finito.*
3. *Geometría afín sobre un campo finito.*

El teorema anterior culmina trabajos iniciados por Désargues durante el siglo XVII, continuados con ímpetu por Hilbert hace un siglo. Estos trabajos fueron la base de partes enormes de la geometría algebraica de mediados del siglo pasado.

### 4.3. Configuración de Zilber

Antes de iniciar este lema (el lema técnico más sofisticado de este libro — el lector puede saltar la lectura de la demostración en una primera instancia y seguir a la siguiente sección) damos algo de la idea de qué ocurre aquí.

Arrancamos con un modelo fuertemente minimal y cinco puntos que satisfacen cierta configuración general de carácter geométrico - la llamada “configuración de Zilber”. De esta configuración puramente geométrica (es decir, referente a  $\text{cl}$ ), se *extrae* un pseudoplano liso, definible en  $M$ .

Existen varias maneras de abordar el tema (por ejemplo, Buechler en su libro [Bue96] trata la configuración de Zilber de manera más global o naturalmente el libro de Pillay [Pil]). Seguimos aquí de cerca [Zi93], mezclado con [Zi10].

**Notación 4.6.** *Fijamos una estructura fuertemente minimal  $M$ . Dados  $S_1, S_2 \subset M^n$  definibles, decimos que  $S_1$  es un **casi subconjunto** de  $S_2$  ( $S_1 \sqsubset S_2$ ) si  $\text{RM}(S_1 \setminus S_2) < \text{RM}(S_1)$ . Decimos que  $S_1$  y  $S_2$  **casi coinciden** ( $S_1 \sqsubset \sqsubset S_2$ ) si  $S_1 \sqsubset S_2$  y  $S_2 \sqsubset S_1$ .*

No es difícil ver que  $\sqsubset$  es un cuasiorden y  $\sqsubset \sqsubset$  es una relación de equivalencia, entre conjuntos definibles de  $M^n$ .

**Lema 4.7.** [Teorema de la relación de equivalencia finita] Dado un subconjunto  $S$  que sea  $A$  definible con  $\text{RM}(S) = k$ , existen un subconjunto  $S_0 \subset S$ , también  $A$ -definible, y una relación de equivalencia  $E$  sobre  $S^0$  tales que

- $S^0 \sqsubset \sqsubset S$ ,
- $S^0/E$  es un conjunto finito, y
- cada  $E$ -clase de equivalencia en  $S^0$  tiene rango de Morley  $k$  y es irreducible.

DEMOSTRACIÓN Ver [Sh c] o [Pil]. □

**Lema 4.8.** [Configuración proyectiva] Sea  $M$  un modelo fuertemente minimal, y sean  $a_1, a_2, b_1, b_2, c \in M$  tales que

- Cada subconjunto de cuatro elementos son independientes.
- $c \in \text{cl}(a_1, a_2, b_1, b_2)$
- $\text{cl}(a_1, a_2, c) \cap \text{cl}(b_1, b_2, c) = \text{cl}(c)$ .

Entonces existe un pseudoplano  $(L, P, I)$ , definible en  $M$ , tal que

- $\text{RM}(L) = 2$ ,  $dM(L) = 1$ ,  $\text{RM}(L) = 2$ ,
- $\text{RM}(I_p) = 1$  para todo  $p \in P$ ,
- si  $p_1 \neq p_2$  son dos “puntos” distintos en  $P$ , entonces  $|I_{p_1} \cup I_{p_2}| < \aleph_0$ .

DEMOSTRACIÓN Seguimos [Zi93]. La idea es extraer un pseudoplano liso de manera definible y a partir del puro contexto dado de un modelo fuertemente minimal y su pregeometría.

Sean  $S_0 := M \times M$ ,  $P_0 := M \times M \times M$ , y sea  $I_0 \subset S_0 \times P_0$  una relación definible sin parámetros tal que

$$(b_1, b_2)I_0(a_1, a_2, c)$$

$$(x_1, x_2)I_0(y_1, y_2, z) \rightarrow z \in \text{cl}(x_1, x_2, y_1, y_2).$$

Como los puntos  $a_1, a_2, b_1, b_2, c$  son dependientes, la relación que atestigua esta dependencia  $((u, v)I_0(x, y, z)$  ssi  $\{u, v, x, y, z\}$  son un conjunto cl-independentiente) tiene las dos propiedades anteriores.

Sea  $p_0 = (a_1, a_2, c)$ . Entonces  $I_0 p_0$  es un conjunto  $p_0$ -definible de rango de Morley 1 (ejercicio). Por el teorema de la relación de equivalencia finita 4.7, usando  $p_0$  como parámetro se puede definir una relación de equivalencia  $E_{p_0}$  con un número finito de clases, donde  $m$  de ellas tienen rango de Morley 1 y son irreducibles (tienen grado de Morley 1).

Sea ahora

$$I_1 := \{(s, p) \in I_0 \mid E_p \text{ es rel. eq. con } m \text{ clases y } s \text{ es una de esas clases}\}.$$

Ya tenemos una aproximación. Ahora definimos la siguiente relación binaria  $E$  en  $I_1$ :

$$(s, p)E(s', p') \iff p = p' \wedge sE_p s'.$$

Claramente,  $E$  es relación de equivalencia también. Dividimos por  $E$ :

$$P_1 := I_1/E,$$

y definimos para  $q \in P_1, s \in S_0$  la nueva relación “de incidencia”  $I_2$  dada por  $sI_2 q$  si y solo si  $q = (s, p)$  para algún  $p \in P_0$ .

Por la definición, hay una función canónica  $\alpha : P_1 \rightarrow P_0$  dada por la proyección  $I_1 \rightarrow P_0$ , que resulta ser  $m$  a uno. Además, para todo  $q \in P_1$ ,  $RM(I_2 q) = 1$ .

Por las definiciones, dados  $q_0, p_0$  tales que  $\alpha(q_0) = p_0$ ,  $I_2 q_0$  es irreducible.

Sea ahora

$$P_2 := \{q \in P_1 \mid \forall q' \in P_1 \quad RM(I_2 q \cap I_2 q') = 1 \rightarrow I_2 q \sqsubset I_2 q'\}.$$

Se sigue que  $q_0 \in P_2$  y para todo  $q \in P_2$ ,  $RM(I_2 q) = 1$ .

La relación siguiente es de equivalencia en  $P_2$ :

$$qFq' \quad \text{ssi} \quad I_2q \sqsubset \sqsubset I_2q'.$$

Por el Teorema de la relación de equivalencia finita 4.7, se sigue que

$$qF \sqsubset sI_2$$

si  $s$  es genérico en  $I_2q$  sobre  $q$  y  $s$  es genérico en  $S_0$ .

Definimos ahora

$$P_3 := P_2/F$$

y para  $\bar{p} \in P_3$ ,  $s \in S_0$ ,

$$sI_3\bar{p} \quad \text{ssi} \quad \bar{p} \sqsubset I_2s.$$

Tenemos entonces que  $s_0I_3\bar{p}_0$ , donde  $\bar{p}_0$  es el resultado de iniciar la construcción con  $p_0$  y  $s_0$ . Por construcción también tenemos que  $\bar{p}_0 \in \text{cl}(p_0)$ .

Como  $s_0 \in I_3\bar{p}_0$ ,  $\text{RM}(I_3\bar{p}_0) \geq 1$ . Por otro lado, si  $s \in I_3\bar{p}_0$  es de rango maximal sobre  $\bar{p}_0$  y  $q \in p_0F$  es de rango maximal sobre  $s\bar{p}_0$ , entonces por definición se tiene  $sI_2p$  y  $q, s$  son independiente sobre  $\bar{p}_0$ . De ahí se sigue que  $\text{RM}(s/\bar{p}_0) = \text{RM}(s/\bar{p}_0, q) \leq 1$ . Con esto,

$$\text{RM}(I_3\bar{p}_0) = 1.$$

Sean ahora

- $P = \{\bar{p} \in P_3 \mid \text{RM}(I_3\bar{p}_0) = 1\}$ ,
- $S = \{s \in S_0 \mid \exists \bar{p} \in P (sI_3\bar{p})\}$ ,
- $I = I_3 \cap (S \times P)$ .

Aún hay que ver que dados  $\bar{p}_1 \neq \bar{p}_2 \in P$ , la intersección  $I\bar{p}_1 \cap I\bar{p}_2$  es finita. Suponga que  $s \in I\bar{p}_1 \cap I\bar{p}_2$ , y tome  $(q_1, q_2) \in p_1F \times p_2F$  de rango de

Morley maximal sobre  $s, \bar{p}_1, \bar{p}_2$ . Entonces  $s \in I_2q_1 \cap I_2q_2$  y  $s$  es independiente con respecto a  $q_1, q_2$  sobre  $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ . Así,

$$\text{RM}(s/\bar{p}_1, \bar{p}_2) = \text{RM}(s/\bar{p}_1, \bar{p}_2, q_1, q_2) < 1,$$

ya que no se tiene  $q_1 F q_2$ .

La demostración queda completa si vemos que  $\text{RM}(P) > 2$ , con lo cual  $\text{RM}(\bar{p}_0/\emptyset) \geq 2$ . Suponga que no es así - que  $\text{RM}(\bar{p}_0/\emptyset) \leq 1$ . Entonces como  $\text{RM}(s_0/\bar{p}_0) = 1 < \text{RM}(s_0/\emptyset)$ , tenemos que  $\text{RM}(\bar{p}_0/s_0) < \text{RM}(\bar{p}_0/\emptyset)$ . Así,  $\bar{p}_0 \in \text{cl}(s_0) = \text{cl}(b_1, b_2)$ . Por las hipótesis de la proposición,  $c \in \text{cl}(\bar{p}_0)$ .

Por otro lado,  $\bar{p}_0 \in \text{cl}(\bar{p}_0) = \text{cl}(a_1, a_2, c)$ . Entonces  $b_1 \notin \text{cl}(p_0), b_2 \notin \text{cl}(p_0)$ . Así, existe  $c' \in M$  tal que  $\text{tp}(cc'/\bar{p}_0) = \text{tp}(b_1 b_2/\bar{p}_0) = \text{tp}(s_0/\bar{p}_0)$ .

Con todo esto,  $\text{RM}(cc'/\bar{p}_0) = 1$  y

$$c' \in \text{cl}(\bar{p}_0, c) \subset \text{cl}(a_1, a_2, c) \cap \text{cl}(b_1, b_2, c).$$

Así,  $\text{cl}(c') = \text{cl}(c)$ , lo cual contradice que  $\text{cl}(b_1) \neq \text{cl}(b_2)$ .  $\square$

#### 4.4. Tricotomía débil

**Teorema 4.9.** [Zi93][Zilber] *Sea  $M$  un modelo fuertemente minimal. Entonces se tiene una de las siguientes tres situaciones:*

1. *La geometría de  $M$  es trivial (es decir, dado  $X \subset \hat{M}$ ,  $\text{cl}(X) = X$  en  $M$ ), y no se puede definir un pseudoplano en  $M$ .*
2. *La geometría de  $M$  es localmente proyectiva.*
3. *Se puede definir un pseudoplano en  $M$ .*

**DEMOSTRACIÓN** (Ver [Zi10]) Supongamos que que el caso (3) falla - que no es posible definir un pseudoplano en  $M$ . Fijemos un punto  $c$  de  $M$ . Tenemos entonces la situación siguiente:

**Afirmación 4.10.** *Para todo  $x, y \in M$  y  $Z \subset M$  finito*

$$x \in \text{cl}(y, c, Z) \text{ implica que } \exists z \in \text{cl}(c, Z)[x \in \text{cl}(y, z, c)].$$

Para verificar esta afirmación, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $Z$  es independiente sobre  $c$  — ¿por qué? — y seguir por inducción en el cardinal de  $Z$ .

Si  $Z$  es un singleton, la afirmación es obvia.

Si  $Z$  tiene por lo menos dos elementos  $z_1$  y  $z_2$ , usamos la proposición 4.8 así: si  $Z = Z' \cup \{z_1, z_2\}$ , y además suponemos que  $x \in \text{cl}(y, c, Z)$  y  $y \notin \text{cl}(c, Z)$ , entonces los puntos  $c, x, y, z_1, z_2$  están en configuración XX y por 4.8 se tiene que o bien algún cuarteto de  $x, y, z_1, z_2, c$  es dependiente o bien

$$\text{cl}(z_1, z_2, c) \cup \text{cl}(x, y, c) \neq \text{cl}(c),$$

pero en este caso  $\exists z \in M \setminus \text{cl}(c)$  tal que

$$\text{cl}(z_1, z_2, c) \cup \text{cl}(x, y, c) \supset \text{cl}(z, c).$$

En el primer caso, la única posibilidad es  $x \in \text{cl}(y, z_1, z_2)$ . Pero esto significa al pasar a la pregeometría de  $M$  que  $x \in \text{cl}(y, z_1, \{z_2 Z\})$ . Como  $\{z_2\} \cup Z' < |Z|$ , por la hipótesis de inducción existe  $z \in \text{cl}(z_1, z_2, Z')$  tal que  $x \in \text{cl}(y, z_1, z)$ . Por lo tanto si  $\text{cdim}(y, z_1, z, c) = 3$ , tenemos  $x \in \text{cl}(y, z_1, c)$  o  $x \in \text{cl}(y, z, c)$ , con lo cual completamos la demostración de ese caso.

En el otro caso, existe  $z'_1 \in \text{cl}(z_1, z, c) \setminus (\text{cl}(z_1, z) \cup \text{cl}(c, z_1) \cup (c, z))$ . Suponiendo que  $x \notin \text{cl}(y, z)$  tenemos que en el conjunto  $\{x, y, z, z'_1, c\}$  todo cuarteto es independiente. De nuevo, por la proposición 4.8 debe existir  $z' \in M \setminus \text{cl}(c)$  tal que  $\text{cl}(z, z'_1, c) \cap \text{cl}(x, y, c) \supset \text{cl}(z', c)$ . Pero entonces  $z' \in \text{cl}(c, Z) \cap \text{cl}(x, y, c)$ , con lo cual  $x \in \text{cl}(y, z', c)$  lo cual completa la demostración (en este caso).

Si ahora suponemos que  $z \in \text{cl}(c, Z)$  y  $x \in \text{cl}_{Z'}(y, z, c)$ , por la hipótesis de inducción existe  $z \in \text{cl}(c, z, Z')$  tal que  $x \in \text{cl}(y, z', c)$ .  $\square$

**Afirmación 4.11.** Si  $\text{cl}(x, y, c) = \text{cl}(x, c) = \text{cl}(y, c)$  para ciertos  $x, y$  independientes sobre  $c$ , entonces la geometría  $\hat{M}$  es degenerada (o “disconexa”), esto es:

$$\text{cl}(x_0, \dots, x_n) = \text{cl}(x_0) \cup \dots \cup \text{cl}(x_n),$$

para cualesquiera  $x_0, \dots, x_n \in M$ .

DEMOSTRACIÓN de 4.11: Al suponer que  $\text{cl}(x, y, c) = \text{cl}(x, c) = \text{cl}(y, c)$ , se tiene que  $\text{cl}(x_0, x_1, x_2) = \text{cl}(x_0, x_1) \cup \text{cl}(x_0, x_2)$  para cualquier tripla independiente  $x_0, x_1, x_2$ . Demostramos por inducción sobre  $n$ . Si  $n = 1$ , suponga que  $\text{cl}(x_0) \cup \text{cl}(x_1) \neq \text{cl}(x_0, x_1)$ . Entonces existe  $y \in \text{cl}(x_0, x_1) \setminus (\text{cl}(x_0) \cup \text{cl}(x_1))$ . Escoja  $w \notin \text{cl}(x_0, x_1)$ . Entonces

$$y \in \text{cl}(w, x_0, x_1) = \text{cl}(w, x_0) \cup \text{cl}(w, x_1).$$

Pero si  $y \in \text{cl}(w, x_i)$  para  $i \in \{0, 1\}$ , entonces  $w \in \text{cl}(y, x_i)$  (por intercambio). Pero  $\text{cl}(y, x_i) = \text{cl}(x_0, x_1)$  (por dimensión, más  $y \notin \text{cl}(x_0) \cup \text{cl}(x_1)$ ). Contradicción. Ahora suponemos que vale la afirmación para  $n - 1$  y la demostramos para  $n$ . Si  $y \in \text{cl}(x_0, \dots, x_n)$ , por la Afirmación 4.10, existe  $z \in \text{cl}(x_0, \dots, x_{n-1})$  tal que  $y \in \text{cl}(x_n, z, x_0)$ . Pero entonces (por lo demostrado antes),  $y \in \text{cl}(z, x_0) \cup \text{cl}(x_n, x_0)$ . Por lo tanto  $y \in \text{cl}(x_0, \dots, x_{n-1}) \cup \text{cl}(x_0, x_n) = \text{cl}(x_0, \dots, x_{n-1}) \cup \text{cl}(x_0) \cup \text{cl}(x_n) = \text{cl}(x_0) \cup \dots \cup \text{cl}(x_n)$ .  $\square$



## Capítulo 5

# La conjetura de tricotomía



Figura 5.1: Tres árboles - Lochalsh, Escocia - 2011

El resultado del capítulo anterior, sumado con que los ejemplos básicos de estructuras categóricas en cardinales no contables fueran básicamente de tres tipos, llevaron a Zilber a lanzar su conjetura de tricotomía.

Los tres tipos de ejemplos que hasta entonces se habían encontrado de estructuras categóricas en cardinales no contables (por Morley, las  $\aleph_1$ -categóricas) eran

1. Estructuras triviales o “desconectadas”. Lenguaje:  $\{=\}$ .
2. Estructuras “tipo módulo”: grupos abelianos divisibles sin torsión, grupos abelianos con exponente primo, espacios vectoriales sobre anillos con división enumerables. Lenguaje:  $\{+, =\}$ .
3. Campos algebraicamente cerrados. Lenguaje:  $\{+, \cdot, =\}$ .

Cualquier estructura interpretable en alguna de estas también es categórica en cardinales no contables - en el lenguaje en el cual se lleva a cabo la interpretación.

Los trabajos de Baldwin y Lachlan del principio de la década de 1970 básicamente muestran que (respondiendo a una pregunta vieja de Łoś sobre el tipo de propiedades estructurales que implican que una teoría resulte siendo  $\aleph_1$ -categórica), todo se reduce a problemas de

- dimensión de bases de conjuntos fuertemente minimales, o
- rango de Morley.

Los trabajos de Baldwin y Lachlan dan de hecho mucha más información detallada de lo que sucede en ese caso, basada en un grado alto de homogeneidad de las estructuras  $\aleph_1$ -categóricas.

Iniciaron la teoría de *estabilidad geométrica*, que sería impulsada luego por Pillay, Buechler, y principalmente Hrushovski y el mismo Zilber para aplicaciones a la Teoría de Números<sup>1</sup>. Las analogías con geometría algebraica en el caso de estabilidad aplicada a campos llevaron a varios de

---

<sup>1</sup>La demostración modelo-teórica de la Conjetura de Mordell-Lang, debida a Hrushovski, de la década de 1990, es tal vez el resultado más espectacular. Más recientemente, varios autores (Hrushovski, Chatzidakis, Scanlon, Medvedev) han aplicado ideas de estabilidad geométrica para aplicaciones a Dinámica Algebraica.

esos autores a tratar de extender esas similitudes a otros ámbitos, cada vez más amplios<sup>2</sup>.

En el ámbito más general de teorías fuertemente minimales, recordemos que el análisis de los dos capítulos anteriores se basó en el comportamiento de las *pregeometrías* asociadas. De nuevo aparecen **tres** tipos de pregeometrías, en términos de propiedades de la dimensión  $\dim_{\text{cl}}$ :

1. Estructuras triviales: la dimensión  $\dim_{\text{cl}}$  coincide con el cardinal de  $X$ .
2. Los grupos abelianos divisibles sin torsión, los grupos abelianos con exponente finito, los espacios vectoriales sobre algún campo. La dimensión allí es lineal, y es *localmente modular*: módulo localizaciones, satisface

$$\dim_{\text{cl}}(X \cup Y) = \dim_{\text{cl}}(X) + \dim_{\text{cl}}(Y) - \dim_{\text{cl}}(X \cap Y). \quad (5.1)$$

3. Campos algebraicamente cerrados. Allí la dimensión viene dada por el grado de trascendencia y **no** es localmente modular.

## Ejercicio

Demuestre que en los campos la dimensión dada por el grado de trascendencia no es localmente modular (es decir, no satisface la ecuación 5.1).

## 5.1. Homogeneidad

Las estructuras fuertemente minimales resultan homogéneas (ver el Hecho 3.17). Esto no es cierto, por ejemplo, para campos arbitrarios (no necesariamente algebraicamente cerrados). Aunque se puede usar grado de trascendencia en ese caso también, y llegar bastante lejos, hay problemas si se intenta generalizar la teoría de la dimensión a variedades algebraicas sobre campos que no sean algebraicamente cerrados: imágenes

<sup>2</sup>Ver discusión al respecto en las definiciones de Hodges y de Hrushovski sobre la teoría de modelos, en la introducción a este curso.

de variedades bajo mapas algebraicos no se comportan bien en términos de dimensión<sup>3</sup> En el caso de campos algebraicamente cerrados, la homogeneidad se expresa en la Eliminación de Cuantificadores (ver el Teorema 2.9) para la teoría ACF. Todo definible ahí es combinación booleana de variedades y no hay el problema de “proyectivos mal comportados”. La teoría de la dimensión funciona bien en ese caso.

He aquí la versión de la conjetura de 1984.

### La conjetura de tricotomía (Zilber, 1984).

*Sea  $M$  una estructura fuertemente minimal. Entonces la geometría de  $M$  es una de las siguientes tres:*

1. *Trivial.*
2. *Localmente modular.*
3. *Isomorfa a la geometría de un campo algebraicamente cerrado.*

*En particular, cuando no es ni trivial ni localmente modular, existe un campo algebraicamente cerrado  $K$  definible en  $M$  y la única estructura inducida sobre  $K$  por  $M$  es el campo mismo.*

Conviene citar la discusión que da el mismo Zilber sobre sus motivaciones aquí:

The ground for the conjecture was the weak trichotomy theorem and more importantly the general belief that logically perfect structures could not be overlooked in the natural progression of mathematics. Allowing some philosophical license here, this was also a belief in a strong logical pre-determination of basic mathematical structures.

*Boris Zilber, en [Zi10], p. 203.*

---

<sup>3</sup>Mal comportamiento de conjuntos “proyectivos” en esos casos.

(La base para la conjetura fue el teorema de tricotomía débil y de manera más importante la creencia general según la cual las estructuras lógicamente perfectas no se pueden pasar por alto en el avance natural de la matemática. Permitiendo algo de licencia filosófica aquí, esto también era una creencia en una predeterminación lógica fuerte de las estructuras matemáticas básicas.)

Sabemos desde 1993 que la conjetura, enunciada de esta manera, es falsa. Hrushovski dio el contraejemplo - diremos algunas cosas en el próximo capítulo sobre el tema. Resalto los siguientes puntos importantes surgidos de la conjetura, distintos de la línea abierta por el contraejemplo de Hrushovski del próximo capítulo:

1. Las razones iniciales de la conjetura eran sensatas. Hasta 1993 no había habido ningún ejemplo distinto de los tres casos, y la estructura geométrica que surgía de estar en el ámbito de teorías fuertemente minimales daba lugar a creer que se tenía suficiente para clasificar esas estructuras en los tres posibles casos.
2. De hecho, fuera de la tricotomía débil, varios casos positivos de la tricotomía han sido demostrados, en situaciones análogas. La más famosa de todas las tricotomías (fuera de las de Zilber) es la de Peterzil-Starchenko, para el caso de teorías  $o$ -minimales [PetSta], de 1998. No entramos en los detalles de ese teorema, pero es claramente un resultado del influjo de estabilidad geométrica iniciado por Zilber. En el caso de Peterzil y Starchenko el “control” geométrico viene dado por la información “diferencial abstracta” que se puede extraer de la  $o$ -minimalidad. En ese caso sí logran plena tricotomía. Hay casos recientes de tricotomía en ámbitos de dinámica algebraica también.
3. El principio de tricotomía también vale en estructuras fuertemente minimales definibles en los siguientes casos (ver [Mao9]):
  - *Campos diferencialmente cerrados de característica cero* — esta teoría (usualmente llamada  $DCF_0$ ) es uno de los ejemplos más importantes de aplicaciones de la teoría de modelos, desde los

trabajos de Robinson y Blum en la década de 1960. Satisface eliminación de cuantificadores, eliminación de imaginarios y varias otras propiedades, pero a la vez es mucho menos sencilla modelo-teóricamente que la teoría de campos *algebraicamente* cerrados de característica cero  $\text{ACF}_0$ : aunque también es  $\aleph_0$ -estable, tiene propiedades estructurales que la hacen más compleja (la famosa DOP - Dimensional Order Property). Sin embargo, las estructuras fuertemente minimales definibles en  $\text{DCF}_0$  satisfacen el principio de tricotomía. Trabajos relativamente recientes de Pillay y otros han permitido un desarrollo modelo-teórico de la teoría de Galois diferencial. La tricotomía ha jugado un papel fundamental ahí.

- *Campos Hasse-diferencialmente cerrados de característica positiva  $p$*  — este caso es una versión en característica positiva de lo anterior, con nociones de derivación más elaboradas (derivada de Hasse). De nuevo aquí vale la tricotomía para estructuras fuertemente minimales. Trabajos recientes de Moreno [Mo11] han logrado avanzar en la dirección de teorías de Galois en ámbitos diferenciales cada vez más amplios (aquí, teoría de Galois iterativa diferencial en característica positiva).
- *Campos con diferencias algebraicamente cerrados.*
- *Variedades compactas complejas.* Pillay y Ziegler usan este caso para conectar la clasificación de estas variedades con la teoría de campos diferenciales.

Todas estas variantes del principio de tricotomía han sido usadas exitosamente (por Hrushovski) en partes de la demostración modelo-teórica de la Conjetura de Mordell-Lang: la primera, para campos de funciones de característica 0, la segunda, para la formulación y demostración de una conjetura análoga a Mordell-Lang pero para característica positiva  $p$ , la tercera para producir una nueva demostración de otra conjetura, esta vez de Manin y Mumford (“propiedad de Lang” sobre puntos de torsión en variedades semi-abelianas).

Scanlon da también una demostración de Manin-Mumford (versión “módulos de Drinfeld”) y de otra conjetura de André-Oort.

En el siguiente capítulo veremos algunos aspectos de la falla de la conjetura de tricotomía de Zilber en su forma más general. Sin embargo, vale la pena considerar, a la luz de la lista anterior de aplicaciones (demostraciones modelo-teóricas de Mordell-Lang y de Manin-Mumford) el impacto que tuvo la idea del principio de tricotomía en los trabajos de Hrushovski, Pillay, Scanlon, Ziegler y varios otros.

Más recientemente, Chatzidakis y Hrushovski generalizaron resultados de Benedetto y Baker, Bhatnagar y Szpiro sobre el comportamiento dinámico de funciones racionales — teoremas de *descenso* que describen el comportamiento de ciertos sistemas dinámicos sobre campos<sup>4</sup> (ver las notas de clase del *Workshop on Model Theory and Algebraic Dynamics, CUNY 2010* [Sc10]).

---

<sup>4</sup>Chatzidakis/Hrushovski: Dada  $L/K$  una extensión de campos finitamente generada regular, y  $(Y, f)$  un sistema dinámico algebraico primitivo sobre  $L$ , entonces o bien  $(Y, f)$  *desciende* de manera constructible a  $K$  o bien dado  $S$  subconjunto limitado de  $Y(L)$ , existen un número  $n = n(S)$  y una subvariedad propia  $W \subsetneq Y$  tal que si  $a \in S \setminus Y(L)$ , entonces alguna de las imágenes  $f(a), \dots, f^n(a)$  está fuera de  $S$ .



## Capítulo 6

# Después de la conjetura.

Como mencionaba, la conjetura en su expresión inicial falló. Sin embargo, como ha pasado varias veces en matemática, la falla resultó a la postre ser mucho más interesante que el supuesto resultado inicial.

Contamos *muy* brevemente la historia de la falla (Contraejemplo de Hrushovski, sección 6.1) y construcciones asociadas, la construcción de Hrushovski y Zilber de las Geometrías de Zariski, un ámbito donde de hecho sí vale la Tricotomía y se cubre un amplio espectro de casos (sección 6.2), los intentos de Zilber ya en el siglo XXI de capturar mejor los contraejemplos de Hrushovski (entenderlos de manera mejor asociada a otras estructuras matemáticas - en este caso, las estructuras analíticas, ver sección 6.3), y finalmente su análisis más reciente, aún lleno de conexiones misteriosas, de un caso de las Geometrías de Zariski en que las interpretaciones de los campos no son uno a uno, y aparecen *cubiertas finitas*, ver sección 6.4.

Este capítulo está muy lejos de ser autocontenido y se propone más bien como un breve ensayo/survey de cuatro áreas conectadas con la tricotomía. Durante la Escuela Venezolana uno de esos temas será tratado con algo más de detalle.

## 6.1. El contraejemplo de Hrushovski.

Hrushovski inventa, a principios de los años 1990, toda una nueva manera de armar estructuras estables - en el caso particular que nos interesa, fuertemente minimales - pero en general sus construcciones producen nuevas estructuras de ámbitos más grandes.

La idea básica es análoga a la de las *construcciones de Fraïssé*, clásicas en teoría de modelos (y supremamente importantes en combinatoria y en teoría de conjuntos), pero con un control mucho más sólido del tipo de amalgamas que se aceptan y del tipo de *dimensión* que se quiere lograr al final.

Partimos de una clase de estructuras  $\mathcal{H}$  dotada de una noción de dimensión combinatoria  $d(X)$  para subconjuntos *finitos* de las estructuras. Supongamos además que queremos agregar una nueva función  $f$ , pero de manera tal que la nueva estructura siga teniendo una buena noción de dimensión.

- La idea clave es la “fusión libre”: la nueva función  $f$  debería estar conectada con la estructura original de la manera más genérica posible, de la manera menos específica posible.
- La nueva estructura que se arma debe ser homogénea.

El primer paso es entonces escoger una clase de estructuras finitas<sup>1</sup>  $\mathcal{H}$  junto con una función llamada **pre-dimensión**  $\delta : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Z}$ . La idea de la predimensión es que capture la idea siguiente de Hrushovski (la “genericidad” o “libertad”): el número de dependencias explícitas en  $X$  en la estructura nueva no debe superar al cardinal de  $X$ . Algunos ejemplos importantes de pre-dimensiones incluyen lo siguiente (digamos que  $M$  es un campo expresado de manera relacional,  $\mathcal{H}$  consta de subconjuntos finitos de  $M$ , y queremos agregar una nueva relación ternaria  $R$  sobre  $M$ ). En ese caso podemos tomar

$$\delta(X) = \text{tr.d.}(X) - r(X).$$

---

<sup>1</sup>Es más fácil arrancar con estructuras puramente relacionales.

La condición clave para poder aplicar el teorema de Fraïssé es que

- tomamos solo los  $M$  tales que  $\delta(X) \geq 0$  para todo  $X$  finito:  $\mathcal{H}_\delta := \{M \in \mathcal{H} \mid \delta(X) \geq 0 \forall X \text{ finito}\}$  y
- amalgamamos con respecto a las siguientes inmersiones:

$$M \leq L \text{ para todo subconjunto finito } X \subset M, d_M(X) \leq d_L(X),$$

donde

$$d_M(X) := \min\{\delta(Y) \mid X \subset Y \subset_{\text{fin}} M\}.$$

La clase así lograda  $(\mathcal{H}_\delta, \leq)$  es una clase inductiva. Si la clase tiene además amalgamación, podemos demostrar (siguiendo las ideas clásicas de Fraïssé) que la estructuras límite son suficientemente homogéneas. Además, para  $M$  existencialmente cerrado en la clase,  $d_M(X)$  es de hecho una noción combinatoria.

Zilber hacia el año 2000 extiende estas construcciones a ámbitos externos a la lógica de primer orden, a ámbitos axiomatizables en  $L_{\omega_1, \omega}$  o  $L_{\omega_1, \omega}(Q)$ . La construcción más famosa de éstas es el campo pseudoexponencial de Zilber (sección 6.3).

Otros autores (Baldwin, Pillay, Baudisch, Ziegler, Martín-Pizarro, Hils, etc.) han usado con éxito construcciones de Hrushovski para muchos otros ámbitos algebraicos.

### 6.1.1. Un caso minimal: el bosque aleatorio

El siguiente ejemplo simplificado se debe a Kirby — se puede ver como una construcción de Hrushovski (primer paso) “minimal”. Da una idea muy simplificada del rol de las predimensiones y de la amalgamación; es importante anotar que las construcciones de Hrushovski son bastante más sofisticadas que este ejemplo sencillo, y que varios pasos muy sofisticados (el uso de distintas funciones de predimensión, el control ejercido para obtener límites que resulten fuertemente minimales, etc.) no se ven aquí.

Pero el ejemplo sirve para ver en un caso muy sencillo qué tipo de cosas controlan las predimensiones.

Consideremos la clase  $\mathcal{K}_a$  que consta de todos los grafos acíclicos (también llamados “árboles” en teoría de grafos). A diferencia de la clase de todos los grafos, no podemos aquí aplicar directamente el teorema de Fraïssé: la clase  $\mathcal{K}_a$  es cerrada bajo subestructuras, pero falla la propiedad de amalgamación cuando la inclusión de grafos es la usual.

En efecto, considere los siguientes grafos:  $G_0 = (\{a, b, c\}, \{(a, b)\})$ ,  $G_1 = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (a, d), (d, c)\})$ ,  $G_2 = (\{a, b, c, e\}, \{(a, b), (b, e), (c, e)\})$ , con todos los puntos distintos. Claramente,  $G_0, G_1, G_2 \in \mathcal{K}_a$ . También es claro que  $G_0 \subset G_1$  y  $G_0 \subset G_2$  (subgrafos). Sin embargo, el amalgama natural  $G_1 \otimes_{G_0} G_2$  no está en  $\mathcal{K}_a$ : al amalgamar, aparece el ciclo

$$(a, b), (b, e), (e, c), (c, d), (d, a).$$

Una manera de corregir lo anterior es revisar la noción de inclusión entre grafos acíclicos, y prohibir la situación que potencialmente crea problemas en una inclusión como  $G_0 \subset G_1$ . Si definimos

$$\delta(A) := |A| - |R(A)|$$

(número de vértices menos número de aristas) y además pedimos que

$$G \leq H \quad \text{ssi} \quad \text{para todo } A \subset H \quad \delta(A \cap G) \leq \delta(A)$$

logramos excluir inmersiones problemáticas como  $G_0 \subset G_1$ : ahora  $G_0 \not\leq G_1, G_0 \not\leq G_2$ . En efecto, si  $A = \{a, c, d\}$ , tenemos que en  $G_1$ ,  $\delta(A) = 3 - 2 = 1$ . Sin embargo,  $\delta(A \cap G_0) = 2 - 0 = 2$ , con lo cual falla la desigualdad  $\delta(A \cap G_0) \leq \delta(A)$ . Esto atrapa justamente el rol problemático de  $c$  en la inmersión: si era aislado en  $G_0$  no debe quedar conectado con caminos nuevos.

No es difícil verificar que la clase  $(\mathcal{K}_a, \leq)$  sí satisface la propiedad de amalgamación. En este caso, el límite de Fraïssé de la nueva clase es el “bosque aleatorio”.

### 6.1.2. Estilos de construcciones de Hrushovski

Más allá del ejemplo inicial (dado como relación ternaria sobre conjuntos finitos, con función  $\delta$  análoga a la del ejemplo anterior), las “construcciones de Hrushovski” son de varios estilos, y reciben diversos nombres<sup>2</sup>:

**Fusiones:** (donde básicamente se “funden” campos de característica  $p$  con campos de característica  $q \neq p$ , dando lugar finalmente a estructuras fuertemente minimales que no son interpretables en un campo (y que tampoco son localmente modulares, pues heredan la no modularidad local de los campos fundidos). Aquí, la función  $\delta$  básicamente captura instancias de interacción entre elementos del campo con característica  $p$  con elementos del otro campo.

**Ab initio:** construcciones más directas que las fusiones, donde básicamente se controla de manera más grafo-teórica la función  $\delta$ .

## 6.2. Geometrías de Zariski.

Zilber y Hrushovski dieron, después del contraejemplo inicial, una construcción que generaliza las topologías de Zariski, llamada “geometrías de Zariski” (ver [HrZi93]). En estas, arman un contexto para “salvar la tricotomía” en casos algo mejores que solo fuertemente minimales: las *geometrías de Zariski* - un contexto a priori más geométrico, pero que incluye todos los ejemplos anteriores al contraejemplo de Hrushovski.

La definición de geometrías de Zariski es larga, pero incluye información adicional sobre lo siguiente (de manera simplificada):

$$\mathbb{M} = (M, \mathcal{C})$$

donde  $M$  es un conjunto y  $\mathcal{C}$  es una colección de predicados básicos.  $\mathcal{C}$  es una base de cerrados de una topología en cada  $M^n$  tal que

<sup>2</sup>Un muy buen lugar para estudiar muchas variantes de estas construcciones es la “Guía de Campo” de Baldwin[Bao8].

- Las proyecciones  $\text{pr} : M^n \rightarrow M^k$  son continuas.
- Los cerrados son “lineales, superficies”... existe una dimensión  $\dim R$  de cada cerrado tal que si  $R$  es irreducible,

$$\dim R = \dim \text{pr}(R) + \dim(\text{fibras gen.})$$

- (Presuavidad)  $U$  irred. es presuave (presmooth) si para cada par de subconjuntos cerrados irreducibles  $S_1, S_2 \subset U$  y cada componente irreducible  $S_0$  of  $S_1 \cap S_2$

$$\dim S_0 \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim U.$$

Con ésto, tienen el teorema grande

**Teorema 6.1** (Teorema de clasificación - Hrushovski-Zilber). *A toda geometría de Zariski unidimensional  $\mathbb{M}$  que sea “no lineal” se le puede asociar una curva algebraica suave  $C$  sobre un campo algebraicamente cerrado  $F$  a través de un mapa sobreyectivo  $p : M \rightarrow C(F)$ , definible en  $\mathbb{M}$  de manera tal que la fibras son todas de un tamaño finito fijo  $N$ .*

Así, las geometrías de Zariski son “casi” como la geometría algebraica, excepto por las fibras finitas.

### 6.3. Exponencial compleja.

Zilber empieza entonces un análisis sistemático de variantes “analíticas” del contraejemplo de Hrushovski. En 2001 Zilber consolida su teoría de estudio de “pseudoexponenciación” al notar que el contexto correcto son las clases elementales abstractas *excelentes* de Shelah, y logra una descripción de la pseudoexponenciación como una variante de las construcciones de Hrushovski. De manera más general, varias estructuras analíticas como los complejos con exponencial resultan ser ejemplos naturales de clases elementales abstractas - algo insospechado antes.

### 6.3.1. El campo de Zilber

$\mathcal{K}_{\text{exp}}$  consiste en la clase de estructuras  $(M, +, \cdot, \text{ex})$  que satisfacen la fórmula  $\psi_{\text{ex}}^{\aleph_1^{\aleph_1}}$  - una manera de capturar una “pseudo-exponencial”.

1.  $(M, +, \cdot)$  es un campo algebraicamente cerrado.
2.  $\text{ex}$  es una función de  $M$  en  $M$  tal que  $\text{ex}(x + y) = \text{ex}(x) \cdot \text{ex}(y)$
3. (EC)  $(M, +, \cdot, \text{ex})$  es existencialmente cerrada,
4. (CC)  $(M, +, \cdot, \text{ex})$  es contablemente cerrada,
5. (SK) El núcleo de  $\text{ex}$  es estándar:  $\exists a \forall x (\text{ex}(x) = 1 \rightarrow \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} x = n \cdot a)$ .
6. (SC)  $(M, +, \cdot, \text{ex})$  satisface la **conjetura de Schanuel**, es decir, dados  $z_1, \dots, z_n \in M$  linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$ , el grado de trascendencia del conjunto  $\{z_1, \dots, z_n, \text{ex}(z_1), \dots, \text{ex}(z_n)\}$  es  $\geq n$ .

Usando la Teoría de Excelencia de Shelah, Zilber probó dos cosas:

- La clase  $\mathcal{K}_{\text{exp}}$  es categórica en  $\aleph_1$ . ¡Esto no implica nada a priori en principios sobre los demás cardinales, dado que la axiomatización dada aquí no es en primer orden!
- La clase  $\mathcal{K}_{\text{exp}}$  es excelente (definición complicada, que tiene que ver con la existencia de modelos primos sobre configuraciones independientes). La teoría de Shelah implica que las clases excelentes transfieren categoricidad. Por lo tanto,  $\mathcal{K}_{\text{exp}}$  es categórica en  $2^{\aleph_0}$  y

Sigue completamente abierto el saber si la estructura de tamaño  $2^{\aleph_0}$  Recientemente (Mantova, 2011) demostró que, a diferencia de lo que se sabe en los complejos, el campo de Zilber (de cardinal continuo) tiene muchas involuciones de la exponencial. En el caso de los complejos tradicionales, aún está abierto el que haya más involuciones que la conjugación.

## 6.4. Cubiertas finitas.

De manera muy sorprendente, en trabajos más recientes Zilber inicia el estudio del “pequeño detalle faltante” de la demostración de tricotomía en geometrías de Zariski: las “cubiertas finitas” resultantes en el caso final de la demostración con Hrushovski.

Zilber detecta, primero de manera vaga y luego con ejemplos cada vez más concretos (toros cuánticos, límites de toros clásicos, etc.) maneras de interpretar fenómenos cuánticos y no conmutativos en esas geometrías de Zariski y cubrimientos finitos de éstas. Zilber decide indagar qué contenido matemático pueden tener los “mapas de finitos a uno” que surgieron en la prueba de la tricotomía para geometrías de Zariski. Los mapas finito-a-uno que no son uno-a-uno (y no pueden serlo) terminan llevando a Zilber a la geometría no conmutativa, y a la teoría de modelos de la física. A la fecha no es claro hasta qué punto tendrá éxito esta línea - muchas de sus construcciones asociadas a toros cuánticos, etc. son muy fluctuantes aún, y objeto de trabajo en seminarios, etc. El trabajo por hacer es enorme aún.

## Capítulo 7

# Líneas nuevas.



En la última década Zilber ha iniciado un verdadero proyecto de *Teoría de Modelos de la Física*, anclado en geometrías de Zariski generalizadas, y en comunicación fuerte con físicos matemáticos como Philip Candelas o geómetras no conmutativos como Alain Connes. El tipo de teoría de modelos que usa está claramente anclado del lado más abstracto (estabilidad, ciertas clases no elementales, etc.).

También empiezan a aparecer analogías/conexiones entre sus inicios de formalización nueva de la Física Matemática (la famosa *Aproximación Estructural* de 2010 es un buen ejemplo) con construcciones sobre haces y prehaces - topos de Grothendieck - recientes de otros autores (Isham y Doering, ver [IshDoeo8], etc.) - todas fundamentaciones alternativas de la

Física Cuántica – nuevas formalizaciones (modelo-teóricas) de integrales de camino de Feynman.

En últimas Zilber traza una línea que desde la teoría de modelos llega a extremos de la geometría no conmutativa y en últimas a las teorías de Grothendieck.

Por último, conviene mencionar que la famosa tricotomía nos lleva desde pregeometrías sobre estructuras fuertemente minimales hasta ámbitos conectados en trabajos más recientes de Julia Knight, de Pillay, de Hyttinen, de este autor, de Zambrano, de Baldwin a conexiones sorprendentes con clases elementales abstractas y lugares ya muy lejanos de nuestro punto de arranque.

Una lectura filosófica complementaria excelente a estos temas está en el libro reciente de Zalamea, *Filosofía sintética de la matemática contemporánea* (ver [Za09]). Uno de los casos de estudio centrales del libro es precisamente la contribución de Zilber.

# Bibliografía

- [Bao8] **John Baldwin**. *A Field Guide to Hrushovski Constructions*.  
Página web de John Baldwin. <http://www.math.uic.edu/~jbal-win/pub/hrutrav.pdf>
- [Bue96] **Steven Buechler**. *Essential Stability Theory*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer, 1996.
- [FK] **Sergio Fajardo, H. Jerome Keisler**. *Model Theory of Stochastic Processes*. Lecture Notes in Logic. A K Peters. 2002.
- [HrZi93] **Ehud Hrushovski, Boris Zilber**. *Zariski Geometries*. Bull. AMS 28, 315-23. 1993.
- [IshDoe08] **Andreas Doering, Chris Isham**, ‘*What is a Thing?*’: *Topos Theory in the Foundations of Physics*. <http://arxiv.org/abs/0803.0417>
- [Mao9] **Yu. I. Manin**, con colaboración de **Boris Zilber**, traducido por **N. Koblitz**. *A Course in Mathematical Logic for Mathematicians*. Graduate texts in Mathematics. Springer, 2009.
- [Mo11] **Javier Moreno**. *Iterative differential Galois theory in positive characteristic: A model theoretic approach*. The Journal of Symbolic Logic, vol. 76, número 1, marzo de 2011, págs. 125–142.
- [PetSta] **Y. Peterzil, S. Starchenko**. *A trichotomy theorem for o-minimal structures*. Proc. London Math. Soc. (1998) 77 (3): 481-523.
- [Pil] **Anand Pillay**. *Geometric Stability Theory*. Oxford University Press. 1996.

- [Sc10] **Tom Scanlon**. *Lectures on Model Theory and Algebraic Dynamics*. Las notas están en cinco sitios en la red <http://math.berkeley.edu/~scanlon/papers/mtadday1.pdf> (día 1: los días 2, 3, 4 y 5 tienen la misma dirección, pero hay que cambiar el número después de mtadday). Workshop on Model Theory and Algebraic Dynamics, City University of New York, Graduate Center, junio de 2010.
- [Sh c] **Saharon Shelah**. *Classification Theory and the Number of Non-Isomorphic Models*. North Holland, Second Edition. 1990.
- [Sh 88] **Saharon Shelah**. *Classification of nonelementary classes. II. Abstract elementary classes – Classification theory* (Chicago, IL, 1985) (1987) 419–497
- [Za09] **Fernando Zalamea**. *Filosofía sintética de la matemática contemporánea*. Edit. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. Colección Obra Selecta. 2009.
- [Zi93] **Boris Zilber**. *Uncountably Categorical Theories*. AMS Translations of Mathematical Monographs. Providence, Rhode Island. 1993.
- [Zi03] **Boris Zilber**. *Elements of Geometric Stability Theory*. <http://people.maths.ox.ac.uk/zilber/publ.html>
- [Zi10] **Boris Zilber**. *Zariski Geometries. Geometry from the Logician's Point of View*. London Mathematical Society Lecture Note Series 360. Cambridge University Press. 2010.

# Índice alfabético

- $\text{Th}(M)$ , teoría de una estructura, 14  
 acl, *véase* clausura algebraica (mod. t.)  
 $\tau$ -estructura, *véase* estructura  
 Łoś-Tarski (uniones de cadenas), 20  
  
 campo de Zilber, 77  
 clausura algebraica (mod. t.), 34  
 compacidad, 7  
 configuración proyectiva, 60  
 conjetura de Schanuel, 77  
 conjetura de tricotomía, 69  
  
 eliminación de cuantificadores, 30  
 equivalencia elemental, 15  
 espacio afín, 38  
 estructura, 6  
     estructura fuertemente minimal, 44  
     modelo  $\lambda$ -saturado, 28  
     modelo homogéneo, 29  
     modelo minimal, 35  
     modelo no estándar, 10  
     modelo saturado, 28  
 extensión, *véase también* subestructura
- extensión elemental, *véase también* subestructura elemental  
  
 geometría proyectiva abstracta, 57  
 Geometría combinatoria, 37  
 geometrías de Zariski, 75  
  
 Hrushovski-Zilber (teorema), 76  
  
 indiscernibles, 49  
 intercambio (prop.), 36  
  
 Löwenheim-Skolem descendente, 18  
 Löwenheim-Skolem ascendente, 10  
  
 mónada, 11  
  
 plano proyectivo, 56  
 pregeometría, 36  
     dimensión, 40  
     fórmula de adición, 41  
     localización, 39  
 pseudoplano liso, 58  
  
 QE, *véase* eliminación de cuantificadores  
  
 rango de Morley, 46

subestructura, *véase también* extensión

subestructura elemental, *véase también* extensión elemental

Tarski-Vaught (criterio), 19

teoría de excelencia, 77

teorema de Keisler-Shelah, 16

teorema de la relación de equivalencia finita, 60

teorema de omisión de tipos, 26

teorema de Tarski-Chevalley, 32

teorema de tricotomía débil, 63

tipo, 24

    tipo algebraico, 25

    tipo completo, 25

    tipo parcial, 25

    tipo principal, 25

    tipo realizado, 26

ultraproducto, 7

Vaught (criterio de completitud), 20

vocabulario, 6

**Asociación Matemática Venezolana**  
Presidente: Rafael Sánchez Lamonedá

**Consejo Directivo Nacional**

Rafael Sánchez Lamonedá  
Capítulo Capital

Sergio Muñoz  
Capítulo de Centro Occidente

Oswaldo Araujo  
Capítulo de Los Andes

Said Kas-Danouche  
Capítulo de Oriente

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela

Asociación Matemática Venezolana  
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela  
<http://amv.ivic.gob.ve>

# **Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas**

## **Consejo Directivo**

Director  
Eloy Sira

Subdirector  
Alberto Quintero

Representantes del Ministerio del Poder Popular para Ciencia,  
Tecnología e Industrias Intermedias

Guillermo Barreto  
Juan Luis Cabrera

Representante del Ministerio del Poder Popular para la  
Educación Superior  
Prudencio Chacón

Representantes Laborales  
Jesús Acosta  
María Celia Sulbarán (suplente)  
Evencia Bernal (suplente)  
Gerencia General  
Lira Parra

## **Comisión Editorial**

Coordinador  
Eloy Sira  
Horacio Biord  
Erika Wagner  
Rafael Gassón  
Jesús Eloy Conde  
Héctor Suárez  
Lucía Antillano  
María Teresa Curcio  
Pamela Navarro



Gobierno **Bolivariano**  
de Venezuela

Ministerio del Poder Popular  
para **Ciencia, Tecnología e Industrias Intermedias**

