

XXIV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA-VENEZUELA 2011

LA ENTROPÍA TOPOLÓGICA,
PROPIEDADES GENERALES Y ALGUNOS
CÁLCULOS EN EL CASO DEL SHIFT
DE MILNOR-THURSTON

Rafael Labarca

MÉRIDA, VENEZUELA, 4 AL 10 DE SEPTIEMBRE DE 2011

XXIV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA – VENEZUELA 2011

LA ENTROPÍA TOPOLÓGICA, PROPIEDADES
GENERALES Y ALGUNOS CÁLCULOS EN EL CASO
DEL SHIFT DE MILNOR-THURSTON

Rafael Labarca

Profesor de Matemáticas
Universidad de Santiago de Chile (USACH)
rafael.labarca@usach.cl

Libro realizado con la colaboración de Solange Aranzubia (USACH) y
Erick Inda (USACH y Universidad Técnica Federico Santa María)

MÉRIDA, VENEZUELA, 4 AL 10 DE SEPTIEMBRE DE 2011

XXIV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las siguientes instituciones: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Universidad de Oriente y Universidad Simón Bolívar, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana. La XXIV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS recibió apoyo financiero de: Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, Banco Central de Venezuela, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), Fundacite Mérida, Unión Matemática de América Latina y el Caribe, y CIMPA (Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées).

2010 Mathematics Subject Classification: 37A35, 37B10

©Ediciones IVIC

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

RIF: G-20004206-0

La entropía topológica, propiedades generales y algunos cálculos en el caso del shift de Milnor-Thurston

Rafael Labarca

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas

Preprensa e impresión: Gráficas Lauki C. A.

Depósito legal If66020115102609

ISBN 978-980-261-131-7

Caracas, Venezuela

2011

Dedico este libro a la memoria de mi colega y amigo
Prof. Dr. Sergio Eugenio Plaza Salinas

Índice general

Índice general	v
1. La Entropía Topológica	1
1.1. Introducción	1
1.1.1. Historia del Libro, de su dedicatoria y agradecimientos	1
1.1.2. Introducción al Texto	4
1.2. La Definición de Adler–Konheim y McAndrew	6
1.2.1. Propiedades de \vee y $<$	7
1.2.2. Propiedades de la entropía topológica	12
1.3. Cálculo de la Entropía en Espacios Métricos	22
1.4. Un Resultado de R. Bowen	25
1.5. El Shift de Milnor–Thurston	35
1.6. Un resultado de BGMY para la estimación por bajo de la entropía topológica de una aplicación continua	43
2. Cálculo de la entropía de algunas órbitas periódicas maximales en el mundo de Milnor-Thurston	55
2.1. Adaptación del resultado de BGMY para nuestro caso	57
2.2. Sobre la combinatoria y la entropía de las órbitas que doblan período(trabajo original en conjunto con Eric Inda)	60
2.2.1. Para el caso general	82
3. Sobre la Continuidad de la Entropía en las Órbitas Periódicas en el Mundo de Milnor-Thurston (Trabajo original conjunto con Solange Aranzubia V.)	87
3.1. Introducción	87

3.2.	Órbitas periódicas maximales vecinas	89
3.3.	Demostración de la continuidad en $\theta = \underline{101}$	100
3.4.	Continuidad de $h_{top}(\theta)$ en $\theta_k = H_{11,10}^k(\underline{101})$, $k = 1, 2, \dots$	120
A. Matrices Positivas		123
1.	Elementos previos	125
2.	Norma de matrices	127
3.	Teoría espectral	128
4.	Comportamiento asintótico de potencias de matrices	130
B. Matrices positivas y el Teorema de Perron		135
1.	Positividad	135
2.	El espectro periférico de una matriz positiva	139
C. Matrices Irreducibles		141
1.	Elementos de la Teoría de Perron-Frobenius	141
2.	Otras propiedades de las matrices irreducibles	146
Bibliografía		149

Capítulo 1

La Entropía Topológica

1.1. Introducción

1.1.1. Historia del Libro, de su dedicatoria y agradecimientos

El año 2009, en Noviembre para ser preciso, me contactó mi colega Neptalí Romero, quién se encontraba coordinando la versión 2011 de la Escuela Venezolana de Matemáticas(EVM), para pedir que divulgase, por la página de UMALCA, la convocatoria a presentar cursos para la XXIV EVM. Le consulté, casi de inmediato, si sería interesante para ellos un curso sobre la entropía topológica y el cálculo de la misma para shifts ordenados de dos símbolos y me dijo que sí y que podía postular una propuesta. En los primeros meses de 2010 hice la propuesta y me fue informada su aceptación en agosto de 2010.

Ahí, empezó el drama. Había que escribir el libro....

En todo caso, y como parte de una estadía sabática en la Universidad de Oviedo en España(año 2005-2006), había desarrollado diversos contenidos, relacionados con el tema, en varios cuadernos . También, había que completar varias cosas y mejorar la escritura de lo que tenía hecho. O sea, harto trabajo.

Afortunadamente, por esa época, andaban cerca mío dos de mis alumnos: Erick y Solange.

Erick, que había hecho su programa de maestría con nosotros y que, por razones de estudio y trabajo, no había completado su tesis y Solange, que estaba haciendo su programa de doctorado en la USACH.

Conversé con Erick para que completase su tesis, se interesó y empezó a trabajar en su memoria. De su memoria viene gran parte de la recopilación del capítulo 1; buena parte del capítulo 2 y los anexos de éste libro.

Luego, diversas circunstancias hicieron que fuera interesante, para Solange, completar, como parte de sus estudios, el grado de magister en ciencia. Así, ella trabajó en el verano y parte del primer semestre 2011 para completarla. Parte de esa memoria está en el capítulo 3 y en algunas partes del capítulo 1.

Este libro, como todo libro, es perfeccionable y espero mejorarlo en otras versiones.

Hace ya un par de meses que Neptalí me escribió para que le enviase la forma final el libro y no lo había hecho por diversas razones.

La primera, es que siempre lo urgente posterga lo importante (uno de los teoremas de la condición humana).

La segunda, es que había parte del material cuyas demostraciones eran poco elegantes. No es que hayamos mejorado todas, apenas algunas.

En esta demora, ocurrió un hecho de esos lamentables que no tienen reparación posible.

Falleció, producto de una leucemia linfática aguda, mi querido amigo y colega Prof. Dr. Sergio Eugenio Plaza Salinas a la edad de 55 años.

A Sergio lo conocí el año de 1980, cuando había concluido la Pedagogía en Matemática y Estadística en la Universidad Técnica del Estado (actual USACH) y se había incorporado al programa de magister en educación matemática. En esa ocasión me tocó ser su ayudante en un par de los cursos básicos de ese programa. Allí reconocí su talento, disciplina y voluntad. Me recuerdo que le señalé, a la manera usual del chileno hablante, que se cambiara de programa y que se incorporase al magister en ciencia en la especialidad de matemática. Hizo eso y este fue el inicio de una excelente carrera profesional que ahora, con su fallecimiento, quedó truncada.

En estos casi 32 años de amistad y colaboración, son muchas las complicidades que habíamos desarrollado juntos y, como no, me quedaré un poco más solo con su ausencia.

Por eso le dedico este libro: para mantener su memoria y convocar a las nuevas generaciones a conocerla y a imitarla.

Estimo necesario, además, aclarar el nombre final del libro. Cuando envié la propuesta de cursillo, la bautice con el título *La Entropía Topológica como medida de desorden en Sistemas Dinámicos*. claro, es un título marketinero (o sea que

produce un mejor llamado al lector)pero, con el tiempo, verifique que no representaba muy bien lo que habíamos hecho en el libro y, lo más honesto, es llamar esta cría(intelectual) como se debe llamar.

También como no, debemos aradecer a quiénes nos apoyaron para que la actividad generadora del libro se hiciera. Así, agradecemos:

- 1.- A la Dirección de Investigaciones de la Universidad de Santiago de Chile(Dicyt-USACH) por el apoyo brindado a través del proyecto de investigación del cual soy investigador principal.
- 2.- A la Dirección de Graduados de la USACH, por el apoyo que brindó a Solange Aranzubia y Lautaro Vásquez para su estadía en el IMPA el verano 2011.
- 3.- Al proyecto MATHAMSUD 09MATH02, por el apoyo a mi estadía de investigación en el IMPA el verano 2011.
- 4.- Al IMPA, en las personas de los colegas Carlos Moreira, Jacob Palis y Marcelo Viana, por el apoyo emocional y económico constante para que sigamos haciendo matemática en esa excelente institución(o sea, nos apoyan en nuestras visitas allá) y por las discusiones y sugerencias que siempre mejoran lo que hemos hecho.

Dr. Rafael Labarca B.
Profesor de Matemáticas
Universidad de Santiago de Chile

Santiago de Chile, Julio de 2011

1.1.2. Introducción al Texto

La Teoría de Bifurcaciones es una rama de los Sistemas Dinámicos cuyo propósito es la descripción, mediante el uso de familias parametrizadas, de todas las dinámicas que, esencialmente, representan las variaciones posibles de la dinámica en una vecindad de un sistema dinámico dado.

El sueño, desde mediados de 1930 y hasta finales de la década de 1960, era que esto se podía hacer con un número finito de parámetros.

Este sueño se terminó de acabar, a finales de la década de 1970, con los trabajos de Guckenheimer-Williams [7], a respecto del atractor geométrico de Lorenz, donde para modelar se usaba una cantidad no enumerable de parámetros.

Uno de los parámetros que se usó, ya desde inicio del siglo XX, fue el número de rotación. Este número se mostró interesante para la familia estandar y para homeomorfismos del círculo. Para generalizar este parámetro se introdujeron los intervalos de rotación y se pretendió, por este medio, describir las bifurcaciones de la dinámica. El mejor intento, en este sentido, fue el trabajo de Philip Boyland, [3], que muestra claramente todo lo complicado que podía ser el querer describir las bifurcaciones por medio del intervalo de rotación.

Desde finales de la década de 1990 se han publicado diversos trabajos de Labarca y Moreira([9],[12],[10]) respecto de familias parametrizadas de aplicaciones de tipo Lorenz. En estos trabajos ellos usan las sucesiones principales como parámetros para describir las bifurcaciones de familias genéricas a dos parámetros.

Recientemente, en el trabajo [10], establecen un programa a desarrollar para dar una acabada descripción de la teoría de bifurcaciones de aplicaciones del tipo Lorenz aplicable a campos geométricos de tipo Lorenz.

En sus trabajos de tesis de magister en ciencia, Erick y Solange, avanzan, en el sentido del programa de Labarca y Moreira, en el mundo de Milnor Thurston. Esperamos publicar parte de estos resultados en coautoría con ellos.

La primera parte del libro consiste en introducir la teoría básica de la entropía como introducida por Adler-Konheim y Mac Andrew(en [1]) y como modificada por Rufus Bowen (en [4] y [5]), que nos serán de utilidad. Mostraremos algunas de sus propiedades y calcularemos la entropía topológica de la función shift. Además, veremos una descripción del Mundo de Milnor-Thurston. En este punto es necesario detenerse un poco. Alrededor de 1977 los renombrados matemáticos John Milnor y William Thurston, que a la sazón se encontraban en el Instituto para Estudios Avanzados de la Universidad de Princeton(en Estados Unidos) escribieron

un trabajo sobre dinámica de aplicaciones del intervalo. En él asociaron un orden al conjunto de sucesiones de n símbolos y generaron una teoría que ha sido fundamental en sistemas dinámicos. Por ello, es que al espacio de dos símbolos provisto del orden que representa a funciones del intervalo del tipo crecientes-decrecientes le hemos llamado orden de Milnor-Thurston y al conjunto de pares de sucesiones (mínimales,maximales) accesibles, asociados a este orden, le llamamos el mundo de Milnor-Thurston. Este pre-print fue publicado finalmente en [13].

También, en la primera parte del libro, daremos la definición de A-grafos, romas, matrices de incidencia, entre otras, y como se utilizan en el cálculo de un valor mínimo para la entropía topológica de funciones continuas del intervalo (a la manera de Block-Guckenheimer-Misiurewicz y Young, [6]).

La segunda parte del libro consiste basicamente en lo siguiente: en teoría de bifurcaciones hay una bifurcación genérica que se reconoce como *la ruta dobla período al caos*. Aquí lo que sucede es que una órbita periódica atractora pierde ese carácter y sucede una bifurcación de tipo flip y aparece una nueva órbita periódica atractora que dobla el período. En el parametro, aparece una sucesión de valores donde en cada uno de ellos se produce esta bifurcación. Primero una órbita periódica atractora de período uno desdobla y aparece una órbita periódica atractora de período dos, la órbita de período uno es ahora repulsora; luego ésta desdobla y aparece una órbita periódica de período cuatro atractora, la órbita de períodos dos es ahora repulsora y así sucesivamente. Esto, como señalado en [11] y [12], refleja una propiedad que tiene el shift de Milnor Thurston. A saber: tiene un punto fijo cuyo itinerario es $\underline{1} = (1, 1, 1, 1, 1, \dots)$; luego una órbita de período dos $\underline{10} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ que satisface $\underline{1} < \underline{10}$; luego una órbita de período cuatro $\underline{1011} = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, \dots)$ que satisface $\underline{1} < \underline{10} < \underline{1011}$; y así sucesivamente.

Estas órbitas están entrelazadas ¿Cómo?. Eso responde el capítulo 2. El cálculo de la entropía de estas órbitas nos entrega relaciones interesantes entre dinámica y álgebra lineal que, al menos para nosotros, no nos eran conocida. Más detalles se encuentran en [8]

En el Capítulo 3 lo que hacemos es analizar la entropía topológica de órbitas periódicas maximales vecinas en el Mundo de Milnor-Thurston, . Para ello tomaremos una órbita periódica maximal θ y encontraremos una órbita periódica maximal vecina de θ , construída a partir de θ y veremos como los iterados de esas órbitas nos ayudan a encontrar la entropía topológica de ellas (para ello utilizamos, por ejemplo,

los A-grafos, las romas, matrices de incidencia, etc). Y, a modo de ejemplo, de aplicación de estas técnicas, demostraremos la continuidad de la entropía topológica en $\theta = \underline{101}$. Luego, usamos esta continuidad y el operador de renormalización $H_{11,10}$, para obtener la continuidad de la entropía en las imágenes $H_{11,10}^k(\underline{101})$, $k \in \mathbb{N}$.

Una de las cosas interesantes aquí, visto desde la perspectiva del álgebra de matrices, es que definimos una sucesión de matrices cuadradas, de largo tendiendo a infinito, que podemos relacionar y calcular su radio espectral por medio de los métodos de dinámica. Más detalles en [2] y [8].

El Anexo contiene el material necesario para, ójala, permitir una lectura independiente del libro.

1.2. La Definición de Adler–Konheim y Mc Andrew

La definición de entropía que usaremos se debe a R. L. Adler, A. G. Konheim y M. H. Mc Andrew y fue publicada en el *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 114, N° 2 del año 1965. Seguiremos libremente este trabajo.

En lo que sigue $M \neq \emptyset$ y τ será una topología en M tal que (M, τ) es un espacio compacto.

Por la compacidad de (M, τ) sabemos que si $\mathcal{A} \subset \tau$ es un cubrimiento por abiertos de M , entonces existe $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ que es un cubrimiento por abiertos de M y que posee un número finito de elementos. Esto es la cardinalidad de $\mathcal{A}' = \#(\mathcal{A}') < \infty$.

Así, podemos definir el número

$$N(\mathcal{A}) = \text{mín} \{ \#(\mathcal{A}') : \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \text{ es un subcubrimiento finito de } M \}.$$

Definición 1. Diremos que el subcubrimiento $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ es *minimal*, si:

- a) $\#(\mathcal{A}') < \infty$ y
- b) no existe $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'$ subcubrimiento finito tal que $\#(\mathcal{A}'') < \#(\mathcal{A}')$

Definición 2. Se define la *entropía* del cubrimiento abierto $\mathcal{A} \subset \tau$ como el número $H(\mathcal{A}) = \log(N(\mathcal{A}))$.

Notamos que $N(\mathcal{A}) = \exp(H(\mathcal{A})) = e^{H(\mathcal{A})}$.

En lo que sigue $\mathcal{C}(M) = \{ \mathcal{A} \subset \tau; \mathcal{A} \text{ es cubrimiento de } M \}$ denotará el conjunto de todos los cubrimientos por abiertos de M .

Definición 3. Para $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{C}(M)$, se define la *junción* de \mathcal{A} y \mathcal{B} como $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$.

Es claro que la unión es una función $\vee: \mathcal{C}(M) \times \mathcal{C}(M) \rightarrow \mathcal{C}(M)$, $\vee(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

Además, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ y vale $\mathcal{A} \vee \mathcal{A} = \mathcal{A}$ sólo si ocurre que los elementos de \mathcal{A} son dos a dos disjuntos y el cubrimiento \mathcal{A} contiene al vacío. Caso contrario, la inclusión será estricta.

Definición 4. Diremos que un cubrimiento $\mathcal{B} \in \mathcal{C}(M)$ es un *refinamiento* del cubrimiento $\mathcal{A} \in \mathcal{C}(M)$, denotado $\mathcal{A} < \mathcal{B}$, si $\forall B \in \mathcal{B} \exists A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset A$.

1.2.1. Propiedades de \vee y $<$

1. Sea $\mathcal{A}_0 = \{M\}$. Es claro que $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{C}(M)$ y que $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{C}(M)$ se tiene que $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0 \vee \mathcal{A} = \mathcal{A}$, es decir, \mathcal{A}_0 es el elemento neutro de la unión. Además, $\mathcal{A}_0 < \mathcal{A}, \forall \mathcal{A} \in \mathcal{C}(M)$.
2. Se cumple que $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \mathcal{B} \vee \mathcal{A}, \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{C}(M)$. O sea la unión es conmutativa en $\mathcal{C}(M)$.
3. Se cumple que $\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C}, \forall \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{C}(M)$. Esto sigue del hecho que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ para conjuntos A, B, C cualesquiera. Así, la unión es asociativa en $\mathcal{C}(M)$.
4. $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{C}(M)$ vale $\mathcal{A} < \mathcal{A}$.
5. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{C}(M)$ entonces, si $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} < \mathcal{C}$ resulta ser $\mathcal{A} < \mathcal{C}$.

En efecto, sea $C \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{B} < \mathcal{C} \exists B(C) \in \mathcal{B}$ tal que $C \subset B(C) = B$. Como $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ existe $A = A(B) \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset A$, luego $C \subset B \subset A$ implica $C \subset A$. Así, $\forall C \in \mathcal{C} \exists A = A(C) \in \mathcal{A}$ tal que $C \subset A \therefore \mathcal{A} < \mathcal{C}$.

Observación 1. Como $<$ satisface 4 y 5, entonces constituye un casi orden reflexivo entre elementos de $\mathcal{C}(M)$. No es un orden parcial pues no cumple la propiedad de antisimetría. Por ejemplo, los cubrimientos

$$\mathcal{A} = \{B(0, \frac{1}{n}); n \in \mathbb{N}\} \cup \{B(0, 2)\}$$

y

$$\mathcal{B} = \{B(0, \frac{2}{n}); n \in \mathbb{N}\}$$

de la bola cerrada de centro $0 \in \mathbb{R}^n$ y radio 1 satisfacen $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} < \mathcal{A}$ y no son iguales entre ellos.

6. Si $\mathcal{A} < \mathcal{A}'$ y $\mathcal{B} < \mathcal{B}'$ entonces $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} < \mathcal{A}' \vee \mathcal{B}'$

Demostración. Sean $A' \in \mathcal{A}'$, $B' \in \mathcal{B}'$ y consideremos $A' \cap B'$. Como $\mathcal{A} < \mathcal{A}' \exists A = A(A') \in \mathcal{A}$ tal que $A' \subset A$. Como $\mathcal{B} < \mathcal{B}' \exists B = B(B') \in \mathcal{B}$ tal que $B' \subset B$. Luego $A' \cap B' \subset A \cap B$. Así $\forall A' \cap B' \in \mathcal{A}' \vee \mathcal{B}' \exists A \cap B \in \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ tal que $A' \cap B' \subset A \cap B$. Esto implica que $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} < \mathcal{A}' \vee \mathcal{B}'$. \square

7. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{B} \in \mathcal{C}(M)$. Como $\mathcal{A}_0 = \{M\} < \mathcal{U}$; $\mathcal{A}_0 = \{M\} < \mathcal{B}$; $\mathcal{B} < \mathcal{B}$; $\mathcal{U} < \mathcal{U}$ se tiene $\mathcal{A}_0 \vee \mathcal{U} < \mathcal{U} \vee \mathcal{B}$; $\mathcal{A}_0 \vee \mathcal{B} < \mathcal{U} \vee \mathcal{B}$, o sea, $\forall \mathcal{U}, \mathcal{B} \in \mathcal{C}(M)$ vale $\mathcal{U} < \mathcal{U} \vee \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} < \mathcal{U} \vee \mathcal{B}$. De aquí concluimos lo siguiente: para cada par $\mathcal{U}, \mathcal{B} \in \mathcal{C}(M)$ existe $\mathcal{A} \in \mathcal{C}(M)$ tal que $\mathcal{U} < \mathcal{A}$ y $\mathcal{B} < \mathcal{A}$. En efecto, basta tomar $\mathcal{A} = \mathcal{U} \vee \mathcal{B}$.

8. Si $\mathcal{U}, \mathcal{B} \in \mathcal{C}(M)$ y $\mathcal{U} < \mathcal{B}$ entonces $N(\mathcal{U}) \leq N(\mathcal{B})$ (y consecuentemente $H(\mathcal{U}) \leq H(\mathcal{B})$).

Demostración. En efecto, sea $\mathcal{B}' = \{B_1, \dots, B_k\}$ un subcobrimiento minimal de \mathcal{B} . Como $\mathcal{U} < \mathcal{B}$, para cada i existe $U_i \in \mathcal{U}$ tal que $B_i \subset U_i$. Se sigue que $\mathcal{U}' = \{U_1, \dots, U_k\}$ es un subcobrimiento de M . Así $N(\mathcal{U}) \leq k = N(\mathcal{B})$. \square

9. Si $\mathcal{U} < \mathcal{B}$ entonces $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{B}) = N(\mathcal{B})$ y $H(\mathcal{U} \vee \mathcal{B}) = H(\mathcal{B})$.

Demostración. Como $\mathcal{B} < \mathcal{U} \vee \mathcal{B}$, entonces de 8:

$$N(\mathcal{B}) \leq N(\mathcal{U} \vee \mathcal{B}) \tag{1.1}$$

La hipótesis $\mathcal{U} < \mathcal{B}$ dice que para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $U = U(B) \in \mathcal{U}$ tal que $B \subset U(B)$. En particular $B \subset B \cap U(B)$. $\therefore \forall B \in \mathcal{B}$, existe $B \cap U(B) \in \mathcal{B} \vee \mathcal{U}$ tal que $B \subset B \cap U$, es decir, $\mathcal{U} \vee \mathcal{B} < \mathcal{B}$. Aplicando lo probado en 8:

$$N(\mathcal{U} \vee \mathcal{B}) \leq N(\mathcal{B}) \tag{1.2}$$

De (1.1) y (1.2) concluimos que $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{B}) = N(\mathcal{B})$ \square

10. Para todo $\mathcal{U}, \mathcal{B} \in \mathcal{C}(M)$ vale $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{B}) \leq N(\mathcal{U})N(\mathcal{B})$ (y consecuentemente $H(\mathcal{U} \vee \mathcal{B}) \leq H(\mathcal{U}) + H(\mathcal{B})$)

Demostración. Sean $\mathcal{U}' = \{U_1, \dots, U_{N(\mathcal{U}')}\}$, $\mathcal{B}' = \{B_1, \dots, B_{N(\mathcal{B}')}\}$ subcubrimientos minimales de \mathcal{U}' y \mathcal{B}' , respectivamente. Se tiene que:

$$\mathcal{U}' \vee \mathcal{B}' = \{U_i \cap B_j; i = 1, \dots, N(\mathcal{U}'), j = 1, \dots, N(\mathcal{B}')\}$$

es un subcubrimiento de $\mathcal{U} \vee \mathcal{B}$ $\therefore N(\mathcal{U}' \vee \mathcal{B}') \leq N(\mathcal{U}')N(\mathcal{B}')$. \square

Consideremos ahora $\varphi: M \rightarrow M$ una aplicación continua. Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$ sea $\varphi^{-1}(\mathcal{U}) = \{\varphi^{-1}(U); U \in \mathcal{U}\}$. Es claro que $\varphi^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{C}(M)$.

11. Si $\mathcal{U} < \mathcal{B}$ entonces $\varphi^{-1}(\mathcal{U}) < \varphi^{-1}(\mathcal{B})$.

Demostración. Para cada $B \in \mathcal{B} \exists U \in \mathcal{U}$ tal que $B \subset U$. De aquí:

$$\varphi^{-1}(B) \subset \varphi^{-1}(U) \Rightarrow \varphi^{-1}(\mathcal{U}) < \varphi^{-1}(\mathcal{B}).$$
 \square

12. Si $\mathcal{U}, \mathcal{B} \in \mathcal{C}(M)$, entonces $\varphi^{-1}(\mathcal{U} \vee \mathcal{B}) = \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \varphi^{-1}(\mathcal{B})$

(Esto es, la aplicación $\varphi^{-1}: \mathcal{C}(M) \rightarrow \mathcal{C}(M)$ es un $(\mathcal{C}(M), \vee)$ -morfismo).

Demostración. Sigue del hecho que $\varphi^{-1}(A \cap B) = \varphi^{-1}(A) \cap \varphi^{-1}(B)$ para cualquier par de conjuntos $A, B \subset M$. \square

13. Para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$ vale $N(\varphi^{-1}(\mathcal{U})) \leq N(\mathcal{U})$.

Demostración. Sea $\mathcal{U}' = \{U_1, \dots, U_{N(\mathcal{U}')}\}$ un subcubrimiento minimal de \mathcal{U}' , entonces $\varphi^{-1}(\mathcal{U}') = \{\varphi^{-1}(U_1), \dots, \varphi^{-1}(U_{N(\mathcal{U}')})\}$ es un subcubrimiento de $\varphi^{-1}(\mathcal{U}')$. De aquí que $N(\varphi^{-1}(\mathcal{U}')) \leq N(\mathcal{U}')$. \square

14. Si $\varphi: M \rightarrow M$ es sobreyectiva, entonces: $N(\varphi^{-1}(\mathcal{U})) = N(\mathcal{U})$.

Demostración. Sea $\mathcal{U}'_\varphi = \{\varphi^{-1}(U_1), \dots, \varphi^{-1}(U_{N(\varphi^{-1}(\mathcal{U}'))})\}$ un subcubrimiento minimal de $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$. Como

$$\varphi(\varphi^{-1}(U_j)) \subset U_j;$$

y φ es sobreyectiva, se cumple que:

$$\{U_1, \dots, U_{N(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))}\}$$

es un subcubrimiento por abiertos de \mathcal{U}

$$\therefore N(\mathcal{U}) \leq N(\varphi^{-1}(\mathcal{U})).$$

Combinando esta desigualdad con la desigualdad en 13 tenemos el resultado. \square

15. Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$ se cumple que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U}) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U}))$$

existe y es finito.

Para demostrar este resultado, probaremos lo siguiente:

Si $(a_n), n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de números reales no negativos que satisfice

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \text{ entonces existe } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$$

Demostración. La condición $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ implica que $a_{kn} \leq k a_n$ y así

$$\frac{1}{kn} a_{kn} \leq \frac{a_n}{n}.$$

Haciendo $k \rightarrow \infty$ concluimos que $c = \inf \left(\frac{a_p}{p} \right) \leq \frac{a_n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_{n_0}}{n_0} \leq c + \varepsilon$. Así, para $n > n_0$ escribimos $n = n_0 p + q$ con $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq q < n_0$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{n} &= \frac{a_{n_0 p + q}}{n_0 p + q} \leq \frac{p a_{n_0} + a_q}{p \left(n_0 + \frac{q}{p} \right)} \leq \frac{a_{n_0}}{n_0 + \frac{q}{p}} + \frac{a_q}{p n_0 + q} \leq \\ &\leq \frac{a_{n_0}}{n_0} + \frac{a_q}{n} \leq c + \varepsilon + \frac{a_q}{n} \leq c + \varepsilon + \frac{1}{n} \sup \{ a_i, 0 \leq i < n_0 \} \end{aligned}$$

Así que para n grande $\frac{a_n}{n} \leq c + 2\varepsilon$. Como $c \leq \frac{a_n}{n} \leq c + 2\varepsilon$ concluimos que $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$. □

Demostración. (De 15) Sea $a_n = H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U}) \right) = H(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U}))$.

Tenemos:

$$\begin{aligned} a_{n+m} &= H(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U}) \vee \varphi^{-n}(\mathcal{U}) \vee \\ &\quad \vee \varphi^{-n-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-n-m+1}(\mathcal{U})) \\ &= H(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U}) \vee \\ &\quad \vee \varphi^{-n}(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-(m-1)}(\mathcal{U}))) \end{aligned}$$

De acuerdo a la propiedad 10, tenemos

$$a_{n+m} \leq H(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U})) + \\ + H(\varphi^{-n}(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-(m-1)}(\mathcal{U})))$$

Usando ahora la propiedad 13, tenemos

$$a_{n+m} \leq H(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U})) + \\ + H(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-(m-1)}(\mathcal{U})))$$

Es decir, $a_{n+m} \leq a_n + a_m$

De la definición de (a_n) se tiene que $a_n \geq 0$. Así, obtenemos que existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U}) \right)$$

□

Definición 5. Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$ y $\varphi: M \rightarrow M$ continua, la *entropía* de φ respecto de \mathcal{U} es el número

$$h(\varphi, \mathcal{U}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U}) \right).$$

$a_1 = H(\mathcal{U}); a_n \leq a_{n-1} \leq n \cdot a_1$, se tiene $\frac{1}{n} a_n \leq a_1$, esto es:

16. Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$ y $\varphi: M \rightarrow M$ continua, se tiene que

$$h(\varphi, \mathcal{U}) \leq H(\mathcal{U}) = \log(N(\mathcal{U})).$$

Demostración. Como $a_1 = H(\mathcal{U})$ y $a_n = a_{n-1} \leq n \cdot a_1$, se tiene $\frac{1}{n} a_n \leq a_1$. Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq a_1$. □

17. Si $\mathcal{U}, \mathcal{B} \in \mathcal{C}(M)$ satisfacen $\mathcal{U} < \mathcal{B}$, entonces $h(\varphi, \mathcal{U}) \leq h(\varphi, \mathcal{B})$.

Demostración. De la propiedad 11, tenemos que $\mathcal{U} < \mathcal{B} \Rightarrow \varphi^{-k}(\mathcal{U}) < \varphi^{-k}(\mathcal{B})$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Aplicando la propiedad 6, obtenemos

$$\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U}) < \mathcal{B} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{B}) \vee \dots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{B})$$

De la propiedad 8, obtenemos que $H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U}) \right) \leq H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{B}) \right)$. Luego, $h(\varphi, \mathcal{U}) \leq h(\varphi, \mathcal{B})$. □

18. Si $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$ y $\varphi: M \rightarrow M$ es un homeomorfismo, entonces $h(\varphi, \mathcal{U}) = h(\varphi^{-1}, \mathcal{U})$.

Demostración. De acuerdo a la propiedad 14, $N(\varphi(\mathcal{U})) = N(\varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{U}))) = N(\mathcal{U})$. Así,

$$\begin{aligned} H(\mathcal{U} \vee \varphi(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee \varphi^{n-1}(\mathcal{U})) &= H(\varphi^{n-1}(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U}))) \\ &= H(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U})) \end{aligned}$$

Dividiendo por n y pasando al límite, cuando n tiende a infinito, se tiene el resultado. \square

Definición 6. Sea $\varphi: M \rightarrow M$ una aplicación continua. Se define la **entropía topológica** de φ como $h(\varphi) = \sup\{h(\varphi, \mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)\}$

Notar que $0 \leq h(\varphi) \leq \infty$

1.2.2. Propiedades de la entropía topológica

Definición 7. Diremos que una sucesión de cubrimientos abiertos $\{\mathcal{U}_n; n \in \mathbb{N}\}$ es **refinante** si:

- (1) $\mathcal{U}_n < \mathcal{U}_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (2) Para cada $\mathcal{B} \in \mathcal{C}(M)$ existe \mathcal{U}_n tal que $\mathcal{B} < \mathcal{U}_n$.

Lo interesante de una sucesión de cubrimientos abiertos refinante, es el siguiente lema.

Lema 1. Si (\mathcal{U}_n) es una sucesión de cubrimientos abiertos refinantes, entonces $h(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(\varphi, \mathcal{U}_n)$.

Demostración. La propiedad (1) implica $h(\varphi, \mathcal{U}_n) \leq h(\varphi, \mathcal{U}_{n+1})$. Así que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(\varphi, \mathcal{U}_n) = \sup\{h(\varphi, \mathcal{U}_n); n \in \mathbb{N}\}.$$

La definición de $h(\varphi)$ implica que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{B}_\varepsilon \in \mathcal{C}(M)$ tal que $h(\varphi) \leq h(\varphi, \mathcal{B}_\varepsilon) + \varepsilon$.

La propiedad (2) dice que existe \mathcal{U}_n tal que $\mathcal{B}_\varepsilon < \mathcal{U}_n$. De aquí $h(\varphi, \mathcal{B}_\varepsilon) \leq h(\varphi, \mathcal{U}_n)$ y luego tenemos

$$h(\varphi) \leq h(\varphi, \mathcal{U}_n) + \varepsilon \leq h(\varphi, \mathcal{U}_{n+p}) + \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Ya que $h(\varphi, \mathcal{U}_{n+p}) \leq h(\varphi) \leq h(\varphi, \mathcal{U}_{n+p}) + \varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$, debe ser entonces que $h(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(\varphi, \mathcal{U}_n)$. \square

Probaremos ahora que la entropía topológica es un invariante topológico. Para ello consideremos $\varphi: M \rightarrow M$ continua y $\psi: M \rightarrow M'$ un homeomorfismo.

Teorema 1. $h(\varphi) = h(\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})$.

Demostración. Como $\psi: M \rightarrow M'$ es un homeomorfismo, entonces $\psi(\mathcal{C}(M)) = \mathcal{C}(M')$. Esto es: $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{C}(M') \exists \mathcal{V} \in \mathcal{C}(M)$ tal que $\psi(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$. (Basta considerar $\mathcal{V} = \varphi^{-1}(\mathcal{U})$). De aquí

$$\begin{aligned}
 & h(\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}, \psi(\mathcal{U})) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\psi(\mathcal{U}) \vee (\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})^{-1}(\psi(\mathcal{U})) \vee \dots \vee (\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})^{-(n-1)}(\psi(\mathcal{U})) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\psi(\mathcal{U}) \vee (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1})(\psi(\mathcal{U})) \vee \dots \vee (\psi \circ \varphi^{-(n-1)} \circ \psi^{-1})(\psi(\mathcal{U})) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\psi(\mathcal{U}) \vee \psi(\varphi^{-1}(\mathcal{U})) \vee \dots \vee \psi(\varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U})) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\psi \left(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U}) \right) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-(n-1)}(\mathcal{U}) \right) = h(\varphi, \mathcal{U}).
 \end{aligned}$$

Así que:

$$\begin{aligned}
 \sup \{ h(\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}, \mathcal{V}); \mathcal{V} \in \mathcal{C}(M') \} &= \sup \{ h(\varphi, \mathcal{U}); \mathcal{U} \in \mathcal{C}(M) \} \\
 \therefore h(\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}) &= h(\varphi). \square
 \end{aligned}$$

Lema 2. Sea $\varphi: M \rightarrow M$ continua. Se cumple que $h(\varphi^k) = kh(\varphi)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$ sea $\mathcal{U}_k = \mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-(k-1)}(\mathcal{U})$. Es claro

que:

$$\begin{aligned}
h(\varphi^k) &\geq h(\varphi^k, \mathcal{U}_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\mathcal{U}_k \vee (\varphi^k)^{-1}(\mathcal{U}_k) \vee \dots \vee (\varphi^k)^{-(n-1)}(\mathcal{U}_k) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left((\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-(k-1)}(\mathcal{U})) \vee \varphi^{-k}(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-(k-1)}(\mathcal{U})) \right. \\
&\quad \left. \vee \dots \vee \varphi^{-k(n-1)}(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-(k-1)}(\mathcal{U})) \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{1-k}(\mathcal{U}) \vee \varphi^{-k}(\mathcal{U}) \vee \varphi^{-1-k}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-2k+1}(\mathcal{U}) \vee \right. \\
&\quad \left. \vee \varphi^{-2k}(\mathcal{U}) \vee \varphi^{-2k-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-k(n-1)}(\mathcal{U}) \vee \varphi^{-k(n-1)-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-kn+1}(\mathcal{U}) \right) = \\
&= k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{kn} H \left(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-kn+1}(\mathcal{U}) \right) = k \cdot h(\varphi, \mathcal{U})
\end{aligned}$$

Esto es $h(\varphi^k) \geq k \cdot h(\varphi, \mathcal{U}) \forall \mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$. Concluimos que:

$$h(\varphi^k) \geq k h(\varphi). \quad (1.3)$$

Sea ahora $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U} \vee (\varphi^k)^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee (\varphi^k)^{-(n-1)}(\mathcal{U}) < \\
&< \mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-k}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-nk+k}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-nk+1}(\mathcal{U})
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
h(\varphi, \mathcal{U}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H \left(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{-nk+1}(\mathcal{U}) \right)}{nk} \geq \\
&\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nk} H \left(\mathcal{U} \vee (\varphi^k)^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee (\varphi^k)^{-(n-1)}(\mathcal{U}) \right) = \\
&= \frac{1}{k} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\mathcal{U} \vee (\varphi^k)^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee (\varphi^k)^{-(n-1)}(\mathcal{U}) \right) = \frac{1}{k} h(\varphi^k, \mathcal{U}) \\
&\therefore k h(\varphi, \mathcal{U}) \geq h(\varphi^k, \mathcal{U}) \quad \mathcal{U} \in \mathcal{C}(M).
\end{aligned}$$

De aquí concluimos que:

$$k h(\varphi) \geq h(\varphi^k) \quad (1.4)$$

De (1.3) y (1.4) tenemos: $k h(\varphi) = h(\varphi^k)$. □

Corolario 1. Si $\varphi: M \rightarrow M$ es un homeomorfismo, entonces:

$$h(\varphi^k) = |k| h(\varphi) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. El teorema anterior prueba el resultado para $k \in \mathbb{N}$.

$$h(\varphi^{-k}) = h((\varphi^{-1})^k) = k h(\varphi^{-1}) = k h(\varphi),$$

de acuerdo a 18

$$\therefore h(\varphi^{-k}) = |-k| \cdot h(\varphi). \square$$

Sean ahora (M, ζ_M) y (N, ζ_N) dos espacios topológicos compactos. Sean $\varphi: M \rightarrow M$ y $\psi: N \rightarrow N$ aplicaciones continuas. Se define la aplicación producto $\varphi \times \psi: M \times N \rightarrow M \times N$ por $\varphi \times \psi(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$.

Con la topología producto de $M \times N$ resulta ser que ésta aplicación es continua. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2. $h(\varphi \times \psi) = h(\varphi) + h(\psi)$.

Demostración. Probemos primero que $h(\varphi \times \psi) \geq h(\varphi) + h(\psi)$. Para ello notamos lo siguiente: si $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$ y $\mathcal{B} \in \mathcal{C}(N)$, entonces:

$$\mathcal{U} \times \mathcal{B} = \{U \times B, U \in \mathcal{U}, B \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{C}(M \times N)$$

De aquí:

$$N(\mathcal{U} \times \mathcal{B}) = N(\mathcal{U}) \cdot N(\mathcal{B})$$

y entonces:

$$H(\mathcal{U} \times \mathcal{B}) = H(\mathcal{U}) + H(\mathcal{B})$$

Por otro lado, para

$$\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in \mathcal{C}(M) \text{ y } \mathcal{B}, \mathcal{B}' \in \mathcal{C}(N)$$

se cumple que:

$$(\mathcal{U} \times \mathcal{B}) \vee (\mathcal{U}' \times \mathcal{B}') = (\mathcal{U} \vee \mathcal{U}') \times (\mathcal{B} \vee \mathcal{B}')$$

En efecto,

$$A \in (\mathcal{U} \times \mathcal{B}) \vee (\mathcal{U}' \times \mathcal{B}') \Leftrightarrow A = A_1 \cap A_2$$

con

$$A_1 \in \mathcal{U} \times \mathcal{B} \text{ y } A_2 \in \mathcal{U}' \times \mathcal{B}', \text{ esto es, } A_1 = U_1 \times B_1, \quad A_2 = U'_1 \times B'_1$$

De esta forma

$$\begin{aligned} A &= (U_1 \times B_1) \cap (U'_1 \times B'_1) = \\ &= (U_1 \cap U'_1) \times (B_1 \cap B'_1) \in (\mathcal{U} \vee \mathcal{U}') \times (\mathcal{B} \vee \mathcal{B}') \\ &\therefore (\mathcal{U} \times \mathcal{B}) \vee (\mathcal{U}' \times \mathcal{B}') \subseteq (\mathcal{U} \vee \mathcal{U}') \times (\mathcal{B} \vee \mathcal{B}') \end{aligned} \quad (1.5)$$

Si ocurre que $A \in (\mathcal{U} \vee \mathcal{U}') \times (\mathcal{B} \vee \mathcal{B}')$, entonces existen $E_1 \in \mathcal{U} \vee \mathcal{U}'$ y $E_2 \in \mathcal{B} \vee \mathcal{B}'$ tal que $A = E_1 \times E_2$. Como $E_1 = U_1 \cap U'_1$, $E_2 = B_1 \cap B'_1$, entonces:

$$\begin{aligned} A &= (U_1 \cap U'_1) \times (B_1 \cap B'_1) = (U_1 \times B_1) \cap (U'_1 \times B'_1) \\ &\therefore A \in (\mathcal{U} \times \mathcal{B}) \vee (\mathcal{U}' \times \mathcal{B}') \end{aligned}$$

Esto es:

$$(\mathcal{U} \vee \mathcal{U}') \times (\mathcal{B} \vee \mathcal{B}') \subset (\mathcal{U} \times \mathcal{B}) \vee (\mathcal{U}' \times \mathcal{B}') \quad (1.6)$$

De (1.5) y (1.6): $(\mathcal{U} \vee \mathcal{U}') \times (\mathcal{B} \vee \mathcal{B}') = (\mathcal{U} \times \mathcal{B}) \vee (\mathcal{U}' \times \mathcal{B}')$. Tenemos:

$$\begin{aligned} h(\varphi \times \psi, \mathcal{U} \times \mathcal{B}) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\mathcal{U} \times \mathcal{B} \vee (\varphi \times \psi)^{-1}(\mathcal{U} \times \mathcal{B}) \vee \dots \vee (\varphi \times \psi)^{-(n-1)}(\mathcal{U} \times \mathcal{B}) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\mathcal{U} \times \mathcal{B} \vee (\varphi^{-1}(\mathcal{U}) \times \psi^{-1}(\mathcal{B})) \vee \dots \vee (\varphi^{1-n}(\mathcal{U}) \times \psi^{1-n}(\mathcal{B})) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left((\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{1-n}(\mathcal{U})) \times (\mathcal{B} \vee \psi^{-1}(\mathcal{B}) \vee \dots \vee \psi^{1-n}(\mathcal{B})) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(H(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{1-n}(\mathcal{U})) + H(\mathcal{B} \vee \psi^{-1}(\mathcal{B}) \vee \dots \vee \psi^{1-n}(\mathcal{B})) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\mathcal{U} \vee \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \dots \vee \varphi^{1-n}(\mathcal{U}) \right) + \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\mathcal{B} \vee \psi^{-1}(\mathcal{B}) \vee \dots \vee \psi^{1-n}(\mathcal{B}) \right) = \\ &= h(\varphi, \mathcal{U}) + h(\psi, \mathcal{B}). \end{aligned}$$

Esto es: $h(\varphi \times \psi, \mathcal{U} \times \mathcal{B}) = h(\varphi, \mathcal{U}) + h(\psi, \mathcal{B})$. Como esto vale para cualesquiera $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{C}(N)$, tenemos:

$$h(\varphi \times \psi) \geq h(\varphi) + h(\psi). \quad (1.7)$$

Vamos ahora a probar que $h(\varphi) + h(\psi) \geq h(\varphi \times \psi)$. Consideremos $\mathcal{C} \in \mathcal{C}(M \times N)$ un cubrimiento por abiertos de $M \times N$. Vamos a probar que existen cubrimientos $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{C}(N)$ tales que $\mathcal{C} < \mathcal{U} \times \mathcal{B}$. Si esto es así, entonces $h(\varphi \times \psi, \mathcal{C}) \leq h(\varphi \times \psi, \mathcal{U} \times \mathcal{B}) = h(\varphi, \mathcal{U}) + h(\psi, \mathcal{B})$. De aquí concluimos que $h(\varphi \times \psi) \leq h(\varphi) + h(\psi)$.

Cada cubrimiento \mathcal{C} de $M \times N$ es formado por conjuntos abiertos de la topología producto, esto es, si $C \in \mathcal{C}$ es abierto en $M \times N$, entonces existen $\{A_i; i \in I(C)\} \subset \zeta_M$, $\{B_j; j \in J(C)\} \subset \zeta_N$ tales que $C = \bigcup_{i,j} A_i \times B_j$. Se tiene entonces que:

$$\mathcal{C}' = \{A_i(C) \times B_j(C); i \in I(C), j \in J(C), C \in \mathcal{C}(M \times N)\}$$

es un cubrimiento por abiertos de $M \times N$. Como $M \times N$ es compacto, existen $A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_p$, tales que $\mathcal{C}'_1 = \{A_i \times B_i; i = 1, 2, \dots, N(\mathcal{C}')\}$ es un subcubrimiento minimal de \mathcal{C}' . Debe ser entonces que $\mathcal{U}' = \{A_1, \dots, A_{N(\mathcal{C}')}\}$ es cubrimiento de M y que $\mathcal{B}' = \{B_1, \dots, B_{N(\mathcal{C}')}\}$ es cubrimiento de N . Sea $x \in M$ y A_x la intersección de los elementos de \mathcal{U}' que contienen x . Sea $y \in N$ y B_y la intersección de los elementos de \mathcal{B}' que contienen a y . Claro que estos conjuntos son abiertos y podemos escoger x_1, \dots, x_n en M y y_1, \dots, y_m en N de tal forma que $\mathcal{U} = \{A_{x_1}, \dots, A_{x_n}\}$ es cubrimiento de M y $\mathcal{B} = \{B_{y_1}, \dots, B_{y_m}\}$ es cubrimiento de N . Consideremos un conjunto $A_{x_i} \times B_{y_j}$ de $\mathcal{U} \times \mathcal{B}$. Como \mathcal{C}' es un cubrimiento de $M \times N$ entonces $(x_i, y_j) \in A_k \times B_k$ para algún $k = 1, \dots, N(\mathcal{C}')$. Ya que $x_i \in A_k$ y $y_j \in B_k$ se tiene que $A_{x_i} \subset A_k$ y $B_{y_j} \subset B_k \quad \therefore A_{x_i} \times B_{y_j} \subset A_k \times B_k$
 $\therefore \forall A_{x_i} \times B_{y_j} \in \mathcal{U} \times \mathcal{B} \quad \exists A_k \times B_k \in \mathcal{C}'$ tal que $A_{x_i} \times B_{y_j} \subseteq A_k \times B_k \quad \therefore \mathcal{C}' < \mathcal{U} \times \mathcal{B}$. Como $\mathcal{C} < \mathcal{C}'$ tenemos que $\mathcal{C} < \mathcal{C}' < \mathcal{U} \times \mathcal{B}$ que es lo que queríamos probar para obtener la desigualdad $h(\varphi \times \psi, \mathcal{C}) \leq h(\varphi, \mathcal{U}) + h(\psi, \mathcal{B})$. De aquí concluimos que:

$$h(\varphi \times \psi) \leq h(\varphi) + h(\psi). \quad (1.8)$$

De (1.7) y (1.8): $h(\varphi, \psi) = h(\varphi) + h(\psi)$. □

Otra interesante propiedad de la entropía la obtenemos a través del siguiente resultado

Teorema 3. Sean M_1 y M_2 subconjuntos cerrados de M tales que $M = M_1 \cup M_2$. Si $\varphi: M \rightarrow M$ es continua y $\varphi(M_1) \subseteq M_1$, $\varphi(M_2) \subseteq M_2$, entonces

$$h(\varphi) = \max\{h(\varphi|_{M_1}), h(\varphi|_{M_2})\}$$

Para demostrar este teorema, usaremos el siguiente lema

Lema 3. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales mayores o iguales a uno, tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a_n) = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(b_n) = b$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) = \max\{a, b\}$$

Demostración. Sea $c > \max\{a, b\}$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\log a_n < nc \quad \text{y} \quad \log b_n < nc \quad \forall n \geq n_0.$$

De aquí que para cada $n \geq n_0$ tal que $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ se tiene

$$\log(a_n + b_n) = \log b_n + \log\left(1 + \frac{a_n}{b_n}\right) < nc + \log 2.$$

También, para cada $n \geq n_0$ tal que $\frac{b_n}{a_n} \leq 1$ se tiene:

$$\log(a_n + b_n) = \log(a_n) + \log\left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right) < nc + \log 2.$$

De esta forma, y para cada $n \geq n_0$, se cumple que:

$$\log(a_n + b_n) < nc + \log 2.$$

Así,

$$\frac{1}{n} \log(a_n + b_n) < c + \frac{1}{n} \log 2$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} a, b &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) \leq c \\ \therefore \max\{a, b\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) \square \end{aligned}$$

Demostración. (del teorema) Sea $i = 1$ ó 2 . Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$; podemos definir $\mathcal{U}_i \in \mathcal{C}(M_i)$ por $\mathcal{U}_i = \{U \cap M_i; U \in \mathcal{U}\}$. De aquí se deduce que $N(\mathcal{U}_i) \leq N(\mathcal{U})$.

Si $\mathcal{U}, \mathcal{B} \in \mathcal{C}(M)$ se cumple $(\mathcal{U} \vee \mathcal{B})_i = \mathcal{U}_i \vee \mathcal{B}_i$.

En efecto, $A_i \in (\mathcal{U} \vee \mathcal{B})_i \Leftrightarrow \exists n \quad A \in \mathcal{U}, B \in \mathcal{B}$ tales que:

$$A_i = (A \cap B) \cap M_i = (A \cap M_i) \cap (B \cap M_i) \in \mathcal{U}_i \vee \mathcal{B}_i.$$

$$\therefore (\mathcal{U} \vee \mathcal{B})_i \subseteq \mathcal{U}_i \vee \mathcal{B}_i \tag{i}$$

Por otro lado si

$$A \in \mathcal{U}, B \in \mathcal{B} \quad \text{entonces} \quad (A \cap M_i) \cap (B \cap M_i) = (A \cap B) \cap M_i \in (\mathcal{U} \vee \mathcal{B})_i.$$

Esto es:

$$\mathcal{U}_i \vee \mathcal{B}_i \subseteq (\mathcal{U} \vee \mathcal{B})_i. \quad (\text{ii})$$

De (i) y (ii) se sigue que

$$(\mathcal{U} \vee \mathcal{B})_i = \mathcal{U}_i \vee \mathcal{B}_i$$

Denotaremos ahora por φ_i la restricción de φ a M_i . Tenemos que $\varphi_i : M_i \rightarrow M_i$, $i = 1, 2$. Probamos ahora que se cumple que: $\varphi_i^{-1}(\mathcal{U}_i) = (\varphi^{-1}(\mathcal{U}))_i$.

En efecto, sea $A \in \varphi^{-1}(\mathcal{U})$; entonces $\exists A' \in \mathcal{U}$ tal que $A = \varphi^{-1}(A')$. Sea $A_i = A \cap M_i = \varphi^{-1}(A') \cap M_i = \varphi^{-1}(A') \cap \varphi_i^{-1}(M_i) = \varphi_i^{-1}(A' \cap M_i) \in \varphi_i^{-1}(\mathcal{U}_i) \quad \therefore (\varphi^{-1}(\mathcal{U}))_i \subseteq \varphi_i^{-1}(\mathcal{U}_i)$. Si $A \in \varphi_i^{-1}(\mathcal{U}_i)$, entonces $A = \varphi_i^{-1}(A' \cap M_i) = \varphi^{-1}(A') \cap \varphi_i^{-1}(M_i) = \varphi^{-1}(A') \cap M_i \in (\varphi^{-1}(\mathcal{U}))_i$. Así $\varphi_i^{-1}(\mathcal{U}_i) = (\varphi^{-1}(\mathcal{U}))_i$.

Sea ahora $\mathcal{U}^i \in \mathcal{C}(M_i)$ entonces existe cubrimiento $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$ tal que $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}^i$. En efecto, basta considerar $\mathcal{U} = \{A \cup (M \setminus M_i); A \in \mathcal{U}^i\}$.

Tenemos:

$$\begin{aligned} N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi_i^{-k}(\mathcal{U}_i) \right) &= N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} (\varphi^{-k}(\mathcal{U}))_i \right) = \\ &= N \left(\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U}) \right)_i \right) \leq N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U}) \right) \end{aligned}$$

Esto implica $h(\varphi_i, \mathcal{U}_i) \leq h(\varphi, \mathcal{U})$ y de aquí:

$$h(\varphi_i) \leq h(\varphi) \quad i = 1, 2 \quad (1.9)$$

Si $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$, entonces vale:

$$N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U}) \right) \leq N \left(\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U}) \right)_1 \right) + N \left(\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U}) \right)_2 \right).$$

Como:

$$N \left(\bigvee_{k=1}^{n-1} (\varphi^{-k}(\mathcal{U}))_i \right) = N \left(\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U}) \right)_i \right).$$

Entonces:

$$N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U}) \right) \leq N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} (\varphi^{-k}(\mathcal{U}))_1 \right) + N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} (\varphi^{-k}(\mathcal{U}))_2 \right).$$

Esto es:

$$N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U}) \right) \leq N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi_1^{-k}(\mathcal{U}_1) \right) + N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi_2^{-k}(\mathcal{U}_2) \right)$$

Así:

$$\log N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi^{-k}(\mathcal{U}) \right) \leq \log \left(N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi_1^{-k}(\mathcal{U}_1) \right) + N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi_2^{-k}(\mathcal{U}_2) \right) \right).$$

Aplicando el lema a:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi_1^{-k}(\mathcal{U}_1) \right) \right) \text{ y } b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi_2^{-k}(\mathcal{U}_2) \right) \right) \text{ tenemos que:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi_1^{-k}(\mathcal{U}_1) \right) + N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \varphi_2^{-k}(\mathcal{U}_2) \right) \right) &= \max \{a, b\} = \\ &= \max \{h(\varphi_1, \mathcal{U}_1), h(\varphi_2, \mathcal{U}_2)\} \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$h(\varphi, \mathcal{U}) \leq \max \{h(\varphi_1, \mathcal{U}_1), h(\varphi_2, \mathcal{U}_2)\}$$

De aquí

$$h(\varphi) \leq \max \{h(\varphi_1), h(\varphi_2)\} \quad (1.10)$$

Lo probado en (1.9) y (1.10), dice que $h(\varphi) = \max \{h(\varphi_1), h(\varphi_2)\}$ \square

Vamos ahora a ver el comportamiento de la entropía cuando pasamos al cociente. Para ello probamos el siguiente:

Teorema 4. Sea \sim una relación de equivalencia en M . Sea $\varphi: M \rightarrow M$ una aplicación continua tal que $x \sim y$ en M implica $\varphi(x) \sim \varphi(y)$ en M . Sea $\tilde{\varphi}: M/\sim \rightarrow M/\sim$ la aplicación cuociente $\tilde{\varphi}([x]) = [\varphi(x)]$ y $\pi: M \rightarrow M/\sim$ la proyección. Se cumple que $h(\tilde{\varphi}) \leq h(\varphi)$.

Demostración. Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M/\sim)$, entonces $\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \{\pi^{-1}(U); U \in \mathcal{U}\}$ es un cubrimiento por abiertos de M y es claro que $N(\pi^{-1}(\mathcal{U})) = N(\mathcal{U})$. De esta relación y del hecho que $N(\pi^{-1}(\mathcal{U} \vee \mathcal{B})) = N(\pi^{-1}(\mathcal{U}) \vee \pi^{-1}(\mathcal{B}))$ concluimos que:

$$h(\varphi, \pi^{-1}(\mathcal{U})) = h(\tilde{\varphi}, \mathcal{U}).$$

De esta forma

$$\begin{aligned} h(\tilde{\varphi}) &= \sup \{h(\tilde{\varphi}, \mathcal{U}); \mathcal{U} \in \mathcal{C}(M/\sim)\} = \\ &= \sup \{h(\varphi, \pi^{-1}(\mathcal{U})), \mathcal{U} \in \mathcal{C}(M/\sim)\} \leq \\ &\leq \sup \{h(\varphi, A_0); A_0 \in \mathcal{C}(M)\} = h(\varphi). \square \end{aligned}$$

1.3. Cálculo de la Entropía en Espacios Métricos

Suponemos que (M, d) es un espacio métrico compacto.

Definición 8. 1) Para $A \subset M$, se define el **diámetro** del conjunto A como $d(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$

2) Para $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$ se define $d(\mathcal{U}) = \sup \{d(U); U \in \mathcal{U}\}$

Observación 2. Si \mathcal{U}, \mathcal{B} son cubrimientos abiertos de M tales que $\mathcal{U} < \mathcal{B}$ entonces $d(\mathcal{B}) \leq d(\mathcal{U})$.

En efecto, $\forall B \in \mathcal{B} \exists U(B) \in \mathcal{U}$ tal que $B \subset U(B)$ entonces $d(B) \leq d(U(B))$. Así $d(\mathcal{B}) = \sup \{d(B); B \in \mathcal{B}\} \leq \sup \{d(U(B)); B \in \mathcal{B}\} \leq d(\mathcal{U})$.

Probemos, ahora, el siguiente resultado:

Lema 4. (del cubrimiento de Lebesgue) Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$, entonces existe $\varepsilon(\mathcal{U}) > 0$ tal que si $x \in M$ y $B_r(x) = \{y \in M; d(x, y) < r\}$ satisface $r < \varepsilon(\mathcal{U})$, entonces $\exists U \in \mathcal{U}$ tal que $B_r(x) \subset U$.

Demostración. Como $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$ existe subcubrimiento finito $\{U_1, \dots, U_n\}$. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, sea $f_i: M \rightarrow [0, \infty[$ la función continua $f_i(x) = d(x, M \setminus U_i)$. Como $(M \setminus U_i)$ es cerrado, se cumple que $f_i(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (M \setminus U_i)$.

Como para cada $x \in M$ existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $x \in U_{i_0}$ entonces $f_{i_0}(x) > 0$ (*).

Sea $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \max \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$. De acuerdo a (*) se tiene que $f(x) > 0 \quad \forall x \in M$. Como f es una función continua, entonces $f(M) = [\delta_1, \delta_2]$ es un intervalo cerrado con $\delta_1 = \inf \{f(x); x \in M\} > 0$.

Sea $x \in M$ cualquiera y $0 < \delta < \delta_1$. Se cumple $f(x) \geq \delta$. Esto es, hay $l_x \in \{1, \dots, n\}$ tal que $f_{l_x}(x) \geq \delta$. Esto implica que $d(x, M \setminus U_{l_x}) \geq \delta$. Luego, para cada $y \in B_\delta(x)$ debe ser que $y \in U_{l_x}$ pues $d(x, y) < \delta$.

Concluimos que $B_\delta(x) \subset U_{l_x}$. □

Corolario 2. Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{C}(M)$ existe $\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{U}) > 0$ tal que si A es un conjunto abierto con $d(A) = \sup \{d(x, y); x, y \in A\} < \varepsilon$, entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \subset U$.

Demostración. Notamos que $A \subset B_{d(A)}(x)$ para cada $x \in A$. De aquí basta considerar $d(A) < \delta_1$ como en el lema del cubrimiento de Lebesgue. □

Observamos que si $0 < \delta < \varepsilon(\mathcal{U})$ entonces δ satisface la propiedad. A saber, si $A \subset M$ es un conjunto tal que $d(A) < \delta$ entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \subset U$. En efecto, como $\delta < \varepsilon(\mathcal{U})$ sirve el mismo U del corolario 2. Esto nos permite la siguiente definición:

Definición 9. Se define el *número de Lebesgue* de \mathcal{U} como:

$$\delta(\mathcal{U}) = \sup \{ \varepsilon(\mathcal{U}), \varepsilon(\mathcal{U}) \text{ satisface el corolario 2 anterior} \}.$$

Corolario 3. Sea $\mathcal{U}, \mathcal{B} \in \mathcal{C}(M)$. Sea $d(\mathcal{U}) = \sup \{ d(U); U \in \mathcal{U} \}$. Si ocurre que $d(\mathcal{U}) < \delta(\mathcal{B})$, entonces $\mathcal{B} < \mathcal{U}$.

Demostración. Para cada $U \in \mathcal{U}$ vale $d(U) < \delta(\mathcal{B})$, entonces $\exists B(U) \in \mathcal{B}$ tal que $U \subset B(U)$, esto es, $\mathcal{B} < \mathcal{U}$. \square

Corolario 4. Sea $\{\mathcal{U}_n\} \subset \mathcal{C}(M)$ una sucesión de cubrimientos abiertos tales que:

$$(1) \mathcal{U}_n < \mathcal{U}_{n+1}$$

$$(2) d(\mathcal{U}_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Entonces $\{\mathcal{U}_n\}$ es una sucesión refinante.

Demostración. La primera propiedad es la primera parte de la definición de una sucesión refinante.

Si $\mathcal{B} \in \mathcal{C}(M)$ es una cubrimiento abierto, entonces $\delta(\mathcal{B}) > 0$ y $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $d(\mathcal{U}_n) < \delta(\mathcal{B})$. De acuerdo al corolario 3, $\mathcal{B} < \mathcal{U}_n$ (que es la segunda propiedad de un cubrimiento refinante). \square

En particular, $h_{top}(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(\varphi, \mathcal{U}_n)$ para cualquier $\varphi: M \rightarrow M$ continua y cualquier sucesión de cubrimientos $\{\mathcal{U}_n\}$ como en el corolario.

Ejemplos de sucesiones que satisfacen el corolario.

1. Si consideramos $\mathcal{U}_n = \left\{ B_r(x); x \in M, 2r < \frac{1}{n} \right\}$ el conjunto de todas las bolas abiertas de diámetro $d = 2r < \frac{1}{n}$ entonces la sucesión $\{\mathcal{U}_n; n \in \mathbb{N}\}$ es refinante.

En efecto, si $B_r(x) \in \mathcal{U}_{n+1}$ entonces $2r < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ y $B_r(x) \in \mathcal{U}_n$, por lo tanto $\mathcal{U}_n < \mathcal{U}_{n+1}$.

Por otro lado $d(\mathcal{U}_n) = \sup \{ d(U); U \in \mathcal{U}_n \} = \frac{1}{n}$ y así $d(\mathcal{U}_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

2. Sea $\{\mathcal{B}_n\} \subset \mathcal{C}(M)$ una sucesión de cubrimientos abiertos tales que $d(\mathcal{B}_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Sea $\mathcal{U}_n = \bigvee_{k=1}^n \mathcal{B}_k$. Como $\mathcal{B}_n < \mathcal{U}_n$ entonces $d(\mathcal{U}_n) < d(\mathcal{B}_n)$ y luego, $d(\mathcal{U}_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Además, como $\mathcal{U}_n < \mathcal{U}_{n+1}$ el corolario 4 garantiza que $\{\mathcal{U}_n\}$ es una sucesión refinante. O sea, a partir de cualquier sucesión de cubrimientos abiertos $\{\mathcal{B}_n\} \subset \mathcal{C}(M)$ tales que $d(\mathcal{B}_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, se puede construir una sucesión refinante.

1.4. Un Resultado de R. Bowen

En muchos trabajos, relativos a la entropía, se usa la definición de R. Bowen. En esta sección daremos esta definición, veremos que coincide con la que hemos dado y probaremos el siguiente resultado: sean (X, d) , (Y, d') espacios métricos compactos y $f: X \rightarrow X$, $g: Y \rightarrow Y$ aplicaciones continuas. Sea $\pi: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ continua y sobreyectiva tal que $\pi \circ f = g \circ \pi$, entonces:

Teorema 5 (Bowen). $h_{top}(g) \leq h_{top}(f) \leq h_{top}(g) + \sup \{h_{top}(f, \pi^{-1}(y)), y \in Y\}$.

Este resultado se puede leer de la siguiente forma: π es un fibrado de X sobre Y (para cada $y \in Y$ su fibra es $\pi^{-1}(\{y\})$) entonces la entropía de f es mayor que la entropía del factor g pero menor que ésta sumada la mayor entropía en las fibras. En particular, si el fibrado es finito las entropías coinciden.

Aquí hay algunas cosas que aclarar (en particular ¿qué significa $h_{top}(f, \pi^{-1}(y))$?). Para ello introduciremos una segunda definición de entropía dada por Bowen. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow X$ continua.

Definición 10. a) Se dice que un subconjunto $E \subset X$ es (n, ε) -separado si para cualquier par de puntos distintos $x, y \in E$, existe un entero j , $0 \leq j < n$ tal que $d(f^j(x), f^j(y)) > \varepsilon$.

b) Se dice que un subconjunto $F \subset X$, (n, ε) -genera un subconjunto $K \subset X$, si para cada $x \in K$ existe $y \in F$ tal que $d(f^j(x), f^j(y)) \leq \varepsilon$ para $0 \leq j < n$.

Para $K \subset X$ compacto denotamos por

$$r_n(\varepsilon, K) = \text{mín} \{ \#(F); F(n, \varepsilon)\text{-genera } K \}$$

Denotamos por $s_n(\varepsilon, K) = \text{máx} \{ \#(E), E \text{ es } (n, \varepsilon)\text{-separado y } E \subset K \}$.

Se definen

$$r(\varepsilon, K) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(r_n(\varepsilon, K))$$

$$s(\varepsilon, K) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s_n(\varepsilon, K))$$

Lema 5. 1. Para $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ valen $r(\varepsilon_2, K) \leq r(\varepsilon_1, K)$ y $s(\varepsilon_2, K) \leq s(\varepsilon_1, K)$

2. $r_n(\varepsilon, K) \leq s_n(\varepsilon, K) \leq r_n(\frac{1}{2}\varepsilon, K) < \infty$

Demostración. 1. Sea $F \subset X$ un conjunto que (n, ε_1) -genera a K . Entonces $\forall x \in K \exists y \in F$ tal que $d(f^i(x), f^i(y)) \leq \varepsilon_1$, $0 \leq i < n \therefore d(f^i(x), f^i(y)) \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$,

así que $F(n, \varepsilon_2)$ -genera K . Luego, si

$$G_n(\varepsilon, K) = \{F \subset X; F(n, \varepsilon)\text{-genera } K\}$$

entonces

$$\begin{aligned} G_n(\varepsilon_1, K) &\subseteq G_n(\varepsilon_2, K) \\ \therefore \text{mín} \{\#(F), F \in G_n(\varepsilon_2, K)\} &\leq \text{mín} \{\#(F); F \in G_n(\varepsilon_1, K)\} \\ &\Rightarrow r_n(\varepsilon_2, K) \leq r_n(\varepsilon_1, K) \end{aligned}$$

de aquí

$$\frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon_2, K) \leq \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon_1, K)$$

y

$$r(\varepsilon_2, K) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon_2, K) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon_1, K) = r(\varepsilon_1, K)$$

Esto es:

$$r(\varepsilon_2, K) \leq r(\varepsilon_1, K).$$

Sea ahora $E \subset K$ un conjunto (n, ε_2) -separado, entonces para $x, y \in E$, $x \neq y \exists j$ tal que $0 \leq j < n$ y $d(f^j(x), f^j(y)) > \varepsilon_2$. Como $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ vale $d(f^j(x), f^j(x)) > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$, $\therefore E$ es (n, ε_1) -separado.

Si $S_n(\varepsilon, K) = \{E \subset K; E \text{ es } (n, \varepsilon)\text{-separado}\}$ entonces

$$S_n(\varepsilon_2, K) \subset S_n(\varepsilon_1, K).$$

Así

$$\begin{aligned} s_n(\varepsilon_1, K) &= \text{máx} \{\#(E); E \in S_n(\varepsilon_1, K)\} \geq \\ &\geq \text{máx} \{\#(E); E \in S_n(\varepsilon_2, K)\} = s_n(\varepsilon_2, K) \\ \therefore s(\varepsilon_1, K) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s_n(\varepsilon_1, K)) \geq \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s_n(\varepsilon_2, K)) = s(\varepsilon_2, K) \end{aligned}$$

2. Consideremos U_1, U_2, \dots, U_p un cubrimiento por abiertos de diámetro ε de X . Sea $E \in S_n(\varepsilon, K)$ un conjunto (n, ε) -separado. Afirmamos que $\#(E) \leq p^n$. En efecto, formemos los conjuntos $\cap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(U_{i_j})$ donde $i_j \in \{1, 2, \dots, p\}$. Tenemos p^n de estos conjuntos. Sea E un conjunto que es (n, ε) separado entonces $\#(E) \leq p^n$. En efecto, si $\#(E) > p^n$ entonces hay $x, y \in E$, $x \neq y$ tal que $x, y \in \cap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(U_{i_j})$ para alguna sucesión $(i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$ de $\{1, 2, \dots, p\}$. Así $d(f^j(x), f^j(y)) < \varepsilon$, $0 \leq j < n$ y esto no puede ocurrir ya que E es (n, ε) separado.

Lo anterior implica que

$$s_n(\varepsilon, K) = \max \{ \#(E), E \subset K \text{ es } (n, \varepsilon)\text{-separado} \}$$

satisface $s_n(\varepsilon, K) \leq p^n$, para cualquier cerrado $K \subset X$.

Como $s_n(\varepsilon, K)$ es acotada, existe $E \subset K$ que es (n, ε) -separado tal que $\#(E) = s_n(\varepsilon, K)$. Afirmamos que dado $x \in K \exists y \in E$ tal que $d(f^j(x), f^j(y)) \leq \varepsilon$ para $0 \leq i < n$. En efecto, si no $\forall y \in E \exists i_0, 0 \leq i_0 < n$ tal que $d(f^{i_0}(x), f^{i_0}(y)) > \varepsilon$. Entonces $E' = E \cup \{x\}$ es un conjunto (n, ε) -separado en K tal que $\#(E') = \#(E) + 1$

$$\therefore \#(E') > s_n(\varepsilon, K) = \#(E) \quad (\rightarrow \leftarrow).$$

Tenemos entonces que $E(n, \varepsilon)$ -genera a K . Como

$$r_n(\varepsilon, K) = \min \{ \#(E); E(n, \varepsilon)\text{-genera } K \}$$

entonces

$$r_n(\varepsilon, K) \leq \#(E) = s_n(\varepsilon, K) \tag{1.11}$$

Sea ahora $F \subset X$ un conjunto que $(n, \frac{1}{2}\varepsilon)$ -genera K . Sea $E \subset K$ un conjunto (n, ε) -separado. Para $x \in E$ existe $y = T(x) \in F$ tal que $d(f^i(x), f^i(T(x))) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ para $0 \leq i < n$.

Afirmación 1. $T: E \rightarrow F$ es inyectiva. Esto es, si $x_1 \neq x_2$ en E , entonces $T(x_1) \neq T(x_2)$

De hecho, si $T(x_1) = T(x_2)$, entonces

$$\begin{aligned} d(f^i(x_1), f^i(x_2)) &\leq d(f^i(x_1), f^i(T(x_1))) + d(f^i(T(x_2)), f^i(x_2)) \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \text{ para } 0 \leq i < n \end{aligned}$$

Esto no puede ser porque $x_1 \neq x_2$ y E es (n, ε) -separado. Luego, $T: E \rightarrow F$ es inyectiva. En particular, $\#(E) \leq \#(F)$

$$\therefore s_n(\varepsilon, K) \leq r_n\left(\frac{1}{2}\varepsilon, K\right) \quad (1.12)$$

de (1.11) y (1.12)

$$r_n(\varepsilon, K) \leq s_n(\varepsilon, K) \leq \frac{1}{2}r_n(\varepsilon, K)$$

Corolario 5. (de la parte 2. del Lema)

1. $r(\varepsilon, K) \leq s(\varepsilon, K) \leq r\left(\frac{1}{2}\varepsilon, K\right)$
2. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(\varepsilon, K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(\varepsilon, K)$.

Demostración. La parte 1), sigue directamente de la parte 2), del lema.

La parte 2), del corolario sigue de la parte 1), del corolario. \square

Definición 11. 1. Sea $f: X \rightarrow X$ continua en el espacio métrico compacto (X, d) . Sea $K \subset X$ un subconjunto compacto. La entropía topológica (según Bowen) de f con respecto a K es el valor común:

$$h_t(f, K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(\varepsilon, K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(\varepsilon, K).$$

2. La entropía topológica (según Bowen) de f es el valor $h_t(f) = h_t(f, X)$.

Proposición 1. Para (X, d) compacto y $f: X \rightarrow X$ continua se cumple que $h_t(f) = h_{top}(f)$. (Aquí $h_{top}(f)$ es nuestra $h(f)$ definida en la sección 1.1.1)

Para probar esto, primero veremos otra forma de calcular $h(f, \mathcal{A})$ para un cubrimiento abierto \mathcal{A} de X .

Un subconjunto $E \subset \underbrace{\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}}_{n\text{-veces}}$ se llama un n -cubrimiento para (f, \mathcal{A}) si

$\forall z \in X$ existe $(A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) \in E$ tal que $f^k(z) \in A_k$ para $0 \leq k < n$.

Sea

$$M_n(f, \mathcal{A}) = \text{mín} \left\{ \#(E), E \subset \underbrace{(\mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A})}_{n\text{-veces}} \text{ es un } n\text{-cubrimiento de } (f, \mathcal{A}) \right\}$$

Lema 6. $h_{top}(f, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n(f, \mathcal{A})$

Demostración. Asociado con $(A_0, \dots, A_{n-1}) \in E$ tenemos $A_0 \cap f^{-1}(A_1) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(A_{n-1}) \in \mathcal{A} \vee f^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{A})$ y si colocamos

$$\mathcal{U}'_n = \left\{ A_0 \cap f^{-1}(A_1) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(A_{n-1}); (A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) \in E \right\}$$

donde E es un n cubrimiento tal que $M_n(f, \mathcal{A}) = \#(E)$; tenemos un subcubrimiento minimal de $\mathcal{A} \vee f^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{A})$

$$\begin{aligned} \therefore \#(E) &= \#(\mathcal{U}'_n) = N(\mathcal{A} \vee f^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{A})) \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n(f, \mathcal{A}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \#(E) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(N(\mathcal{A} \vee f^{-1}(\mathcal{A}) \vee \dots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{A}))) = h_{top}(f, \mathcal{A}) \quad \square \end{aligned}$$

Demostración. (de la proposición) Sea \mathcal{A} un cubrimiento finito de X y sea $\beta > 0$ el número de Lebesgue de \mathcal{A} (o sea $\forall B_\beta(x) \exists A(x) \in \mathcal{A}$ tal que $\overline{B_\beta(x)} \subset A(x)$).

Sea Q un conjunto (n, β) -separado maximal (o sea $\#(Q) = s_n(\beta, X)$). Para $z \in Q$, sea $B(z) = (A_0(z), A_1(z), \dots, A_{n-1}(z))$ con $A_i(z) \in \mathcal{A}$ tal que $\overline{B_\beta(f^k(z))} \subset A_k(z)$ para $0 \leq k < n$. Sea $E_n = \{B(z); z \in Q\}$.

Afirmación 2. E_n es un n -cubrimiento para (f, \mathcal{A}) .

En efecto, para cada $x \in X$ existe $z_x \in Q$ tal que $d(f^k(x), f^k(z_x)) \leq \beta$, para $0 \leq k < n$. Si así no fuera, habría $x \in X$ tal que para cada $z \in Q$ se cumpliría $d(f^k(x), f^k(z)) > \beta$ para algún $0 \leq k < n$, i. e. $Q \cup \{x\}$ sería (n, β) -separado contradiciendo la maximalidad de Q , \therefore para cada $x \in X$ existe $z_x \in Q$ tal que $d(f^k(x), f^k(z_x)) \leq \beta$. Como $d(f^k(x), f^k(z_x)) \leq \beta$ para $0 \leq k < n$ entonces $f^k(x) \in B_\beta(f^k(z_x)) \subset A_k(z_x) \Rightarrow$ en E_n existe $B(z_x) = (A_0(z_x), \dots, A_{n-1}(z_x))$ tal que $f^k(x) \in A_k(z_x)$ i. e. E_n es un n -cubrimiento para (f, \mathcal{A}) . Esto implica que $M_n(f, \mathcal{A}) \leq \#(E_n) = \#(Q) = s_n(\beta, X)$. Así que

$$h_{top}(f, \mathcal{A}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s_n(\beta, X) = s(\beta, X).$$

Haciendo que $\beta \rightarrow 0$ se tiene:

$$h_{top}(f) = \sup \{h_{top}(f, \mathcal{A}), \mathcal{A} \text{ es cubrimiento de } X\} \leq \lim_{\beta \rightarrow 0} s(\beta, X) = h_t(f).$$

Luego hemos probado que $h_{top}(f) \leq h_t(f)$.

Sea $E \subset \underbrace{\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}}_{n\text{-veces}}$ un n -cubrimiento para (f, \mathcal{A}) y sea R un conjunto $(n, d(\mathcal{A}))$ -separado (Aquí $d(\mathcal{A}) = \sup \{d(C); C \in \mathcal{A}\}$ y $d(C) = \sup \{d(x, y); x, y \in C\}$). Dado $x \in R$ sea $g(x) = (A_0(x), \dots, A_{n-1}(x)) \in E$ tal que $f^k(x) \in A_k(x)$ para $0 \leq k < n$.

Si ocurre que $g(x) = g(y)$ entonces $A_i(x) = A_i(y)$ para $0 \leq i \leq n$ y se cumple que $d(f^k(x), f^k(y)) \leq d(A_k(x)) \leq d(\mathcal{A})$, por lo tanto R no es $(n, d(\mathcal{A}))$ -separado ($\rightarrow \leftarrow$).

Luego, si $g(x) = g(y) \Rightarrow x = y$, es decir $g: R \rightarrow E$ es una inyección y tenemos que $\#(E) \geq \#(R)$ de esta forma $M_n(f, \mathcal{A}) \geq s_n(d(\mathcal{A}), X)$, $h_{top}(f, \mathcal{A}) \geq s(d(\mathcal{A}), X)$.

Así, $\sup \{h_{top}(f; \mathcal{A})\} \geq \sup \{s(d(\mathcal{A}), X); \mathcal{A} \text{ es un cubrimiento abierto de } X\} = h_t(f)$

Esto es $h_{top}(f) \geq h_t(f)$. Esto concluye la demostración de la proposición. \square

Vamos ahora a probar el resultado de Bowen usando $h_t(f)$ en vez de $h_{top}(f)$.

Sabemos que (X, d) es compacto y $\pi: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ es continua y sobreyectiva. Así que π es uniformemente continua. Esto es: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica $d'(\pi(x), \pi(y)) < \varepsilon$. En particular esto implica que si $v, w \in X$ son tales que $d'(\pi(v), \pi(w)) > \varepsilon$, entonces debe ser $d(v, w) > \delta$.

Sea $E_n \subset Y$ un conjunto (n, ε) -separado de cardinalidad máxima, i. e. $s_n(\varepsilon, Y, g) = \#(E_n)$. Sea $\tilde{E}_n \subset X$ un conjunto que contiene una, y sólo una, preimagen de cada $y \in E_n$. Tenemos que \tilde{E}_n es (n, δ) -separado y $\#(\tilde{E}_n) = \#(E_n)$, $\therefore s_n(\delta, X, f) \geq s_n(\varepsilon, Y, g)$. De aquí

$$\begin{aligned} s(\delta, X, f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log s_n(\delta, X, f) \geq \\ &\geq s(\varepsilon, Y, g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon, Y, g) \end{aligned}$$

y entonces

$$\sup \{s(\delta, X, f); \delta > 0\} \geq \sup \{s(\varepsilon, Y, g); \varepsilon > 0\}$$

Esto es

$$h_t(f) \geq h_t(g).$$

Resta ahora probar que

$$h_t(f) \leq h_t(g) + \sup \{h_t(f, \pi^{-1}(y)); y \in Y\}.$$

Sea $a = \sup \{h_t(f, \pi^{-1}(y)); y \in Y\}$. Si $a = \infty$, entonces la desigualdad es siempre verdadera.

Suponemos que $a < \infty$. Por definición

$$h_t(f, \pi^{-1}(y)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(\varepsilon, \pi^{-1}(y)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon, \pi^{-1}(y)) \right),$$

donde $r_n(\varepsilon, \pi^{-1}(y))$ es la cardinalidad mínima de un subconjunto de $\pi^{-1}(y)$ que (n, ε) -genera $\pi^{-1}(y)$ con respecto a f . Así que

$$h_t(f, \pi^{-1}(y)) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon, \pi^{-1}(y)) = r(\varepsilon, \pi^{-1}(y)), \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (1.13)$$

Fijemos un $\varepsilon > 0$ y escojamos un $\alpha > 0$. Por definición de a se tiene $a \geq h_t(f, \pi^{-1}(y)) \forall y \in Y$, luego $a + \alpha \geq h_t(f, \pi^{-1}(y)) + \alpha, \forall y \in Y$. Por (1.13) $\forall y \in Y$ encontramos $m(y) \in \mathbb{N}$ tal que

$$h_t(f, \pi^{-1}(y)) + \alpha \geq \frac{1}{m(y)} \log r_{m(y)}(\varepsilon, \pi^{-1}(y))$$

Así

$$a + \alpha \geq h_t(f, \pi^{-1}(y)) + \alpha \geq \frac{1}{m(y)} \log r_{m(y)}(\varepsilon, \pi^{-1}(y)) \quad \forall y \in Y \quad (1.14)$$

Para cada $y \in Y$ sea $E_y \subset \pi^{-1}(y)$ un subconjunto que $(m(y), \varepsilon)$ -genera $\pi^{-1}(y)$ con respecto a f y tal que $\#(E_y) = r_{m(y)}(\varepsilon, \pi^{-1}(y))$.

Para $z \in E_y$ sea $D(z, 2\varepsilon, f) = \{w \in X; d(f^i(z), f^i(w)) \leq 2\varepsilon\}$ para $0 \leq i < m(y)$. Definamos

$$U_y = \bigcup_{z \in E_y} D(z, 2\varepsilon, f).$$

Afirmación 3. U_y es una vecindad de $\pi^{-1}(y)$ en X .

Demostración. $\forall x \in \pi^{-1}(y) \exists z \in E_y$ tal que $d(f^i(x), f^i(z)) < \varepsilon$ para $0 \leq i < m(y)$, entonces $x \in D(z, 2\varepsilon, f)$ y $\therefore \pi^{-1}(y) \subset U_y$ que es un conjunto abierto.

Sea ahora $W_y \subset Y$ una vecindad abierta de y en Y tal que $\pi^{-1}(W_y) \subset U_y$. $\{W_y; y \in Y\}$ es un cubrimiento abierto de Y , que es compacto, y luego existen y_1, y_2, \dots, y_p en Y tal que $\beta = \{W_{y_1}, W_{y_2}, \dots, W_{y_p}\}$ es un cubrimiento finito de Y . Supongamos que $\delta = \delta(\beta)$ es el número de Lebesgue de β (i. e. $\forall B_\delta(y)$ bola abierta de centro $y \in Y$ y radio δ vale $\overline{B_\delta(y)} \subset W_k$ para algún $W_k \in \beta$).

Sea $F \subset X$ un conjunto (n, ε) -separado con respecto a f tal que $\#(F) = s_n(4\varepsilon, X, f)$. Queremos estimar $\#(F)$. Consideremos $E_n \subset Y$ un conjunto que (n, δ) -genera Y con respecto a g tal que $\#(E_n) = r_n(\delta, Y, g)$.

Para cada $y \in E_n$ y para cada entero j , escojamos un punto

$$c_j(y) \in \{y_1, y_2, \dots, y_p\} \quad \text{tal que} \quad \overline{B_\delta(g^j(y))} \subset W_{c_j(y)}.$$

Consideremos ahora la siguiente sucesión de enteros $(t_s(y))$ definida recursivamente por $t_s(y) = 0$, $t_{s+1}(y) = t_s(y) + m(c_{t_s(y)}(y))$.

Sea $l = l(y)$ tal que

$$\sum_{s=0}^{l-1} m(c_{t_s(y)}(y)) = t_l(y) < n \leq t_l(y) + m(c_{t_l(y)}(y)) = t_{l+1}(y) \quad (1.15)$$

Ahora, para cada $y \in E_n$ y $x_1 \in E_{c_{t_1(y)}(y)}$, $x_2 \in E_{c_{t_2(y)}(y)}$, \dots , $x_l \in E_{c_{t_l(y)}(y)}$, consideremos el conjunto

$$V(y; x_1, x_2, \dots, x_l) = \left\{ x \in X; d(f^{t+t_s(y)}(x), f^t(x_s)) < 2\varepsilon, \right. \\ \left. \text{para } 0 \leq t < m(c_{t_s(y)}(y)) \text{ y } 1 \leq s \leq l = l(y) \right\}.$$

Afirmamos lo siguiente:

1. la familia de conjuntos

$$\mathcal{V} = \left\{ V(y, x_1, x_2, \dots, x_l); y \in E_n, x_s \in E_{c_{t_s(y)}(y)}, 1 \leq s \leq l(y) \right\}$$

es un cubrimiento abierto de X .

2. Cualquier conjunto $(n, 4\varepsilon)$ -separado en X intersecta cada elemento de \mathcal{V} en a lo más un punto.

dem 1. Sea $x \in X$ y consideremos $\pi(x) \in Y$. Como $E_n(n, \delta)$ -genera Y , existe $y \in E_n$ tal que $d'(g^i(y), g^i(\pi(x))) \leq \delta$ para $0 \leq i < r$. Entonces:

$$\begin{aligned}
& \pi \circ f^{t_s(y)}(x) = g^{t_s(y)}(\pi(x)) \in \overline{B_\delta(g^{t_s(y)}(y))} \subset W_{c_{t_s(y)}(y)} \\
& \therefore \pi(f^{t_s(y)}(x)) \in W_{c_{t_s(y)}(y)} \Rightarrow f^{t_s(y)}(x) \in \pi^{-1}(W_{c_{t_s(y)}(y)}) \subset \\
& \quad \subset U_{c_{t_s(y)}(y)} \subset \bigcup_{z \in E_{c_{t_s(y)}(y)}} D_{m(c_{t_s(y)}(y))}(2, 2\varepsilon, f) \\
& \therefore \exists x_s \in E_{c_{t_s(y)}(y)} \text{ tal que } f^{t_s(y)}(x) \in D_{m(c_{t_s(y)}(y))}(x_s, 2\varepsilon, f) \\
& \text{i. e. } d(f^t(f^{t_s(y)}(x)), f^t(x_s)) < 2\varepsilon \text{ para } 0 \leq t < m(c_{t_s(y)}(y)) \\
& \therefore x \in V(y; x_1, x_2, \dots, x_{l(y)})
\end{aligned}$$

dem 2. Sean $z, w \in V(y; x_1, x_2, \dots, x_{l(y)})$, entonces

$$\begin{aligned}
d(f^{t+t_s(y)}(z), f^{t+t_s(y)}(w)) & \leq d(f^{t+t_s(y)}(z), f^t(x_s)) + d(f^t(x_s), f^{t+t_s(y)}(w)) \\
& \leq 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon, \text{ para } 0 \leq t < m(c_{t_s(y)}(y)) \text{ y } 1 \leq s < l(y).
\end{aligned}$$

O sea $d(f^i(z), f^i(w)) \leq 4\varepsilon \forall 0 \leq i < n$. \therefore si un conjunto $(n, 4\varepsilon)$ -separado para f intersecta un elemento de \mathcal{V} , debe hacerlo en a lo más un punto que es lo que afirma 2.

De 2, se sigue que si $F \subset X$ es un conjunto $(n, 4\varepsilon)$ -separado, entonces $\#(F) \leq \#(\mathcal{V})$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} & = \bigcup_{y \in E_n} \mathcal{V}_y, \quad \mathcal{V}_y = \left\{ V(y; x_1, x_2, \dots, x_{l(y)}); x_s \in E_{c_{t_s(y)}(y)}, 1 \leq s \leq l(y) \right\} \\
\therefore \#(\mathcal{V}) & \leq \sum_{y \in E_n} \#(\mathcal{V}_y) \leq \sum_{y \in E_n} \prod_{s=0}^{l(y)} \text{card}(E_{c_{t_s(y)}(y)}) = \\
& = \prod_{s=0}^{l(y)} r_{m(c_{t_s(y)}(y))}(\varepsilon, \pi^{-1}(c_{t_s(y)}(y)))
\end{aligned}$$

De aquí

$$\begin{aligned}
\log(\#(\mathcal{V}_y)) & = \sum_{s=0}^{l(y)} \log(r_{m(c_{t_s(y)}(y))}(\varepsilon, \pi^{-1}(c_{t_s(y)}(y)))) \leq \\
& \leq \sum_{s=0}^{l(y)} (a + \alpha)m(c_{t_s(y)}(y)) = (a + \alpha) \left(\sum_{s=0}^{l(y)-1} m(c_{t_s(y)}(y)) + m(c_{t_l(y)}(y)) \right)
\end{aligned}$$

Si $M = \max\{m(y_1), m(y_2), \dots, m(y_p)\}$ entonces de (1.15)

$$\log(\#(V_y)) \leq (a + \alpha)(n + M).$$

Así: $\#(\mathcal{V}_y) \leq e^{(a+\alpha)(n+M)}$ y luego

$$\#\mathcal{V} \leq \#(E_n) e^{(a+\alpha)(n+M)};$$

En consecuencia: $\#(F) \leq \#\mathcal{V} \leq \#(E_n) e^{(a+\alpha)(n+M)}$;

$$\text{y entonces } \frac{1}{n} \log s_n(4\varepsilon, X, f) \leq \frac{1}{n} \log \#(E_n) + (a + \alpha) + \frac{M}{n}$$

$$\text{Esto es: } \frac{1}{n} \log s_n(4\varepsilon, X, f) \leq \frac{1}{n} \log r_n(\delta, Y, g) + (a + \alpha) + \frac{M}{n}$$

Haciendo que $n \rightarrow \infty$

$$s(4\varepsilon, X, f) \leq r(\delta, Y, g) + (a + \alpha) \leq h_t(g) + (a + \alpha)$$

Como α es arbitrario

$$s(4\varepsilon, X, f) \leq h_t(g) + a$$

haciendo que $\varepsilon \rightarrow 0$,

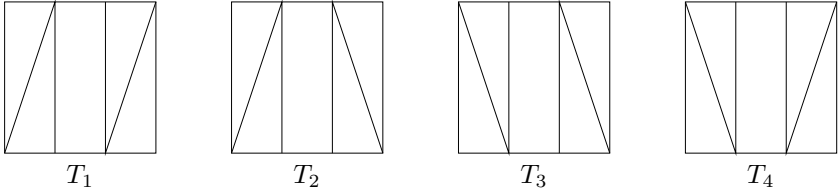
$$h_t(f) \leq h_t(g) + a$$

que es lo que asegura el resultado de Rufus Bowen. □

1.5. El Shift de Milnor–Thurston

Consideremos $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n-1} = 1$, $2n$ puntos en el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Sea $I_j = [x_{2j}, x_{2j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, n-1$ y $T: \bigsqcup_{j=0}^{n-1} I_j \rightarrow [0, 1]$ una aplicación tal que su restricción a I_j es lineal y biyectiva para $j = 0, 1, \dots, n-1$. La restricción de T a I_j puede preservar o no la orientación del intervalo. Esto quiere decir que podemos definir 2^n aplicaciones diferentes $T: \bigsqcup_{j=0}^{n-1} I_j \rightarrow [0, 1]$ con estas características y todas ellas satisfacen que $\lambda_T = \inf \{|T'(x)|; x \in \cup_{i=0}^{n-1} I_i\} > 1$.

1 Para $n = 2$ tenemos las siguientes aplicaciones



Denotemos por $\mathcal{L}(n)$ el conjunto formado por estas 2^n aplicaciones. Asociado con cada $T \in \mathcal{L}(n)$ tenemos su conjunto maximal invariante

$$\Lambda_T = \bigcap_{k=0}^{\infty} T^{-k} \left(\bigsqcup_{j=0}^{n-1} I_j \right) = \left\{ x \in \bigsqcup_{j=0}^{n-1} I_j; T^k(x) \in \bigsqcup_{j=0}^{n-1} I_j, \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Este conjunto resulta ser de Cantor y consideraremos en él la topología inducida por $[0, 1]$.

Consideremos el conjunto $\sum_n = \{\theta: \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}\}$ de sucesiones (θ_i) con $\theta_i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Para $x \in \Lambda_T$ se define su itinerario $I_T(x) \in \sum_n$ por $I_T(x)(i) = j \Leftrightarrow T^i(x) \in I_j$.

Afirmamos que la aplicación $I_T: \Lambda_T \rightarrow \sum_n$ es biyectiva.

a.-) Es inyectiva. Suponemos que $x, y \in \Lambda_T$ satisfacen $I_T(x) = I_T(y)$.

Esto quiere decir que $I_T(x)(i) = I_T(y)(i) = j, \forall i \in \mathbb{N}_0$. Esto último implica que $\{T^i(x), T^i(y)\} \subset I_j, \forall i \in \mathbb{N}_0$. puesto que

$$|T^i(x) - T^i(y)| \leq |(T^i)'(z_i)| |x - y| \leq 1$$

para algún z_i entre x e y , tenemos $|x - y| \leq \frac{1}{|(T^i)'(z_i)|} \leq \frac{1}{(\lambda_T)^i}, \forall i \in \mathbb{N}_0$. La única forma de que esto ocurra es que $x = y$.

b.-) Es sobreyectiva. Para $\theta \in \sum_n$ consideramos $I(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = \cap_{i=0}^{n-1} T^{-i}(I_{\theta_i})$. La condición sobre la derivada de T dice que $I(\theta_0) \supset I(\theta_0, \theta_1) \supset I(\theta_0, \theta_1, \theta_2) \supset \dots \supset I(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ es una sucesión de intervalos encajados con longitud disminuyendo, en cada paso, por un factor $\frac{1}{\lambda_T} < 1$, o sea tendiendo a cero. Concluimos que $\cap_{n=1}^{\infty} I(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ es un punto $x(\theta)$. Este elemento satisface $I_T(x(\theta)) = \theta$. Es decir I_T es sobreyectiva.

Usamos ahora la biyección I_T (con inversa $I_T^{-1}(\theta) = I_{\theta_0} \cap T^{-1}(I_{\theta_1}) \cap T^{-2}(I_{\theta_2}) \cap \dots \cap T^{-n}(I_{\theta_n}) \dots$) para inducir en \sum_n una topología. A saber $U \subset \sum_n$ es abierto si y solo si $I_T^{-1}(U) \subset \bigwedge_T$ es abierto. Considerando la topología inducida en \bigwedge_T y esta topología en \sum_n resulta ser que $I_T: \bigwedge_T \rightarrow \sum_n$ es un homeomorfismo.

De ahora y en adelante estas serán las consideraciones que usaremos sobre la topología de \sum_n .

En \sum_n consideramos la aplicación de corrimiento o shift $\sigma: \sum_n \rightarrow \sum_n$ definida por $\sigma(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots)$. En la topología anterior resulta ser que σ es una aplicación continua.

Asimismo, usando el homeomorfismo I_T , podemos definir un orden total entre elementos de \sum_n de la siguiente forma:

$$\theta \leq_T \alpha \Leftrightarrow I_T^{-1}(\theta) \leq I_T^{-1}(\alpha) \text{ en } [0, 1].$$

En lo que sigue $\sum_n(T)$ denotará el espacio métrico compacto ordenado

$$(\sum_n, d, \leq_T).$$

[2] Para $n = 2$ podemos considerar $\sum_2(T_1) = (\sum_2, d, \leq_{T_1})$. En este caso:

$$\begin{aligned} \underline{0} &\leq_{T_1} \underline{0}\underline{1} \leq_{T_1} \underline{1}\underline{0} \leq_{T_1} \underline{1}; \\ \underline{0} &= (0, 0, 0, \dots), \quad \underline{0}\underline{1} = (0, 1, 1, 1, \dots) \\ \underline{1}\underline{0} &= (1, 0, 0, 0, \dots), \quad \underline{1} = (1, 1, 1, \dots) \end{aligned}$$

[3] Si consideramos $\sum_n(T_2) = (\sum_2, d, \leq_{T_2})$ tenemos $\underline{0} \leq_{T_2} \underline{0}\underline{1}\underline{0} \leq_{T_2} \underline{1}\underline{1}\underline{0} \leq_{T_2} \underline{1}\underline{0}$.

En lo que sigue $\sum_n(T_1)$ será conocido como el espacio lexicográfico y $\sum_2(T_2)$ será llamado el *espacio de Milnor-Thurston*.

En general, y para cada $T \in \mathcal{L}(n)$, se cumple lo siguiente:

Lema 7. $\sigma \circ I_T(x) = I_T \circ T(x)$, $\forall x \in \Lambda_T$. Esto es, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda_T & \xrightarrow{T} & \Lambda_T \\
 I_T \downarrow & \circlearrowright & \downarrow I_T \\
 \Sigma_n & \xrightarrow{\quad} & \Sigma_n
 \end{array}$$

Definición 12. Una sucesión $\theta \in \Sigma_n(T)$ se dirá *maximal* si ocurre que $\sigma^k(\theta) \leq_T \theta$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Una sucesión $\alpha \in \Sigma_n(T)$ se dirá *minimal* si ocurre que $\alpha \leq_T \sigma^k(\alpha)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Sea

$$\text{máx}(T) = \{\theta \in \Sigma_n(T); \theta \text{ es maximal}\}$$

y

$$\text{mín}(T) = \{\alpha \in \Sigma_n(T); \alpha \text{ es minimal}\}.$$

Definición 13. Se define el T -mundo como

$$TM = \{(\alpha, \beta) \in \text{mín}(T) \times \text{máx}(T); \{\alpha, \beta\} \subset \Lambda_T([\alpha, \beta])\};$$

donde $\Lambda_T([\alpha, \beta]) = \{\rho \in \Sigma_n; \alpha \leq_T \sigma^i(\rho) \leq_T \beta, \forall i \in \mathbb{N}_0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma^{-k}([\alpha, \beta])$

4 Para $n = 2$, $T = T_1$, TM se llamará el mundo lexicográfico y lo denotaremos \mathcal{LW} .

Para $n = 2$, $T = T_2$, TM se llamará el mundo de Milnor-Thurston y lo denotaremos \mathcal{MTW} .

Observación. Para cada $T \in \mathcal{L}(n)$ podemos definir $H: TM \rightarrow [0, \log(n)]$ como $H(\alpha, \beta) = h_{\text{top}}(\sigma|_{\Lambda_T([\alpha, \beta])})$.

En trabajos recientes (ver [9] y [12]) se prueba que existe relación entre $H(\alpha, \theta)$ y la dimensión de Hausdorff de $\Lambda_T([\alpha, \theta])$. En particular, se prueba que $H(\alpha, \theta)$ es una función continua de (α, θ) .

Un problema más restringido y, como veremos más adelante en algunos casos, bastante aleccionador es probar, por ejemplo para el caso $T = T_2$, que $h(\theta) = H(\sigma(\theta), \theta)$ es una aplicación continua en $\theta \in \text{máx}(T_2)$. En esta dirección un paso relevante es probar que $\forall \theta \in \text{máx}(T_2) \cap \text{Per}(\sigma)$, ocurre que h es continua en θ . Aquí $\text{Per}(\sigma) = \{\theta \in \Sigma_2; \theta \text{ es una órbita periódica de } \sigma\}$. En el tercer capítulo de este libro daremos una prueba constructiva de este último resultado, en algunos casos.

En lo que sigue, trabajaremos con $T_2: I_0 \cup I_1 \rightarrow [0, 1]$ y $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$.

Sea $\theta \in \text{máx}(T_2)$ una órbita periódica tal que $\theta_0 = 1$. Asociado a θ tenemos el conjunto

$$B_n(\theta) = \left\{ \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}; \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \text{ ocurre como } \rho_0 \dots \rho_{n-1} \text{ para algún } \rho \in \Lambda_{T_2}(\theta) \right\}$$

Aquí $\Lambda_{T_2}(\theta) = \{\xi \in \Sigma_2, \sigma(\theta) \leq_{T_2} \sigma^i(\xi) \leq_{T_2} \theta, \forall i \in \mathbb{N}_0\}$. Es claro que $\Lambda_{T_2}(\theta)$ es cerrado e invariante por σ .

Teorema 6. $h_{\text{top}}(\theta) = h_{\text{top}}(\sigma|_{\Lambda_{T_2}(\theta)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(|B_n(\theta)|)$. Aquí $|B_n(\theta)| = \text{cardinalidad de } B_n(\theta)$.

Demostración. Denotemos por $\sigma_\theta = \sigma|_{\Lambda_{T_2}(\theta)}: \Lambda_{T_2}(\theta) \rightarrow \Lambda_{T_2}(\theta)$.

Sea $\mathcal{U} = \{M_0, M_1\}$,

$$\mathcal{U}(\theta) = \{M_0 \cap \Lambda_{T_2}(\theta), M_1 \cap \Lambda_{T_2}(\theta)\}$$

y

$$\mathcal{U}^k(\theta) = \bigvee_{i=0}^{k-1} \sigma_\theta^{-i}(\mathcal{U}(\theta)).$$

Ya sabemos que $\{\mathcal{U}^k(\theta)\}$ es una sucesión refinante y luego

$$h_{\text{top}}(\sigma_\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(\sigma_\theta, \mathcal{U}^k(\theta)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log N(\mathcal{U}^k(\theta)).$$

Sea $A \neq \emptyset$ tal que $A \in \mathcal{U}^k(\theta)$. Tenemos que $A = A_{i_1} \cap \sigma_\theta^{-1}(A_{i_2}) \cap \dots \cap \sigma_\theta^{-(k-1)}(A_{i_{k-1}})$ para $A_{i_j} \in \mathcal{U}(\theta)$, $j = 0, \dots, k-1$. Se cumple entonces que $\rho \in A \Leftrightarrow \rho \in A_{i_0}, \sigma_\theta(\rho) \in A_{i_1}, \dots, \sigma_\theta^{k-1}(\rho) \in A_{i_{k-1}} \Leftrightarrow \rho(0) = i_0, \rho(1) = i_1, \dots, \rho(k-1) = i_{k-1}$. O sea, $(\rho_0, \dots, \rho_{k-1}) \in B_k(\theta)$. Claro que la aplicación $S: \mathcal{U}^k(\theta) \rightarrow B_k(\theta)$ que asocia a $A \in \mathcal{U}^k(\theta)$ el block $(\rho_0, \dots, \rho_{k-1}) \in B_k(\theta)$ de cualquier $\rho \in A$ es una biyección entre $\mathcal{U}^k(\theta)$ y $B_k(\theta)$. Como $N(\mathcal{U}^k(\theta)) = \#\mathcal{U}^k(\theta) = |B_k(\theta)|$ se sigue el resultado. \square

Nota: Vamos a probar el resultado anterior para el caso de subshifts de tipo finito de $\Sigma_n(\mathbb{N}) = \{\theta : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}\}$

- Definición 14.** a) Un subconjunto $\Lambda \subset \Sigma_n(\mathbb{Z})$ se dice un subshift si Λ es compacto y $\sigma(\Lambda) = \Lambda$
- b) Diremos que un subshift $\Lambda \subset \Sigma_n(\mathbb{N}_0)$ es de **tipo finito** si existe una matriz de $n \times n$ $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 1$ o 0 tal que $\Lambda = \Sigma(A) = \{\theta \in \Sigma_n(\mathbb{N}_0); a_{\theta(i)\theta(i+1)} = 1, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}_0\}$

Dada una matriz A denotamos $A^m = A \cdot A^{m-1}$ para todo $m \geq 1$, $A^m = (a_{ij}^{(m)})$

Vamos a calcular el valor de $h_{top}(\sigma|_{\Sigma(A)})$ para una matriz de ceros y unos A . Con este proposito probamos el siguiente lema:

Lema 8. (Lema A)

Para cada $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, y $m \geq 1$ sea

$$S_{ij}^{(m)} = \{\gamma : \{0, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\} / \gamma(0) = i, \gamma(m) = j \text{ y } a_{\gamma(t)\gamma(t+1)} = 1; t = 0, \dots, m-1\},$$

$$\text{entonces } Card(S_{ij}^{(m)}) = a_{ij}^{(m)}$$

Demostración. Para $m = 1$ tenemos que

$$S_{ij}^{(1)} = \{\gamma : \{0, 1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}; \gamma(0) = i, \gamma(1) = j \text{ y } a_{ij} = 1\}$$

Es claro que

$$Card(S_{ij}^{(1)}) = a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij} = 1 \\ 0 & \text{si } a_{ij} = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto el resultado es válido para $m=1$

Vamos a suponer que $a_{ij}^{(m)} = card(S_{ij}^{(m)})$ y vamos a probar que $a_{ij}^{(m+1)} = Card(S_{ij}^{(m+1)})$

Sea $S = \bigcup_t S_{it}^{(m)}$, donde la unión se hace sobre todos los t tal que $a_{tj} = 1$. Tenemos:

$$Card(S) = \sum_t Card(S_{it}^{(m)}) = \sum_t a_{it}^{(m)} = \sum_t a_{it}^{(m)} \cdot 1 = \sum_t a_{it}^{(m)} \cdot a_{tj} = a_{ij}^{(m+1)}$$

entonces

$$Card(S) = a_{ij}^{(m+1)}, (i).$$

Para completar la demostración del lema vamos ahora a probar que

$$Card(S) = Card(S_{ij}^{(m+1)}), (ii).$$

Es claro que (i) y (ii) implican el resultado del Lema A.

Sea $\varphi : S \rightarrow \{\theta : \{0, 1, 2, \dots, m+1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}\}$ la aplicación definida por $\varphi(\gamma)(s) = \gamma(s)$ si $0 \leq s \leq m$ y $\varphi(\gamma)(m+1) = j$

Afirmación 4. φ es inyectiva y $\varphi(S) = S_{ij}^{(m+1)}$

a) φ es inyectiva

Sean $\alpha, \gamma \in S$ tales que $\varphi(\gamma) = \varphi(\alpha)$, entonces $\varphi(\gamma)(s) = \varphi(\alpha)(s)$ para $0 \leq s \leq m+1$ en particular, para $0 \leq s \leq m$, $\gamma(s) = \alpha(s)$ por lo tanto $\alpha = \gamma$

b) $\varphi(S) = S_{ij}^{(m+1)}$

Sea $\theta \in S_{ij}^{(m+1)}$ entonces $\theta : \{0, 1, \dots, m+1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ satisface $\theta(0) = i, \theta(m+1) = j$ y $a_{\theta(t)\theta(t+1)} = 1$ para $0 \leq t \leq m$. Sea $\gamma : \{0, 1, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ definida por $\gamma(s) = \theta(s)$ para $0 \leq s \leq m$. Si $t = \gamma(m)$ entonces $\gamma \in S_{it}^{(m)}$ pues $\gamma(0) = i, \gamma(m) = t$ y $a_{\gamma(l)\gamma(l+1)} = 1$ para $0 \leq l \leq m-1$ por lo que $\gamma \in S$, $\varphi(\gamma) = \theta$ y $\theta \in \varphi(S)$, esto implica $S_{ij}^{(m+1)} \subset \varphi(S)$.

Para probar que $\varphi(S) \subset S_{ij}^{(m+1)}$ consideramos $\gamma \in S$ y $\varphi(\gamma)$. Tenemos $\gamma \in S_{it}^{(m)}$ para algún t tal que $a_{tj} = 1$. $\varphi(\gamma)(i) = \gamma(i), 0 \leq i \leq m$ y $\varphi(\gamma)(m+1) = j$.

Así que si $\theta = \varphi(\gamma)$ entonces $\theta(0) = \varphi(\gamma)(0) = i, \theta(m+1) = \varphi(\gamma)(m+1) = j$ y $a_{\theta(i)\theta(i+1)} = 1$ para $0 \leq i \leq m$. Luego $\theta \in S_{ij}^{(m+1)}$ lo que implica que $\varphi(S) \subset S_{ij}^{(m+1)}$. Por lo tanto $Card(S) = Card(S_{ij}^{(m+1)})$ (ii).

De (i), (ii) obtenemos el resultado. □

Corolario 6. Sea $g_A = \sigma|_{\Sigma(A)} : \Sigma(A) \rightarrow \Sigma(A)$, entonces

$$h_{top}(g_A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \left(\sum_{ij} a_{ij}^{(k)} \right)$$

Demostración. Consideremos los cilindros $C(1), C(2), \dots, C(n)$ donde $C(i) = \{\theta \in \Sigma_n(\mathbb{N}), \theta(0) = i\}$. Es claro que $\bigcup_{i=1}^n C(i) = \Sigma_n(\mathbb{N})$ y entonces $\mathcal{A} = \{C(1), \dots, C(n)\}$ es un cubrimiento por abiertos de $\Sigma_n(\mathbb{N})$, por lo tanto $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A} \cap \Sigma(A) = \{C(1) \cap \Sigma(A), \dots, C(n) \cap \Sigma(A)\}$ es un cubrimiento por abiertos de $\Sigma(A)$ y

$$\mathcal{A}_k(A) = \bigvee_{j=0}^k \sigma^{-j}(\mathcal{A}(A)) = \{A_0 \cap \sigma^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \sigma^{-k}(A_k); A_0, A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}(A)\}$$

Un elemento $A_0 \cap \sigma^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \sigma^{-k}(A_k) \neq \emptyset$, si ocurre que hay $\theta \in A_0$ tal que $\sigma(\theta) \in A_1, \sigma^2(\theta) \in A_2, \dots, \sigma^k(\theta) \in A_k$, colocando $A_i = C(j_i) \cap \Sigma(A)$ tenemos que $\theta \in C(j_0) \cap \Sigma(A), \sigma(\theta) \in C(j_1) \cap \Sigma(A), \dots, \sigma^k(\theta) \in C(j_k) \cap \Sigma(A)$, es decir, $\theta = (j_0, j_1, \dots, j_k, \dots)$, con $a_{\theta(i)\theta(i+1)} = 1$ para $i = 0, \dots, k-1$.

Por lo tanto el largo $(\theta(0), \dots, \theta(k)) \in S_{j_0 j_k}^{(k)}$ o sea que cada elemento no vacío $A_0 \cap \sigma^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \sigma^{-k}(A_k)$ de $\mathcal{A}_k(A)$ define un elemento de $S_{j_0 j_k}^{(k)}$. Haciendo la unión sobre todos los posibles j_0, j_k talque $S_{j_0 j_k}^{(k)} \neq \emptyset$ se tiene entonces un subcubrimiento numerable de $\Sigma(A)$ de $\mathcal{A}_k(A)$, es decir, $N(\mathcal{A}_k(A), \sigma) = \sum_{i,j} \text{Card}(S_{ij}^{(k)})$

y por lo tanto $N(\mathcal{A}_k(A), \sigma) = \sum_{i,j} a_{ij}^{(k)}$. Como $\{\mathcal{A}_k(A); k \in \mathbb{N}_0\}$ es una sucesión de cubrimientos refinantes, entonces

$$h_{top}(g_A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log N(\mathcal{A}_k(A), \sigma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \sum_{i,j} a_{ij}^{(k)}$$

□

Ya que podemos considerar $\|A^k\| = \sum_{i,j} |a_{ij}^{(k)}|$, tenemos que

$$h_{top}(g_A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \|A^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log (r(A))^k$$

donde $r(A)$ es el radio espectral de A , por lo tanto tenemos el siguiente corolario.

Corolario 7. $h_{top}(g_A) = \log(r(A))$ donde $r(A)$ es el radio espectral de A para A una matriz de ceros y unos, a saber $r(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \text{ es autovalor de } A\}$

Consideremos ahora $\theta \in \text{Per}(\sigma) \cap \text{Max}_2$ una órbita periódica maximal para el shift de Milnor Thurston. La sucesión θ puede tener un periodo terminado en 0 o un periodo terminado en 1.

Si $\theta = \underline{\theta_1 \theta_2 \dots \theta_{n-1} 0}$ entonces $\tilde{\theta}_0 = 0\theta$ es una órbita periódica y es igual a $\sigma^{n-1}(\theta)$. En este caso la sucesión $\tilde{\theta}_1 = 1\theta = \underline{1\theta_1 \theta_2 \dots \theta_{n-1} 0}$ no es periódica y satisface $\sigma(\tilde{\theta}_1) = \theta$

Si $\theta = \underline{\theta_1 \dots \theta_{n-1} 1}$ entonces $\tilde{\theta}_1 = 1\theta$ es periódica y satisface $\sigma(\tilde{\theta}_1) = \theta$ o $\sigma^{n-1}(\theta) = \tilde{\theta}_1$. La sucesión $\tilde{\theta}_0 = 0\theta$ no es periódica y satisface $\sigma(\tilde{\theta}_0) = \theta$.

Es claro que si $\Lambda(\theta) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sigma^{-n}([\sigma(\theta), \theta])$ entonces $\Lambda(\theta) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sigma^{-n}([\sigma(\theta), \tilde{\theta}_0] \cup [\tilde{\theta}_1, \theta])$.

En lo que sigue T_θ denotará la restricción de T a $[\sigma(\theta), \theta]$. Escribamos los puntos de la órbita de θ como $\theta_1 = \sigma(\theta) < \theta_2 < \dots < \theta_s \leq \tilde{\theta}_0 < \tilde{\theta}_1 \leq \theta_{s+1} < \dots < \theta_n = \theta$.

Para el caso que $\theta = \underline{\theta_1 \dots \theta_{n-1} 0}$ tenemos $\tilde{\theta}_0 = \theta_s$ y $\tilde{\theta}_1 < \theta_{s+1}$. Para el caso de que $\theta = \underline{\theta_1 \dots \theta_{n-1} 1}$, tenemos $\theta_s < \tilde{\theta}_0$ y $\tilde{\theta}_1 = \theta_{s+1}$.

Para el caso de que $\theta = \underline{\theta_1 \dots \theta_{n-1} 0}$ definamos $I_1 = [\theta_1, \theta_2], I_2 = [\theta_2, \theta_3], \dots, I_{s-1} = [\theta_{s-1}, \tilde{\theta}_0], I_s = [\tilde{\theta}_1, \theta_{s+1}], I_{s+1} = [\theta_{s+1}, \theta_{s+2}], \dots, I_{n-1} = [\theta_{n-1}, \theta_n]$.

Para el caso de que $\theta = \underline{\theta_1 \dots \theta_{n-1} 1}$ definamos $I_1 = [\theta_1, \theta_2], I_2 = [\theta_2, \theta_3], \dots, I_{s-1} = [\theta_{s-1}, \theta_s], I_s = [\theta_s, \tilde{\theta}_0], I_{s+1} = [\tilde{\theta}_1, \theta_{s+2}], \dots, I_{n-1} = [\theta_{n-1}, \theta_n]$.

Es claro que $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{n-1} = [\theta_1, \tilde{\theta}_0] \cup [\tilde{\theta}_1, \theta]$ y entonces

$$\Lambda(\theta) \subset \bigcup_{i=1}^n I_i; \Lambda(\theta) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sigma^{-n}([\theta_1, \theta]) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sigma^{-n}([\theta_1, \tilde{\theta}_0] \cup [\tilde{\theta}_1, \theta]).$$

La aplicación T_θ es inyectiva restringida a $[\theta_1, \tilde{\theta}_0]$ o restringida a $[\tilde{\theta}_1, \theta]$. Para cada i las intersecciones $T_\theta(I_i) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} I_k \right)$ contienen uno o más de los intervalos I_1, \dots, I_{n-1} . Si ocurre que $I_j \subset T_\theta(I_i) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} I_k \right)$, entonces colocaremos una flecha de I_i a I_j .

Sea $G(\theta)$ el gráfico resultante y $M(\theta)$ la respectiva matriz de incidencia. Es claro que $M(\theta)$ es una matriz de ceros y unos.

Para cada $\alpha \in \Sigma(M(\theta))$ tenemos que $m_{\alpha(i)\alpha(i+1)} = 1$ para $i \in \mathbb{N}_0$. Esto quiere decir que $I_{\alpha(1)} \subset T(I_{\alpha(0)}), I_{\alpha(2)} \subset T(I_{\alpha(1)}), \dots, I_{\alpha(k+1)} \subset T(I_{\alpha(k)})$. En particular, la sucesión de intervalos encajados $I_{\alpha(0)}, I_{\alpha(0)} \cap T^{-1}(I_{\alpha(1)}), I_{\alpha(0)} \cap T^{-1}(I_{\alpha(1)}) \cap T^{-2}(I_{\alpha(2)}), \dots, I_{\alpha(0)} \cap T^{-1}(I_{\alpha(1)}) \cap \dots \cap T^{-k}(I_{\alpha(k)})$ es decreciente (recordar que $|T'| > 1$) y su intersección es un único punto $x(\alpha) \in \Lambda(\theta)$. No es difícil verificar que la asignación $\alpha \rightarrow x(\alpha)$ es biyectiva y tenemos

Lema 9. $h_{top}(T_\theta) = \log r(M(\theta))$

1.6. Un resultado de BGMY para la estimación por bajo de la entropía topológica de una aplicación continua

En esta sección seguiremos parte del trabajo *Periodic points and topological entropy* de L. Block - J. Guckenheimer - M. Misiurewicz y L. S. Young que fue publicado en el *Lecture Notes in Mathematics* N° 819, en donde hacen una estimación mínima del valor de la entropía topológica de una aplicación continua del intervalo sabiendo que esta aplicación posee puntos periódicos de periodo n_1 y n_2 .

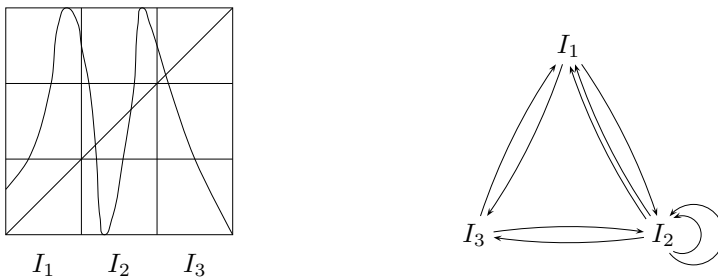
Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua. Sea $A = \{I_1, I_2, \dots, I_s\}$ una partición de I en subintervalos tales que $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_s = I$ con la propiedad de que si $i \neq j$, entonces $I_i \cap I_j$ consiste en a lo más un punto.

Definición 15. 1. Diremos que un intervalo I f cubre J si existe subintervalo $K \subset I$ tal que $f(K) = J$.

2. Diremos que I f cubre n -veces a J si existen subintervalos K_1, K_2, \dots, K_n con interiores disjuntos, tales que $f(K_i) = J$, $i = 1, \dots, n$

Definición 16. Un A -grafo para f es un gráfico orientado con vértices I_1, \dots, I_s y tal que si I_i f cubre I_j ; n pero no $(n+1)$ -veces, entonces hay n y no $(n+1)$ -flechas desde I_i a I_j .

Ejemplo. Consideremos $f: I \rightarrow I$ como en la figura. En este caso el A -grafo es:



Tenemos los siguientes resultados.

Lema 10. Si I, J, K son intervalos tales que I f -cubre J y $K \subset J$, entonces I f -cubre K .

Demostración. Como $f(I) \supset J \supset K$, entonces $f(I) \supset K$ y hay intervalo $L \subset I$ tal que $f(L) = K$. \square

Corolario 8. Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ y $K \subset \mathbb{R}$ es un intervalo tal que $f(I) \supset K$, entonces I f -cubre K .

Demostración. En efecto, $f(I) = J$ es un intervalo que satisface $J \supset K$. \square

Observaciones

- 1) Si hay una flecha de I_i a I_j en el A -gráfico de f lo denotaremos $I_i \xrightarrow{f} I_j$ o simplemente $I_i \rightarrow I_j$ si el contexto es claro.
- 2) Un *loop* en el A -gráfico de f es un camino $I_{n_0} \rightarrow I_{n_1} \rightarrow \dots \rightarrow I_{n_s} \rightarrow I_{n_0}$ que se presenta en el A -grafo de f con $I_{n_i} \neq I_{n_0}$ si $i \neq 0$.

Lema 11. Si $J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow \dots \rightarrow J_{n-1} \rightarrow J_0$ es un *loop* en el A -gráfico de f , entonces existe un punto x de I tal que $f^n(x) = x$ y $f^i(x) \in J_i$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Esta es una consecuencia del teorema del punto fijo para aplicaciones continuas del intervalo.

Asociemos al gráfico $G(A)$, $A = \{I_1, \dots, I_s\}$ una matriz $s \times s$ $M = (m_{ij})$ tal que $m_{ij} = n^\circ$ de flechas de I_i a I_j . Notamos que los coeficientes de la matriz M son enteros no negativos.

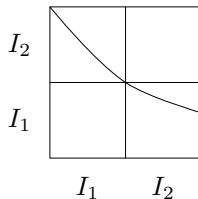
En lo que sigue $r(M)$ denotará el radio espectral de la matriz M , a saber: $r(M) = \max \{|\lambda|; \lambda \text{ es autovalor de } M\}$

Observaciones

- 3) El A -grafo asociado a la aplicación es $I_1 \rightarrow I_2$ y luego $m_{11} = 0$, $m_{12} = 1$, $m_{21} = m_{22} = 0$. O sea

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene como único autovalor $\lambda = 0$, o sea que su radio espectral es 0.



4) Si ocurre que cada $m_{ij} > 0$, entonces la matriz M es irreducible (ver apéndice C de la Teoría de Perron-Frobenius) y entonces $r(M) > \max_{1 \leq i \leq n} m_{ii} \geq 1$
 $\therefore \log(r(M)) > 0$.

5) Si ocurre que para cada ij existe q tal que $m_{ij}^{(q)} > 0$ entonces, y puesto que $r(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|M^n\|)^{1/n}$, se tiene $r(M) > 1$.

Definición 17. La *entropía del gráfico* $G(A) = G$, $h(G)$, se define como $\log(r(M))$.

Nota. Puede ser $h(G) = -\infty \equiv: \log 0$.

Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Consideraremos la entropía topológica de f como la entropía de la restricción de f al conjunto

$$\Lambda_f = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(I) = \{x \in I; f^n(x) \in I \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposición 2. Si G es el A -gráfico de f , entonces $h(G) \leq h(f)$.

Demostración. Como $r(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|M^n\|)^{1/n}$, entonces se tiene que

$$\log r(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\|M^n\|)$$

escogiendo

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_s)\| = \sum_{i=1}^s |x_i|$$

Tenemos que

$$\left\| M^n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sum_{i,j} |m_{ij}^{(n)}| = \sum_{i,j} m_{ij}^n$$

$$\therefore \log(r(M)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{i,j} m_{ij}^n \right)$$

Ahora

$$\sum_{i,j} m_{ij}^n = \text{n}^\circ \text{ total de caminos de longitud } n \text{ en } G \leq N \left(\prod_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A) \right)$$

$$\therefore \log(r(M)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N \left(\prod_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A) \right) = h(f, A) \leq h(f) \square$$

Definición 18. Sea $M = (m_{ij})$ una matriz $n \times n$. Para una sucesión $p = (p_j)_{j=0}^k$ de elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$ definamos su *ancho* por $w(p) = \prod_{j=1}^k m_{p_{j-1}p_j}$. Diremos que p es un *camino* en M si $w(p) \neq 0$. En este caso el número $k = l(p)$ se llamará el *largo* del camino p . Un *loop* es un camino $p = (p_0, p_1, \dots, p_k)$ para el cual $p_i \neq p_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, k-1$ y $p_k = p_0$. Una *roma* en M es un subconjunto $R \subset \{1, \dots, n\}$ para el cual no existe un loop fuera de R , i. e., no hay loop $p = (p_0, \dots, p_k)$ con $\{p_0, p_1, \dots, p_k\} \cap R = \emptyset$.

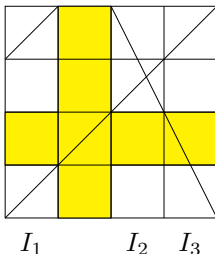
- Dada un roma R y un camino $p = (p_0, \dots, p_k)$. Diremos que el camino p es *simple* respecto de la roma R si $\{p_0, p_k\} \subset R$ y $\{p_1, \dots, p_{k-1}\} \cap R = \emptyset$.
- Dada una roma $R = \{r_1, \dots, r_k\}$ con $r_i \neq r_j$ para $i \neq j$ se define la matriz $A_R = A_R(x) = (a_{ij})_{i,j=1}^k = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^k$ por

$$a_{ij}(x) = \sum_p w(p) x^{-l(p)};$$

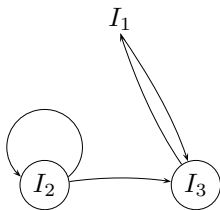
donde la suma es sobre todo los caminos simples que se originan en r_i y terminan en r_j .

Ejemplo. Consideremos la siguiente aplicación

$$f: I_1 \cup I_2 \cup I_3 \rightarrow I = [0, 1]$$



Su A-grafo es:



La matriz asociada es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una roma para M es $R = \{2, 3\}$. En efecto, no hay un loop que empiece en I_1 y termine en I_1 , que no pase por R .

Vamos a calcular $A_R(x)$.

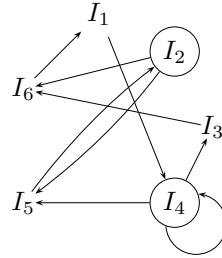
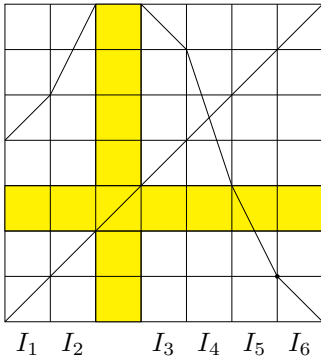
- $p = (2, 2)$ hay una flecha que se inicia en I_2 y termina en I_2 \therefore éste p satisface $m_{22} = 1$ y $w(p) = 1$. De aquí $a_{22}(x) = x^{-1}$.
- $p = (2, 3)$ hay un camino simple que parte en I_2 y termina en I_3 . Este p satisface $m_{23} = 1$ y $w(p) = 1$; $a_{23} = x^{-1}$
- $p = (3, 2)$. No hay un camino que parta en I_3 y termine en I_2 \therefore $m_{32} = 0$ y $a_{32}(x) = 0$.
- Caminos que parten en I_3 y terminen en I_3 . $p = (3, 1, 3)$ y no hay más $w(p) = m_{13} = 1$; $a_{33}(x) = 1 \cdot x^{-2}$ pues $l(p) = 2$ ($p = (p_0, p_1, p_2) = (3, 1, 3)$) así que la matriz $A_R(x)$ asociada a la roma $R = \{2, 3\}$ es

$$A_R(x) = \begin{pmatrix} x^{-1} & x^{-1} \\ 0 & x^{-2} \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Consideremos la siguiente función

$$f: I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_5 \cup I_6 \rightarrow I = [0, 1]$$

El A -grafo es:



La matriz asociada es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si consideramos $R = \{2, 4\}$ vemos que no hay ningún loop fuera de R . En efecto, si un camino cerrado p empieza en I_1 , entonces necesariamente sigue a I_4 ($I_1 \rightarrow I_4$) (intersecta a la roma). Si empieza en $I_3 \rightarrow I_6 \rightarrow I_1 \rightarrow I_4$ (intersecta la roma).

Si empieza en $I_5 \rightarrow I_2$ (intersecta la roma). Si empieza en $I_6 \rightarrow I_1 \rightarrow I_4$ (intersecta la roma) $\therefore R = \{2, 4\}$ es una roma del A -grafo de f .

Calculemos ahora su $A_R(x)$ matriz.

- caminos que empiecen en I_2 y terminen en I_2 y que no pasen por R en el medio: $I_2 \rightarrow I_5 \rightarrow I_2$ (es una que cumple) $I_2 \rightarrow I_6 \rightarrow I_1 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_2$ es un camino cerrado pero pasa por la roma $\therefore p = (2, 5, 2)$; $w(p) = 1$, $l(p) = 2$ y $a_{22}(x) = x^{-2}$.
- Camino que empiecen en I_2 y terminen en I_4 y que no pasa por R en el medio $I_2 \rightarrow I_6 \rightarrow I_1 \rightarrow I_4$ (es uno que cumple) y no hay más $\therefore p = (2, 6, 1, 4)$, $w(p) = 1$, $l(p) = 3$, $a_{24}(x) = x^{-3}$.
- Camino que empiecen en I_4 , terminen en I_2 y que no pasen por R en el medio: $I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_2$ (es uno que cumple) y no hay más $p = (4, 5, 2)$, $w(p) = 1$, $l(p) = 2$, $a_{42}(x) = x^{-2}$.

d) Caminos que empiecen en I_4 , termina en I_4 y que no pasa por R en el medio:
 $I_4 \rightarrow I_4$ (es uno que cumple): $I_4 \rightarrow I_3 \rightarrow I_6 \rightarrow I_1 \rightarrow I_4$ es otro que cumple y no hay más: $p = (4, 4)$; $w(p) = 1$, $l(p) = 1$; $p = (4, 3, 6, 1, 4)$, $w(p) = 1$, $l(p) = 4$,
 $a_{44}(x) = x^{-1} + x^{-4}$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} x^{-2} & x^{-3} \\ x^{-2} & x^{-1} + x^{-4} \end{pmatrix}.$$

La matriz $A_R(x)$ cumplirá un rol fundamental en el cálculo de $h(G)$. En lo que sigue, E denotará la matriz identidad del largo apropiado.

Teorema 7. *Dada una matriz $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ y una roma $R = \{r_1, \dots, r_k\}$ (donde $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$) para M . Se cumple que el polinomio característico de M , $p_M(x) = \det(M - xE)$ es igual a $(-1)^{n-k} x^n \det(A_R(x) - E)$.*

Demostración. Suponemos primero que $R = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. En este caso los caminos posibles que parten en 1 y terminan en 1 = (1, 1); que parten en 1 y terminan en 2 = (1, 2), ..., que parten en i y terminan en $j = (i, j)$. Luego, si $p = (i, j)$, $w(p) = m_{ij}$ y $l(p) = 1 \therefore a_{ij}(x) = m_{ij}x^{-1}$

$$\begin{aligned} (-1)^{n-k} x^n \det(A_R(x) - E) &= x^n \det(m_{ij}x^{-1} - e_{ij}) = \\ &= x^n \det(x^{-1}(m_{ij} - xe_{ij})) = x^n \cdot x^{-n} \det(m_{ij} - xe_{ij}) = \\ &= \det(M - xE) \end{aligned}$$

Observamos que si $S \subset \{1, \dots, n\}$ contiene una roma R , entonces S es en sí misma una roma. Así que usaremos inducción en la cardinalidad de la roma disminuyendo la cardinalidad de la roma, en uno a cada paso.

En estas condiciones vamos a probar lo siguiente: suponemos que

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_q\}$$

es una roma (con $s_i \neq s_j$ para $i \neq j$), $s_0 \notin S$ y $T = \{s_0\} \cup S$ es una roma para la que vale el resultado. Esto es $(-1)^{n-(q+1)} x^n \det(A_T(x) - E) = \det(M - xE)$.

Entonces, si probamos que

$$\det(A_S(x) - E) = -\det(A_T(x) - E), \quad (1.16)$$

tendremos

$$\begin{aligned} (-1)^{n-q} x^n \det(A_S(x) - E) &= (-1)^{n-(q+1)} x^n \det(A_T(x) - E) = \\ &= \det(M - xE), \end{aligned}$$

como afirma el resultado. Vamos entonces a probar (1.16). Suponemos que $A_S(x) - E = (b_{ij})_{i,j=1}^q$, $A_T(x) - E = (c_{ij})_{i,j=0}^q$. Como S es un roma debe ser que $a_{00}^T(x) = 0$ (caso contrario habría un camino cerrado fuera de S) $\therefore c_{00} = -1$.

Consideremos vértices I_1, I_2, \dots, I_n asociados a la matriz M . Sea G el respectivo gráfico de incidencias. Veamos la relación entre $(b_{ij})_{i,j=1}^q$ y $(c_{ij})_{i,j=0}^q$. Específicamente, consideremos b_{ij} . Como I_{s_0} no es vértice de la roma S , entonces para obtener b_{ij} debemos considerar c_{ij} . O sea, si hay un camino en T que va de I_i a I_j debe considerarse en S . También por cada camino que parte de I_i y llega a I_{s_0} y por cada camino que parte de I_{s_0} y llega a I_j . Esto es: $b_{ij} = c_{ij} + c_{i0} \cdot c_{0j}$ (la verdad $a_{ij}^S = a_{ij}^T + a_{i0}^T \cdot a_{0j}^T$).

Consideremos la matriz D_1 obtenida de (c_{ij}) multiplicando la columna 0 por c_{01} y sumándola a la columna 1. Se tiene

$$D_1 = \begin{pmatrix} c_{00} & 0 & c_{02} & \dots & c_{0q} \\ c_{10} & c_{11} + c_{10} \cdot c_{01} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{q0} & c_{q1} + c_{q0} \cdot c_{01} & c_{q2} & \dots & c_{qq} \end{pmatrix}$$

Consideramos la matriz D_2 obtenida de D_1 multiplicando la columna 0 por c_{02} y sumándola a la columna 2. Tenemos:

$$D_2 = \begin{pmatrix} c_{00} & 0 & 0 & c_{03} & \dots & c_{0q} \\ c_{10} & c_{11} + c_{10} \cdot c_{01} & c_{12} + c_{10} \cdot c_{02} & c_{13} & \dots & c_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{q0} & c_{q1} + c_{q0} \cdot c_{01} & c_{q2} + c_{q0} \cdot c_{02} & c_{q3} & \dots & c_{qq} \end{pmatrix}$$

Sucesivamente para $i = 3, \dots, q$ obtenemos D_i de D_{i-1} multiplicando la columna 0 por c_{0i} y sumándola a la columna i . Finalmente

$$D_q = \begin{pmatrix} c_{00} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{10} & c_{11} + c_{10} \cdot c_{01} & c_{12} + c_{10} \cdot c_{02} & \dots & c_{1q} + c_{10} \cdot c_{0q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{q0} & c_{q1} + c_{q0} \cdot c_{01} & c_{q2} + c_{q0} \cdot c_{02} & \dots & c_{qq} + c_{q0} \cdot c_{0q} \end{pmatrix}$$

O sea que:

$$D_q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{10} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{q0} & b_{1q} & \dots & \dots & b_{qq} \end{pmatrix}$$

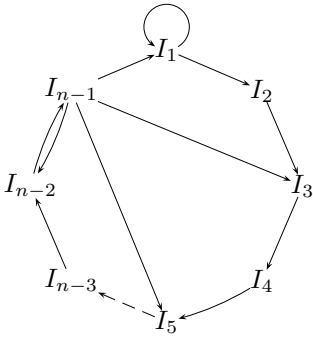
$\therefore \det D_q = -\det(b_{ij}) = -\det(A_S(x) - E)$. Como $D_1 \sim D_2 \sim \dots \sim D_q$ y $D_1 \sim (A_T(x) - E)$, entonces $\det(A_T(x) - E) = \det D_1 = \det D_2 = \dots = \det D_q = -\det(A_S(x) - E)$, como anunciado. Esto concluye la demostración del Teorema. \square

Corolario 9. Si ocurre que el gráfico G tiene una roma de un único vértice, entonces el polinomio característico de M es $(-1)^{n-1}x^n\varphi(x)$ donde

$$\varphi(x) = \sum_n (\text{número de loops simple de longitud } n)x^{-n} - 1$$

Vamos ahora a calcular la entropía de algunos grafos.

Por ejemplo, consideremos el siguiente gráfico y su matriz de incidencias.



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para este gráfico una roma es $R = \{1, n-1\}$.

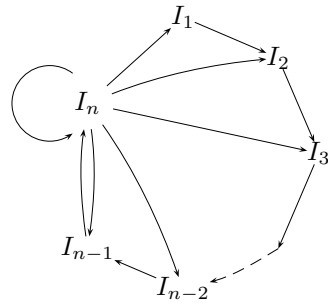
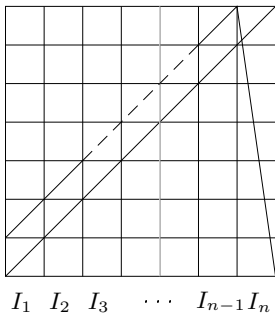
$$\begin{aligned} a_{11}(x) &= x^{-1}, & a_{1n-1} &= x^{-(n-2)} \\ (1, 1) & & (1, 2, 3, 4, \dots, n-1) & \\ a_{n-11} &= x^{-1}, & a_{n-1n-1} &= x^{-2} + x^{-4} + x^{-6} + \dots + x^{-(n-3)} \\ ((n-1), 1) & & (n-1, n-2, n-1), (n-1, n-4, n-3, n-2, n-1), & \\ & & (n-1, n-6, n-5, n-4, n-3, n-2) & \\ & & (n-1, 3, 4, 5, 6, \dots, n-1) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \det(A_k(x) - E) &= \begin{vmatrix} x^{-1} - 1 & x^{-(n-2)} \\ x^{-1} & x^{-2} + x^{-4} + \dots + x^{-(n-3)} - 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x^{-1}(1-x) & x^{-(n-2)} \\ x^{-1} & x^{-2}(1+x^{-2}+\dots+x^{-(n-5)}) - 1 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} x^{-1}(1-x) & x^{-(n-2)} \\ x^{-1} & x^{-2}\frac{x^{-(n-3)}-1}{x^{-2}-1} - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{-1}(1-x) & x^{-(n-2)} \\ x^{-1} & \frac{x^{-(n-3)}-1}{1-x^2} - 1 \end{vmatrix} = \\
&= x^{-1}(1-x) \left(\frac{x^{-(n-3)}-1}{1-x^2} - 1 \right) - x^{-(n-1)} = \\
&= x^{-1} \frac{x^{-(n-3)}-1}{1+x} - x^{-1} + 1 - x^{-(n-1)} \\
\therefore x^{n-1} \det(A_R(x) - I) &= x^{n-1} \left(\frac{x^{-(n-2)}-x^{-1}}{1+x} - x^{-1} + 1 - x^{-(n-1)} \right) \\
&= \frac{x-x^{n-2}}{1+x} - x^{n-2} + x^{n-1} - 1 = \frac{x-x^{n-2}-x^{n-2}+x^{n-1}-1-x^{n-1}+x^n-x}{1+x} \\
&= \frac{x^n-2x^{n-2}-1}{1+x}
\end{aligned}$$

\therefore la entropía del gráfico es el logaritmo de la mayor raíz real de $x^n - 2x^{n-2} - 1 = p_n(x)$.

Notemos que: $p(1) = -2$, $p'(x) = nx^{n-1} - 2(n-2)x^{n-3}$, $p'(1) = n - 2(n-2) = n - 2n + 4 = 4 - n$, $p(2) = 2^n - 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1}(2-1) - 1 \geq 0$, $n \geq 1$. Por lo tanto hay una raíz de $p_n(x)$ está entre 1 y 2. Para $x \geq 2$ se cumple $p(x) \geq p(2)$.

Observación 3. Consideremos la siguiente aplicación f cuyo A -grafo en la partición $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$.



En este caso $R = \{n\}$ es una roma

$$a_{nn}(x) = x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + \dots + x^{-n}$$

$$(n, n), (n, n-1, n), (n, n-2, n-1, n), (n, n-3, n-2, n-1, n), \dots$$

$$\dots (n, 1, 2, \dots, n-1, n)$$

Por lo tanto el polinomio característico asociado a la matriz de incidencias

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

es

$$(-1)^{n-1} x^n (x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-n} - 1)$$

$$= (-1)^n (x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - 1).$$

Capítulo 2

Cálculo de la entropía de algunas órbitas periódicas maximales en el mundo de Milnor-Thurston

Sea $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la aplicación de shift con el orden de Milnor-Thurston. Sea $\theta \in \text{Per}(\sigma)$ una órbita periódica maximal de periodo n . En este caso tenemos $\theta = \max \{\sigma^i(\theta), i \in \mathbb{N}_0\}$ y $\sigma(\theta) = \min \{\sigma^i(\theta), i \in \mathbb{N}_0\}$. Ordenamos las iteraciones de θ de la siguiente forma:

$$\theta_1 = \sigma(\theta) \leq \theta_2 \leq \dots, \leq \theta_k < \theta_{k+1} \leq \dots \leq \theta_n = \theta$$

donde

$$\theta_k = \max \{\theta_i; \theta_i \in \Sigma_0\}, \quad \theta_{k+1} = \min \{\theta_j; \theta_j \in \Sigma_1\}$$

Sea $\tilde{\theta}_0 = 0\theta \in \Sigma_0$ y $\tilde{\theta}_1 = 1\theta \in \Sigma_1$

Lema 12. *Para cada $\theta \in \text{máx}_2$ vale $\theta_k \leq \tilde{\theta}_0 < \tilde{\theta}_1 \leq \theta_{k+1}$*

Demostración. ■ Supongamos que:

$$\theta = \underline{1\theta_2\theta_3 \dots \theta_{n-1}0} = (1\theta_2\theta_3 \dots \theta_{n-1}01\theta_2\theta_3 \dots \theta_{n-1}01\theta_2 \dots)$$

En este caso

$$\begin{aligned} 0\theta &= (01\theta_2\theta_3 \dots \theta_{n-1}01\theta_2\theta_3 \dots \theta_{n-1}01\theta_2 \dots \theta_{n-1}01 \dots) = \\ &= \underline{01\theta_2\theta_3 \dots \theta_{n-1}} = \sigma^{n-1}(\theta) \quad \therefore \tilde{\theta}_0 = \theta_k = \sigma^{n-1}(\theta). \end{aligned}$$

- Supongamos que:

$$\theta = \underline{1\theta_2\theta_3 \dots \theta_{n-1}1} = (1\theta_2\theta_3 \dots \theta_{n-1}11\theta_2 \dots \theta_{n-1}11\theta_2 \dots)$$

En este caso

$$\begin{aligned} 1\theta &= (11\theta_2 \dots \theta_{n-1}11\theta_2 \dots \theta_{n-1}11\theta_2 \dots \theta_{n-1}11 \dots) = \underline{11\theta_2 \dots \theta_{n-1}} = \\ &= \sigma^{n-1}(\theta) \quad \therefore \tilde{\theta}_1 = \theta_{k+1} = \sigma^{n-1}(\theta) \square \end{aligned}$$

- Para el caso de que:

$$\theta = \underline{1\theta_2 \dots \theta_{n-1}0}$$

entonces

$$\tilde{\theta}_1 = \underline{11\theta_2 \dots \theta_{n-1}0} = 1\theta$$

no hace parte de la órbita de θ y claramente $\tilde{\theta}_0 < \tilde{\theta}_1$

En este caso $\tilde{\theta}_1 < \theta_{k+1}$ ya que si ocurriera $\theta_{k+1} < \tilde{\theta}_1$, entonces $\sigma(\theta_{k+1}) > \sigma(\tilde{\theta}_1) = \theta$ contradiciendo el hecho que θ es maximal. Por lo tanto, debe ocurrir que $\theta_k = \tilde{\theta}_0 < \tilde{\theta}_1 < \theta_{k+1}$.

- Para el caso de que:

$$\theta = \underline{1\theta_2 \dots \theta_{n-1}1}$$

entonces

$$\theta_0 = \underline{01\theta_2 \dots \theta_{n-1}1}$$

no hace parte de la órbita de θ .

En este caso debe ocurrir que $\theta_k < \tilde{\theta}_0$ ya que si ocurriese que $\tilde{\theta}_0 < \theta_k$, entonces $\sigma(\tilde{\theta}_0) = \theta < \sigma(\theta_k)$ que es un elemento de la órbita de θ , contradiciendo el hecho que θ es maximal. Por lo tanto, debe ocurrir $\theta_k < \tilde{\theta}_0 < \tilde{\theta}_1 = \theta_{k+1}$.

Concluimos entonces lo siguiente:

Corolario 10. a) Si $\theta = \underline{1\theta_2 \dots \theta_{n-1}0}$, entonces $\theta_k = \tilde{\theta}_0 = \sigma^{n-1}(\theta) < \tilde{\theta}_1 < \theta_{k+1}$

b) Si $\theta = \underline{1\theta_2 \dots \theta_{n-1}1}$, entonces $\theta_k < \tilde{\theta}_0 < \tilde{\theta}_1 = \theta_{k+1} = \sigma^{n-1}(\theta)$.

2.1. Adaptación del resultado de BGMY para nuestro caso

En esta sección establecemos un resultado que es consecuencia de lo desarrollado en la sección dedicada al resultado de Block-Guckenheimer-Misiurewicz y Young. Sea $\theta \in \text{máx}_2$ una órbita periódica maximal, en el mundo de Milnor Thuston, de periodo n . Suponemos $\theta = \theta_n$, $\theta_1 = \sigma(\theta_1)$ y los iterados $\sigma(\theta), \dots, \sigma^{n-1}(\theta)$ ordenados como $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_s < \theta_{s+1} < \dots < \theta_n = \theta$ donde $\theta_s = \text{máx} \{ \sigma^i(\theta); \sigma^i(\theta) \in \Sigma_0 \}$ y $\theta_{s+1} = \text{mín} \{ \sigma^i(\theta); \sigma^i(\theta) \in \Sigma_1 \}$.

1. Si ocurre que $\theta = \underline{1\theta_2 \dots \theta_{n-1}0}$, entonces $\theta_s = \sigma^{n-1}(\theta)$ y $\tilde{\theta}_1 = \underline{11\theta_2 \dots \theta_{n-1}0}$ satisfacen $\tilde{\theta}_0 = \theta_s < \tilde{\theta}_1 < \theta_{s+1} < \dots < \theta = \theta_n$.
2. Si ocurre que $\theta = \underline{1\theta_2 \dots \theta_{n-1}1}$, entonces $\theta_{s+1} = \tilde{\theta}_1 = \sigma^{n-1}(\theta)$ y $\tilde{\theta}_0 = \underline{01\theta_2 \dots \theta_{n-1}1}$ satisfacen $\theta_s < \tilde{\theta}_0 < \theta_{s+1} = \tilde{\theta}_1 = \sigma^{n-1}(\theta) < \dots < \theta_n = \theta$.

Nos referiremos al caso 1 como el primer caso y al caso 2 como el segundo caso.

En el primer caso consideraremos $I_1 = [\sigma_1(\theta), \theta_2]$, $I_2 = [\theta_2, \theta_3]$, \dots , $I_{s-1} = [\theta_{s-1}, \theta_s = \tilde{\theta}_0]$, $I_s = [\tilde{\theta}_1, \theta_{s+1}]$, \dots , $I_{n-1} = [\theta_{n-1}, \theta]$

En el segundo caso, consideramos $I_1 = [\sigma(\theta), \theta_2]$, $I_2 = [\theta_2, \theta_3]$, \dots , $I_{s-1} = [\theta_{s-1}, \theta_s]$, $I_s = [\theta_s, \tilde{\theta}_0]$, $I_{s+1} = [\tilde{\theta}_1 = \theta_{s+1}, \theta_{s+2}]$, \dots , $I_{n-1} = [\theta_{n-1}, \theta]$.

En el primer caso, consideramos la restricción de σ a

$$\Lambda_\theta = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sigma^{-n} \left([\sigma(\theta), \theta_s = \tilde{\theta}_0] \cup [\tilde{\theta}_1, \theta] \right)$$

y en el segundo caso consideramos la restricción de σ a

$$\Lambda_\theta = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sigma^{-n} \left([\sigma(\theta), \tilde{\theta}_0] \cup [\theta_{s+1} = \tilde{\theta}_1, \theta] \right).$$

En ambos casos consideramos a G como el A -grafo de σ restringido a

$$\{ \Lambda_\theta \cap I_1, \Lambda_\theta \cap I_2, \dots, \Lambda_\theta \cap I_{n-1} \}.$$

Proposición 3. $h(\sigma|_{\Lambda_\theta}) = h(G)$.

Demostración. La desigualdad $h(G) \leq h(\sigma|_{\Lambda_\theta})$ ya fue probada en la sección dedicada al resultado de Block, Guckenheimer, Misiurewicz y Young.

La demostración de la otra desigualdad se obtiene de manera similar a como fue probado el Teorema 6 en el capítulo 1. \square

Una consecuencia de este resultado es la siguiente. Sea $T: [0, x_0] \cup [x_1, 1] \rightarrow [0, 1]$ el shift de Milnor-Thurston y

$$\Lambda_T(\theta) = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}([I_T^{-1}(\sigma(\theta)), I_T^{-1}(\theta)]),$$

donde $I_T: \Lambda_T(\theta) \rightarrow \Sigma_2$ es el itinerario.

En el primer caso denotamos por

$$\begin{aligned} I_1^T(\theta) &= [I_T^{-1}(\sigma(\theta)), I_T^{-1}(\theta_2)], \quad I_2^T(\theta) = [I_T^{-1}(\theta_2), I_T^{-1}(\theta_3)], \dots, \\ I_{s-1}^T(\theta) &= [I_T^{-1}(\theta_{s-1}), I_T^{-1}(\tilde{\theta}_0) = I_T^{-1}(\theta_s)], \quad I_s^T(\theta) = [I_T^{-1}(\tilde{\theta}_1), I_T^{-1}(\theta_{s+1})], \dots, \\ I_{n-1}^T(\theta) &= [I_T^{-1}(\theta_{n-1}), I_T^{-1}(\theta)]. \end{aligned}$$

En el segundo caso denotamos por

$$\begin{aligned} I_1^T(\theta) &= [I_T^{-1}(\sigma(\theta)), I_T^{-1}(\theta_2)], \dots, \\ I_{s-1}^T(\theta) &= [I_T^{-1}(\theta_{s-1}), I_T^{-1}(\theta_s)], \quad I_s^T(\theta) = [I_T^{-1}(\theta_s), I_T^{-1}(\tilde{\theta}_s)], \\ I_{s+1}^T(\theta) &= [I_T^{-1}(\tilde{\theta}_1) = I_T^{-1}(\theta_{s+1}), I_T^{-1}(\theta_{s+2})], \dots, \\ I_{n-1}^T(\theta) &= [I_T^{-1}(\theta_{n-1}), I_T^{-1}(\theta)]. \end{aligned}$$

En el primer caso consideramos la restricción de T a:

$$\Lambda_T(\theta) = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n} \left([I_T^{-1}(\sigma(\theta)), I_T^{-1}(\tilde{\theta}_0)] \cup [I_T^{-1}(\tilde{\theta}_1), I_T^{-1}(\theta)] \right)$$

y en el segundo caso, la restricción de T a:

$$\Lambda_T(\theta) = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n} \left([I_T^{-1}(\sigma(\theta)), I_T^{-1}(\tilde{\theta}_0)] \cup [I_T^{-1}(\theta_{s+1}), I_T^{-1}(\theta)] \right).$$

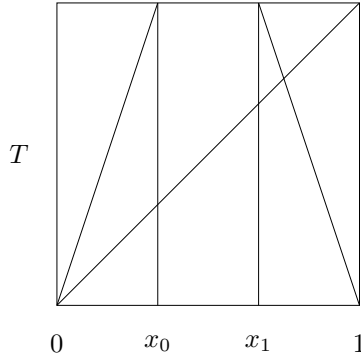
Corolario 11. $h_{top}(T|_{\Lambda_T(\theta)}) = h(G)$ donde G es el A -grafo de T restringido a $\Lambda_T(\theta) \cap I_1(\theta), \Lambda_T(\theta) \cap I_2(\theta), \dots, \Lambda_T(\theta) \cap I_{n-1}(\theta)$.

Demostración. Es una consecuencia del resultado anterior y del resultado de Bowen aplicado al itinerario. \square

Este último corolario nos entrega un algoritmo simple para el cálculo de $h_{top}(\theta) = h_{top}(\sigma|_{\Lambda_\theta})$ para cada $\theta \in \text{máx}_2 \cap \text{Per}(\sigma)$.

2.2. Sobre la combinatoria y la entropía de las órbitas que doblan período (trabajo original en conjunto con Eric Inda)

Sabemos que el shift de Milnor-Thurston es representado por la aplicación $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ como definida en la siguiente figura:



Sea $H_{11,10}: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la aplicación de renormalización que reemplaza el 0 con 11 y el 1 en 10. Por ejemplo, $H_{11,10}(\underline{1}) = \underline{10}$, $H_{11,10}(\underline{100}) = \underline{101111}$, $H_{11,10}(\underline{10}) = \underline{1011}$, $H_{11,10}(\underline{1011}) = \underline{10111010}$.

Es claro que si $\theta_0 = 1$ entonces $\inf \{\theta; \theta \in \text{Per}(\sigma) \cap \text{máx}_2\} = \underline{1}$ y no es difícil concluir que: $\underline{1} < H_{11,10}(\underline{1}) < H_{11,10}^2(\underline{1}) < \dots < \lim_{n \rightarrow \infty} H_{11,10}^n(\underline{1}) = 10111010 \dots$

Observamos que $H_{11,10}^n(\underline{1})$ es una órbita periódica de periodo 2^n . Consideramos $\theta_{2^n} = H_{11,10}^n(\underline{1})$ y $\Lambda(\theta_{2^n}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sigma^{-n}([\sigma(\theta_{2^n}), \theta_{2^n}])$

- Para $n = 0$, $\theta_{2^0} = \underline{1}$ y $\Lambda(\underline{1}) = \{\underline{1}\}$, por lo tanto $h_{top}(\underline{1}) = 0$
- Para $n = 1$, $\theta_2 = \underline{10}$ y $\Lambda(\underline{10}) = \{0\underline{1}, \underline{10}, 11\underline{10}, 111\underline{10}, \dots, 1^n\underline{10}, \underline{1}, \underline{10}; n \in \mathbb{N}\}$
 $\therefore h_{top}(\underline{10}) = 0$.

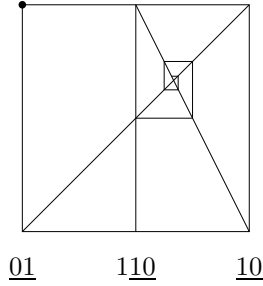
En general $\Lambda(\theta_{2^n})$ es un conjunto numerable y $h_{top}(\theta_{2^n}) = 0$.

Esto puede verse a través de T .

En efecto, consideremos $[\sigma(\theta_{2^n}), \theta_{2^n}]$ y la restricción de T a $[\sigma(\theta_{2^n}), \theta_{2^n}]$, $n \geq 1$.

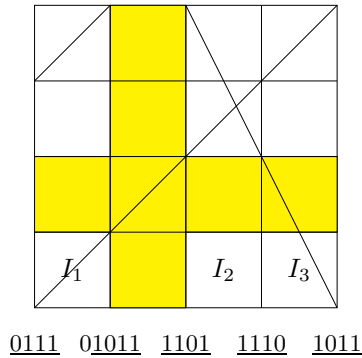
Ejemplos

- 1) Para $\theta = \underline{10}$ la restricción $T|_{[0\underline{1}, \underline{10}]}$ es:



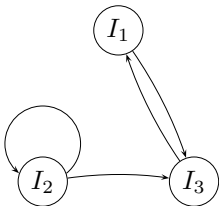
Aquí se ve claramente que $h_{top}(\underline{10}) = 0$ y el conjunto $\Lambda(\theta_2) = \Lambda(\underline{10})$ es como señalado.

2) Para $\theta = \underline{1011}$ la restricción $T|_{[\underline{0111}, \underline{1011}]}$ es:



Si llamamos $I_1 = [\underline{0111}, \underline{01011}]$, $I_2 = [\underline{1101}, \underline{1110}]$, $I_3 = [\underline{1110}, \underline{1011}]$, entonces, asociado a $T|_{[\underline{0111}, \underline{1011}]}$ tenemos el siguiente A-grafo,

que tiene la siguiente matriz de incidencias:



$$M_{(2^2-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

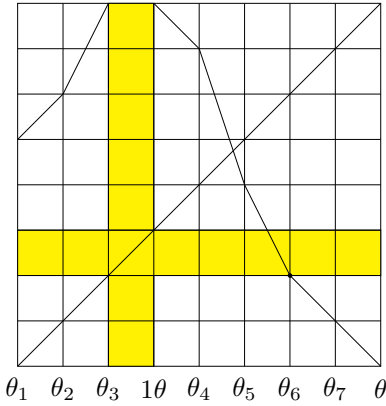
que tiene como roma a $R = \{1, 2\}$

Su matriz $A_R = (a_{ij})$, viene dada por:

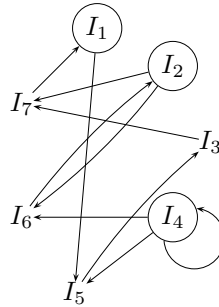
$$\begin{aligned} a_{11}(x) &= x^{-2}, & a_{12}(x) &= 0 \\ a_{21}(x) &= x^{-2}, & a_{22}(x) &= x^{-1} \\ \therefore (-1)^{3-2} x^3 \det(A_R(x) - I) &= -x^3(x^{-3} - x^{-2} - x^{-1} + 1) = \\ &= -x^3 + x^2 + x - 1 = -(1 - x^2)(1 - x) \end{aligned}$$

cuya raíz real mayor es $x = 1$. Por lo tanto, $h_{top}(G) = 0$ que coincide con $h_{top}(\underline{1011})$.

3) Para $\theta = \underline{10111010}$ la restricción de T a $[\underline{01110101}, \underline{10111010}]$ es:



cuyo A-grafo es:



y cuya matriz de incidencia es:

$$M_{(2^3-1)} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Una roma para el A -grafo es $R = \{1, 2, 4\}$ (esto se verifica tomando $i \notin R$ $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$) y viendo si hay un camino que parte en i y regresa a i que no pase por R , cosa que no ocurre)

Calculamos la A_R matriz.

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= x^{-4} & a_{12} &= 0 & a_{14} &= 0 \\
 a_{21} &= x^{-2} & a_{22} &= x^{-2} & a_{24} &= 0 \\
 a_{41} &= x^{-4} & a_{42} &= x^{-2} & a_{44} &= x^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\det(A_R(x) - I) = \begin{vmatrix} x^{-4} - 1 & 0 & 0 \\ x^{-2} & x^{-2} - 1 & 0 \\ x^{-4} & x^{-2} & x^{-1} - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x^{-4} - 1)(x^{-2} - 1)(x^{-1} - 1) = x^{-7} - x^{-6} - x^{-5} + x^{-4} - x^{-2} + x^{-1} - 1$$

$$\therefore (-1)^{7-3} x^7 \det(A_R(x) - I) = 1 - x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + x^6 - x^7$$

$$= -(x^7 - x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + x - 1).$$

Si denotamos por $p_n(x)$ al polinomio característico de θ_{2^n} . Tenemos

$$\begin{aligned}
 p_3(x) &= x^4 p_2(x) - p_2(x) = (x^4 - 1)p_2(x) = -(1 - x^4)p_2(x) \\
 \therefore p_3(1) &= 1 \cdot p_2(1) - p_2(1) = 0
 \end{aligned}$$

$\therefore \lambda = 1$ es el radio espectral, y

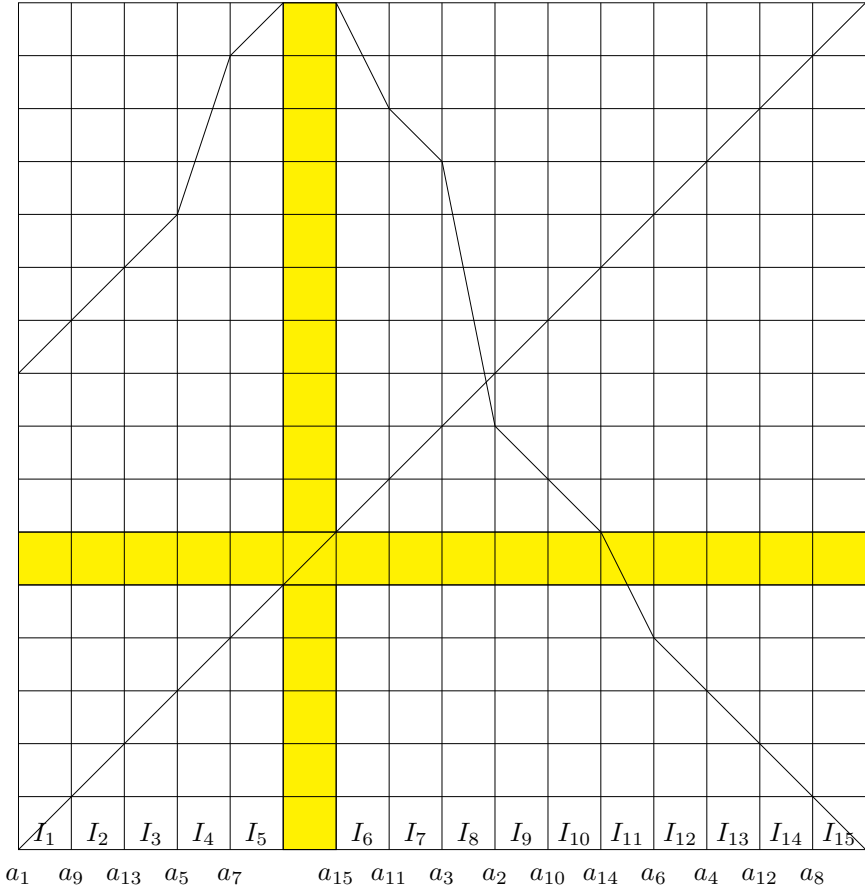
$$\therefore \log \lambda = 0 = h_{top}(\theta_{2^3}).$$

4) Sea $\theta_{2^4} = H_{11,10}(\theta_3) = H_{11,10}(\underline{10111010}) = \underline{1011101010111011}$.

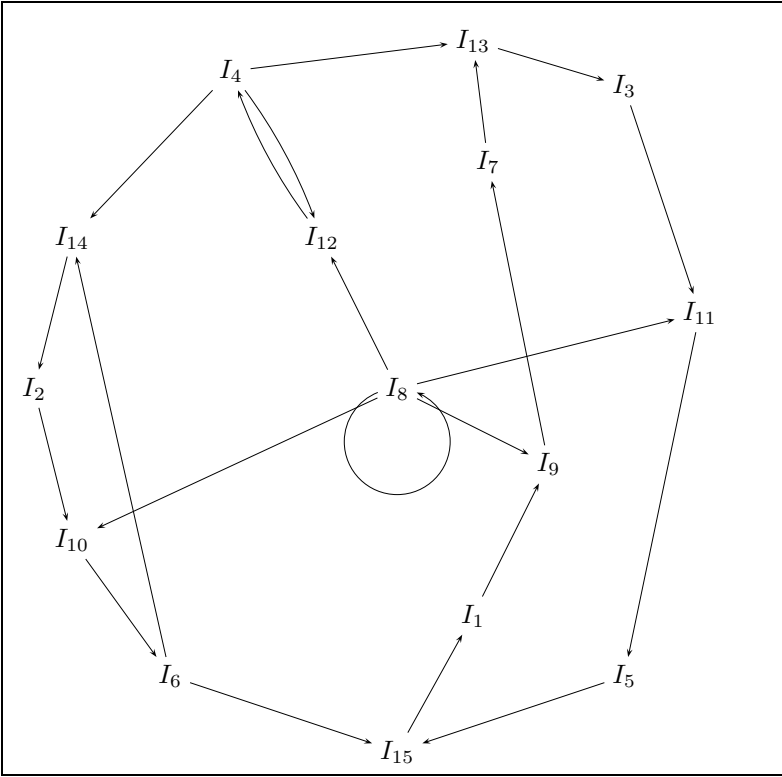
Escribamos $a_1 = \sigma(\theta_{2^4})$, $a_2 = \sigma(a_1)$, $a_3 = \sigma(a_2)$, ..., $a_{16} = \sigma(a_{15}) = \theta_{2^4}$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
 a_1 &< a_9 < a_{13} < a_5 < a_7 < a_{15} < a_{11} < a_3 < a_2 < \\
 &< a_{10} < a_{14} < a_6 < a_4 < a_{12} < a_8 < a_{16}.
 \end{aligned}$$

La restricción de $T|_{[a_1, a_{16}]}$ se ve como en la siguiente figura:



cuyo A-grafo es :



Cuya matriz de incidencias es:

$$\begin{array}{cccc}
a_{11} = x^{-8} & a_{12} = 0 & a_{14} = 0 & a_{18} = 0 \\
a_{21} = x^{-4} & a_{22} = x^{-4} & a_{24} = 0 & a_{28} = 0 \\
a_{41} = x^{-6} & a_{42} = x^{-2} & a_{44} = x^{-2} & a_{48} = 0 \\
a_{81} = x^{-8} + x^{-?} + x^{-4} & a_{82} = x^{-4} & a_{84} = x^{-4} & a_{88} = x^{-1}
\end{array}$$

$$\therefore A_k(x) - I = \begin{vmatrix} x^{-8} - 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^{-4} & x^{-4} - 1 & 0 & 0 \\ x^{-6} & x^{-2} & x^{-2} - 1 & 0 \\ x^{-8} + 2x^{-4} & x^{-4} & x^{-4} & x^{-1} - 1 \end{vmatrix}$$

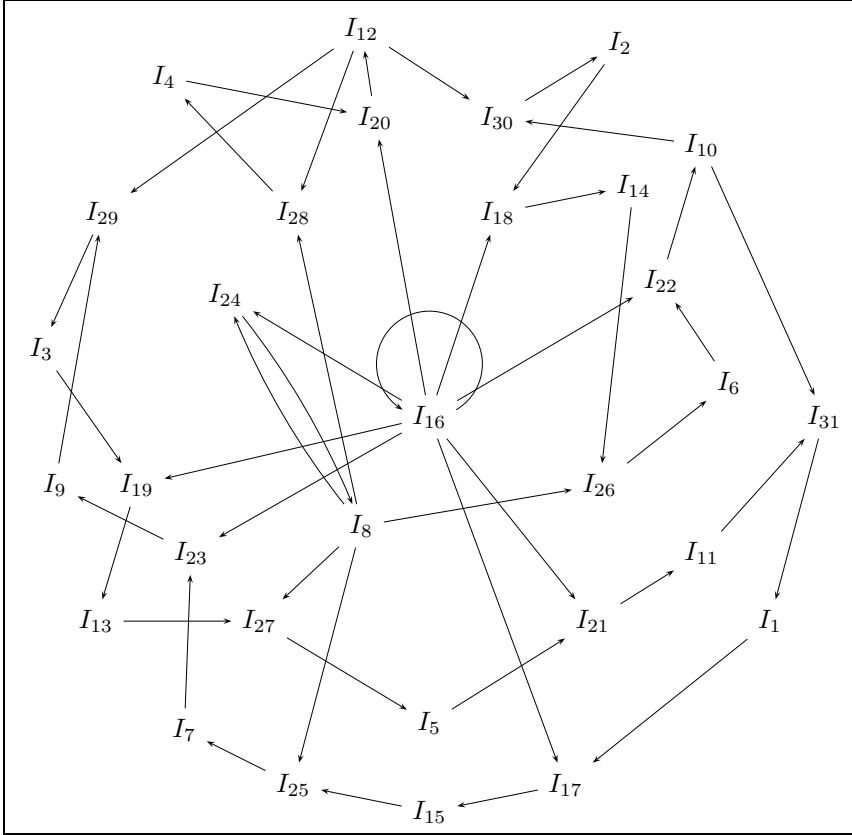
$$\begin{aligned}
\therefore \det(A_k(x) - I) &= (x^{-8} - 1)(x^{-4} - 1)(x^{-2} - 1)(x^{-1} - 1) \\
&\quad (-1)^{15-4} x^{15} (x^{-8} - 1)(x^{-4} - 1)(x^{-2} - 1)(x^{-1} - 1) \\
&= -(1 - x^8)(1 - x^4)(1 - x^2)(1 - x) = -(1 - x^8) p_3(x) \\
&\therefore p_4(1) = 0 \quad \text{así que} \quad h_{top}(\theta_{2^4}) = 0 = h_{top}(G)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, coincide con la entropía topológica del gráfico asociado.

- 5) Veamos, como una manera de encaminarnos a la fórmula general para obtener $p_n(x)$, el caso $n = 5$.

$$\begin{aligned}
\text{En este caso } \theta_{2^5} &= H_{111110}(\underline{1011101010111011}) = \\
&= \underline{10111010101110111011101010111010} = \theta
\end{aligned}$$

En la figura siguiente, ordenamos las iteraciones $\theta, \sigma(\theta), \dots, \sigma^{31}(\theta)$ y colocamos su A -grafo.



y su matriz de incidencias es

$$M_{2^5-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0_{(2^4-1) \times 2^4} & M_{(2^4-1)} \\ \hline & 11110000000000 \\ & \vdots \\ & 1 \\ 1 & 0_{(2^4-1) \times (2^4-1)} \end{array} \right)$$

Esta A-grafo, tiene como roma a $R = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ cuya A_R -matriz es:

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} = x^{-16} & a_{12} = 0 & a_{14} = 0 & a_{18} = 0 & a_{116} = 0 \\
a_{21} = x^{-8} & a_{22} = x^{-8} & a_{24} = 0 & a_{28} = 0 & a_{216} = 0 \\
a_{41} = x^{-12} & a_{42} = x^{-4} & a_{44} = x^{-4} & a_{48} = 0 & a_{416} = 0 \\
a_{81} = 2x^{-6} + x^{-14} & a_{82} = x^{-6} & a_{84} = x^{-4} & a_{88} = x^{-1} & a_{816} = 0 \\
a_{161} = * & a_{162} = * & a_{164} = * & a_{168} = * & a_{1616} = x^{-1}
\end{array}$$

Tenemos entonces que:

$$A_R(x) - I = \begin{vmatrix} x^{-16} - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^{-8} & x^{-8} - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2x^{-12} & x^{-4} & x^{-4} - 1 & 0 & 0 \\ 2x^{-6} + x^{-14} & x^{-6} & x^{-4} & x^{-2} - 1 & 0 \\ * & * & * & * & x^{-1} - 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \det(A_k(x) - I) &= (x^{-16} - 1)(x^{-8} - 1)(x^{-4} - 1)(x^{-2} - 1)(x^{-1} - 1) \\
\therefore (-1)^{31-5} x^{31} \det(A_k(x) - 1) &= (1 - x^{16})(1 - x^8)(1 - x^4)(1 - x^2)(1 - x) = \\
p_5(x) &= -(1 - x^{16})p_4(x) = -(1 - x^{24})p_4(x).
\end{aligned}$$

De aquí $p_5(x) = 0$ y $\lambda = 1$ es el radio espectral de M . Por lo tanto,

$$\log(\lambda) = 0 = h_{top}(\theta_{2^5})$$

Observación 4. Consideremos $\theta = \theta_{2^2} = \underline{1011}$, $\theta_{2^3} = H_{11,10}(\theta) = \underline{10111010}$,
 $\theta_{2^4} = H_{11,10}(\theta_{2^3}) = \underline{1011101010111011}$,
 $\theta_{2^5} = H_{11,10}(\theta_{2^4}) = \underline{10111010101110111011101010111010}$,
y en general $\theta_{2^n} = H_{11,10}(\theta_{2^{n-1}}) = H^{n-2}(\theta)$.

Vamos a establecer un algoritmo para el ordenamiento de los iterados de $\theta_{2^{n+1}}$ a partir del ordenamiento de θ_{2^n} , $n \geq 2$

- (a) los iterados de $\theta_{2^2} = \theta$ están ordenados así $\sigma(\theta) < 0\theta < \sigma^3(\theta) < \underline{1} < \sigma^2(\theta) < \theta$ que lo identificaremos con $(1, 0\theta; 3, \underline{1}, 2; 0)$

(b) los iterados de $\theta_{2^3} = \theta$ están ordenados así:

$$\sigma(\theta) < \sigma^5(\theta) < \sigma^7(\theta) < 1\theta < \sigma^3(\theta) < \underline{1} < \sigma^2(\theta) < \sigma^6(\theta) < \sigma^4(\theta) < \theta$$

que lo identificaremos con (1, 5, 7; 1 θ ; 3, $\underline{1}$, 2; 6, 4; 0)

(c) los iterados de $\theta_{2^4} = \theta$ están ordenados así:

$$\sigma(\theta) < \theta^9(\theta) < \theta^{13}(\theta) < \sigma^5(\theta) < \sigma^7(\theta) < 0\theta < \theta^{15}(\theta) < \sigma^{11}(\theta) < \sigma^3(\theta) < \underline{1} < \sigma^2(\theta) < \sigma^{10}(\theta) < \sigma^{14}(\theta) < \sigma^6(\theta) < \sigma^4(\theta) < \sigma^{12}(\theta) < \sigma^8(\theta) < \theta$$

que lo identificaremos con (1; 9, 13; 5, 7; 0 θ ; 15, 11; 3, $\underline{1}$, 2; 10, 14; 6, 4; 12, 8; 0)

(d) los iterados de $\theta_{2^5} = \theta$ están ordenados así:

$$\sigma(\theta) < \sigma^{17} < \sigma^{25} < \sigma^9 < \sigma^{13} < \sigma^{29} < \sigma^{21} < \sigma^5 < \sigma^7 < \sigma^{23} < \sigma^{31} < 1\theta < < \sigma^{15} < \sigma^{11} < \sigma^{27} < \sigma^{19} < \sigma^3 < \underline{1} < \sigma^2 < \sigma^{18} < \sigma^{26} < \sigma^{10} < \sigma^{14} < \sigma^{30} < < \sigma^{22} < \sigma^6 < \sigma^4 < \sigma^{20} < \sigma^{28} < \sigma^{12} < \sigma^8 < \sigma^{24} < \sigma^{16} < \theta$$

que lo identificaremos con

$$(1; 17, 25; 9, 13; 29, 21; 5, 7; 23, 31; 1\theta; 15, 11; 27, 19; 3, \underline{1}, 2; 18, 26; 10, 14; 30, 22, 6, 4; 20, 28; 12, 8; 24, 16, 0)$$

(e) los iterados de $\theta_{2^6} = \theta$ están ordenados así:

$$\sigma^1 < \sigma^{33} < \sigma^{49} < \sigma^{17} < \sigma^{25} < \sigma^{57} < \sigma^{41} < \sigma^9 < \sigma^{13} < \sigma^{45} < \sigma^{61} < \sigma^{29} < \sigma^{21} < < \sigma^{53} < \sigma^{37} < \sigma^5 < \sigma^7 < \sigma^{39} < \sigma^{55} < \sigma^{23} < \sigma^{31} < 0\theta < \sigma^{63} < \sigma^{47} < \sigma^{15} < \sigma^{11} < < \sigma^{43} < \sigma^{59} < \sigma^{27} < \sigma^{19} < \sigma^{51} < \sigma^{35} < \sigma^3 < \underline{1} < \sigma^2 < \sigma^{34} < \sigma^{50} < \sigma^{18} < \sigma^{26} < < \sigma^{58} < \sigma^{42} < \sigma^{10} < \sigma^{14} < \sigma^{46} < \sigma^{62} < \sigma^{30} < \sigma^{22} < \sigma^{54} < \sigma^{38} < \sigma^6 < \sigma^4 < < \sigma^{36} < \sigma^{52} < \sigma^{20} < \sigma^{28} < \sigma^{60} < \sigma^{44} < \sigma^{12} < \sigma^8 < \sigma^{40} < < \sigma^{56} < \sigma^{24} < \sigma^{16} < \sigma^{48} < \sigma^{32} < \theta$$

que lo identificaremos con:

$$(1; 33, 49; 17, 25; 57, 41; 9, 13; 45, 61; 29, 21; 53, 37; 5, 7; 39, 55; 23, 31; 0\theta; 63, 47; 15, 11; 43, 59; 27, 19; 51, 35; 3, \underline{1}, 2; 34, 50; 18, 26; 58, 42; 10, 14, 46, 62; 30, 22; 54, 38; 6, 4; 36, 52; 20, 28; 60, 44; 12, 8; 40, 56; 24, 16; 48, 32; 0)$$

Antes de proseguir: en cada paso tenemos una cantidad, $0(n)$, de elementos de la órbita de θ que empiezan con 0 y una cantidad, $1(n)$, de elementos de la órbita que empiezan con 1. Estas dos cantidades satisfacen la relación básica:

$$0(n) + 1(n) = 2^n$$

Tenemos, por ejemplo:

$$\begin{aligned} 0(2) &= 1, \quad 1(2) = 3; \quad 0(3) = 3, \quad 1(3) = 5; \quad 0(4) = 5, \\ 1(4) &= 11; \quad 0(5) = 11; \quad 1(5) = 21; \quad 0(6) = 21; \quad 1(6) = 43; \end{aligned}$$

y así, sucesivamente.

Para $0(n+1)$, tenemos: $0(n+1) = 1(n)$. En efecto, ordenemos los elementos de $\theta = \theta_{2^n}$.

$$\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{0(n)} \leq 0\theta < 1\theta \leq \theta_{0(n)+1} < \dots < \theta_{2^n} = \theta$$

al hacer la renormalización $\tilde{\theta}_i = H_{11,10}(\theta_i)$ vemos que $\tilde{\theta}_i$ comienzan con dos 1's para $1 \leq i \leq 0(n)$ y que comienza con 10 si $0(n) + 1 \leq i \leq 2^n$. Así que cada $\sigma H_{11,10}(\theta_i) = \sigma(\tilde{\theta}_i)$ empieza con 0 si $\theta(n) + 1 \leq i \leq 2^n$. Cada uno de estos elementos está en la órbita de $\tilde{\theta} = H_{11,10}(\theta_{2^n}) = \theta_{2^{n+1}}$. Así $0(n+1) = 1(n)$. (como se comprueba para $n = 2, 3, 4, 5, 6$).

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} 1(n+1) &= 2^{n+1} - 0(n+1) = 2^{n+1} - 1(n) = 2^{n+1} - 2^n + 0(n) = \\ &= 2^{n+1} - 2^n + 1(n-1) = 2^{n+1} - 2^n + 2^{n-1} - 0(n-1) \\ \therefore 1(n+1) &= 2^{n+1} - 2^n + 2^{n-1} - 1(n-2) = \\ &= 2^{n+1} - 2^n + 2^{n-1} - 2^{n-2} + 0(n-2) = \\ &= 2^{n+1} - 2^n + 2^{n-1} - 2^{n-2} + 1(n-3) \end{aligned}$$

Vamos a suponer que $n = 2k$

$$\begin{aligned}
 1(2k) &= 2^{2k} - 2^{2k-1} + 2^{2k-2} - 2^{2k-3} + 1(2k-4), \quad k \geq 3 \\
 &= 2^{2k} - 2^{2k-1} + 2^{2k-2} - 2^{2k-3} + \dots + 2^4 - 2^3 + 1(2) = \\
 &= (2^{2k} + 2^{2k-2} + \dots + 2^4) - (2^{2k-1} + 2^{2k-3} + \dots + 2^3) + 3 \\
 &= 2^4(1 + 2^2 + (2^2)^2 + \dots + (2^2)^{k-2}) - \\
 &\quad - 2^3(1 + 2^2 + \dots + (2^2)^{k-2}) + 3 \\
 &= 2^3(1 + 2^2 + \dots + (2^2)^{k-2}) + 3 = 2^3 \frac{(2^2)^{k-1} - 1}{2^2 - 1} + 3
 \end{aligned}$$

$$\boxed{1(2k) = \frac{8}{3}(2^{2(k-1)} - 1) + 3} \quad k \geq 3$$

Por ejemplo,

$$k = 3 \Rightarrow 1(6) = \frac{8}{3}(15) + 3 = 43$$

Vamos a suponer que $n = 2k + 1$

$$\begin{aligned}
 1(2k+1) &= 2^{2k+1} - 2^{2k} + 2^{2k-1} - 2^{2k-2} + 1(2k-3) \\
 &= 2^{2k+1} - 2^{2k} + 2^{2k-1} - 2^{2k-2} + \dots + 2^5 - 2^4 + 1(3) \\
 1(2k+1) &= 2^{2k+1} + 2^{2k-1} + 2^{2k-3} + \dots + 2^5 - (2^{2k} + 2^{2k-2} + \dots + 2^4) + 1(3) \\
 &= 2^5(2^{2k-4} + 2^{2k-3} + 2^{2k-8} + \dots + 1) - 2^4(2^{2k-4} + \dots + 1) + 1(3) \\
 &= 2^4 \frac{(2^2)^{k-1} - 1}{2^2 - 1} + 5 = \frac{16}{3}((2^2)^{k-1} - 1) + 5
 \end{aligned}$$

Por ejemplo: para $k = 2$

$$\begin{aligned}
 1(5) &= \frac{16}{3}(2^2 - 1) + 5 = 21 \\
 \therefore \boxed{1(2k+1) = \frac{16}{3}((2^2)^{k-1} - 1) + 5}
 \end{aligned}$$

Vamos ahora a trabajar el caso $n = 7$, con el intuito de establecer la forma del caso general.

Tenemos

$$1(7) = \frac{16}{3}((2^2)^2 - 1) + 5 = \frac{16}{3} \cdot 15 + 5 = 85$$

O sea, hay 85 elementos de la órbita de $\theta = \theta_{2^7}$ que empiezan con 1. De estos hay $0(6) = 1(5) = 21$ que están entre 1θ y $\underline{1}$ y entonces hay $85 - 21 = 64 = 2^6$ que están entre $\underline{1}$ y θ_{2^7} . Tenemos que $0(7) = 1(6) = \frac{8}{3}(2^{2^2} - 1) + 3 = 43$, i.e., hay 43 elementos de la órbita que empiezan con 0.

Como $n = 7$ es impar, entonces 0θ es un elemento de la órbita y 1θ no lo es.

Para ordenar los iterados de θ , tenemos que $\sigma(\theta) \leq \sigma^i(\theta) \leq \theta$ para cada $0 \leq i \leq 127$.

$\sigma^2(\theta)$ es el primer elemento de la órbita de la derecha de $\underline{1}$.

$\sigma^3(\theta)$ es el primer elemento de la órbita a la izquierda de $\underline{1}$.

Tenemos $\sigma^1(\theta) < \sigma^{127}(\theta) = 0\theta < 1\theta < \sigma^3(\theta) < \underline{1} < \sigma^2(\theta) < \theta$.

Contando $\sigma^2(\theta)$ y θ , hay 64 elementos de la órbita de θ entre ellos. En el lugar 32, contando desde θ , está $\sigma^4(\theta)$. Esto implica que en el lugar 32, contando desde $\sigma^1(\theta)$ está $\sigma^5(\theta)$. El iterado $\sigma^6(\theta)$ es colindante, a la izquierda de $\sigma^4(\theta)$ y el iterado $\sigma^7(\theta)$ es colindante, a la derecha de $\sigma^5(\theta)$.

Tenemos: $1 < 5 < 7 < 127 = 0\theta < 1\theta < 3 < \underline{1} < 2 < 6 < 4 < 0$.

El iterado $\sigma^8(\theta)$ está localizado en el lugar 16, contando desde θ .

El iterado $\sigma^9(\theta)$ está localizado en el lugar 16, contando desde $\sigma(\theta)$.

El iterado $\sigma^{10}(\theta)$ está localizado en el lugar 16, contando desde $\sigma^2(\theta)$.

El iterado $\sigma^{11}(\theta)$ está localizado en el lugar 16, a la izquierda, contando desde $\sigma^3(\theta)$.

El iterado $\sigma^{12}(\theta)$ está localizado en el lugar 16, a la derecha, contando desde $\sigma^4(\theta)$.

El iterado $\sigma^{13}(\theta)$ está localizado en el lugar 16, a la izquierda, contando desde $\sigma^5(\theta)$.

El iterado $\sigma^{14}(\theta)$ está localizado en el lugar 16, a la izquierda, contando desde $\sigma^6(\theta)$.

El iterado $\sigma^{15}(\theta)$ está localizado en el lugar 16, a la derecha, contando desde $\sigma^7(\theta)$. Como σ^7 está en el lugar 33 y $0(7) = 43$, tenemos que $\sigma^{15}(\theta)$ está a la derecha de 1θ . Hasta ahora tenemos lo siguiente:

$$1 < 9 < 13 < 5 < 7 < 127 = 0\theta < 1\theta < 15 < 11 < 3 < \underline{1} \\ < 2 < 10 < 14 < 6 < 4 < 12 < 8 < 0.$$

Observamos que estos 16 iterados están ordenados tal cual lo estaban en θ_{2^4} .

El iterado $\sigma^{16}(\theta)$ está localizado en el lugar 8, a la izquierda, contando desde θ .

El iterado $\sigma^{17}(\theta)$ está localizado en el lugar 8, a la derecha, contando desde $\sigma(\theta)$.

El iterado $\sigma^{18}(\theta)$ está localizado en el lugar 8, a la derecha, contando desde $\sigma^2(\theta)$.

El iterado $\sigma^{19}(\theta)$ está localizado en el lugar 8, a la izquierda, contando desde $\sigma^3(\theta)$.

El iterado $\sigma^{20}(\theta)$ está localizado en el lugar 8, a la derecha, contando desde $\sigma^4(\theta)$.

El iterado $\sigma^{21}(\theta)$ está localizado en el lugar 8, a la izquierda, contando desde $\sigma^5(\theta)$.

El iterado $\sigma^{22}(\theta)$ está localizado en el lugar 8, a la izquierda, contando desde $\sigma^6(\theta)$.

El iterado $\sigma^{23}(\theta)$ está localizado en el lugar 8, a la derecha, contando desde $\sigma^7(\theta)$.

El iterado $\sigma^{24}(\theta)$ está localizado en el lugar 8, a la derecha, contando desde $\sigma^8(\theta)$.

El iterado $\sigma^{25}(\theta)$ está localizado en el lugar 8, a la izquierda, contando desde $\sigma^9(\theta)$.

El iterado $\sigma^{26}(\theta)$ está localizado en el lugar 8, a la izquierda, contando desde $\sigma^{10}(\theta)$.

El iterado $\sigma^{27}(\theta)$ está localizado en el lugar 8, a la derecha, contando desde $\sigma^{11}(\theta)$.

El iterado $\sigma^{28}(\theta)$ está localizado en el lugar 8, a la izquierda, contando desde $\sigma^{12}(\theta)$.

El iterado $\sigma^{29}(\theta)$ está localizado en el lugar 8, a la derecha, contando desde $\sigma^{13}(\theta)$.

El iterado $\sigma^{30}(\theta)$ está localizado en el lugar 8, a la derecha, contando desde $\sigma^{14}(\theta)$.

El iterado $\sigma^{31}(\theta)$ está localizado en el lugar 8, a la izquierda, contando desde $\sigma^{15}(\theta)$.

Hasta ahora tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1 < 17 < 25 < 9 < 13 < 29 < 21 < 5 < 7 < 23 < 31 < 127 = 0\theta < 1\theta < 15 < 11 < \\ < 27 < 19 < 3 < \underline{1} < 2 < 18 < 26 < 10 < 14 < 30 < 22 < 6 < 4 < 20 < 28 < 12 \\ < 8 < 24 < 16 < 0 \end{aligned}$$

Observamos que estos 32 iterados están ordenados tal cual estaban en θ_{25} .

El iterado $\sigma^{32}(\theta)$ está localizado en el lugar 4, a la izquierda contando desde θ .

Sucesivamente, los iterados 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, . . . , 63, estarán localizados a 4 lugares de los iterados 1, 2, . . . , 31, a la izquierda o derecha, dependiendo

de si el anterior preserva o invierte orientación (contando desde el iterado).

Por ejemplo, el iterado 33 está localizado en el lugar 4, a la derecha, contando desde $\sigma^1(\theta)$. Esto porque en el trecho $[\sigma^{32}(\theta), \theta]$ la aplicación T invierte orientación.

Resumiendo, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 &1 < 33 < 49 < 17 < 25 < 57 < 41 < 9 < 13 < 45 < 61 < 29 < 21 < 53 < \\
 &37 < 5 < 7 < 39 < 55 < 23 < 31 < 0\theta = 127 < 1\theta < 63 < 47 < 15 < 11 < 43 < \\
 &< 59 < 27 < 19 < 51 < 35 < 3 < \underline{1} < 2 < 34 < 50 < 18 < 26 < 58 < 42 < 10 < \\
 &< 14 < 46 < 62 < 30 < 22 < 54 < 38 < 6 < 4 < 36 < 52 < 20 < 28 < 60 < 44 < \\
 &< 12 < 8 < 40 < 56 < 24 < 16 < 48 < 32 < \theta.
 \end{aligned}$$

El iterado $\sigma^{64}(\theta)$ está localizado en el lugar 2, a la izquierda, contando desde θ . O sea $\sigma^{64}(\theta)$ es colindante a θ .

Sucesivamente, los iterados 65, 66, 67, ..., 127, estarán colindantes a los iterados 1, 2, 3, ..., 63, a la derecha o a la izquierda, dependiendo de si el anterior preserva o invierte orientación.

Por ejemplo, el iterado 65 será colindante con el iterado 1 esto porque en el trecho $[\sigma^{64}(\theta), \theta]$ la aplicación T invierte orientación.

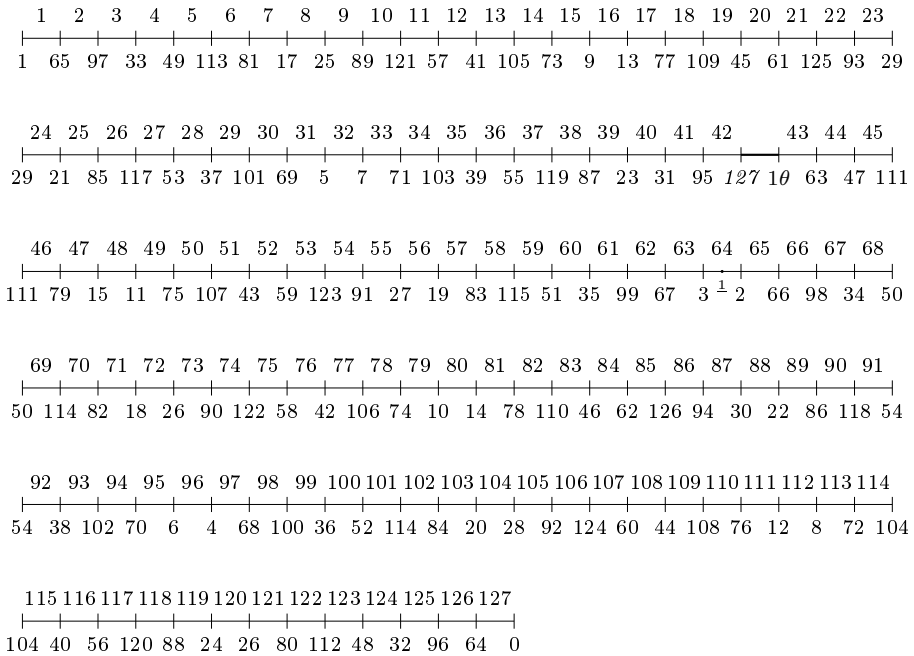
Resumiendo, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 &1 < 65 < 97 < 33 < 49 < 113 < 81 < 17 < 25 < 89 < 121 < 57 < 41 < 105 < \\
 &73 < 9 < 13 < 77 < 109 < 45 < 61 < 125 < 93 < 29 < 21 < 85 < 117 < 53 < 37 < \\
 &101 < 69 < 5 < 7 < 71 < 103 < 39 < 55 < 119 < 87 < 23 < 31 < 95 < \\
 &127 = 0\theta < 1\theta < 63 < 47 < 111 < 79 < 15 < 11 < 75 < 107 < 43 < 59 < 123 < \\
 &91 < 27 < 19 < 83 < 115 < 51 < 35 < 99 < 67 < 3 < \underline{1} < \underline{2} < 66 < 98 < \\
 &34 < 50 < 114 < 82 < 18 < 26 < 90 < 122 < 58 < 42 < 106 < 74 < 10 < 14 < \\
 &< 78 < 110 < 46 < 62 < 126 < 94 < 30 < 22 < 86 < 118 < 54 < 38 < \\
 &102 < 70 < 6 < 4 < 68 < 100 < 36 < 52 < 114 < 84 < 20 < 28 < 92 < \\
 &124 < 60 < 44 < 108 < 74 < 12 < 8 < 72 < 40 < 56 < 120 < \\
 &88 < 24 < 16 < 112 < 48 < 32 < 96 < 64 < \theta.
 \end{aligned}$$

Vamos ahora a hacer el A -grafo asociado a la aplicación $T|_{[\sigma(\theta), \theta]}$ y para ello definimos:

$$\begin{aligned}
I_1 &= [\sigma^1(\theta), \sigma^{65}(\theta)], & I_2 &= [\sigma^{65}(\theta), \sigma^{97}(\theta)], & I_3 &= [\sigma^{97}(\theta), \sigma^{33}(\theta)] \\
I_4 &= [\sigma^{33}(\theta), \sigma^{49}(\theta)], \dots & I_8 &= [\sigma^{17}(\theta), \sigma^{25}(\theta)], \dots & I_{16} &= [\sigma^9(\theta), \sigma^{13}(\theta)], \\
I_{32} &= [\sigma^5(\theta), \sigma^7(\theta)], \dots & I_{42} &= [\sigma^{95}(\theta), \sigma^{127}(\theta)], \dots & I_{43} &= [1\theta, \sigma^{63}(\theta)] \\
I_{64} &= [\sigma^3(\theta), \sigma^2(\theta)], & I_{65} &= [\sigma^2(\theta), \sigma^{66}(\theta)], & \dots & I_{127} &= [\sigma^{64}(\theta), \theta]
\end{aligned}$$

Colocamos estos intervalos en la recta real y tenemos lo siguiente:



En la parte inferior colocamos el iterado y en la parte superior colocamos el número del intervalo.

Afirmación 5. $R = \{I_1, I_2, I_4, I_8, I_{16}, I_{32}, I_{64}\}$ es una roma para el A -gráfico de $T|_{[\sigma^1\theta, \sigma^{127}\theta] \cup [1\theta, \theta]}$

Para probar esto, probaremos que en el cálculo de $a_{11}, a_{22}, a_{44}, a_{88}, a_{16\ 16}, a_{32\ 32}$ y $a_{64\ 64}$ aparecen los 127 intervalos.

Afirmación 6. $a_{11} = x^{-64}$.

Demostración. En efecto, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& I_1 \rightarrow I_{65} \rightarrow I_{63} \rightarrow I_{97} \rightarrow I_{31} \rightarrow I_{95} \rightarrow I_{33} \rightarrow I_{113} \rightarrow I_{15} \rightarrow \\
& \rightarrow I_{79} \rightarrow I_{49} \rightarrow I_{111} \rightarrow I_{17} \rightarrow I_{81} \rightarrow I_{47} \rightarrow I_{121} \rightarrow I_7 \rightarrow I_{71} \rightarrow I_{57} \\
& \rightarrow I_{103} \rightarrow I_{25} \rightarrow I_{89} \rightarrow I_{39} \rightarrow I_{119} \rightarrow I_9 \rightarrow I_{73} \rightarrow I_{55} \rightarrow I_{105} \\
& \rightarrow I_{23} \rightarrow I_{87} \rightarrow I_{41} \rightarrow I_{125} \rightarrow I_3 \rightarrow I_{67} \rightarrow I_{61} \rightarrow I_{99} \rightarrow I_{29} \rightarrow I_{93} \\
& \rightarrow I_{35} \rightarrow I_{115} \rightarrow I_{13} \rightarrow I_{77} \rightarrow I_{51} \rightarrow I_{109} \rightarrow I_{19} \rightarrow I_{83} \rightarrow I_{45} \\
& \rightarrow I_{123} \rightarrow I_5 \rightarrow I_{69} \rightarrow I_{59} \rightarrow I_{101} \rightarrow I_{27} \rightarrow I_{91} \rightarrow I_{37} \rightarrow I_{117} \rightarrow \\
& \rightarrow I_{11} \rightarrow I_{75} \rightarrow I_{53} \rightarrow I_{07} \rightarrow I_{21} \rightarrow I_{85} \rightarrow I_{43} \rightarrow I_{127} \rightarrow I_1
\end{aligned}$$

De aquí concluimos lo afirmado. \square

Corolario 12. $a_{12} = a_{14} = a_{18} = a_{116} = a_{132} = a_{164} = 0$.

Demostración. Vemos que si escogemos $x \in I_1$, entonces su órbita sigue el camino ya trazado y no pasa por $I_2, I_4, I_8, I_{16}, I_{32}$ e I_{64} .

Luego, no hay caminos de I_1 a I_j para $j = 2, 4, 8, 16, 32, 64$. \square

Notamos, además, que la trayectoria $T(I_1), T^2(I_1), \dots, T^{63}(I_1)$ es sólo formada por intervalos impares $T(I_1) = I_{65}, \dots, T^{63}(I_1) \supset I_{127}$.

Observamos que $T^{62}(I_1) = \{\sigma^{127}(\theta)\} \cup I_{43}$ y por eso hemos dejado sólo a I_{43} .

Afirmación 7. $a_{22} = x^{-32}$

Demostración. Verificaremos que en la formación de a_{22} participan

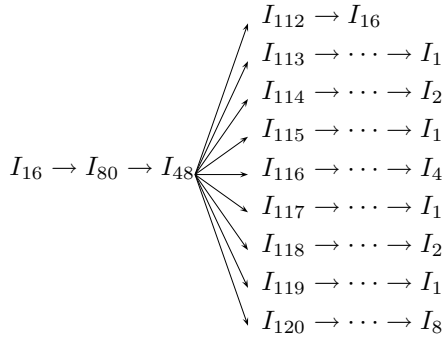
$$\{I_2, I_6, I_{10}, I_{12}, I_{14}, \dots, I_{122}, I_{126}\}$$

$$\begin{aligned}
& I_2 \rightarrow I_{66} \rightarrow I_{62} \rightarrow I_{98} \rightarrow I_{30} \rightarrow I_{94} \rightarrow I_{34} \rightarrow I_{144} \rightarrow I_{14} \rightarrow \\
& \rightarrow I_{78} \rightarrow I_{50} \rightarrow I_{110} \rightarrow I_{18} \rightarrow I_{82} \rightarrow I_{46} \rightarrow I_{122} \rightarrow I_6 \rightarrow I_{70} \rightarrow \\
& \rightarrow I_{58} \rightarrow I_{102} \rightarrow I_{26} \rightarrow I_{90} \rightarrow I_{38} \rightarrow I_{118} \rightarrow I_{10} \rightarrow I_{74} \rightarrow I_{54} \rightarrow \\
& \quad \quad \quad I_{106} \rightarrow I_{22} \rightarrow I_{86} \rightarrow I_{42} \begin{cases} \rightarrow I_{126} \rightarrow I_2 \\ \rightarrow I_{127} \rightarrow I_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Como se afirmó. \square

Demostración. Verificamos que en la formación de $a_{16\ 16}$ participan

$$\{I_{16}, I_{48}, I_{80}, I_{112}\}$$



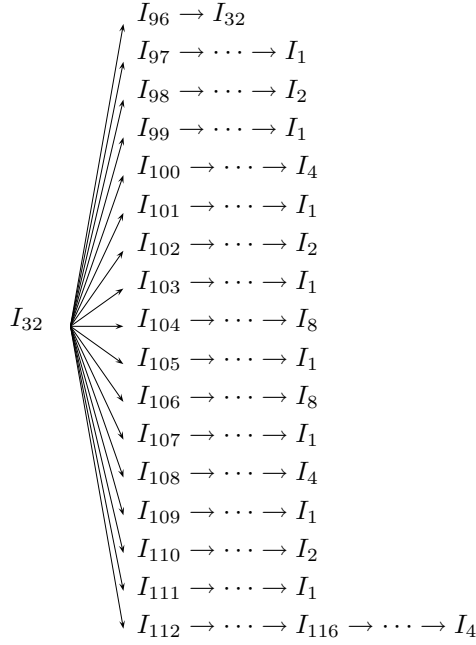
Como se afirmó. □

Corolario 16. $a_{16\ 32} = a_{16\ 64} = 0$

Afirmación 11. $a_{32\ 32} = x^{-2}$.

Demostración. Verificamos que en la formación de $a_{32\ 32}$ participan

$$\{I_{32}, I_{96}\}$$



Como se afirmó. □

Corolario 17. $a_{32\ 64} = 0$.

Afirmación 12. $a_{64\ 64} = x^{-1}$.

Demostración. En efecto $T(I_{64}) = I_{64} \cup I_{65} \cup I_{66} \cup \dots \cup I_{96}$. Ya sabemos que todos los impares terminan en I_1 y que los pares I_{66}, \dots, I_{96} terminan en I_2, I_4, I_8, I_{16} e I_{32} . □

Corolario 18. $\det(A_7(x) - I) = (x^{-64} - 1)p_6(x) = -(1 - x^{64})p_6(x)$.

Demostración. Como ya vimos, si $A_n(x)$ denota la A -matriz asociada a θ_{2^n} , $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 7 tenemos

$$\det(A_3(x) - I) = \begin{pmatrix} x^{-2^2} - 1 & 0 & 0 \\ x^{-2} & A_{2^2}(x) - I & \\ x^{-4} & & \end{pmatrix}$$

y luego $\det(A_3(x) - I) = (x^{-2^2} - 1) \det(A_2(x) - I)$.

$$\det(A_4(x) - I) = \begin{pmatrix} x^{-2^3-1} & 0 & 0 & 0 \\ x^{-2^2} & & & \\ x^{-6} & & A_3(x) - I & \\ x^{-8} + 2x^{-4} & & & \end{pmatrix}$$

y luego

$$\det(A_4(x) - I) = (x^{-2^3} - 1) \det(A_3(x) - I)$$

$$\det(A_5(x) - I) = \begin{pmatrix} x^{-2^4} - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & & & & \\ x & & A_4(x) - I & & \\ x & & & & \\ x & & & & \end{pmatrix}$$

y luego

$$\det(A_5(x) - I) = (x^{-2^4} - 1) \det(A_4(x) - I)$$

Así mismo

$$\det(A_6(x) - I) = (x^{-2^5} - 1) \det(A_5(x) - I)$$

y

$$\det(A_7(x) - I) = (x^{-2^6} - 1) \det(A_6(x) - I)$$

que es lo que queríamos probar. □

Notamos que para M_{2^6-1} tenemos

$$M_{2^6-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0_{(2^5-1) \times 2^5} & M_{(2^5-1)} \\ \hline & 1 \\ & \vdots \\ & 1 \\ 1 & 0_{(2^5-1) \times (2^5-1)} \end{array} \right)$$

y que para M_{2^7-1} tenemos

$$M_{2^7-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0_{(2^6-1) \times 2^6} & M_{2^6-1} \\ \hline & 11111100 \dots 0 \\ & \vdots \\ 1 & 0_{(2^6-1) \times (2^6-1)} \end{array} \right)$$

2.2.1. Para el caso general

A) Consideremos $n = 2k$, $k \geq 3$ y que las 2^n iteraciones de $\theta = \theta_{2^n}$ están distribuidos en el intervalo $[\sigma^1(\theta), \theta]$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sigma^1(\theta) &< \sigma^{1+2^{n-1}}(\theta) < \dots < \sigma^{2^{n-1}-1}(\theta) < 0\theta < 1\theta = \sigma^{2^n-1}(\theta) < \\ &< \dots < \sigma^3(\theta) < \underline{1} < \sigma^2(\theta) < \sigma^{2+2^{n-1}}(\theta) < \dots < \sigma^{2^{n-1}}(\theta) < \theta \end{aligned}$$

que suponemos escritos de la forma:

$$\begin{aligned} \sigma^1(\theta) = \sigma^{n_1}(\theta) < \sigma^{n_2}(\theta) < \dots < \sigma^{n_1(2k-1)}(\theta) < 0\theta < 1\theta = \sigma^{n_1(2k-1)+1}(\theta) < \quad (2.1) \\ &< \dots < \sigma^{n_{2^n-1}}(\theta) < \sigma^{n_{2^n}}(\theta) = \theta \end{aligned}$$

Recordamos que:

$$\sigma^2 \circ H_{11,10} = H_{11,10} \circ \sigma, \quad H = H_{11,10}$$

Aplicamos $H_{11,10}$ a (2.1) y tenemos

$$\begin{aligned} H \circ \sigma^1(\theta) = H \circ \sigma^{n_1}(\theta) = H \circ \sigma^{n_2}(\theta) < \dots < H \circ \sigma^{n_1(2k-1)}(\theta) < \\ &< H(0\theta) < H(1\theta) = H\sigma^{n_1(2k-1)+1}(\theta) < \dots < H \circ \sigma^{n_{2^n-1}}(\theta) < \\ &< H(\theta_{2^n}) = \theta_{2^{n+1}} = \theta_{n+1} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \underline{1} < \sigma^{2n_1}(H(\theta)) = \sigma^2(H(\theta)) = \sigma^2(\theta_{n+1}) < \sigma^{2n_2}(\theta_{n+1}) < \quad (2.2) \\ \dots < \sigma^{2n_1(2k-1)}(\theta) < 11\theta_{n+1} < 10\theta_{n+1} = \sigma^{2(n_1(2k-1)+1)}(\theta_{n+1}) < \\ &< \dots < \sigma^{2n(2^n-1)}(\theta_{n+1}) < \theta_{n+1} \end{aligned}$$

Aplicando σ en (2.2), tenemos:

$$\begin{aligned} \sigma(\theta_{n+1}) &< \sigma^{2^n+1}(\theta_{n+1}) < \dots < 0\theta_{n+1} = \sigma^{2(n_1(2k-1)+1)}(\theta_{n+1}) < \\ &< 1\theta_{n+1} < \sigma^{2n_1(2k-1)+1}(\theta_{n+1}) < \dots < \sigma^{2n_2+1}(\theta_{n+1}) < \sigma^3(\theta_{n+1}) < \underline{1} \end{aligned}$$

que denotaremos

$$\begin{aligned} \sigma^{n_1}(\theta_{n+1}) &< \sigma^{n_2}(\theta_{n+1}) < \dots < \sigma^{n_1(2k)} = 0\theta_{n+1} < 1\theta_{n+1} < \\ &< \sigma^{n_1(2k)+1}(\theta_{n+1}) < \dots < \sigma^3(\theta_{n+1}) = \sigma^{n_1(2k)+1(2k-1)}(\theta_{n+1}) = \sigma^{n_2n}(\theta_{n+1}) < \\ \underline{1} &< \sigma^2(\theta_{n+1}) = \sigma^{n_2n+1}(\theta_{n+1}) < \dots < \sigma^{2^n}(\theta_{n+1}) = \sigma^{n_2n+1-1}(\theta_{n+1}) < \\ &< \sigma^{n_2n+1}(\theta_{n+1}) = \theta_{n+1}. \end{aligned}$$

De aquí definimos:

$$\begin{aligned} I_1 &= [\sigma^{n_1}(\theta_{n+1}), \sigma^{n_2}(\theta_{n+1})], I_2 = [\sigma^{n_2}(\theta_{n+1}), \sigma^{n_3}(\theta_{n+1})], \dots, \\ I_{1(2k)-1} &= [\sigma^{n_1(2k)-1}(\theta_{n+1}), \sigma^{n_1(2k)}(\theta_{n+1})] \\ I_{1(2k)} &= [1\theta_{n+1}, \sigma^{n_1(2k)+1}(\theta_{n+1})], \dots, \\ I_{2^n} &= [\sigma^3(\theta), \sigma^2(\theta)], I_{2^n+1} = [\sigma^2(\theta), \sigma^{n_2n+2}(\theta_{n+1})], \dots, \\ I_{2^n+1-1} &= [\sigma^{2^n}(\theta_{n+1}), \theta_{n+1}]. \end{aligned}$$

De aquí, no es difícil deducir que la órbita I_1 contiene los intervalos

$$\{I_1, I_{2^n+1}, I_{2^n-1}, I_{2^n+2^{n-1}+1}, I_{2^{n-1}+1}, \dots, I_{2^{n+1}-1}\}.$$

También que la órbita de I_2 contiene los intervalos de la forma

$$\{I_{2+4k}, k = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1\}.$$

Esta órbita contiene, además, a I_{2^n+1-1} e I_1 .

La órbita de I_4 , contiene los intervalos de la forma:

$$\{I_{4+8k}, k = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-2} - 1\}$$

y también contiene a I_{2^n+1-3} , I_{2^n+1-2} .

Sucesivamente, $T(I_{2^n-1})$ contiene a $I_{2^n-1+2^n}$, $I_{2^n-1+2^{n+1}}$, \dots , $I_{2^n-1+2^n+2^{n-2}}$.

También $T(I_{2^n})$ contiene a I_{2^n} , I_{2^n+1} , \dots , $I_{2^n+2^{n-1}}$. Así $R = \{I_1, I_2, \dots, I_{2^n}\}$ constituye una roma para el A -grafo de $T = T|_{[\sigma^1(\theta_{n+1}), \theta_{n+1}]}$ y cuya partición es $\{I_1, I_2, \dots, I_{2^n+1-1}\}$.

Ahora no es difícil cerciorarse que

$$M_{2^{n+1}-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0_{(2^n-1) \times 2^n} & M_{2^n-1} \\ \hline & \underbrace{111 \cdots 1}_n \quad \underbrace{0 \cdots 0}_{(2^n-1)-n} \\ & 0_{(2^n-1) \times 2^n-1} \end{array} \right)$$

De aquí concluimos que:

$$\begin{aligned} a_{11} &= x^{-2^n}, a_{12} = \cdots = a_{12^n} = 0; \\ a_{22} &= x^{-2^{n-1}}, a_{24} = a_{28} = \cdots = a_{22^n} = 0; \\ a_{44} &= x^{-2^{n-2}}, a_{48} = \cdots = a_{42^n} = 0, \dots, \\ & a_{2^n 2^n} = x^{-1} \end{aligned}$$

y luego

$$\det(A_{n+1}(x) - I) = (x^{-2^n} - 1)(x^{-2^{n-1}} - 1) \cdots (x^{-2} - 1)(x^{-1} - 1)$$

Así,

$$(-1)^{2^{n+1}-(n+1)} x^{2^{n+1}-1} \det(A_k(x) - I) = -(1 - x^{2^n}) p_n(x) = p_{n+1}(x)$$

B) Para $n = 2k + 1$, $k \geq 3$ vamos a suponer que las 2^n iteraciones de $\theta = \theta_{2^n}$ están distribuidas en el intervalo $[\sigma^1(\theta), \theta]$ de la forma:

$$\begin{aligned} \sigma^1(\theta) &< \sigma^{1+2^{n-1}} < \dots < \sigma^{2^n-1}(\theta) = 0\theta < 1\theta < \sigma^{2^{n-1}-1}(\theta) < \dots < \sigma^3(\theta) < \dots < \\ &< \underline{1} < \sigma^2(\theta) < \sigma^{2+2^{n-1}} < \dots < \sigma^{2^{n-1}}(\theta) < \theta \end{aligned}$$

que suponemos escrita de la forma

$$\begin{aligned} \sigma^{n_1}(\theta) &< \sigma^{n_2}(\theta) < \dots < \sigma^{n_1(2k)}(\theta) = \sigma^{2^n-1} < 1\theta < \sigma^{2^{n-1}-1}(\theta) = \sigma^{n_1(2k)+1}(\theta) < \\ &< \dots < \sigma^{n_2 2^{n-1}}(\theta) = \sigma^3(\theta) < \sigma^2(\theta) = \sigma^{n_2 2^{n-1}+1}(\theta) < \sigma^{n_2 2^{n-1}+2}(\theta) < \dots \\ &< \sigma^{n_2 2^{n-1}}(\theta) = \sigma^{2^{n-1}}(\theta) < \theta_n = \theta_{2^n} \end{aligned}$$

Procediendo como en el caso A), llegamos a que

$$R = \{I_1, I_2, \dots, I_{2^n}\}$$

es una roma para el A -grafo de

$$\theta_{n+1} = H_{11,10}(\theta_{2^n})$$

que es formado por

$$\{I_1, I_2, \dots, I_{2^{n+1}-1}\}$$

y que

$$p_{n+1}(x) = -(1 - x^{2^n})p_n(x).$$

Concluimos que $p_{n+1}(1) = 0$ y $h_{top}(\theta_{n+1}) = h_{top}(G) = 0$

Observamos que

$$\underline{1} < \underline{10} < \underline{1011} < \underline{10111010} < \dots < \theta_n < \theta_{n+1} < \dots$$

y en consecuencia

$$\Lambda_{\underline{1}} \subset \Lambda_{\underline{10}} \subset \Lambda_{\underline{1011}} \subset \Lambda_{\underline{10111010}} \subset \dots \subset \Lambda_{\theta_n} \subset \Lambda_{\theta_{n+1}} \subset \dots$$

En particular, hemos probado lo siguiente:

Sea M_{2^n-1} la sucesión de matrices cuadradas $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ de ceros y unos definida por

$$M_{2^2-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{2^3-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0_{(2^2-1) \times 2^2} & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} M_{2^2-1} & & \\ \hline 1 & & 1 & 0 \\ & & 0_{(2^2-1) \times (2^2-1)} & \end{array} \right)$$

$$M_{2^{n+1}-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0_{(2^n-1) \times 2^n} & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & \ddots & \\ & & & \\ 1 & & & \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} M_{2^n-1} & & \\ \hline \underbrace{111 \dots 1}_n & \underbrace{0 \dots 0}_{(2^n-1)-n} & \\ & 0_{(2^n-1) \times 2^n-1} & \end{array} \right)$$

Sea r_n el radio espectral de M_{2^n-1} y $p_n(x)$ su polinomio característico

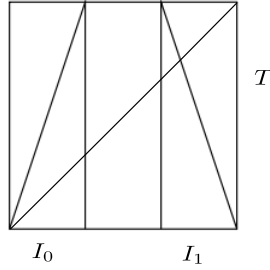
Corolario 19. *Se cumple que $r_n = 1$ y $p_{n+1}(x) = -(1-x^{2^n})p_n(x)$ para cada $n \geq 2$.*

Capítulo 3

Sobre la Continuidad de la Entropía en las Órbitas Periódicas en el Mundo de Milnor-Thurston (Trabajo original conjunto con Solange Aranzubia V.)

3.1. Introducción

En lo que sigue consideraremos $T = T_2: I_0 \cup I_1 \rightarrow [0, 1]$, $I_0 = [0, x_1]$, $I_1 = [x_2, 1]$, $x_1 < x_2$ aplicación lineal por pedazos tal que $T|_{I_0}$ preserva orientación y $T|_{I_1}$ invierte orientación y $T(I_i) = [0, 1]$, $i = 0, 1$. El siguiente gráfico señala las principales características de T



Para cada $x \in \Lambda_T = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(I_0 \cup I_1)$ se define su itinerario $I_T(x) \in \Sigma_n$ por $I_T(x)(i) = j$ si y sólo si $T^i(x) \in I_j$.

Consideramos en Σ_2 la métrica

$$d(\theta, \alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \delta(\theta_i, \alpha_i); \quad \delta(\theta_i, \alpha_i) = \begin{cases} 0 & \theta_i = \alpha_i \\ 1 & \theta_i \neq \alpha_i \end{cases}$$

Tenemos que $I_T: \Lambda_T \rightarrow \Sigma_2$ es un homeomorfismo (usando la topología inducida por $[0, 1]$ en Λ_T).

Así podemos considerar el espacio topológico compacto ordenado (Σ_2, d, \leq_T) , (donde $\theta \leq \alpha$ si y sólo si $I_T^{-1}(\theta) \leq I_T^{-1}(\alpha)$) que reconocemos como el espacio simbólico de Milnor - Thurston

Sea $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ la operación de shift. Una sucesión $\theta \in \Sigma_2$ se dirá maximal si $\sigma^i(\theta) \leq \theta$ para cada $i \in \mathbb{N}_0$.

Definición 19. Diremos que $\theta \in \Sigma_2$ es una órbita periódica con periodo primo N si $\sigma^i(\theta) \neq \theta$; para $1 \leq i \leq N - 1$ y $\sigma^N(\theta) = \theta$.

Para $\theta \in \Sigma_1 = \{\alpha \in \Sigma_2; \alpha_0 = 1\}$ se define $h(\theta) = h_{top}(\sigma|_{\Lambda(\theta)})$ donde $\Lambda(\theta) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \sigma^{-j}([\sigma(\theta), \theta])$. Es sabido que esta aplicación $h: \Sigma_1 \rightarrow [0, \log 2]$ es continua (ver por ejemplo [12]), pero la demostración de este hecho no es simple. En este capítulo avanzamos en una demostración simple de la continuidad de h en algunas sucesiones maximales

Observación 5. Si $\theta_1 \leq \theta_2$, entonces $h(\theta_1) \leq h(\theta_2)$

Demostración. En efecto, $[\sigma(\theta_1), \theta_1] \subset [\sigma(\theta_2), \theta_2]$ y entonces $\Lambda(\theta_1) \subset \Lambda(\theta_2)$. Por lo tanto $h(\theta_1) \leq h(\theta_2)$

□

3.2. Órbitas periódicas maximales vecinas

Sea $\theta = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_3} 1^{k_4} \dots 0^{k_{2p-1}} 1^{k_{2p}}}$ una órbita periódica maximal de periodo $N = 1 + k_1 + k_2 + \dots + k_{2p}$.

Sea $\tilde{\theta} = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_3} 1^{k_4} \dots 0^{k_{2p-1}} 1^{k_{2p}-1} 0}$ (difiere de θ cambiando el 1 final por 0). Notamos que si $k_2 + k_4 + \dots + k_{2p}$ es par entonces $\tilde{\theta} < \theta$, en efecto θ y $\tilde{\theta}$ coinciden en $1 + k_2 + \dots + k_{2p} - 1 = k_2 + \dots + k_{2p}$ unos, así que coinciden en un número par de unos luego $\tilde{\theta} < \theta$. De la misma forma si $k_2 + k_4 + \dots + k_{2p}$ es impar entonces $\theta < \tilde{\theta}$

Proposición 4. *Si θ es una órbita periódica maximal, entonces $\tilde{\theta}$ también es una órbita periódica maximal*

Demostración. Aquí debemos probar que $\sigma^j(\tilde{\theta}) < \tilde{\theta}$, para cada $j = 1, 2, \dots, N - 1$. Es claro que si $\sigma^j(\tilde{\theta})$ empieza con un cero entonces $\sigma^j(\tilde{\theta}) < \tilde{\theta}$. También, si $\sigma^j(\tilde{\theta})$ empieza con dos unos entonces $\sigma^j(\tilde{\theta}) < \tilde{\theta}$. De esta manera, el resultado tiene relevancia sólo cuando $\sigma^j(\tilde{\theta})$ es un iterado que empieza con un uno seguido de ceros.

Consideremos entonces $j = k_1 + k_2$, para este caso:

$$\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta}) = \underline{10^{k_3} 1^{k_4} \dots 0^{k_{2p-1}} 1^{k_{2p}-1} 0 10^{k_1} 1^{k_2-1}}.$$

Si $k_3 > k_1$ entonces θ no es maximal por lo tanto $k_3 \leq k_1$.

Si $k_3 < k_1$, entonces $\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta}) < \tilde{\theta}$.

Suponemos que $k_3 = k_1$, entonces $\tilde{\theta} = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_4} 0^{k_5} \dots 0^{k_{2p-1}} 1^{k_{2p}-1} 0}$.

$$\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta}) = \underline{10^{k_1} 1^{k_4} 0^{k_5} \dots 0^{k_{2p-1}} 1^{k_{2p}-1} 0 10^{k_1} 1^{k_2-1}}.$$

Si $k_4 \neq k_2$, la condición de maximilidad de θ dice que $\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta}) < \tilde{\theta}$.

Así que $k_2 = k_4$ y $\tilde{\theta} = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_5} 1^{k_6} \dots 0^{k_{2p-1}} 1^{k_{2p}-1} 0}$.

$$\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta}) = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_5} 1^{k_6} \dots 0^{k_{2p-1}} 1^{k_{2p}-1} 0 10^{k_1} 1^{k_2-1}}.$$

Si $k_1 \neq k_5$, entonces la maximilidad de θ dice que $\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta}) < \tilde{\theta}$.

Así que $k_1 = k_5$ y $\tilde{\theta} = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_6} 0^{k_7} \dots 0^{k_{2p-1}} 1^{k_{2p}-1} 0}$.

Sucesivamente $k_6 = k_2, k_7 = k_1, k_8 = k_2, k_9 = k_1, \dots, k_{2p-2} = k_2, k_{2p-1} = k_1$ y

$$\tilde{\theta} = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} \dots 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_{2p}-1} 0}.$$

Lo anterior implica que $\theta = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} \dots 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_{2p}}}$.

$$\sigma^{k_1+k_2}(\theta) = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} \dots 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_{2p}} 10^{k_1} 1^{k_2-1}}.$$

Si ocurre que $k_2 = k_{2p} + 1$, entonces $k_2 - 1 = k_{2p}$ y

$$\theta = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} \dots 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2-1}},$$

$$\sigma^{k_1+k_2}(\theta) = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} \dots 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2-1}}.$$

O sea $\sigma^{k_1+k_2}(\theta) = \theta$, por lo tanto $\theta = \underline{10^{k_1} 1^{k_2-1}} = \underline{10^{k_1} 1^k}$.

En este caso $\tilde{\theta} = \underline{10^{k_1} 1^{k-1} 0}$. Es facil verificar que $\sigma^s(\tilde{\theta}) < \tilde{\theta}$, para todo $1 \leq s \leq k_1 + k$.

Así que suponemos que $k_2 \neq k_{2p} + 1$.

Suponemos que $k_2 < k_{2p} + 1$. Así existe $s \in \mathbb{N}$ para el que $k_2 + s = k_{2p} + 1$

Si ocurre que $s = 1$, entonces $k_2 = k_{2p}$ y por lo tanto

$$\theta = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} \dots 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2}},$$

$$\sigma^{k_1+k_2}(\theta) = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} \dots 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 10^{k_1} 1^{k_2-1}}.$$

En este caso debe haber un número impar de unos en las partes en que θ y $\sigma^{k_1+k_2}(\theta)$

coinciden. Para $\tilde{\theta}$ tenemos: $\tilde{\theta} = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} \dots 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2-1} 1}$,

$$\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta}) = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} \dots 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2-1} 0 10^{k_1} 1^{k_2-1}}.$$

Concluimos que en las partes en que $\tilde{\theta}$ y $\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta})$ coinciden hay un uno menos que en las partes en que coinciden θ y $\sigma^{k_1+k_2}(\theta)$. El primer lugar donde no coinciden $\tilde{\theta}$ tiene un uno y $\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta})$ tiene un cero, por lo tanto $\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta}) < \tilde{\theta}$.

Vamos a suponer que $s > 1$.

En este caso $k_{2p} = k_2 + s - 1$ y $\theta = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} \dots 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2+s-1}}$,

$$\sigma^{k_1+k_2}(\theta) = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} \dots 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 1^s 0^{k_1} 1^{k_2-1}}.$$

Para $\tilde{\theta}$ tenemos:

$$\tilde{\theta} = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} \dots 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2+s-2} 0},$$

$$\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta}) = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} \dots 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 1^{s-2} 0 10^{k_1} 1^{k_2-1}}.$$

Si $s > 2$, entonces el número de unos iguales entre $\tilde{\theta}$ y $\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta})$ coinciden con el número de unos iguales entre θ y $\sigma^{k_1+k_2}(\theta)$, por lo tanto $\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta}) < \tilde{\theta}$. Si $s = 2$, entonces

$$\tilde{\theta} = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} \dots 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0},$$

$$\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta}) = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} \dots 1^{k_2} 0^{k_1} 1^{k_2} 0 10^{k_1} 1^{k_2-1}}.$$

Si ocurre que $k_1 \geq 2$, entonces $\tilde{\theta}$ y $\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta})$ coinciden en tantos unos como coinciden θ y $\sigma^{k_1+k_2}(\theta)$, por lo tanto $\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta}) < \tilde{\theta}$.

Suponemos que $k_1 = 1$, en este caso

$$\tilde{\theta} = \underline{10 1^{k_2} 0 1^{k_2} 0 1^{k_2} \dots 1^{k_2} 0 1^{k_2} 0 1^{k_2} 0},$$

$$\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta}) = \underline{10 1^{k_2} 0 1^{k_2} 0 1^{k_2} \dots 1^{k_2} 0 1^{k_2} 0 10 1^{k_2-1}}.$$

Si $k_2 = 1$, entonces debe ser $\theta = \underline{1010101 \dots 101011}$ y $\tilde{\theta} = \underline{10}$, que es maximal.

Si $k_2 \geq 2$, entonces el número de unos es que coinciden $\tilde{\theta}$ y $\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta})$ es igual al número de unos en que coinciden θ y $\sigma^{k_1+k_2}(\theta)$ más uno, como el pimer simbolo distinto de $\tilde{\theta}$ con $\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta})$ es un uno entonces $\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta}) < \tilde{\theta}$.

Concluimos la demostración de que $\sigma^{k_1+k_2}(\tilde{\theta}) < \tilde{\theta}$ en todos los casos cuando $k_2 < k_{2p} + 1$.

El caso $k_2 > k_{2p} + 1$ se hace de manera similar.

Ahora, probar que $\sigma^{k_1+k_2+k_3+k_4+\dots+k_{2s+1}+k_{2s}}(\tilde{\theta}) < \tilde{\theta}$, para $s = 2, 3, \dots, p$ es un ejercicio similar al que acabamos de hacer para $s = 1$ y lo dejamos al lector. \square

Ejemplos

1. $\theta = \underline{101}$, $\tilde{\theta} = \underline{100}$, $\theta < \tilde{\theta}$
2. $\theta = \underline{1011}$, $\tilde{\theta} = \underline{1010} = \underline{10}$, $\tilde{\theta} < \theta$
3. $\theta = \underline{10111}$, $\tilde{\theta} = \underline{10110}$, $\theta < \tilde{\theta}$

Observación 6. 1. Notar que si $\theta_k = \underline{(10)^k 11}$ con $k \geq 2$ entonces θ no es maximal

$$\text{Si } k = 2, \theta = \underline{101011} < \underline{101110} = \sigma^2(\theta)$$

$$\text{Si } k = 3, \theta = \underline{10101011} < \underline{10111010} = \sigma^4(\theta)$$

En general

$$\theta = \underline{(10)^k 11} < \underline{1011(10)^{k-1}} = \sigma^{2(k-1)}(\theta)$$

2. El recíproco de la proposición anterior también es cierto. Esto es:

Proposición 5. Si $\tilde{\theta} = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_3} \dots 0^{k_{2p-1}} 1^{k_{2p}} 10}$ de periodo primo $N = 1 + k_1 + k_2 + \dots + k_{2p-1} + k_{2p}$ es maximal, entonces $\theta = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_3} \dots 0^{k_{2p-1}} 1^{k_{2p}}}$ de periodo primo N es maximal.

3. Notamos, en cualquier caso, que θ y $\tilde{\theta}$ son órbitas periódicas consecutivas del mismo período (maximales o nó)

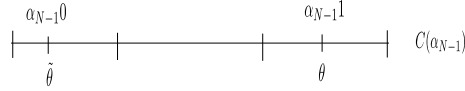
Suponemos ahora que $\theta = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_3} \dots 0^{k_{2p-1}} 1^{k_{2p}}}$ y $\tilde{\theta} = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_3} \dots 0^{k_{2p-1}} 1^{k_{2p}} 10}$, son maximales de periodo primo N y sea $\alpha_{N-1} = 10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_3} \dots 0^{k_{2p-1}} 1^{k_{2p}} 1$ la palabra de largo $k_1 + k_2 + \dots + k_{2p}$ que es raíz de θ y $\tilde{\theta}$

Definición 20. Una palabra finita α es **raíz** de $\theta \in \Sigma_2$ si $\theta \in C(\alpha)$, donde $C(\alpha) = \{\eta \in \Sigma_2; \eta_i = \alpha_i, i = 0, 1, \dots, \text{largo}(\alpha) - 1\}$

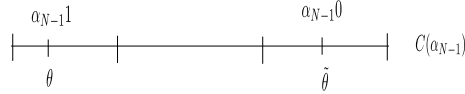
Tenemos que $\theta, \tilde{\theta} \in C(\alpha_{N-1})$.

La cantidad de unos en $\alpha_{N-1} = \mathbf{1}(\alpha_{N-1}) = 1 + k_2 + k_4 + \dots + k_{2p} - 1 = k_2 + k_4 + \dots + k_{2p}$

1. Si $\mathbf{1}(\alpha_{N-1})$ es par, entonces $\tilde{\theta} < \theta$ y están localizadas de la siguiente forma en $C(\alpha_{N-1})$



2. Si $\mathbf{1}(\alpha_{N-1})$ es impar entonces $\theta < \tilde{\theta}$ y están localizadas de la siguiente forma en $C(\alpha_{N-1})$



Sin perdida de generalidad vamos a suponer que estamos en el caso 1. En este caso

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \underline{0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_3} \dots 1^{k_{2p-1}} 11} < \sigma(\tilde{\theta}) = \underline{0^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_3} \dots 1^{k_{2p-1}} 01} \\ \sigma^2(\theta) &= \underline{0^{k_1-1} 1^{k_2} 0^{k_3} \dots 1^{k_{2p-1}} 110} < \sigma^2(\tilde{\theta}) = \underline{0^{k_1-1} 1^{k_2} 0^{k_3} \dots 1^{k_{2p-1}} 010} \\ &\vdots \\ \sigma^{1+k_1}(\theta) &= \underline{1^{k_2} 0^{k_3} \dots 1^{k_{2p-1}} 110^{k_1}} < \sigma^{1+k_1}(\tilde{\theta}) = \underline{1^{k_2} 0^{k_3} \dots 1^{k_{2p-1}} 010^{k_1}} \end{aligned}$$

Notamos que ambos iterados $\sigma^{1+k_1}(\theta), \sigma^{1+k_1}(\tilde{\theta})$ están al mismo lado de $\underline{1}$.

Si k_2 es par entonces $11\underline{0} \leq \sigma^{1+k_1}(\theta) < \sigma^{1+k_1}(\tilde{\theta}) < \underline{1}$, y si k_2 es impar entonces $\underline{1} < \sigma^{1+k_1}(\theta) < \sigma^{1+k_1}(\tilde{\theta}) < \underline{1\underline{0}}$

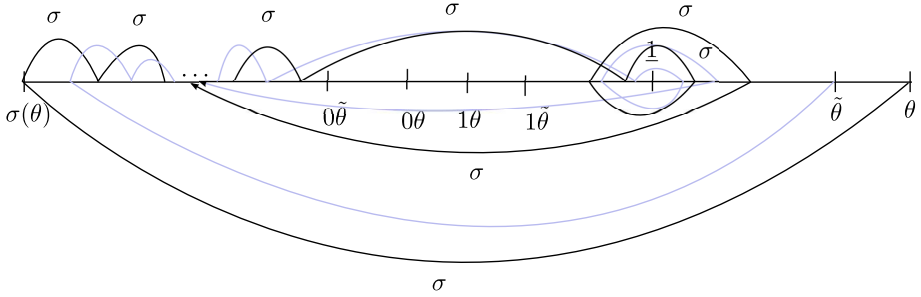
A) $k_2 = 2a_2$ es par, entonces

$$\begin{aligned} \sigma^{1+k_1+2a_2}(\theta) &= \underline{0^{k_3} 1^{k_4} \dots 1^{k_{2p-1}} 110^{k_1} 1^{2a_2}} < \\ &< \sigma^{1+k_1+2a_2}(\tilde{\theta}) = \underline{0^{k_3} 1^{k_4} \dots 1^{k_{2p-1}} 010^{k_1} 1^{2a_2}} \end{aligned}$$

B) $k_2 = 2a_2 + 1$ es impar, entonces

$$\begin{aligned} \sigma^{1+k_1+2a_2+1}(\tilde{\theta}) &= \underline{0^{k_3} 1^{k_4} \dots 1^{k_{2p-1}} 010^{k_1} 1^{2a_2}} < \\ &< \sigma^{1+k_1+2a_2+1}(\theta) = \underline{0^{k_3} 1^{k_4} \dots 1^{k_{2p-1}} 110^{k_1} 1^{2a_2}} \end{aligned}$$

El siguiente gráfico muestra la evolución de los iterados de θ y $\tilde{\theta}$ en el caso A



Ordenamos los iterados de θ de la forma

$$\theta_1 = \sigma(\theta) < \theta_2 < \dots < \theta_{N-1} < \theta_N = \theta_0 = \theta$$

Para cada uno de los siguientes índices $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, existe un $k_i \in \{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$ tal que $\theta_i = \sigma^{k_i}(\theta)$. Si denotamos $k_i = P(\theta)(i)$ entonces hemos definido una permutación

$$P(\theta) : \{0, 1, 2, \dots, N - 1\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$$

dada por

$$P(\theta)(i) = j \text{ si y sólo si } \theta_i = \sigma^j(\theta)$$

Observemos que $\theta_0 = \sigma^0(\theta) = \theta$, $P(\theta)(0) = 0$, $\theta_1 = \sigma^1(\theta)$ y entonces $P(\theta)(1) = 1$. Así la ecuación que satisface $P(\theta)(i)$ es

$$\theta_i = \sigma^{P(\theta)(i)}(\theta), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1$$

Proposición 6. Si $\theta = \underline{10^{k_1}1^{k_2}0^{k_3} \dots 0^{k_{2p-1}}1^{k_{2p}}$ es una sucesión maximal de periodo primo $N = 1 + k_1 + k_2 + \dots + k_{2p}$ y $\tilde{\theta} = \underline{10^{k_1}1^{k_2}0^{k_3} \dots 0^{k_{2p-1}}1^{k_{2p}-1}0}$ entonces $P(\theta) = P(\tilde{\theta})$

Demostración. Consideremos los iterados $\sigma(\theta) = \theta_1, \sigma^2(\theta), \dots, \sigma^{k_1}(\theta)$ tenemos

$$\theta_1 < \sigma^2(\theta) < \sigma^3(\theta) < \dots < \sigma^{k_1}(\theta) = \underline{01^{k_2}0^{k_3} \dots 0^{k_{2p-1}}1^{k_{2p}}0^{k_1-1}}$$

Si ocurre que k_2 es par entonces

$$\sigma^{1+k_1}(\theta) \in [1\theta = \sigma^{N-1}(\theta), \underline{1}], \text{ luego } \sigma^{k_1+2}(\theta) \in [\underline{1}, \theta], \sigma^{k_1+3}(\theta) \in [1\theta, \sigma^{k_1+1}(\theta)],$$

$$\sigma^{k_1+4}(\theta) \in [\sigma^{k_1+2}(\theta), \theta], \sigma^{k_1+5}(\theta) \in [1\theta, \sigma^{k_1+3}(\theta)], \sigma^{k_1+6}(\theta) \in [\sigma^{k_1+4}(\theta), \theta]$$

y en general

$$\sigma^{k_1+1+2s}(\theta) \in [1\theta, \sigma^{k_1+1+2s-1}(\theta)]; \sigma^{k_1+1+2s+1}(\theta) \in [\sigma^{k_1+2s}(\theta), \theta] \text{ para } s = 1, 2, \dots,$$

$$\frac{k_2}{2} - 1.$$

Para $s = \frac{k_2}{2} - 1$ tenemos:

$\sigma^{k_1+1+2 \cdot (\frac{k_2}{2}-1)+1}(\theta) = \sigma^{k_1+k_2}(\theta) = \underline{10^{k_3}1^{k_4} \dots 0^{k_{2p-1}}1^{k_{2p}}10^{k_1}1^{k_2-1}} \in [\sigma^{k_1+k_2-2}(\theta), \theta]$
y $\sigma^{k_1+k_2+1}(\theta) = \underline{0^{k_3}1^{k_4} \dots 0^{k_{2p-1}}1^{k_{2p}}10^{k_1}1^{k_2}} \in [\sigma^i(\theta), \sigma^{i+1}(\theta)]$ para algún $1 \leq i \leq k_1 - 1$.

Así $\sigma^{k_1+k_2+1+j}(\theta) \in [\sigma^{i+j}(\theta), \sigma^{i+1+j}(\theta)] \subset \Sigma_0$, para $j = 0, 1, \dots, k_1 - i - 1$.

Tenemos

$\sigma^{k_1+k_2+1+k_1-i-1}(\theta) \in [\sigma^{i+k_1-i-1}(\theta), \sigma^{i+1+k_1-i-1}(\theta)] = [\sigma^{k_1-1}(\theta), \sigma^{k_1}(\theta)]$ y

$\sigma^{k_1+k_2+1+k_1-i}(\theta) \in [\sigma^{k_1}(\theta), \sigma^{k_1+1}(\theta)]$.

De aquí puede ser

i) $\sigma^{k_1+k_2+1+k_1-i}(\theta) \in [\sigma^{k_1}(\theta), 0\theta]$ ó

ii) $\sigma^{k_1+k_2+1+k_1-i}(\theta) \in [1\theta, \sigma^{k_1+1}(\theta)]$

En el primer caso $\sigma^{k_1+k_2+1+k_1-i}(\theta) = \underline{01^{k_4}0^{k_5} \dots 0^{k_{2p-1}}1^{k_{2p}}10^{k_1}1^{k_2}0^{k_3-1}}$ y $k_1 - i = k_3 - 1$ con lo que $i = k_1 + 1 - k_3$.

En el segundo caso $\sigma^{k_1+k_2+1+k_1-i-1}(\theta) = \underline{01^{k_4}0^{k_5} \dots 0^{k_{2p-1}}1^{k_{2p}}10^{k_1}1^{k_2}0^{k_3-1}}$ y $k_1 - i - 1 = k_3 - 1$ con lo que $i = k_1 - k_3$.

En el primer caso $\sigma^{k_1+k_2+k_3+1}(\theta) \in [\sigma^{k_1+1}(\theta), \theta]$.

En el segundo caso $\sigma^{k_1+k_2+k_3+1}(\theta) \in [1\theta, \sigma^{k_1+1}(\theta)]$.

Ahora $\sigma^{k_1+k_2+k_3+1}(\theta) = \underline{1^{k_4}0^{k_5} \dots 0^{k_{2p-1}}1^{k_{2p}}10^{k_1}1^{k_2}0^{k_3}}$.

Suponemos que k_4 es par entonces $\sigma^{k_1+k_2+k_3+1}(\theta) < \underline{1}$. Si $k_4 > k_2$ entonces sólo ocurre el primer caso. en efecto:

$1\theta \leq \sigma^{k_1+k_2+k_3+1}(\theta) < \sigma^{k_1+1}(\theta)$ implica $\sigma^{k_1+2}(\theta) < \sigma^{k_1+k_2+k_3+1+1}(\theta) \leq \theta$, $1\theta \leq \sigma^{k_1+k_2+k_3+1+2}(\theta) < \sigma^{k_1+1+2}(\theta) < \sigma^{k_1+1}(\theta)$. Sucesivamente $\sigma^{k_1+k_2+k_3+1+1+k_2}(\theta) \in \Sigma_0$ lo que no puede ser pues $k_2 < k_4$. Así que en este caso sólo ocurre el primer caso. En esta situación los iterados $\sigma^{k_1+k_2+k_3+1+i}(\theta)$, $i = 1, 2, \dots, k_4 - k_2$ están en $[\sigma^{k_1+1}(\theta), \underline{1}]$ ó en $[\underline{1}, \sigma^{k_1+2}(\theta)]$. Los iterados siguientes acompañan los iterados de $\sigma^{k_1+2}(\theta)$.

Si $k_4 < k_2$ entonces sólo ocurre el segundo caso, caso contrario $\sigma^{k_1+k_2+k_3+1}(\theta)$ no llegaría a Σ_0 luego de k_4 iteraciones.

Si $k_4 = k_2$ puede ocurrir cualquiera de los casos y $\sigma^{k_1+k_2+k_3+1}(\theta)$ llega a Σ_0 en k_2 iteraciones (al igual que $\sigma^{k_1+1}(\theta)$)

De manera similar vemos que es posible analizar el caso de que k_4 sea impar (en cuyo caso debe ser que $\sigma^{k_1+k_2+k_3+1}(\theta) \in [\underline{1}, \theta]$ y entonces $\sigma^{k_1+k_2+k_3+1}(\theta) \in [\underline{1}, \sigma^{k_1+2}(\theta)]$ ó existe t tal que $\sigma^{k_1+k_2+k_3+1}(\theta) \in [\sigma^{k_1+2+2t}(\theta), \sigma^{k_1+2+2t+2}(\theta)]$ ó $\sigma^{k_1+k_2+k_3+1}(\theta) \in [\sigma^{k_1+k_2-2}(\theta), \theta]$).

Hacemos el análisis caso a caso y establecemos la forma en que se distribuyen los iterados de $\theta, \sigma(\theta), \sigma^2(\theta), \dots, \sigma^{N-2}(\theta), \sigma^{N-1}(\theta) = 1\theta$

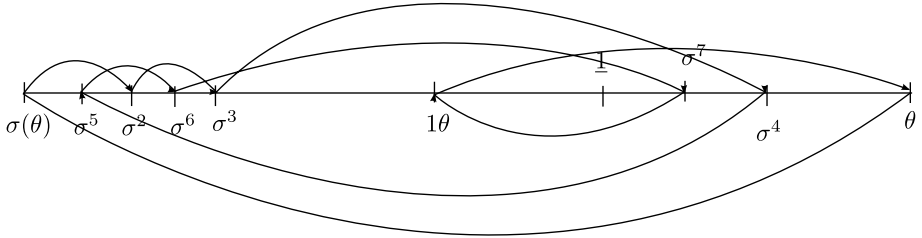
Para $\tilde{\theta}$ ocurre una distribución similar con sus iterados y se diferencian de θ en que $\sigma^{N-1}(\tilde{\theta}) = 0\tilde{\theta}$ como entre 0θ y 1θ no hay iterados de θ y como en $0\tilde{\theta}$ y $1\tilde{\theta}$ no hay iterados de $\tilde{\theta}$ concluimos que la distribución de iterados de θ y $\tilde{\theta}$ es la misma, es decir, $P(\theta) = P(\tilde{\theta})$ como queríamos probar.

□

Ejemplos

1. Consideremos $\theta = \underline{100010011}, \tilde{\theta} = \underline{100010010}$.

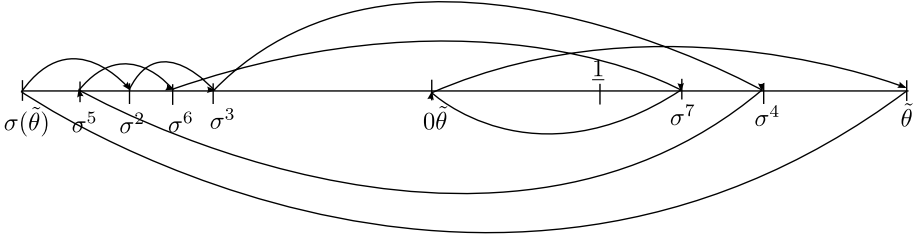
$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \underline{000100111}, \sigma^2(\theta) = \underline{001001110}, \sigma^3(\theta) = \underline{010011100}, \\ \sigma^4(\theta) &= \underline{100111000}, \sigma^5(\theta) = \underline{001110001}, \sigma^6(\theta) = \underline{011100010}, \\ \sigma^7(\theta) &= \underline{111000100}, \sigma^8(\theta) = \underline{110001001} = 1\theta. \end{aligned}$$



$$p(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 8 & 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\theta} = \underline{100010010}.$$

$$\begin{aligned} \sigma(\tilde{\theta}) &= \underline{000100101}, \sigma^2(\tilde{\theta}) = \underline{001001010}, \sigma^3(\tilde{\theta}) = \underline{010010100}, \\ \sigma^4(\tilde{\theta}) &= \underline{100101000}, \sigma^5(\tilde{\theta}) = \underline{001010001}, \sigma^6(\tilde{\theta}) = \underline{010100010}, \\ \sigma^7(\tilde{\theta}) &= \underline{101000100}, \sigma^8(\tilde{\theta}) = \underline{010001001} = 0\tilde{\theta}. \end{aligned}$$

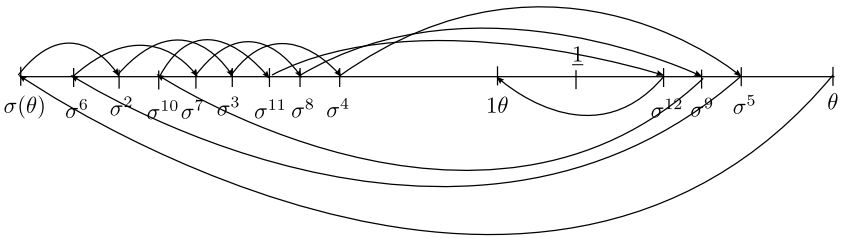


$$p(\tilde{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 8 & 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Se cumple que $P(\theta) = P(\tilde{\theta})$ como señala la proposición

2. Consideremos a $\theta = \underline{10000100010011}$ y $\tilde{\theta} = \underline{10000100010010}$ órbitas periódicas maximales de periodo 14.

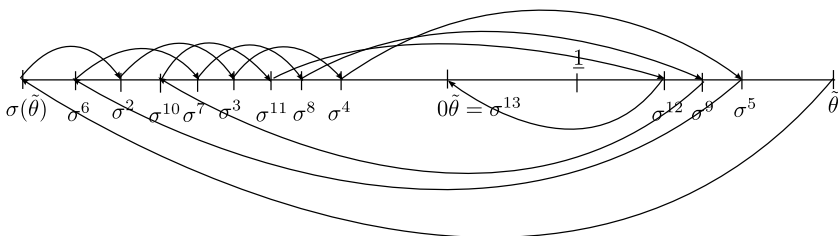
$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \underline{00001000100111}, \sigma^2(\theta) = \underline{00010001001110}, \sigma^3(\theta) = \underline{00100010011100}, \\ \sigma^4(\theta) &= \underline{01000100111000}, \sigma^5(\theta) = \underline{10001001110000}, \sigma^6(\theta) = \underline{00010011100001}, \\ \sigma^7(\theta) &= \underline{00100111000010}, \sigma^8(\theta) = \underline{01001110000100}, \sigma^9(\theta) = \underline{10011100001000}, \\ \sigma^{10}(\theta) &= \underline{00111000010001}, \sigma^{11}(\theta) = \underline{01110000100010}, \sigma^{12}(\theta) = \underline{11100001000100}, \\ \sigma^{13}(\theta) &= \underline{11000010001001} = \theta, \sigma^{14}(\theta) = \underline{10000100010011} = \theta. \end{aligned}$$



$$p(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 1 & 6 & 2 & 10 & 7 & 3 & 11 & 8 & 4 & 13 & 12 & 9 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\theta} = \underline{10000100010010}.$$

$$\begin{aligned}
\sigma(\tilde{\theta}) &= \underline{00001000100101}, \sigma^2(\tilde{\theta}) = \underline{00010001001010}, \sigma^3(\tilde{\theta}) = \underline{00100010010100}, \\
\sigma^4(\tilde{\theta}) &= \underline{01000100101000}, \sigma^5(\tilde{\theta}) = \underline{10001001010000}, \sigma^6(\tilde{\theta}) = \underline{00010010100001}, \\
\sigma^7(\tilde{\theta}) &= \underline{00100101000010}, \sigma^8(\tilde{\theta}) = \underline{01001010000100}, \sigma^9(\tilde{\theta}) = \underline{10010100001000}, \\
\sigma^{10}(\tilde{\theta}) &= \underline{00101000010001}, \sigma^{11}(\tilde{\theta}) = \underline{01010000100010}, \sigma^{12}(\tilde{\theta}) = \underline{10100001000100}, \\
\sigma^{13}(\tilde{\theta}) &= \underline{01000010001001} = 0\tilde{\theta}, \sigma^{14}(\tilde{\theta}) = \underline{10000100010010} = \tilde{\theta}.
\end{aligned}$$



$$p(\tilde{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 1 & 6 & 2 & 10 & 7 & 3 & 11 & 8 & 4 & 13 & 12 & 9 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

Se cumple $P(\theta) = P(\tilde{\theta})$ como enunciado en la proposición.

Notamos la siguiente construcción asociada a la órbita periódica maximal $\theta = \underline{10^{k_1}1^{k_2}0^{k_3} \dots 0^{k_{2p-1}}1^{k_{2p}}}$

Asociada a θ tenemos una aplicación lineal por pedazos $f_\theta : \bigcup_{i=1}^{N-1} I_i \rightarrow [0, 1]$ definida de la siguiente manera:

Supongamos que

$$\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_k < 0\theta < 1\theta = \sigma^{N-1}(\theta) (= \theta_{k+1}) < \theta_{k+2} < \dots < \theta_{k+N-k} = \theta$$

es la órbita ordenada de θ , $I_i = [\theta_{P(\theta)(i)}, \theta_{P(\theta)(i+1)}]$, $i = 1, 2, \dots, k-1$

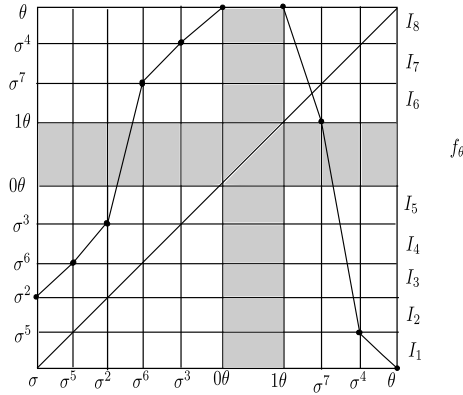
$I_k = [\theta_k, 0\theta]$; $I_{k+1} = [1\theta, \theta_{P(\theta)(k+2)}], \dots, I_{N-1} = [\theta_{P(\theta)(N-1)}, \theta_{P(\theta)(N)}]$

$f|_{I_j}$ se define linealmente satisfaciendo que $f \circ \sigma^i(\theta) = \sigma^{i+1}(\theta)$.

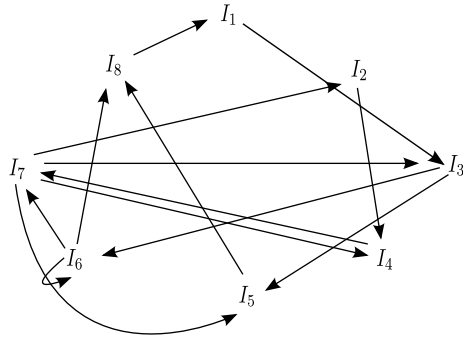
Así $f(\sigma(\theta)) = f(\theta_1) = \sigma(\theta_1), \dots, f(\theta_{k-1}) = \sigma(\theta_{k-1}), f(\theta_k) = \sigma(\theta_k) = \theta_{N-1}, f(0\theta) = \theta, f(1\theta) = \theta$ y sucesivamente

Ejemplo

$\theta = \underline{100010011}$



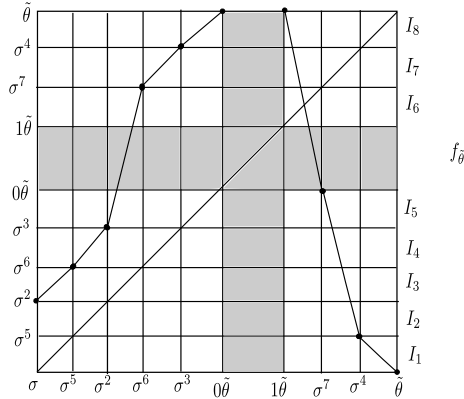
Asociado a f_θ tenemos el A- grafo



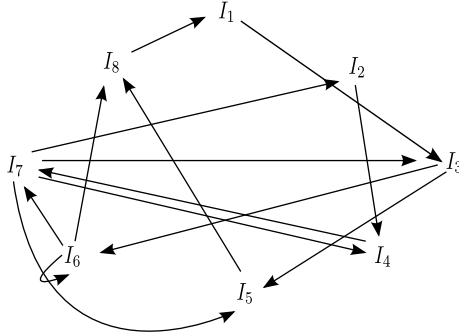
Asociado al A-grafo tenemos la matriz $M(\theta)$ y asociado a la matriz $M(\theta)$ tenemos el mayor valor real $1 \leq \lambda(\theta) \leq 2$ y resulta ser que $h_{top}(\theta) = \log(\lambda(\theta))$

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Veamos, ahora $f_{\tilde{\theta}}$ para $\tilde{\theta} = \underline{100010010}$



Asociado a $f_{\tilde{\theta}}$ tenemos el A- grafo



Que resulta ser igual al A- grafo asociado a f_{θ} y luego $M(\tilde{\theta}) = M(\theta)$ y por lo tanto $h(\tilde{\theta}) = h(\theta)$.

Así que podemos concluir la siguiente proposición

Proposición 7. Si $\theta = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_3} 1^{k_4} \dots 0^{k_{2p-1}} 1^{k_{2p}}}$ es una órbita periódica maximal, entonces si $\tilde{\theta} = \underline{10^{k_1} 1^{k_2} 0^{k_3} 1^{k_4} \dots 0^{k_{2p-1}} 1^{k_{2p}-1} 0}$ se cumple que $h(\theta) = h(\tilde{\theta})$, donde $h(\theta) = h_{top}(\sigma|_{\Lambda(\theta)})$, $h(\tilde{\theta}) = h_{top}(\sigma|_{\Lambda(\tilde{\theta})})$

Corolario 20. En las condiciones de la proposición: si $I(\theta, \tilde{\theta})$ es el intervalo $[\theta, \tilde{\theta}]$ (caso $\theta < \tilde{\theta}$) ó $[\tilde{\theta}, \theta]$ (caso $\tilde{\theta} < \theta$), entonces para todo $\alpha \in I(\theta, \tilde{\theta})$ vale $h(\alpha) = h(\theta)$

Demostración. En efecto pues $h(\theta) \leq h(\alpha) \leq h(\tilde{\theta})$ si $(\theta < \tilde{\theta})$ o $h(\tilde{\theta}) \leq h(\alpha) \leq h(\theta)$ si $(\tilde{\theta} < \theta)$.

□

Corolario 21. a) Si ocurre que $\theta < \tilde{\theta}$ entonces $h(\beta)$ es continua a la derecha de θ

b) Si $\tilde{\theta} < \theta$ entonces $h(\beta)$ es continua a la izquierda de θ .

Concluimos entonces que para probar que la aplicación $h(\beta)$ es continua en θ basta probar que es continua a la izquierda de θ si $\theta < \tilde{\theta}$ y a la derecha de θ si $\tilde{\theta} < \theta$.

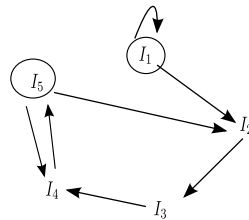
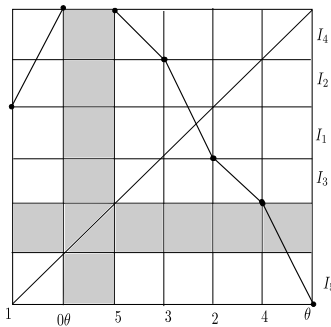
3.3. Demostración de la continuidad en $\theta = \underline{101}$

En esta sección vamos a probar la continuidad de $h(\theta)$ en $\theta = \underline{101}$.

Para ello consideremos $\theta_n = \underline{(101)^n 111}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ $\theta_1 = \underline{101111} < \theta_2 = \underline{101101111} < \theta_3 = \underline{101101101111} < \dots < \theta_n < \dots < \theta$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta = \underline{101}$

Será suficiente calcular $h(\theta_n)$ y probar que $h(\theta_n) \rightarrow h(\theta)$. Con esto tendremos la continuidad de $h(\theta)$ en $\theta = \underline{101}$. Para esto será suficiente calcular f_{θ_n} , el A-grafo de f_{θ_n} , su matriz de incidencia $M(\theta_n)$ (o entonces una roma $R(\theta_n)$ y su matriz de incidencia $A(\theta_n)$) y probar que $\lambda(\theta_n) \rightarrow \lambda(\theta)$ ($\lambda(\theta)$ es el mayor autovalor real de $M(\theta)$)

1. $\theta_1 = \underline{101111}$, $\sigma(\theta_1) = \underline{011111}$, $\sigma^2(\theta_1) = \underline{111110}$, $\sigma^3(\theta_1) = \underline{111101}$, $\sigma^4(\theta_1) = \underline{111011}$, $\sigma^5(\theta_1) = \underline{110111}$



Usamos como roma $R = \{I_1, I_5\}$

$$\begin{array}{ll} a_{11} = x^{-1} & a_{15} = x^{-4} \\ (1, 1) & (1, 2, 3, 4, 5) \\ a_{51} = 0 & a_{55} = x^{-2} + x^{-4} \\ & (5, 4, 5), (5, 2, 3, 4, 5) \end{array}$$

$$\begin{aligned} (-1)^{5-2} x^5 & \begin{vmatrix} x^{-1} - 1 & x^{-4} \\ 0 & x^{-2} + x^{-4} - 1 \end{vmatrix} = -x^5((x^{-1} - 1)(x^{-2} + x^{-4} - 1)) = \\ & = -x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = -x^3(x^2 - x - 1) - x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

Entonces $p(\underline{101111})(\bar{x}) = -x^3 p(\underline{101})(x) - x^2 + x - 1$.

Si \bar{x} es tal que $p(\underline{101})(x) = 0$, entonces $p(\underline{101111})(\bar{x}) = -\bar{x}^2 + \bar{x} - 1$.

Ahora $p(\underline{101})(x) = x^2 - x - 1 = 0$ si y sólo si $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$, $\bar{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$$p(\underline{101111})(\bar{x}) = -\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) - 1 = -2 < 0$$

$$p(\underline{101111})(1) = 0, p(\underline{101111})'(x) = -5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

$$p(\underline{101111})'(1) = -5 + 4 + 3 - 2 + 1 = 1 > 0$$

Por lo tanto, existe $x_1 \in]1, \bar{x}[$ tal que $p(\underline{101111})(x_1) = 0$.

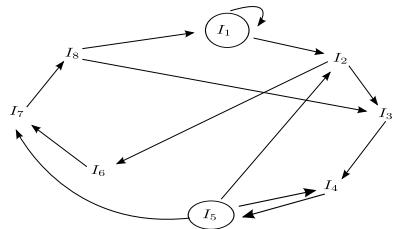
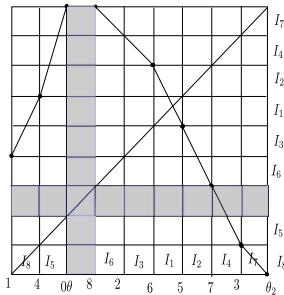
Tenemos $1 < x_1 < \bar{x}$ y $h_{top}(\theta_1) = \log(x_1)$.

2. $\theta_2 = \underline{101101111}$.

$$\sigma(\theta_2) = \underline{011011111}, \quad \sigma^2(\theta_2) = \underline{110111110}, \quad \sigma^3(\theta_2) = \underline{101111101},$$

$$\sigma^4(\theta_2) = \underline{011111011}, \quad \sigma^5(\theta_2) = \underline{111110110}, \quad \sigma^6(\theta_2) = \underline{111101101},$$

$$\sigma^7(\theta_2) = \underline{111011011}, \quad \sigma^8(\theta_2) = \underline{110110111}.$$



Usamos como roma a $R = \{I_1, I_5\}$ y tenemos como matriz de incidencia a:

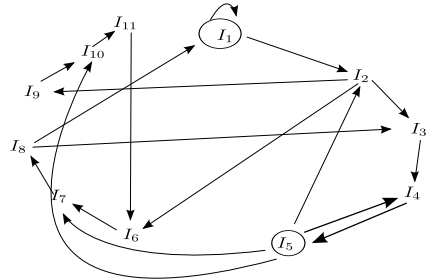
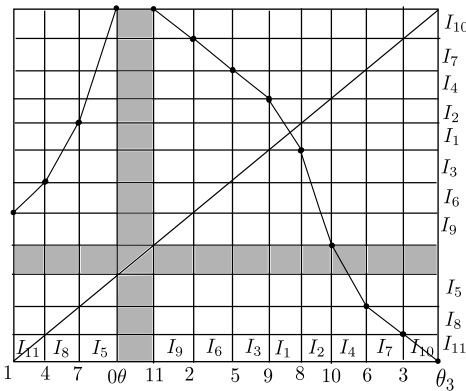
$$\begin{array}{ll}
 a_{11} = x^{-1} + x^{-5} & a_{15} = x^{-4} + x^{-7} \\
 (1, 1), (1, 2, 6, 7, 8, 1) & (1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 6, 7, 8, 3, 4, 5) \\
 a_{51} = x^{-3} + x^{-5} & x_{55} = x^{-2} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-7} \\
 (5, 7, 8, 1), (5, 2, 6, 7, 8, 1) & (5, 4, 5), (5, 2, 3, 4, 5), (5, 7, 8, 3, 4, 5), \\
 & (5, 2, 6, 7, 8, 3, 4, 5)
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{8-2} x^8 \left| \begin{array}{cc} x^{-1} + x^{-5} - 1 & x^{-4} + x^{-7} \\ x^{-3} + x^{-5} & x^{-2} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-7} - 1 \end{array} \right| = \\
 & = x^8((x^{-1} + x^{-5} - 1)(x^{-2} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-7} - 1) - (x^{-4} + x^{-7})(x^{-3} + x^{-5})) \\
 & = x^8 - x^7 - x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \\
 & = x^8 - x^7 - x^6 - p(\underline{101111})(x) \\
 & = x^6 p(\underline{101})(x) - p(\underline{101111})(x) = p(\underline{101101111})(x) \\
 & p(\underline{101101111})(x_1) = x_2^6 p(\underline{101})(x_1) < 0 \\
 & p(\underline{101101111})(\bar{x}) = -p(\underline{101111})(\bar{x}) > 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto existe x_2 ; $x_1 < x_2 < \bar{x}$ tal que $p(\underline{101101111})(x_2) = 0$ y $h_{top}(\underline{101101111}) = \log(x_2)$

3. $\theta_3 = \underline{101101101111}$.

$$\begin{array}{lll}
 \sigma(\theta_3) = \underline{011011011111}, & \sigma^2(\theta_3) = \underline{110110111110}, & \sigma^3(\theta_3) = \underline{101101111101}, \\
 \sigma^4(\theta_3) = \underline{011011111011}, & \sigma^5(\theta_3) = \underline{110111110110}, & \sigma^6(\theta_3) = \underline{101111101101}, \\
 \sigma^7(\theta_3) = \underline{011111011011}, & \sigma^8(\theta_3) = \underline{111110110110}, & \sigma^9(\theta_3) = \underline{111101101101}, \\
 \sigma^{10}(\theta_3) = \underline{111011011011}, & \sigma^{11}(\theta_3) = \underline{110110110111}.
 \end{array}$$



Usamos como roma a $R = \{I_1, I_5\}$ que tiene como matriz de incidencia

$$\begin{array}{ll}
 a_{11} = x^{-1} + x^{-5} + x^{-8} & a_{15} = x^{-4} + x^{-7} + x^{-10} \\
 (1, 1), (1, 2, 6, 7, 8, 1), & (1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 6, 7, 8, 3, 4, 5), \\
 (1, 2, 9, 1, 11, 6, 7, 8, 1) & (1, 2, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5) \\
 a_{51} = x^{-3} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-8} & a_{55} = x^{-2} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-7} + x^{-8} + x^{-10} \\
 (5, 7, 8, 1), (5, 2, 6, 7, 8, 1), & (5, 4, 5), (5, 2, 3, 4, 5), (5, 7, 8, 3, 4, 5), \\
 (5, 10, 11, 6, 7, 8, 1) & (5, 2, 6, 7, 8, 3, 4, 5), (5, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5), \\
 (5, 2, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 1) & (5, 2, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5)
 \end{array}$$

Tenemos

$$(-1)^{11-2}x^{11}.$$

$$\left| \begin{array}{cc}
 x^{-1} + x^{-5} + x^{-8} - 1 & x^{-4} + x^{-7} + x^{-10} \\
 x^{-3} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-8} & x^{-2} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-7} + x^{-8} + x^{-10} - 1
 \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned}
 &= -x^{11} + x^{10} + x^9 - x^8 + x^7 + x^6 - x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 \\
 &= -x^9(x^2 - x - 1) - [x^8 - x^7 - x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1] \\
 &= -x^9 p(\underline{101})(x) - p(\underline{(101)^2 111})(x) = p(\underline{(101)^3 111})(x).
 \end{aligned}$$

Tenemos:

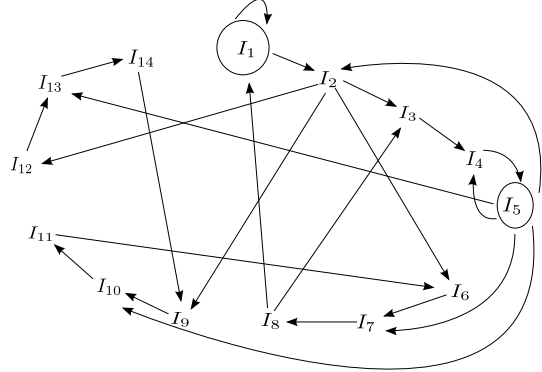
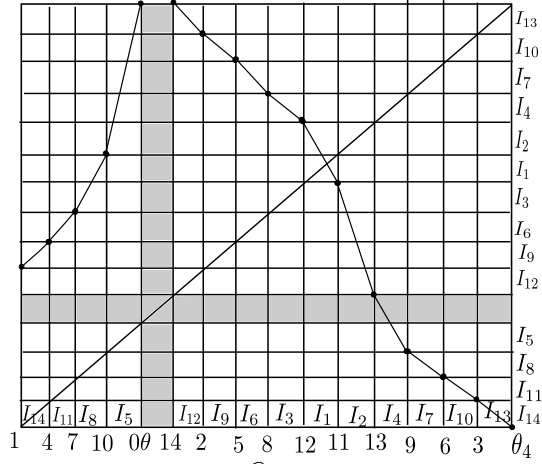
$$p(\underline{(101)^3 111})(x_2) = x^{-9} p(\underline{101})(x_2) > 0$$

$$p(\underline{(101)^3 111})(\bar{x}) = -p(\underline{(101)^2 111})(\bar{x}) < 0.$$

Por lo tanto existe x_3 ; $x_1 < x_2 < x_3 < \bar{x}$ tal que $p(\underline{(101)^3 111})(x_3) = 0$ y $h_{top}(\underline{(101)^3 111}) = \log(x_3)$.

$$4. \theta_4 = \underline{(101)^4 111} = \underline{101101101101111}.$$

$$\begin{array}{ll}
 \sigma(\theta_4) = \underline{011011011011111}, & \sigma^2(\theta_4) = \underline{110110110111110}, \\
 \sigma^3(\theta_4) = \underline{101101101111101}, & \sigma^4(\theta_4) = \underline{011011011111011}, \\
 \sigma^5(\theta_4) = \underline{110110111110110}, & \sigma^6(\theta_4) = \underline{101101111101101}, \\
 \sigma^7(\theta_4) = \underline{011011111011011}, & \sigma^8(\theta_4) = \underline{110111110110110}, \\
 \sigma^9(\theta_4) = \underline{101111101101101}, & \sigma^{10}(\theta_4) = \underline{011111011011011}, \\
 \sigma^{11}(\theta_4) = \underline{111110110110110}, & \sigma^{12}(\theta_4) = \underline{111101101101101}, \\
 \sigma^{13}(\theta_4) = \underline{111011011011011}, & \sigma^{14}(\theta_4) = \underline{110110110110111}.
 \end{array}$$



Escogemos la roma $R = \{I_1, I_5\}$ y tenemos

$$a_{11} = x^{-1} + x^{-5} + x^{-8} + x^{-11}$$

$$(1, 2, 6, 7, 8, 1), (1, 2, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 1)(1, 2, 12, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 1)$$

$$a_{15} = x^{-4} + x^{-7} + x^{-10} + x^{-13}$$

$$(1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 6, 7, 8, 3, 4, 5), (1, 2, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5)$$

$$(1, 2, 12, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5)$$

$$a_{51} = x^{-3} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-8} + x^{-9} + x^{-11}$$

$$(5, 2, 6, 7, 8, 1), (5, 10, 11, 6, 7, 8, 1), (5, 2, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 1),$$

$$(5, 2, 12, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 1), (5, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 1)$$

$$a_{55} = x^{-2} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-7} + x^{-8} + x^{-10} + x^{-11} + x^{-13}$$

$$(5, 4, 5), (5, 2, 3, 4, 5), (5, 7, 8, 3, 4, 5), (5, 2, 6, 7, 8, 3, 4, 5), (5, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5),$$

$$(5, 2, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5), (5, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5),$$

(5, 2, 12, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5)

Tenemos $(-1)^{14-2}x^{14}$.

$$\left| \begin{array}{cc} x^{-1} + x^{-5} + x^{-8} + x^{-11} - 1 & x^{-4} + x^{-7} + x^{-10} + x^{-13} \\ x^{-3} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-8} + x^{-9} + x^{-11} & x^{-2} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-7} + x^{-8} + \\ & + x^{-10} + x^{-11} + x^{-13} - 1 \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} &= x^{14}[(x^{-1} + x^{-5} + x^{-8} + x^{-11} - 1)(x^{-2} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-7} + x^{-8} + x^{-10} + x^{-11} + \\ &x^{-13} - 1) - (x^{-4} + x^{-7} + x^{-10} + x^{-13})(x^{-3} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-8} + x^{-9} + x^{-11})] \\ &= x^{14} - x^{13} - x^{12} + x^{11} - x^{10} - x^9 + x^8 - x^7 - x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \\ &x^{12}(x^2 - x - 1) - p(\underline{(101)^3 111})(x) = p(\underline{(101)^4 111})(x). \end{aligned}$$

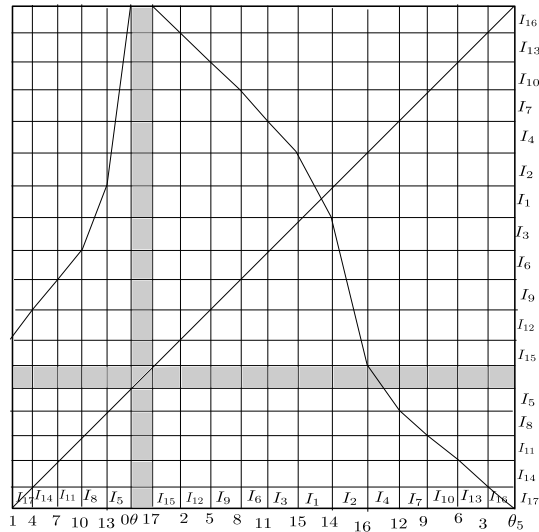
Tenemos

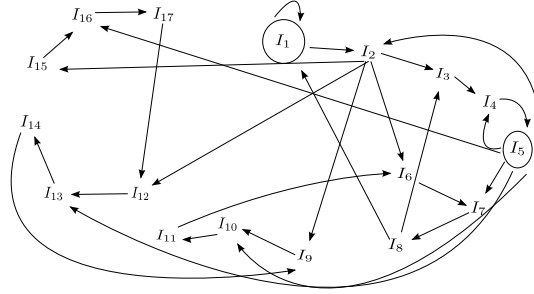
$$p(\underline{(101)^4 111})(x_3) = x_3^{12}(x_3^2 - x_3 - 1) < 0$$

$$p(\underline{(101)^4 111})(\bar{x}) = -p(\underline{(101)^3 111})(\bar{x}) > 0.$$

Por lo tanto existe x_4 ; $1 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \bar{x}$ tal que $p(\underline{(101)^4 111})(x_4) = 0$ y resulta ser que $h_{top}(\underline{(101)^4 111}) = \log(x_4)$.

5. Ahora $\theta_5 = \underline{(101)^5 111}$.





Usamos la roma $R = \{I_1, I_5\}$ y tenemos:

$$a_{11} = x^{-1} + x^{-5} + x^{-8} + x^{-11} + x^{-14}$$

$$(1, 1), (1, 2, 6, 7, 8, 1), (1, 2, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 1),$$

$$(1, 2, 12, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 1)$$

$$(1, 2, 15, 16, 17, 12, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 1)$$

$$a_{15} = x^{-4} + x^{-7} + x^{-10} + x^{-13} + x^{-16}$$

$$(1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 6, 7, 8, 3, 4, 5), (1, 2, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5),$$

$$(1, 2, 12, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5),$$

$$(1, 2, 15, 16, 17, 12, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5)$$

$$a_{51} = x^{-3} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-8} + x^{-9} + x^{-11} + x^{-12} + x^{-14}$$

$$(5, 7, 8, 1), (5, 2, 6, 7, 8, 1), (5, 10, 11, 6, 7, 8, 1), (5, 2, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 1),$$

$$(5, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 1), (5, 2, 12, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 1),$$

$$(5, 16, 17, 12, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 1),$$

$$(5, 2, 15, 16, 17, 12, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 1)$$

$$a_{55} = x^{-2} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-7} + x^{-8} + x^{-10} + x^{-11} + x^{-13} + x^{-14} + x^{-16}$$

$$(5, 4, 5), (5, 2, 3, 4, 5), (5, 7, 8, 3, 4, 5), (5, 2, 6, 7, 8, 3, 4, 5),$$

$$(5, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5), (5, 2, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5),$$

$$(5, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5),$$

$$(5, 2, 12, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5), (5, 16, 17, 12, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5),$$

$$(5, 2, 15, 16, 17, 12, 13, 14, 9, 10, 11, 6, 7, 8, 3, 4, 5)$$

Tenemos entonces:

$$(-1)^{17-2}x^{17}.$$

$$\left| \begin{array}{cc} x^{-1} + x^{-5} + x^{-8} + x^{-11} + x^{-14} - 1 & x^{-4} + x^{-7} + x^{-10} + x^{-13} + x^{-16} \\ x^{-3} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-8} + x^{-9} + & x^{-2} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-7} + x^{-8} + \\ +x^{-11} + x^{-12} + x^{-14} & +x^{-10} + x^{-11} + x^{-13} + x^{-14} + \\ & +x^{-16} - 1 \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= -x^{17} + x^{16} + x^{15} - x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^{11} + x^{10} + x^9 - x^8 + x^7 + x^6 - x^5 + \\
&x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 \\
&= -x^{15}(x^2 - x - 1) - p(\underline{(101)^4 111})(x) = p(\underline{(101)^5 111})(x).
\end{aligned}$$

Luego:

$$p(\underline{(101)^5 111})(x_4) = -x_4^{15}(x_4^2 - x_4 - 1) > 0$$

$$p(\underline{(101)^5 111})(\bar{x}) = -p(\underline{(101)^4 111})(\bar{x}) < 0.$$

Por lo tanto existe x_5 ; $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < \bar{x}$ tal que $p(\underline{(101)^5 111})(x_5) = 0$ y resulta ser que $h_{top}(\underline{(101)^5 111}) = \log(x_5)$.

Por lo tanto la expresión

$$p(\underline{(101)^k 111})(x) = (-1)^k x^{3k}(x^2 - x - 1) - p(\underline{(101)^{k-1} 111})(x)$$

vale para $k = 2, 3, 4$ y 5 .

Vamos a suponer por inducción que la expresión anterior es válida para $k = 2, 3, 4, \dots, n$ y que existe x_n ; $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \bar{x}$ tal que $p(\underline{(101)^n 111})(x_n) = 0$ y es la única solución en $[x_{n-1}, \bar{x}]$ con $p(\underline{(101)^n 111})(x_{n-1}) \cdot p(\underline{(101)^n 111})(\bar{x}) < 0$ y vamos a suponer que

$$A_k(x) - I = \begin{bmatrix} A_k & D_k \\ C_k & B_k \end{bmatrix}, k = 1, 2, 3, \dots, n$$

donde

$$A_1 = x^{-1} - 1, A_2 = x_{-1} + x^{-5} - 1, A_3 = x^{-1} + x^{-5} + x^{-8} - 1,$$

$$A_4 = x^{-1} + x^{-5} + x^{-8} + x^{-11} - 1, A_5 = x^{-1} + x^{-5} + x^{-8} + x^{-11} + x^{-14} - 1, \text{ y en general}$$

$$A_k = x^{-1} + \sum_{i=1}^{k-1} x^{-(3i+2)} - 1, k \geq 5$$

$$D_1 = x^{-4}, D_2 = x^{-4} + x^{-7}, D_3 = x^{-4} + x^{-7} + x^{-10}, D_4 = x^{-4} + x^{-7} + x^{-10} + x^{-13}, D_5 = x^{-4} + x^{-7} + x^{-10} + x^{-13} + x^{-16} \text{ y en general}$$

$$D_k = \sum_{i=1}^k x^{-(3i+1)}, k \geq 5$$

$$C_1 = 0, C_2 = x^{-3} + x^{-5}, C_3 = x^{-3} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-8}, C_4 = x^{-3} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-8} + x^{-9} + x^{-11}, C_5 = x^{-3} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-8} + x^{-9} + x^{-11} + x^{-12} + x^{-14} \text{ y en}$$

$$\text{general } C_k = C_{k-1} + x^{-3(k-1)} + x^{-(3(k-1)+2)} = \sum_{i=1}^{k-1} (x^{-3i} + x^{-(3i+2)}) \text{ por lo tanto}$$

$$C_k = \sum_{i=1}^{k-1} x^{-3i}(1 + x^{-2}), k \geq 5$$

$B_1 = x^{-2} + x^{-4} - 1$, $B_2 = B_1 + x^{-5} + x^{-7} - 1$, $B_3 = B_2 + x^{-8} + x^{-10} - 1$,
 $B_4 = B_3 + x^{-11} + x^{-13} - 1$, $B_5 = B_4 + x^{-14} + x^{-16} - 1$ y en general
 $B_k = B_{k-1} + x^{-(3k-1)} + x^{-(3k+1)} - 1 = B_{k-1} + x^{-3k}(1 + x^{-2}) - 1$, por lo tanto

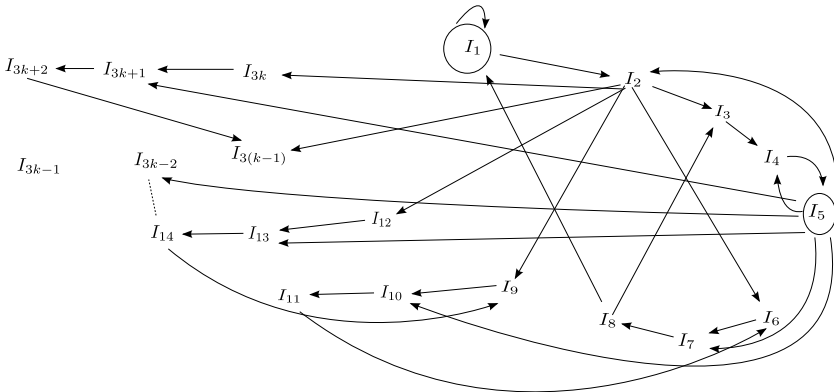
$$B_k = \sum_{i=1}^k x^{-(3i-1)}(1 + x^{-2}) - 1, \quad k \geq 5$$

Escribiendo $A_k = a_{11}^k - 1$, $D_k = a_{15}^k$, $C_k = a_{51}^k$, $B_k = a_{55}^k - 1$, donde los a_{ij}^k son los coeficientes asociados a la matriz $A_k(x)$ definidos por la roma $R = \{I_1, I_5\}$ a partir de la restricción del shift a $[\sigma(\underline{(101)^k 111}), \underline{(101)^k 111}]$ y cuyo A- grafo para la partición

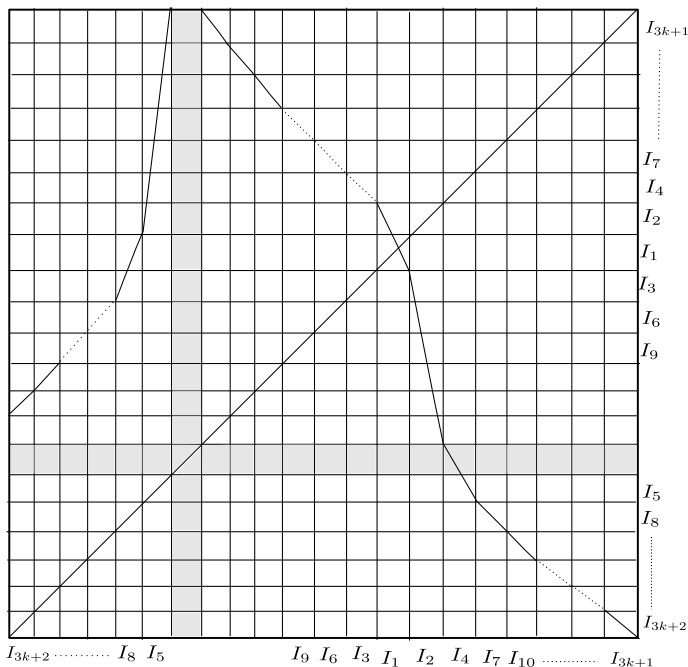
$A = \{I_1, I_2, \dots, I_{3k+2}\}$, donde

$$[I_{3k+2}I_{3k-1} \dots I_{11}I_8I_5 \ I_{3k}I_{3(k-1)} \dots I_3I_1I_2I_4I_7 \dots I_{3k+1}] = [\sigma(\underline{(101)^k 111}), \underline{(101)^k 111}]$$

es



Cuya aplicación del intervalo está definida por



Este es el gráfico de la restricción de σ a $[\sigma(\underline{(101)^k 111}), \underline{(101)^k 111}]$.
 Consideramos ahora el caso de $\theta_{k+1} = \underline{(101)^{k+1} 111}$
 Lo primero que debemos hacer es escribir las iteraciones de θ_{k+1}

- 1) $\theta_{k+1} = P_1 = \underline{(101)^{k+1} 111} = \underline{1(011)^{k+1} 11}$
- 2) $P_2 = \sigma(P_1) = \underline{(011)^{k+1} 111} = \underline{0(110)^k 11111}$
- 3) $P_3 = \sigma(P_2) = \underline{(110)^k 111(110)} = \underline{1(101)^k 11110}$
- 4) $P_4 = \sigma(P_3) = \underline{(101)^k 111(101)} = \underline{1(011)^k 11101}$
- 5) $P_5 = \underline{(011)^k 111(011)} = \underline{0(110)^{k-1} 11111011}$
- 6) $P_6 = \underline{(110)^{k-1} 111(110110)} = \underline{1(101)^{k-1} 11110110}$
- 7) $P_7 = \underline{(101)^{k-1} 111(101101)} = \underline{101(101)^{k-2} 111(101)^2} = \underline{1(011)^{k-1} 11(101)^2}$
- 8) $P_8 = \underline{(011)^{k-1} 11(101)^2 1} = \underline{0(110)^{k-2} 111(110)(110)11}$
- 9) $P_9 = \underline{(110)^{k-2} 111(110)^3} = \underline{1(101)^{k-2} 111(101)^2 10}$

$$10) P_{10} = \underline{(101)^{k-2}111(101)^3}$$

⋮

$$3j) P_{3j} = \sigma(P_{3j-1}) = \underline{(110)^{k+1-j}111(110)^j}, \quad j = 3, 4, \dots, k$$

$$3j+1) P_{3j+1} = \sigma(P_{3j}) = \underline{(101)^{k+1-j}111(101)^j}$$

$$3j+2) P_{3j+2} = \sigma(P_{3j+1}) = \underline{(011)^{k+1-j}111(011)^j}$$

⋮

$$3k) P_{3k} = \sigma(P_{3k-1}) = \underline{(110)111(110)^k}$$

$$3k+1) P_{3k+1} = \sigma(P_{3k}) = \underline{(101)111(101)^k}$$

$$3k+2) P_{3k+2} = \sigma(P_{3k+1}) = \underline{(011)111(011)^k}$$

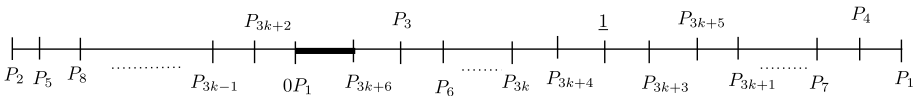
$$3(k+1)) P_{3(k+1)} = \sigma(P_{3k+2}) = \underline{111(110)^{k+1}}$$

$$3(k+1)+1) P_{3k+4} = \sigma(P_{3k+3}) = \underline{11(110)^{k+1}1} = \underline{111(101)^{k+1}}$$

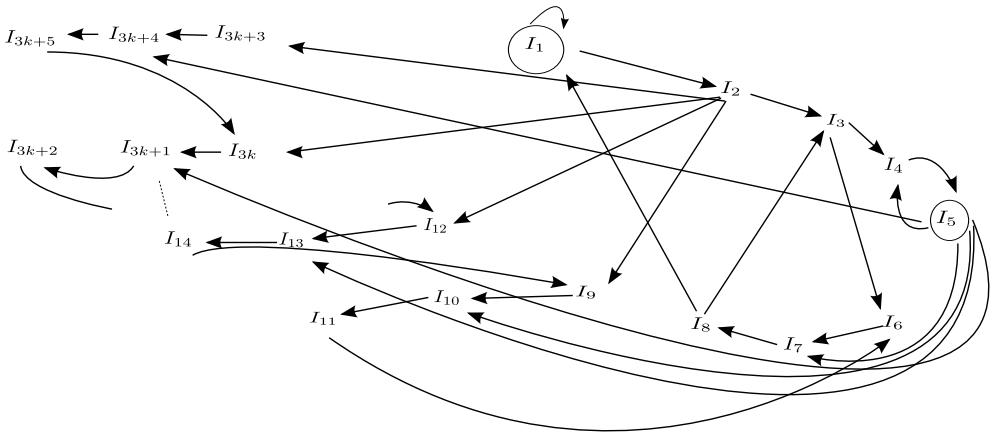
$$3(k+1)+2) P_{3k+5} = \sigma(P_{3k+4}) = \underline{11(101)^{k+1}1} = \underline{111(011)^{k+1}}$$

$$3(k+1)+3) P_{3k+6} = \sigma(P_{3k+5}) = \underline{(110)^{k+1}111}$$

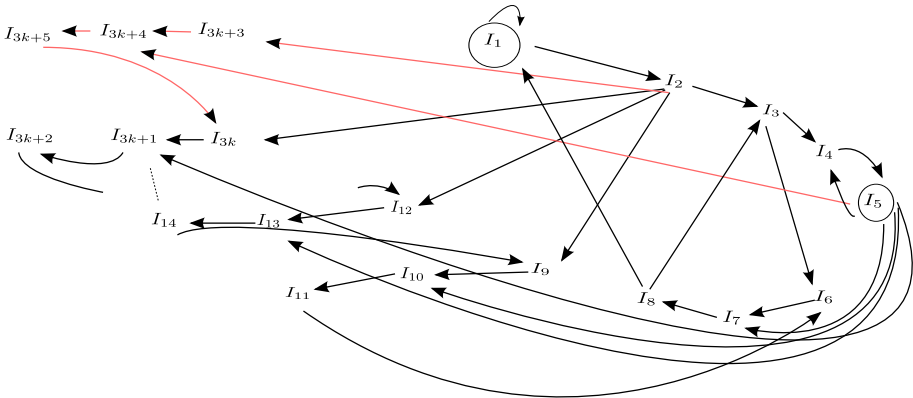
Ordenando los puntos $P_1, P_2, \dots, P_{3k+6}$ en el intervalo tenemos



Hacemos ahora el gráfico que corresponde a la restricción de σ al intervalo $[\sigma(\underline{(101)^{k+1}111}), \underline{(101)^{k+1}111}]$



Observamos que este A- gráfico es como el A- gráfico de la restricción de σ a $[\sigma((101)^k 111), (101)^k 111]$ al que hemos agregado las siguientes flechas



Esto se va a traducir en que

$$a_{11}^{k+1} = a_{11}^k + x^{-(3k+2)}, \quad a_{15}^{k+1} = a_{15}^k + x^{-(3k+4)}$$

$$a_{51}^{k+1} = a_{51}^k + x^{-3k}(1 + x^{-2}), \quad a_{55}^{k+1} = a_{55}^k + x^{-(3k+2)}(1 + x^{-2})$$

Esto es:

$$A_{k+1} = A_k + x^{-(3k+2)}, \quad D_{k+1} = D_k + x^{-(3k+4)}, \quad C_{k+1} = C_k + x^{-3k}(1 + x^{-2}),$$

$$B_{k+1} = B_k + x^{-(3k+2)}(1 + x^{-2})$$

Aquí hemos denotado:

$$A_k(x) - I = \begin{bmatrix} A_k(x) & D_k(x) \\ C_k(x) & B_k(x) \end{bmatrix} \text{ y } A_{k+1}(x) - I = \begin{bmatrix} A_{k+1}(x) & D_{k+1}(x) \\ C_{k+1}(x) & B_{k+1}(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Así } A_{k+1} \cdot B_{k+1} - C_{k+1} \cdot D_{k+1} = \\
& (A_k + x^{-(3k+2)}) \cdot (B_k + x^{-(3k+2)}(1+x^{-2})) - (C_k + x^{-3k}(1+x^{-2}))(D_k + x^{-(3k+4)}) = \\
& A_k B_k + A_k x^{-(3k+2)}(1+x^{-2}) + B_k x^{-(3k+2)} + x^{-6k-4}(1+x^{-2}) - C_k D_k - C_k x^{-(3k+4)} - \\
& D_k x^{-3k}(1+x^{-2}) - x^{-6k-4}(1+x^{-2}) = A_k B_k - C_k D_k + A_k x^{-(3k+2)}(1+x^{-2}) + \\
& B_k x^{-3k-2} - C_k x^{-3k-4} - D_k x^{-3k}(1+x^{-2})
\end{aligned}$$

Usando las expresiones

$$\begin{aligned}
A_k &= x^{-1} + \sum_{i=1}^{k-1} x^{-(3i+2)} - 1 & D_k &= \sum_{i=1}^k x^{-(3i+1)} \\
C_k &= \sum_{i=1}^{k-1} x^{-3i}(1+x^{-2}) & B_k &= \sum_{i=1}^k x^{-(3i-1)}(1+x^{-2}) - 1
\end{aligned}$$

Tenemos

$$x^{-3k-2}(1+x^{-2})A_k = x^{-3k-2}(1+x^{-2})(x^{-1}-1) + \sum_{i=1}^{k-1} x^{-3i-3k-4}(1+x^{-2})$$

$$x^{-3k-2}B_k = (1+x^{-2}) \sum_{i=1}^k x^{-3i-3k-1} - x^{-3k-2}$$

$$-x^{-3k-4}C_k = -(1+x^{-2}) \sum_{i=1}^{k-1} x^{-3i-3k-4}$$

$$-x^{-3k}(1+x^{-2})D_k = -(1+x^{-2}) \sum_{i=1}^k x^{-3i-3k-1}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
A_{k+1}B_{k+1} - C_{k+1}D_{k+1} &= A_k B_k - C_k D_k + x^{-3k-2}(x^{-1}-1+x^{-3}-x^{-2}) - x^{-3k-2} \\
&= A_k B_k - C_k D_k - 2x^{-3k-2} + x^{-3k-3} - x^{-3k-4} + x^{-3k-5}
\end{aligned}$$

Formando $(-1)^{3k+5-2}x^{3k+5} \det(A_{k+1}(x) - I)$ que es el polinomio característico de la matriz asociada al gráfico de $\sigma|_{[\sigma((101)^{k+1}111), (101)^{k+1}111]}$ tenemos

$$\begin{aligned}
& (-1)^{3k+3}x^{3k+5}(A_k B_k - C_k D_k + x^{-3k-3} - 2x^{-3k-2} + x^{-3k-5} - x^{-3k-4}) \\
&= (-1)^{3k+1}(x^{3k+5}(A_k B_k - C_k D_k) + x^2 - 2x^3 + 1 - x) \\
&= (-1)^{3k+1}(x^3 x^{3k+2}(A_k B_k - C_k D_k) - 2x^3 + x^2 - x + 1)
\end{aligned}$$

Como

$$p((101)^k 111)(x) = (-1)^{3k+2-2}x^{3k+2-2} \det(A_k - I) = (-1)^{3k}x^{3k+2}(A_k B_k - C_k D_k)$$

Tenemos $x^{3k+2}(A_k B_k - C_k D_k) = (-1)^{3k}p((101)^k 111)(x)$, y luego

$$\begin{aligned}
p((101)^{k+1} 111)(x) &= (-1)^{3k+1}[x^3(-1)^{3k}p((101)^k 111)(x) - 2x^3 + x^2 - x + 1] \\
&= -x^3 p((101)^k 111)(x) + (-1)^{3k+1}(-2x^3 + x^2 - x + 1)
\end{aligned}$$

Usando la hipótesis de inducción sobre $p(\underline{(101)^k 111})(x)$, a saber $p(\underline{(101)^k 111})(x) = (-1)^k x^{3k} p(\underline{101})(x) - p(\underline{(101)^{k-1} 111})(x)$, tenemos

$$\begin{aligned}
p(\underline{(101)^{k+1} 111})(x) &= \\
&= -x^3((-1)^k x^{3k} p(\underline{101})(x) - p(\underline{(101)^{k-1} 111})(x)) + (-1)^{3k+1}(-2x^3 + x^2 - x + 1) \\
&= (-1)^{k+1} x^{3k+3} p(\underline{101})(x) + x^3 p(\underline{(101)^{k-1} 111})(x) + (-1)^{3k} 2x^3 + \\
&\quad (-1)^{k+1}(x^2 - x + 1) \\
&= (-1)^{k+1} x^{3(k+1)} p(\underline{101})(x) + x^3((-1)^{k-1} x^{3(k-1)} p(\underline{101})(x) - p(\underline{(101)^{k-2} 111})(x)) + \\
&\quad + (-1)^k 2x^3 + (-1)^{k+1}(x^2 - x + 1) \\
&= (-1)^{k+1} x^{3(k+1)} p(\underline{101})(x) + (-1)^{k+1} x^{3k} p(\underline{101})(x) - x^3 p(\underline{(101)^{k-2} 111})(x) + \\
&\quad + (-1)^k 2x^3 + (-1)^{k+1}(x^2 - x + 1) \\
&= (-1)^{k+1} (x^{3(k+1)} + x^{3k}) p(\underline{101})(x) + (-1)^3 x^3 p(\underline{(101)^{k-2} 111})(x) + \\
&\quad + (-1)^{k+1}(-2x^3 + x^2 - x + 1) \\
&= (-1)^{k+1} (x^{3(k+1)} + x^{3k}) p(\underline{101})(x) + (-1)^3 x^3((-1)^{k-2} x^{3(k-2)} p(\underline{101})(x) \\
&\quad - p(\underline{(101)^{k-3} 111})(x)) + (-1)^{k+1}(-2x^3 + x^2 - x + 1) \\
&= (-1)^{k+1} (x^{3(k+1)} + x^{3k}) p(\underline{101})(x) + (-1)^{k+1} x^{3(k-1)} p(\underline{101})(x) + \\
&\quad + (-1)^4 x^3 p(\underline{(101)^{k-3} 111})(x) + (-1)^{k+1}(-2x^3 + x^2 - x + 1) \\
&= (-1)^{k+1} (x^{3(k+1)} + x^{3k} + x^{3(k+1)}) p(\underline{101})(x) + (-1)^4 x^3 p(\underline{(101)^{k-3} 111})(x) + \\
&\quad + (-1)^{k+1}(-2x^3 + x^2 - x + 1)
\end{aligned}$$

Sucesivamente

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{k+1}(x^{3(k+1)} + x^{3k} + x^{3(k+1)} + \dots + x^{3 \cdot 4} + x^{3 \cdot 3})p(\underline{101})(x) + \\
&\quad + (-1)^k x^3 p(\underline{101111})(x) + (-1)^{k+1}(-2x^3 + x^2 - x + 1) \\
&= (-1)^{k+1}p(\underline{101})(x) \cdot \sum_{i=3}^{k+1} x^{3i} + (-1)^k x^3(-x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) + \\
&\quad + (-1)^{k+1}(-2x^3 + x^2 - x + 1) \\
&= (-1)^{k+1}p(\underline{101})(x) \cdot \sum_{i=3}^{k+1} x^{3i} + (-1)^{k+1}x^{3 \cdot 2}(x^2 - x - 1) + (-1)^{k+1}x^5 + (-1)^k x^4 + \\
&\quad + (-1)^{k+1}x^3 + (-1)^{k+2}2x^3 + (-1)^{k+1}(x^2 - x + 1) \\
&= (-1)^{k+1}p(\underline{101})(x) \cdot \sum_{i=2}^{k+1} x^{3i} + (-1)^{k+1}x^3(x^2 - x - 1) + (-1)^{k+1}(x^2 - x + 1) \\
&= (-1)^{k+1}p(\underline{101})(x) \cdot \sum_{i=1}^{k+1} x^{3i} + (-1)^{k+1}(x^2 - x + 1) \\
&= (-1)^{k+1}x^{3(k+1)}p(\underline{101})(x) + (-1)^{k+1}(x^2 - x - 1) \cdot \sum_{i=1}^{k+1} x^{3i} + (-1)^{k+1}(x^2 - x + 1) \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Así hemos llegado a que

$$\begin{aligned}
&p(\underline{((101)^{k+1}111)})(x) = \\
&= (-1)^{k+1}x^{3(k+1)}p(\underline{101})(x) + (-1)^{k+1}(x^2 - x - 1) \cdot \sum_{i=1}^{k+1} x^{3i} + (-1)^{k+1}(x^2 - x + 1)
\end{aligned}$$

Calculamos el desarrollo polinomial de $p(\underline{((101)^k111)})$

$$\begin{aligned}
&p(\underline{((101)^k111)}) = \\
&= (-1)^k x^{3k} p(\underline{101})(x) - p(\underline{((101)^{k-1}111)})(x) \\
&= (-1)^k x^{3k} p(\underline{101})(x) - ((-1)^{k-1} x^{3(k-1)} p(\underline{101})(x) - p(\underline{((101)^{k-2}111)})(x)) \\
&= (-1)^k x^{3k} p(\underline{101})(x) + (-1)^k x^{3(k-1)} p(\underline{101})(x) + p(\underline{((101)^{k-2}111)})(x) \\
&= (-1)^k p(\underline{101})(x)(x^{3k} + x^{3(k-1)}) + p(\underline{((101)^{k-2}111)})(x) \\
&= (-1)^k p(\underline{101})(x)(x^{3k} + x^{3(k-1)}) + (-1)^{k-2} x^{3(k-2)} p(\underline{101}) + (-1)^3 p(\underline{((101)^{k-3}111)})(x) \\
&= (-1)^k p(\underline{101})(x)(x^{3k} + x^{3(k-1)} + x^{3(k-2)}) + (-1)^3 p(\underline{((101)^{k-3}111)})(x)
\end{aligned}$$

Sucesivamente

$$\begin{aligned}
&= (-1)^k p(\underline{101})(x)(x^{3k} + x^{3(k-1)} + \dots + x^{3 \cdot 2}) + (-1)^{k-1} p(\underline{101111})(x) \\
&= (-1)^k p(\underline{101})(x)(x^{3k} + x^{3(k-1)} + \dots + x^{3 \cdot 2}) + (-1)^{k-1} (-x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) \\
&= (-1)^k p(\underline{101})(x)(x^{3k} + x^{3(k-1)} + \dots + x^{3 \cdot 2}) + (-1)^k x^3(x^2 - x - 1) \\
&\quad + (-1)^{k-1} (-x^2 + x - 1) \\
&= (-1)^k p(\underline{101})(x)(x^{3k} + x^{3(k-1)} + \dots + x^{3 \cdot 2} + x^3) + (-1)^{k-1} (-1)(x^2 - x + 1) \\
&= (-1)^k p(\underline{101})(x) \sum_{i=1}^k x^{3i} + (-1)^k (x^2 - x + 1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$-p(\underline{(101)^k 111})(x) = (-1)^k p(\underline{101})(x) \sum_{i=1}^k x^{3i} + (-1)^k (x^2 - x + 1) \quad (3.2)$$

Reemplazando (3.2) en (3.1) tenemos:

$$p(\underline{(101)^{k+1} 111})(x) = (-1)^{k+1} x^{3(k+1)} p(\underline{101})(x) - p(\underline{(101)^k 111})(x)$$

como queríamos probar. Ahora

$$\begin{aligned}
p(\underline{(101)^{n+1} 111})(\bar{x}) &= -p(\underline{(101)^n 111})(\bar{x}) \text{ y} \\
p(\underline{(101)^{n+1} 111})(x_n) &= (-1)^{n+1} x_n^{3(n+1)} \cdot p(\underline{101})(x_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-1)^n p(\underline{(101)^{n+1} 111})(\bar{x}) &= (-1)^{n+1} p(\underline{(101)^n 111})(\bar{x}) = (-1)^{n-1} p(\underline{(101)^n 111})(\bar{x}) < 0 \\
(-1)^n p(\underline{(101)^{n+1} 111})(x_n) &= (-1)^{2n+1} x_n^{3(n+1)} p(\underline{101})(x_n) = -x_n^{3(n+1)} p(\underline{101})(x_n)
\end{aligned}$$

y como $p(\underline{101})(x_n) < 0$ entonces $(-1)^n p(\underline{(101)^{n+1} 111})(x_n) > 0$

Por lo tanto $p(\underline{(101)^{n+1} 111})(\bar{x})$ y $p(\underline{(101)^{n+1} 111})(x_n)$ tienen distinto signo.

Así existe x_{n+1} ; $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \bar{x}$ tal que $p(\underline{(101)^{n+1} 111})(x_{n+1}) = 0$

Vamos ahora a probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} \quad (3.3)$$

Supongamos que (3.3) es cierto, como $h_{top}(\underline{(101)^n 111}) = \log x_n$ tenemos $h_{top}(\underline{(101)^n 111}) \rightarrow h_{top}(\underline{101}) = \log \bar{x}$. Esto es h_{top} es continua en $\theta = \underline{101}$. En efecto: ya sabemos que h_{top} es creciente; $h_{top}(\theta) = h_{top}(\underline{101})$ para cada $\theta \in [\underline{101}, \underline{100}]$. Si $\xi_n < \underline{101}$ es cualquier sucesión tal que $\xi_n \rightarrow \theta = \underline{101}$ entonces para cada n existe

$m(n) \in \mathbb{N}$ tal que $\underline{(101)^{m(n)}111} \leq \xi_n < \underline{(101)^{m(n)+1}111}$ y $m(n) \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$ por lo tanto

$$h_{top}(\underline{(101)^{m(n)}111}) \leq h_{top}(\xi_n) < h_{top}(\underline{(101)^{m(n)+1}111})$$

Así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{top}(\xi_n) = h_{top}(\underline{101})$$

Por lo tanto h_{top} es continua en $\theta = \underline{101}$

Vamos ahora a probar 3.3 ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$)

$$\begin{aligned} p(\underline{(101)^{k+1}111})(x) &= (-1)^{k+1}x^{3(k+1)}p(\underline{101})(x) - p(\underline{(101)^k111})(x) \\ &= (-1)^{k+1}x^{3(k+1)}p(\underline{101})(x) - [(-1)^kx^{3k}p(\underline{101})(x) - p(\underline{(101)^{k-1}111})(x)] \\ &= (-1)^{k+1}x^{3(k+1)}p(\underline{101})(x) + (-1)^{k+1}x^{3k}p(\underline{101})(x) + (-1)^2p(\underline{(101)^{k-1}111})(x) \\ &= (-1)^{k+1}p(\underline{101})(x)(x^{3(k+1)} + x^{3k}) + (-1)^2p(\underline{(101)^{k-1}111})(x) \\ &= (-1)^{k+1}p(\underline{101})(x)(x^{3(k+1)} + x^{3k}) + \\ &\quad + (-1)^2[(-1)^{k-1}x^{3(k-1)}p(\underline{101})(x) - p(\underline{(101)^{k-2}111})(x)] \\ &= (-1)^{k+1}p(\underline{101})(x)(x^{3(k+1)} + x^{3k} + x^{3(k-1)}) + (-1)^3p(\underline{(101)^{k-2}111})(x) \\ &= (-1)^{k+1}p(\underline{101})(x)(x^{3(k+1)} + x^{3k} + \dots + x^{3 \cdot 2}) + (-1)^k p(\underline{101111})(x) \\ &= (-1)^{k+1}p(\underline{101})(x)(x^{3(k+1)} + \dots + x^{3 \cdot 2}) + (-1)^k[-x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x - 1] \\ &= (-1)^{k+1}p(\underline{101})(x)(x^{3(k+1)} + \dots + x^{3 \cdot 2}) + (-1)^k x^3(-x^2 + x + 1) + \\ &\quad + (-1)^k(-x^2 + x - 1) \\ &= (-1)^{k+1}p(\underline{101})(x)(x^{3(k+1)} + \dots + x^{3 \cdot 2}) + (-1)^{k+1}x^3(x^2 - x - 1) + \\ &\quad + (-1)^k(-x^2 + x - 1) \\ &= (-1)^{k+1}p(\underline{101})(x) \left[\sum_{i=1}^{k+1} x^{3i} \right] + (-1)^k(-x^2 + x - 1) \\ &= (-1)^{k+1}p(\underline{101})(x) \cdot x^3 \left[\sum_{i=0}^k x^{3i} \right] + (-1)^k(-x^2 + x - 1) \end{aligned}$$

Como $p(\underline{(101)^{k+1}111})(x_{k+1}) = 0$ se tiene

$$(-1)^{k+1}p(\underline{101})(x_{k+1}) \cdot x_{k+1}^3 \left[\sum_{i=0}^k x_{k+1}^{3i} \right] = (-1)^{k+1}(-x_{k+1}^2 + x_{k+1} - 1)$$

O sea

$$p(\underline{101})(x_{k+1}) \cdot x_{k+1}^3 \cdot \frac{x_{k+1}^{3(k+1)} - 1}{x_{k+1}^3 - 1} = -x_{k+1}^2 + x_{k+1} - 1$$

$$p(\underline{101})(x_{k+1}) \cdot x_{k+1}^3 (x_{k+1}^{3(k+1)} - 1) = (x_{k+1}^3 - 1) \cdot (-x_{k+1}^2 + x_{k+1} - 1)$$

Dividiendo por x_{k+1}^3

$$p(\underline{101})(x_{k+1}) \cdot (x_{k+1}^{3(k+1)} - 1) = \left(1 - \frac{1}{x_{k+1}^3}\right) \cdot (-x_{k+1}^2 + x_{k+1} - 1)$$

Dividiendo por $x_{k+1}^{3(k+1)}$ tenemos

$$p(\underline{101})(x_{k+1}) \cdot \left(1 - \frac{1}{x_{k+1}^{3(k+1)}}\right) = \frac{1}{x_{k+1}^{3(k+1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x_{k+1}^3}\right) \cdot (-x_{k+1}^2 + x_{k+1} - 1)$$

Ya que $1 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k+1} < \bar{x}$ se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1}^{3(k+1)} = \infty$$

Por lo tanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p(\underline{101})(x_{k+1}) = 0$$

La sola forma que esto ocurra es $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \bar{x}$.

Podemos reinterpretar estos cálculos “dinámicos” desde el punto de vista del álgebra lineal de la siguiente forma:

Consideremos la sucesión de matrices cuadradas

$$M_5 = M_{3 \cdot 1 + 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

$$M_8 = M_{3 \cdot 2 + 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{8 \times 8}$$

$$M_{11} = M_{3,3+2} = \left[\begin{array}{cccccccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{11 \times 11}$$

Y en general para $k \geq 3$

$$M_{3 \cdot (k+1)+2} = \begin{bmatrix} M_{3k+2} & A_{3k+2} \\ C_{3k+2} & B_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

donde

$$B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{3k+2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(3k+2) \times 3}$$

$$C_{3k+2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{3 \times (3k+2)}$$

Si $p_k(x) = \det(M_{3k+2} - xI)$ entonces se cumple que

$$p_{k+1}(x) = (-1)^{k+1} x^{3(k+1)} (x^2 - x - 1) - p_k(x)$$

y la sucesión de radios espectrales r_k de M_{3k+2} satisfacen $1 < r_1 < r_2 < r_3 < \dots < r_k < \bar{r}$ donde \bar{r} es la raíz $1 < \bar{r} < 2$ de $x^2 - x - 1 = 0$. Además $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \bar{r}$

Estos calculos sirven para probar el siguiente resultado

Proposición 8. *La aplicación $h_{top}(\theta) = h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\sigma(\theta), \theta]})$ es continua en $\theta = \underline{101}$*

Demostración. Ya vimos que $h_{top}(\underline{100}) = h_{top}(\underline{101})$ así que para cada θ , $\underline{101} \leq \theta \leq \underline{100}$ se cumple

$$h_{top}(\underline{101}) \leq h_{top}(\theta) \leq h_{top}(\underline{100})$$

Como $h_{top}(\underline{101}) = h_{top}(\underline{100})$ tenemos que $h_{top}(\theta) = h_{top}(\underline{101})$. Así que para toda sucesión $(\xi_n) \subset \Sigma_1$ tal que $\xi_{n+1} < \xi_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \underline{101}$ se cumple que $h_{top}(\xi_n) = h_{top}(\underline{101})$ toda vez que $\underline{101} < \xi_n \leq \underline{100}$.

Si $(\xi_n) \subset \Sigma_1$ es una sucesión tal que $\xi_n < \xi_{n+1}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \underline{101}$ entonces, para n grande consideramos $k(n)$ tal que $\underline{(101)^{k(n)}111} \leq \xi_n \leq \underline{(101)^{k(n)+1}111}$.

De aquí

$$h_{top}(\underline{(101)^{k(n)}111}) \leq h_{top}(\xi_n) \leq h_{top}(\underline{(101)^{k(n)+1}111})$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{(101)^{k(n)}111} = \lim_{m \rightarrow \infty} \underline{(101)^m 111} = \underline{101}$$

Concluimos entonces que $h_{top}(\theta)$ es continua en $\theta = \underline{101}$

□

3.4. Continuidad de $h_{top}(\theta)$ en $\theta_k = H_{11,10}^k(\underline{101})$, $k = 1, 2, \dots$

Para $a = 11, b = 10$ denotamos $\Sigma_{a,b} = \{\theta : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{a, b\}\}$ el conjunto de sucesiones $\theta : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{a, b\}$. En $\Sigma_{a,b}$ consideramos la métrica $d : \Sigma_{a,b} \times \Sigma_{a,b} \rightarrow [0, \infty[$ definida por

$$d(\theta, \xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \delta(\theta_i, \xi_i); \quad \delta(\theta_i, \xi_i) = \begin{cases} 0 & \theta_i = \xi_i \\ 1 & \theta_i \neq \xi_i \end{cases}$$

Sea $\sigma_{a,b} : \Sigma_{a,b} \rightarrow \Sigma_{a,b}$ la aplicación de shift. Sea $H_{a,b} : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_{a,b}$ la aplicación de renormalización: $H_{a,b}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots) = (\tilde{\theta}_0, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots)$ donde $\tilde{\theta}_i = a$ si $\theta_i = 0$ y $\tilde{\theta}_i = b$ si $\theta_i = 1$.

Es facil verificar que $H_{11,10}$ es un homeomorfismo de Σ_2 en $\Sigma_{a,b}$. De hecho, si d_2 es la métrica en Σ_2 y $d_{a,b}$ es la métrica en $\Sigma_{a,b}$ se tiene $d_2(\theta, \xi) = d_{a,b}(H_{a,b}(\theta), H_{a,b}(\xi))$. Esto es $H_{11,10}$ es una isometría de (Σ_2, d_2) en $(\Sigma_{a,b}, d_{a,b})$.

Lema 13. $H_{a,b} \circ \sigma = \sigma_{a,b} \circ H_{a,b}$

Demostración. $H_{a,b} \circ \sigma(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots) = H_{a,b}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots) = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\theta}_3, \dots)$

$\sigma_{a,b} \circ H_{a,b}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots) = \sigma_{a,b}(\tilde{\theta}_0, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots) = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\theta}_3, \dots)$.

Luego $H_{a,b} \circ \sigma(\theta) = \sigma_{a,b} \circ H_{a,b}(\theta)$, para todo $\theta \in \Sigma_2$ □

Sea ahora $\theta \in \Sigma_1$ una sucesión maximal tal que $10\underline{1} \leq \theta \leq \underline{10}$ y sea $h_{top}(\theta) = h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\sigma(\theta), \theta]})$ la entropía topológica de $\sigma|_{\Sigma[\sigma(\theta), \theta]}$.

Sea $\Gamma_\theta = H_{11,10}(\Sigma[\sigma(\theta), \theta])$. Es claro que $h_{top}(\sigma_{a,b}|_{\Gamma_\theta}) = h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\sigma(\theta), \theta]}) = h_{top}(\theta)$.

Consideremos $\Lambda_\theta = \Gamma_\theta \cup \sigma(\Gamma_\theta) \subset \Sigma_2$. Es claro que $\Gamma_\theta \cap \sigma(\Gamma_\theta) = \emptyset$ y que Λ_θ es σ -invariante, además $\sigma(\sigma(\Gamma_\theta)) \subset \Gamma_\theta$.

Asimismo; si $\tilde{\theta} = H_{11,10}(\theta)$ entonces $\Sigma[\sigma(\tilde{\theta}), \tilde{\theta}] = \Lambda_\theta$ y entonces

$$h_{top}(\tilde{\theta}) = h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\sigma(\tilde{\theta}), \tilde{\theta}]}) = h_{top}(\sigma|_{\Lambda_\theta}) \quad (3.4)$$

Notamos, también, que $\sigma_{11,10}|_{\Gamma_\theta}$ actúa como $\sigma^2|_{\Gamma_\theta}$. Esto dice que $h_{top}(\sigma_{11,10}|_{\Gamma_\theta}) = h_{top}(\sigma^2|_{\Gamma_\theta})$, como $H_{11,10}(\Sigma[\sigma(\theta), \theta]) = \Gamma_\theta$ entonces $h_{top}(\sigma_{11,10}|_{\Gamma_\theta}) = h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\sigma(\theta), \theta]}) = h_{top}(\theta)$. Por lo tanto

$$h_{top}(\sigma^2|_{\Gamma_\theta}) = h_{top}(\theta) \quad (3.5)$$

Observamos que Γ_θ y $\sigma(\Gamma_\theta)$ son σ^2 -invariantes y luego se cumple que $h_{top}(\sigma^2|_{\Lambda_\theta}) = \max\{h_{top}(\sigma^2|_{\Gamma_\theta}), h_{top}(\sigma^2|_{\sigma(\Gamma_\theta)})\}$. Como también $\sigma|_{\Gamma_\theta} : \Gamma_\theta \rightarrow \sigma(\Gamma_\theta)$ es un homeomorfismo entre Γ_θ y $\sigma(\Gamma_\theta)$ que conjuga a $\sigma^2|_{\Gamma_\theta}$ con $\sigma^2|_{\sigma(\Gamma_\theta)}$ vemos que $h_{top}(\sigma^2|_{\Gamma_\theta}) = h_{top}(\sigma^2|_{\sigma(\Gamma_\theta)})$ y en consecuencia

$$h_{top}(\sigma^2|_{\Lambda_\theta}) = h_{top}(\sigma^2|_{\Gamma_\theta}) \quad (3.6)$$

De (3.5) y (3.6) concluimos que

$$h_{top}(\sigma^2|_{\Lambda_\theta}) = h_{top}(\theta) \quad (3.7)$$

Por otro lado Λ_θ es σ -invariante entonces

$$h_{top}(\sigma^2|_{\Lambda_\theta}) = 2h_{top}(\sigma|_{\Lambda_\theta}) \quad (3.8)$$

de (3.7) y (3.8) tenemos

$$2h_{top}(\sigma|_{\Lambda_\theta}) = h_{top}(\theta) \quad (3.9)$$

Usando (3.9) y (3.4) $2h_{top}(\tilde{\theta}) = h_{top}(\theta)$. Por lo tanto concluimos que $h_{top}(\tilde{\theta}) = \frac{1}{2}h_{top}(\theta)$.

Esto es, hemos probado la siguiente proposición

Proposición 9. Sea $10\underline{1} \leq \theta \leq \underline{10}$ una sucesión maximal y $h_{top}(\theta) = h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\sigma(\theta), \theta]})$. Sea $\tilde{\theta} = H_{11,10}(\theta) \in [1011\underline{10}, \underline{101}]$ su imagen por el operador de renormalización. Se cumple que

$$h_{top}(\tilde{\theta}) = \frac{1}{2}h_{top}(\theta)$$

donde $h_{top}(\tilde{\theta}) = h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\sigma(\tilde{\theta}), \tilde{\theta}]})$.

Usando el resultado anterior y el resultado de la continuidad de $h_{top}(\theta)$ para $\theta = \underline{101}$ es posible concluir la continuidad de $h_{top}(\theta_k)$ para $\theta_k = H_{11,10}^k(\underline{101})$. Aquí $\theta_1 = H_{11,10}(\underline{101}) = \underline{101110}$; $\theta_2 = H_{11,10}^2(\underline{101}) = H_{11,10}(\underline{101110}) = \underline{101110101011}$; $\theta_3 = H_{11,10}^3(\underline{101}) = \underline{101110101011101110111010}$; $\theta_4 = H_{11,10}^4(\underline{101}) = \underline{101110101011101110111010101110101011101010111011}$; ...

Apéndice A

Matrices Positivas

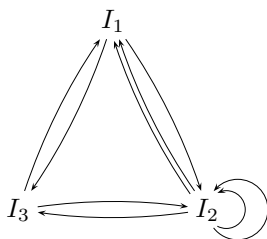
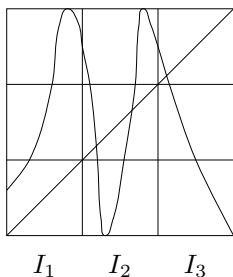
Desarrollaremos la parte del libro de Laura Martignon (escrito por ocasión del 16° Coloquio Brasileiro de Matemática) que desarrolla la parte de la Teoría de Perron Frobenius necesaria para comprender el trabajo de Block-Guckenheimer-Misiurewicz-Young, *Periodic points and topological entropy of one dimensional maps* publicado en *Lecture Notes in Mathematics* N° 819 y que explica el algoritmo con el cual calculamos la entropía de subshifts de tipo finito.

Lo que deseamos establecer es lo siguiente: Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua. Diremos que el intervalo I f -cubre el intervalo $J \subset \mathbb{R}$ si existe intervalo $K \subset I$ tal que $f(K) = J$.

Diremos que I f -cubre J n -veces si existen subintervalos K_1, K_2, \dots, K_n en I con $\text{int}(K_i) \cap \text{int}(K_j) = \emptyset$, si $i \neq j$ tales que $f(K_i) = J$, $i = 1, \dots, n$.

Definición 21. Un A -grafo de f es un grafo orientado con vértices I_1, I_2, \dots, I_s tal que si I_i f -cubre I_j n pero no $(n + 1)$ -veces, entonces hay n pero no $(n + 1)$ flechas de I_i a I_j .

Ejemplo. Consideremos $f: I \rightarrow I$ como en la figura. En este caso el A -grafo es:



En este ejemplo, denotamos por $A = \{I_1, I_2, I_3\}$ la partición de I y $G = G(A)$ el respectivo gráfico.

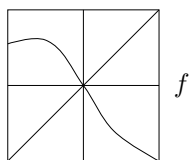
En general, podemos asociar el A -grafo G una matriz $M = (m_{ij})$ de orden $s \times s$ donde m_{ij} = número de flechas desde I_i a I_j . Es claro que M es una matriz no negativa (i.e. $m_{ij} \geq 0$ y $m_{ij} \in \mathbb{N}_0$). El logaritmo del radio espectral de M (o sea, el logaritmo del mayor autovalor de M) se llama *la entropía de G* y se denota $h(G)$.

Para $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ se denota por $h(f)$ a la entropía asociada a la restricción de f al conjunto $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(I) = \Lambda_f$.

Lema 14. Si G es un A -grafo de f , entonces $h(G) \leq h(f)$

Pregunta ¿Por qué no ocurre que el mayor autovalor de M es cero? Hay casos en que es así.

Ejemplo. $I_1 \leftarrow I_2$ A -grafo de f .



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$$

$$\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

Por lo tanto el único autovalor es $\lambda = 0$ y $h(G) = -\infty$. Obviamente $-\infty \leq h(f)$.

Buscamos entonces, encontrar condiciones sobre la matriz M de tal manera de garantizar que el mayor autovalor de M sea $\lambda > 1$ para, en ese caso, tener $0 < \log \lambda \leq h(f)$.

Por eso hemos llegado al libro de Laura Martignon que estudia lo que se conoce como la «Teoría de Perron-Frobenius». En estas notas veremos la parte del libro que nos interesa y que se refiere (someramente) al siguiente tipo de resultados «El

radio espectral de una matriz positiva es autovalor de ella con un autovector positivo asociado» y «Si la matriz es irreducible su radio espectral es una raíz simple del polinomio característico asociado con un autovalor estrictamente positivo».

El libro de álgebra lineal de Kenneth Hoffman y Ray Kunze contiene las demostraciones de la mayor parte de las afirmaciones, de álgebra lineal, que aquí enunciamos y no probamos (y que aparecen en el libro de Laura).

1. Elementos previos

En \mathbb{R}^n se define el siguiente orden parcial

$$x \geq y \Leftrightarrow (x_i - y_i) \geq 0$$

para cada $i = 1, \dots, n$. Aquí $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Afirmación 13. *Es un orden parcial en \mathbb{R}^n .*

En efecto,

a) *Refleja:* $x \geq x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, pues $x_i - x_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$.

b) *Antisimétrico:* si $x \geq y \wedge y \geq x$, entonces $x = y$.

$$1) x \geq y \Leftrightarrow x_i - y_i \geq 0, i = 1, \dots, n \quad 2) y \geq x \Leftrightarrow y_i - x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$$

De 1) y 2) se tiene que $x_i - y_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ y luego $x = y$.

c) *Transitivo:* si $x \geq y$, $y \geq z$, entonces $x \geq z$.

$$x \geq y \Leftrightarrow (x_i - y_i) \geq 0, i = 1, \dots, n$$

$$y \geq z \Leftrightarrow (y_i - z_i) \geq 0, i = 1, \dots, n$$

Sumando ambas expresiones

$$(x_i - y_i) + (y_i - z_i) \geq 0, i = 1, \dots, n$$

$$\therefore (x_i - z_i) \geq 0, i = 1, \dots, n \Leftrightarrow x \geq z.$$

El conjunto de vectores *positivos* en este orden es $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n; x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$.

a) Si $x, y \in \mathbb{R}_+^n$, entonces $(x + y) \in \mathbb{R}_+^n$ (invariante bajo suma)

b) Si $\lambda \in \mathbb{R}_+$ y $x \in \mathbb{R}_+^n$, entonces $\lambda x \in \mathbb{R}_+^n$.

Por lo tanto \mathbb{R}_+^n es un cono.

Ejemplo. Para $n = 2$

A_1	\mathbb{R}_+^2
A_2	A_3

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$(x, y) \in A_1 \Leftrightarrow x \leq 0, y \geq 0$$

$$(x, y) \in A_2 \Leftrightarrow x \leq 0, y \leq 0$$

$$(x, y) \in A_3 \Leftrightarrow x \geq 0, y \leq 0$$

Notamos que este orden no es total. Por ejemplo, no es posible comparar $(-2, 1)$ con $(1, \frac{1}{2})$, $1 - (-2) = 3 \geq 0$ y $\frac{1}{2} - 1 \leq 0$, por lo tanto no es cierto que $(1, \frac{1}{2}) \geq (-2, 1)$. Como : $-2 - 1 \leq 0$ y $1 - \frac{1}{2} \geq 0$, entonces no es cierto que $(-2, 1) \geq (1, \frac{1}{2})$.

Observación 7. El límite de una sucesión de vectores positivos en \mathbb{R}_+^n es un vector de \mathbb{R}_+^n , por lo tanto \mathbb{R}_+^n es cerrado. Escribimos $x > 0$ si x es positivo no nulo y $x \gg 0$ si cada componente de x es mayor que cero.

Para dos números reales x, y se define $x \wedge y = \min\{x, y\}$. Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ se define el *ínfimo* de x e y por

$$x \wedge y = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \dots, x_n \wedge y_n).$$

Para x, y números reales se define $x \vee y = \max\{x, y\}$. Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ se define el *supremo* de x e y por $x \vee y = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \dots, x_n \vee y_n)$. Para $x \in \mathbb{R}^n$, $x^+ = x \vee 0$ y $x^- = (-x) \vee 0$.

Si para $x \in \mathbb{R}^n$ denotamos $|x| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$, entonces: a) $x = x^+ - x^-$
 y b) $|x| = x^+ + x^-$.

Consideramos $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n = \{(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \dots, x_n + iy_n)\}$ (la complejización de \mathbb{R}^n); y allí podemos, de igual manera, definir $y \geq x \Leftrightarrow (y - x)$ tiene componentes no negativos. Se escribe $x > 0$ si x es positivo y no nulo y $x \gg 0$ si todas sus componentes son estrictamente positivos.

Observación 8. Para $x = a + ib \in \mathbb{C}$, $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Definición 22. Un ideal de \mathbb{C}^n es un subespacio J que satisface lo siguiente: si $x \in J$, $y \in \mathbb{C}^n$, cumplen $|y| \leq |x|$, entonces $y \in J$.

Observación 9. Como J debe ser subespacio, entonces si ocurre que hay $x \in J$ tal que $|x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)$ satisface $x_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, entonces $y_i = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \in J$ pues $|y| \leq |x|$, así que debe ser $J = \mathbb{C}^n$ pues $y_1, y_2, \dots, y_n \in J$. Por lo tanto, si $J \neq \mathbb{C}^n$, existe subconjunto no vacío $H \subset \{1, \dots, n\}$ tal que

$$J = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n; x_i = 0 \text{ para } i \in H\}.$$

Ejemplos:

- a.- En \mathbb{R}^2 hay sólo cuatro ideales. A saber: $J_x = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$; $J_y = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$; $J_0 = \{(0, 0)\}$ y \mathbb{R}^2 .
- b.- En \mathbb{R}^3 hay ocho ideales. A saber: $J_x = \{(x, 0, 0); x \in \mathbb{R}\}$; $J_{x,y} = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$; $J_{x,z} = \{(x, 0, z); x, z \in \mathbb{R}\}$; $J_y = \{(0, y, 0); y \in \mathbb{R}\}$; $J_{y,z} = \{(0, y, z); y, z \in \mathbb{R}\}$; $J_z = \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}$; $J_0 = \{(0, 0, 0)\}$ y \mathbb{R}^3 .

2. Norma de matrices

En \mathbb{C}^n , tenemos las normas

a) $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ si $1 \leq p < \infty$.

b) $\|x\|_\infty = \max \{|x_i|; 1 \leq i \leq n\}$ la norma del máximo.

Lema 15. $|x| \leq |y|$ implica $\|x\|_p \leq \|y\|_p$

Demostración.

$$|x| \leq |y| \Rightarrow |x_i| \leq |y_i| \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Cada norma en \mathbb{C}^n induce una norma en $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) = \{A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n; A \text{ es lineal}\}$ por $\|A\| = \sup \{\|Ax\|; \|x\| \leq 1\}$. \square

Observaciones

- 1) Como $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ es completo, entonces $(\mathcal{L}(\mathbb{C}^n), \|\cdot\|)$ también lo es.
- 2) Se cumple que $\|A \circ B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.
- 3) $\|I\| = 1$ donde $I: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es la identidad $I(x) = x$.

3. Teoría espectral

Sea $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ una transformación lineal. Considerando una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ en \mathbb{C}^n y una base $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ de \mathbb{C}^m .

El vector $A(v_i)$ resulta ser una combinación lineal de los vectores $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, o sea,

$$A(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i, \quad j = 1, \dots, n$$

por lo tanto, en las bases $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, la transformación lineal A tiene asociada la matriz $m \times n$: $(a_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n}$. Manteniendo las bases de \mathbb{C}^n y \mathbb{C}^m fijos podemos asociar a $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ la matriz $(a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ y la aplicación $A \rightarrow (a_{ij})$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Observación 10. En lo que sigue, toda vez que consideremos una matriz (a_{ij}) , vamos a pensar que representa una transformación lineal $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ que hemos representado en las bases canónicas $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. La matriz (a_{ij}) será denotada A al igual que la transformación lineal $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$.

Definición 23. $\lambda \in \mathbb{C}$ se dice *autovalor* de $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ si existe $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ tal que $A(x) = \lambda x$. En este caso x se llama el *autovector* asociado al autovalor λ .

Observación 11. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de A , entonces $\exists x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ tal que

$$(A - \lambda I)(x) = 0 \quad \therefore A - \lambda I: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ no es inyectiva.}$$

Definición 24. El determinante $\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ es llamada el *polinomio característico* de A . Se cumple que si

$$\Delta(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_n \lambda^n,$$

entonces

$$\Delta(A) = \alpha_0 + \alpha_1 A + \dots + \alpha_n A^n = 0$$

es la aplicación nula (resultado conocido como Teorema de Cayley-Hamilton).

$$\text{Si } \alpha_n \neq 0, \Delta(\lambda) = \alpha_n \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_n} + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} \lambda + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \lambda^{n-1} + \lambda^n \right).$$

Si $\Delta(\lambda_0) = 0$ y $g(\lambda) = \frac{\alpha_0}{\alpha_n} + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} \lambda + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \lambda^{n-1} + \lambda^n$, entonces $g(\lambda_0) = 0$ y $g(\lambda)$ es un polinomio mónico. Por lo tanto $\Delta(A) = 0$ implica $g(A) = 0$.

Definición 25. El polinomio mónico de menor grado que anula a A , se llama *polinomio minimal* de A y se denota $m(\lambda)$.

Observaciones

- 1) Como $\Delta(A) = 0$, $m(A) = 0$ y $m(\lambda)$ es de menor grado, entonces $m(\lambda)$ divide a $\Delta(\lambda)$.
- 2) El conjunto de autovalores de A coincide con las raíces del polinomio característico de A y se conoce como el *espectro de A* . Se denota

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \text{ es autovalor de } A\}.$$

- 3) tanto la matriz $A = (a_{ij})$ cuanto su transpuesta $A^t = (a_{ji})$ tienen los mismos autovalores.

Definición 26. El *radio espectral* de A es $r(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}$. El conjunto $(\mathbb{C} \setminus \sigma(A)) = \rho(A)$ se conoce como el *resolvente de A* . Si $\lambda \in \rho(A)$, entonces la transformación $A - \lambda I$ (o $\lambda I - A$) es invertible y denotamos $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ que se llama la *resolvente de A en λ* .

Dado $\lambda \in \sigma(A)$ el subespacio $\{x \in \mathbb{C}^n; Ax = \lambda x\}$ se llama el *autoespacio de A* asociado al autovalor λ .

La dimensión del autoespacio de A asociado al autovalor λ , es llamada la *multiplicidad genérica* de λ . Si esta dimensión es 1, diremos que λ es *autovalor simple*.

Observaciones

- 1.-) λ autovalor de A , tiene una multiplicidad como raíz del polinomio característico de A que se conoce como la *multiplicidad algebraica* de λ .
- 2.-) λ autovalor de A , tiene una multiplicidad como raíz del polinomio minimal de A que se conoce como *multiplicidad analítica* de λ .

En el siguiente lema suponemos 1,2 y 3 conocidos y probaremos 4.

Lema 16. 1. Si U es una matriz invertible y $B = U^{-1}AU$, entonces $\sigma(A) = \sigma(B)$.

2. $\sigma(A^k) = \{\lambda^k; \lambda \in \sigma(A)\}$.

3. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, satisfice $|\lambda| > r(A)$, entonces

$$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

La serie del lado derecho, converge para $R(\lambda)$ en cualquier norma $\|\cdot\|$.

4. $r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración. En efecto, si $|\lambda| > r(A)$, entonces

$$\sum_{n=0}^k \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \rightarrow R(\lambda),$$

por lo tanto, la sucesión $\left(\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}\right)$ es limitada en norma:

$$\left\| \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \right\| \leq c \Rightarrow \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq c^{\frac{1}{n}} |\lambda|^{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\therefore \limsup \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda|.$$

Esto vale para todo $|\lambda| > r(A)$, por lo tanto $\limsup \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(A)$. Como $(r(A))^n = r(A^n) \leq \|A^n\| \Rightarrow r(A) \leq \lim \|A_n\|^{\frac{1}{n}}$ por lo tanto,

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \quad \square$$

4. Comportamiento asintótico de potencias de matrices

Lema 17. Sea A una matriz y $r = r(A)$ su radio espectral. Si $r = 1$ es un polo simple de la resolvente y el único autovalor de A de módulo 1, entonces $A = P + B$, donde $P = \lim_{\lambda \rightarrow 1} (\lambda - 1)R(\lambda)$ es la proyección sobre el espacio fijo de A (i. e. de los vectores x tales que $A(x) = x$). Además $PB = BP = 0$ y $r(B) < 1$.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned}
 P &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} (\lambda - 1)R(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} (\lambda R(\lambda) - R(\lambda)) = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left(I + \frac{A}{\lambda} + \frac{A^2}{\lambda^2} + \dots \right) - \left(\frac{I}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2} + \dots \right) = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} I + \frac{\lambda - 1}{\lambda^2} A + \frac{\lambda - 1}{\lambda^3} A^2 + \dots \right). \\
 \therefore P \cdot A &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} A + \frac{\lambda - 1}{\lambda^2} A^2 + \frac{\lambda - 1}{\lambda^3} A^3 + \dots \right) \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left((\lambda - 1)\lambda \frac{A}{\lambda^2} + (\lambda - 1)\lambda \frac{A^2}{\lambda^3} + \lambda(\lambda - 1) \frac{A^3}{\lambda^4} + \dots \right) \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} (\lambda - 1)\lambda \left(\frac{A}{\lambda^2} + \frac{A^2}{\lambda^3} + \dots \right) \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} (\lambda - 1)\lambda \left(R(\lambda) - \frac{I}{\lambda} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} (\lambda - 1)R(\lambda) = P
 \end{aligned}$$

Análogamente $AP = P$. De aquí

$$\begin{aligned}
 P \cdot P &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} (\lambda - 1)R(\lambda)P = \lim_{\lambda \rightarrow 1} (\lambda - 1) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot P}{\lambda^{k+1}} \right) = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} (\lambda - 1) \left(\frac{P}{\lambda} + \frac{P}{\lambda^2} + \frac{P}{\lambda^3} + \dots \right) = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left(P + \frac{P}{\lambda} + \frac{P}{\lambda^2} + \frac{P}{\lambda^3} + \dots - \left(\frac{P}{\lambda} + \frac{P}{\lambda^2} + \frac{P}{\lambda^3} + \dots \right) \right) = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} P = P
 \end{aligned}$$

i. e. $P^2 = P$.

Tenemos además $Ax = x \Leftrightarrow Px = x$. En efecto:

- Si $P(x) = x$, $AP(x) = P(x) \Rightarrow Ax = x$.
- Si $Ax = x$, entonces x es punto fijo de A y como P es la proyección en el espacio fijo de A , entonces $Px = x$.

Sea $B = A - P$; $BP = AP - P^2 = P - P = 0$; $PB = PA - P^2 = P - P = 0$

$\therefore BP = PB = 0$.

Por demostrar que $r(B) < 1$. Suponga $B(x) = \alpha x$ con $|\alpha| \geq 1$.

$$\alpha P(x) = P(\alpha x) = P(B(x)) = PB(x) = 0 \quad \therefore P(x) = 0$$

$$\therefore B(x) = \alpha x \Rightarrow Ax - P(x) = \alpha x \Rightarrow Ax = \alpha x.$$

Como para $|\alpha| > 1$ no hay $x \neq 0$ tal que $Ax = \alpha x$, pues $r(A) = 1 \Rightarrow x = 0$, o sea que, $r(B) \leq 1$. Si $B(x) = \alpha x$ con $|\alpha| = 1$. Como $P(x) = 0$, $Ax = \alpha x$, por lo tanto si α es complejo ($\rightarrow \leftarrow$), pues $r(A) = 1$ es autovalor único de módulo 1.

Si $B(x) = x$: como $Px = 0$ y $Ax = x$, entonces $x \in$ al espacio fijo de A y $Px = 0 \Rightarrow x = 0$, $\therefore r(B) < 1$. \square

Lema 18. *Sea A una matriz cualquiera. Tenemos*

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \Leftrightarrow r(A) < 1$
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ existe y es no nulo si, y sólo si, $\lambda = 1$ es polo simple del resolvente y el único autovalor de módulo 1.
3. Si $r(A) > 1$ entonces no existe $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$.

Demostración. Demostremos primero la parte 2.

Si $\lambda = 1$ es polo simple del resolvente y el único autovalor de módulo 1. Pd. $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ existe. El lema anterior asegura que $A = P + B$, $P = \lim_{\lambda \rightarrow 1} (\lambda - 1)R(\lambda)$ es la proyección sobre el espacio fijo de A , $PB = BP = 0$ y $r(B) < 1$

$$A \cdot A = (P + B)(P + B) = P \cdot P + P \cdot B + B \cdot P + B \cdot B = P + B^2$$

$$A^3 = (P + B^2)(P + B) = P^2 + P \cdot B + B^2 \cdot P + B^3 = P + B^3$$

y en general $A^k = P + B^k$.

Como $\|B^k\| \leq \|B\|^k \leq (r(B))^k$, entonces $B^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = P.$$

Suponemos ahora que la sucesión A^k es convergente y su límite es no nulo. Suponemos $\alpha \in \mathbb{C}$ es un autovalor de A con $|\alpha| = 1$. Sea $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ tal que $Ax = \alpha x$, entonces $A^k x = \alpha^k x$ y resulta ser que $(\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente.

La única manera de que esto sucede es que $\alpha = 1$. Como $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, entonces es acotada.

Si $|\lambda| > 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
 (\lambda - 1)R(\lambda) &= (\lambda - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}} \\
 \Rightarrow \|(\lambda - 1)R(\lambda)\| &\leq |\lambda - 1| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{\lambda^{k+1}} \right\| \leq |\lambda - 1| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{|\lambda|^{k+1}} = \\
 &= \frac{|\lambda - 1|}{|\lambda|} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|A\|}{|\lambda|} \right)^k = \frac{|\lambda - 1|}{|\lambda|} e^{\frac{\|A\|}{|\lambda|}}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $(\lambda - 1)R(\lambda)$ es limitada $\forall |\lambda| > 1$. Así que $\lambda = 1$ es un polo de orden 1 de la resolvente.

Demostración de la parte 3. Si $r(A) > \lambda > 1$, entonces $\frac{r(A)}{\lambda} > 1$, $\|A\| = \sup \{\|Ax\|, \|x\| \leq 1\}$.

Si $x \in \mathbb{C}^n$ es tal que $Ax = \alpha x$ con $|\alpha| = r(A)$ y $\|x\| \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
 \left\| A \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right\| &= \left\| \frac{\alpha}{\lambda} x \right\| = \frac{|\alpha|}{\lambda} \|x\| \geq \frac{|\alpha|}{\lambda} = \frac{r(A)}{\lambda} > 1 \\
 \left\| A^k \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right\| &\geq \left(\frac{r(A)}{\lambda} \right)^k \rightarrow \infty \\
 \therefore \lim_{k \rightarrow \infty} A^k &\text{ no existe.}
 \end{aligned}$$

Demostración de la parte 1. Si $0 < r(A) < 1$, entonces

$$\lim \|A^k\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (r(A))^k = 0 \Rightarrow \lim A^k = 0.$$

Si $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$, entonces no puede ser $r(A) \geq 1$, $\therefore r(A) < 1$. □

Apéndice B

Matrices positivas y el Teorema de Perron

El matemático alemán Oskar Perron, probó el siguiente resultado:

« *El radio espectral de una matriz positiva, es un autovalor con un autovector positivo asociado.* »

Esta sección se dedica a la demostración de este resultado y al análisis del espectro de una matriz positiva.

1. Positividad

Definición 27. Sea $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ una transformación lineal. Diremos que A es una transformación lineal positiva, y escribimos $A \geq 0$, si para todo $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $x \geq 0$, vale $Ax \geq 0$.

Observaciones

- 1) Si $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{C}^n; x \geq 0\}$, entonces si A es positiva. Vale $A(\mathbb{R}_+^n) \subseteq \mathbb{R}_+^n$. O sea, deja invariante el cono positivo.
- 2) Si (a_{ij}) es la matriz de una TL positiva $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ en la base canónica, entonces $a_{ij} \geq 0$. En efecto,

$$e_j = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \geq 0 \quad \text{y} \quad Ae_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}) \geq 0$$

$$a_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n$$

- 3) Si $a_{ij} \geq 0$ y (a_{ij}) es la matriz de la TL $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ en la base canónica, entonces A es positiva.
- 4) Si (a_{ij}) es la matriz de A denotamos por $|A|$ la matriz $(|a_{ij}|)$. Obvio que la TL que representa la matriz $|A|$, en la base canónica, es positiva.

Definición 28. Una matriz $A = (a_{ij})$ es *positiva* si $a_{ij} \geq 0 \forall i, j$.

Observaciones

- 5) Sea $A = (a_{ij})$ una matriz positiva, entonces para cada $x \in \mathbb{C}^n$, vale $|Ax| \leq A|x|$. Esto se deduce del hecho que $|x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)$ y la desigualdad triangular. En efecto,

$$Ax = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right)$$

entonces

$$\begin{aligned} |Ax| &= \left(\left| \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \right|, \left| \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \right|, \dots, \left| \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right| \right) \leq \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n |a_{1j}x_j|, \sum_{j=1}^n |a_{2j}x_j|, \dots, \sum_{j=1}^n |a_{nj}x_j| \right) \leq \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}|x_j|, \sum_{j=1}^n a_{2j}|x_j|, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}|x_j| \right) = A|x| \end{aligned}$$

- 6) Para matrices A, B y escalar $\lambda \geq 0$, se tiene
- Si $A \geq 0, B \geq 0$, entonces $(A + B) \geq 0$
 - Si $A \geq 0$ y $\lambda > 0$, entonces $\lambda A \geq 0$

- 7) Si $(a_i)_{n \in \mathbb{N}}$ son matrices positivas y $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, entonces $A \geq 0$. Esto se deduce del hecho de que si $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, entonces $a \geq 0$. O sea el conjunto de matrices positivas es cerrado.
- 8) Si $A \geq 0$ y $B \geq 0$, entonces $A \cdot B \geq 0$. Esto es claro y concluimos que el conjunto de matrices positivas es cerrado para la multiplicación.

Proposición 10. *Sea A una matriz positiva y λ un número real tal que $\lambda > r(A)$, entonces*

$$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$$

es una matriz positiva.

Demostración. Sabemos que $R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > r(A)$. Ahora el resultado se deduce del hecho de que las matrices positivas son cerradas para la suma, el producto y para la multiplicación por un número positivo. \square

Definición 29. Una norma $\|\cdot\|$ en \mathbb{C}^n , se dirá monótona, si $|x| \leq |y|$ implica que $\|x\| \leq \|y\|$.

Lema 19. *Consideramos \mathbb{C}^n con norma $\|\cdot\|$, monótona. Sea A una matriz positiva. Sea $r = r(A)$. Existe un vector $y \in \mathbb{C}^n$ con $y \geq 0$ y*

$$\overline{\lim}_{\lambda \downarrow r} \|R(\lambda)y\|_p = \infty$$

Demostración. Supongamos que no. O sea, para cada $y \geq 0$, $R(\lambda)y$ es limitado $\forall \lambda \downarrow r$.

Sea $x \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} |R(\lambda)x| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} x \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{-(n+1)} A^n |x| = R(|\lambda|)|x|. \end{aligned}$$

Como la norma es monótona, tenemos $\|R(\lambda)x\| \leq \|R(|\lambda|)x\|$. Sea $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ autovalor de A tal que $|\lambda_0| = r$ y $\lambda_n \in \rho(A)$ una sucesión tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$. Si ocurre que $\|R(\lambda_n)x\|_p$ es limitada para cada $x \in \mathbb{C}^n$, entonces la sucesión $\|R(\lambda_n)\|$, también es limitada. (Esto no puede ser ya que en este caso $R(\lambda_n)$ sería una sucesión de Cauchy y su límite sería $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ que no existe). Por lo tanto $\exists x \in \mathbb{C}^n$ no nulo tal que $\|R(\lambda_n)x\|_p$ es ilimitada. Así que $\|R(\lambda_n)|x\|_p$ es ilimitada. \square

Teorema 8 (de Perron). *El radio espectral de una matriz positiva es un autovalor con un autovector positivo asociado.*

Demostración. El conjunto $S = \{x \in \mathbb{C}^n; \|x\|_1 = 1 \text{ y } x \geq 0\}$ es compacto (es la intersección de un cerrado, \mathbb{R}_+^n , y un compacto, $\{x \in \mathbb{C}^n; \|x\|_1 = 1\}$). Sea A la matriz positiva, r su radio espectral.

Por demostrar que existe vector $x \in \mathbb{C}^n$, $x \geq 0$, tal que $Ax = rx$. Por el lema anterior, existe $y_0 \geq 0$ y sucesión $\lambda_n \downarrow r$ tal que $\|R(\lambda_n)y_0\|_1 \rightarrow \infty$.

Sea $x_n = \frac{R(\lambda_n)y_0}{\|R(\lambda_n)y_0\|_1} \Rightarrow \|x_n\|_1 = 1$ y $x_n \geq 0$. Por lo tanto $x_n \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Como S es compacto, existe $x_{n_k} \rightarrow x \in S$.

$$\begin{aligned} (\lambda_n I - A)x_n &= (\lambda_n I - A) \frac{R(\lambda_n)y_0}{\|R(\lambda_n)y_0\|_1} = \frac{y_0}{\|R(\lambda_n)y_0\|_1} \\ \therefore (rI - A)x_n &= (rI - \lambda_n I)x_n + (\lambda_n I - A)x_n = \\ &= (rI - \lambda_n I)x_n + \frac{y_0}{\|R(\lambda_n)y_0\|_1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, considerando $n = n_k$ y haciendo $n_k \rightarrow \infty$ se tiene $(rI - A)x = 0$, por lo tanto $Ax = rx$. □

Observación 12.

En particular: $r = r(A)$ es un autovalor de A y se tiene $x \in S$ (y entonces $x > 0$).

Remarcamos entonces, para una matriz positiva A , que si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de A entonces $\lambda \leq r(A)$.

Proposición 11. *Sea A una matriz positiva, entonces $r(A) < 1$ si, y sólo si, $(I - A)^{-1}$ existe y*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \geq 0.$$

Demostración. Suponemos que $r(A) < 1$, en este caso

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^s A^k \right\| &\leq \sum_{k=0}^s \|A\|^k \leq \sum_{k=0}^s r^k \leq \frac{1}{1-r} \\ \therefore \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^s A^k &\text{ existe} \\ (I - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} = I \\ \therefore \sum_{k=0}^{\infty} A^k &= (I - A)^{-1} \geq 0. \end{aligned}$$

Suponemos que $(I - A)^{-1}$, existe y $(I - A)^{-1} \geq 0$. El teorema de Perron asegura que existe $x \geq 0$ tal que $Ax = r(A)x$. Debe ser que $r(A) \neq 1$ pues $(I - A)^{-1}$ existe.

$$(I - A)x = (1 - r(A))x \Rightarrow (I - A) \left(\frac{x}{1 - r(A)} \right) = x.$$

Así que

$$\frac{x}{1 - r(A)} = (I - A)^{-1}(x)$$

Como $(I - A)^{-1} \geq 0$ y $x \geq 0$, resulta que $1 - r(A) \geq 0$. Como $r(A) \neq 1$, entonces $1 > r(A)$. \square

2. El espectro periférico de una matriz positiva

En esta sección, haremos algunas observaciones sobre el conjunto de autovalores de una matriz positiva A que se encuentra sobre el círculo de radio $r(A)$.

Definición 30. Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $sn(x)$ denotará el vector cuyo i -ésimo componente es $\frac{x_i}{|x_i|}$, si $x_i \neq 0$ y 1 si $x_i = 0$.

Ejemplo. $x = (1, -1, 2, 0)$; $sn(x) = (1, -1, 1, 1)$
 $x = (-1, 0, -3, 2)$; $sn(x) = (-1, 1, -1, 1)$

Definición 31. Para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ $x \cdot y$ denotará el vector $(x_1 y_1, \dots, x_n y_n) \in \mathbb{C}^n$.

Con esta definición, tiene sentido $x^k = x^{k-1}x = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$.

Definición 32. Sea A una matriz y r su radio espectral. El *espectro periférico* de A , indicado $\sigma_p(A)$, es el conjunto

$$\sigma_p(A) = \{\lambda; \lambda \in \sigma(A), |\lambda| = r\}.$$

Proposición 12. Sea A una matriz positiva, $r = 1$ su radio espectral y α un autovalor de A tal que $|\alpha| = 1$. Si $|x| = A|x|$, entonces

$$\alpha^k |x|(sn(x))^k = A(|x|(sn(x))^k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Ver libro de Laura, pág. 26. □

Definición 33. Sea A una matriz en \mathbb{C}^n y r su radio espectral. Diremos que el espectro periférico de A es cíclico si para cada autovalor $\lambda \in \sigma_p(A)$ tal que $\lambda = r\alpha$ con $|\alpha| = 1$, vale $r\alpha^k \in \sigma_p(A) \forall k \in \mathbb{Z}$ (o sea, $\lambda\alpha^j \in \sigma_p(A) \forall j \in \mathbb{Z}$).

Teorema 9. Sea A una matriz positiva. Su espectro periférico $\sigma_p(A)$ es cíclico.

Demostración. Ver libro de Laura pág. 27. □

Apéndice C

Matrices Irreducibles

En la sección anterior, vimos que el radio espectral de una matriz positiva es autovalor de ella misma. Perron observó, en 1907, que si la matriz es estrictamente positiva, su radio espectral es un autovalor simple, con un autovector estrictamente positivo asociado. Frobenius probó un resultado más general para matrices irreducibles. Aquí veremos este tipo de resultados y probaremos sólo lo necesario a nuestros propósitos en dinámica.

1. Elementos de la Teoría de Perron-Frobenius

Una matriz de permutación, es una matriz $P = (p_{ij})$ de ceros y unos con la propiedad de que

$$\forall 1 \leq j \leq n \exists! i_0 \in \{1, \dots, n\} \text{ tal que } p_{i_0 j} = 1 \text{ y } p_{ij} = 0$$

para $i \neq i_0$

$$\forall 1 \leq i \leq n \exists! j_0 \in \{1, \dots, n\} \text{ tal que } p_{ij_0} = 1 \text{ y } p_{ij} = 0$$

para $j \neq j_0$.

Ejemplo. Para $n = 3$, las seis matrices de permutación son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una matriz de permutación P , se dirá par, si $\det P = 1$, e impar si $\det P = -1$.

Definición 34. Sea A una matriz positiva. Diremos que A es *reducible*, si existe una matriz de permutación P , tal que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

donde B y D son matrices cuadradas de orden menor al orden de A . Una matriz que no es reducible se llama *irreducible*.

Observaciones

- 1) Toda matriz estrictamente positiva es irreducible.
- 2) Si $A \geq B$ y P es una matriz de permutación, entonces $PAP^{-1} \geq PBP^{-1}$. Como consecuencia: si A es irreducible y $B \geq A$, entonces B es irreducible. (Caso contrario: B reducible $\Rightarrow A$ reducible).
- 3) A es irreducible si, y sólo si, A^t es irreducible. Esto se obtiene por contradicción. Si A es reducible (digamos $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$), entonces se prueba que existe una matriz de permutación P , tal que

$$PA^tP^{-1} = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ C' & D' \end{pmatrix}.$$

- 4) A es irreducible si no existe ideal $J \subseteq \mathbb{C}^n$, $J \neq 0$, $J \neq \mathbb{C}^n$, tal que $AJ \leq J$. En efecto, si

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \quad B = B_{r \times r},$$

entonces $J = \{(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n)\}$ es un ideal $J \neq 0$, $J \neq \mathbb{C}^n$ tal que $AJ = J$, por lo tanto $AJ \leq J$.

Proposición 13. *Sea A una matriz positiva no nula y r su radio espectral. Se cumple que A es irreducible si, y sólo si, r es una autovalor simple de A con autovector estrictamente positivo asociado.*

Demostración. Suponemos que A es irreducible. Como A es positiva el Teorema de Perron asegura: $x > 0$ tal que $Ax = rx$.

Sea J_x la intersección de todos los ideales que contienen a x . Como $Ax = rx$, entonces $AJ_x \leq J_x$, por lo tanto $J_x = \mathbb{C}^n$ y $x \gg 0$. Supongamos que hay otro autovector y $y \neq \lambda x$ asociado a r . Sin pérdida de generalidad, suponemos $y \in \mathbb{R}^n$. Sea $z(\lambda) = x - \lambda y$. $A(x - \lambda y) = Ax - A(\lambda y) = rx - r\lambda y = rz$, por lo tanto, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, ocurre que $z(\lambda)$ es autovalor de A . Claro que para algún λ , se tiene que $z(\lambda)$ intersecta un eje coordenado, i.e. $z_i(\lambda) = 0$ para algún componente de $z(\lambda)$.

Sea J_z el ideal generado por z , entonces $AJ_z \leq J_z$ y J_z es un ideal propio de \mathbb{C}^n ($\rightarrow\leftarrow$), por lo tanto no existe tal y y r es autovalor simple con autovector estrictamente positivo.

Probamos ahora el recíproco. Sabemos que existe $y \gg 0$ tal que $Ay = ry$. Sea J un ideal no trivial tal que $AJ \leq J$. Sea ρ el radio espectral de la restricción A_J de A a J . Sabemos, por el Teorema de Perron, que existe $z > 0$ en J tal que $Az = \rho z$ y debe ser $\rho < r$ (ya que $y \notin J$ pues sino $J = \mathbb{C}^n$).

$$\begin{aligned} \therefore r\langle z, y \rangle &= \langle z, ry \rangle = \langle z, Ay \rangle = \langle A^t z, y \rangle = \langle \rho z, y \rangle = \rho \langle z, y \rangle \\ \therefore \langle z, y \rangle &= 0 \quad (\rightarrow\leftarrow) \quad \text{pues } y \gg 0 \quad \text{y } z > 0 \end{aligned}$$

por lo tanto no existe tal J , i.e. A es irreducible. □

Nota. Las matrices A y A^t tienen el mismo radio espectral y A es irreducible $\Leftrightarrow A^t$ lo es. Así que el resultado anterior es igualmente válido para A^t .

Proposición 14. *Sea A una matriz positiva no nula y r su radio espectral. Se cumple: A es irreducible si, y sólo si,*

$$(\lambda I - A)^{-1} x \gg 0 \quad \forall x > 0 \quad \text{y } \lambda > r.$$

Demostración. Supongamos que A es irreducible. Escribamos $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ para $\lambda \neq r(A)$. Ya que $(\lambda I - A)R(\lambda) = I$, entonces

$$\begin{aligned} \lambda R(\lambda) - AR(\lambda) &= I \geq 0 \\ \therefore \lambda R(\lambda) &> AR(\lambda) \quad \lambda > r \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $x > 0$, $R(\lambda)x$ genera un ideal no nulo que es invariante por A , por lo tanto $R(\lambda)x \gg 0$.

Si, de otro lado, $(\lambda I - A)^{-1}x \gg 0 \forall x > 0$ y $\lambda > r$, entonces el único ideal J tal que $AJ \subseteq J$ es $J = \mathbb{C}^n$, ya que para cualquier $x > 0$ y $\lambda > r$ tenemos $R(\lambda)x \gg 0$. \square

Probaremos ahora una interesante propiedad del radio espectral de una matriz irreducible.

Proposición 15. *Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $n \geq 2$ una matriz irreducible, entonces*

$$r > \max \{a_{ii}, 1 \leq i \leq n\}, \quad r = r(A).$$

Demostración. Sabemos que existe $x \gg 0$ tal que $Ax = rx$. Luego,

$$rx_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = a_{ii}x_i + \sum_{i \neq j} a_{ij}x_i.$$

No puede ser que $a_{ij} = 0$ para cada $j \neq i$. En efecto, si eso ocurre, entonces el ideal $J = \{(y_1, y_2, \dots, y_n), y_i = 0\}$ sería invariante por A . Esto no puede ser, pues A es irreducible. Por lo tanto, existe $j_0 \neq i$ tal que $a_{ij_0} \neq 0 \Rightarrow rx_i > a_{ii}x_i$, $1 \leq i \leq n$. \square

Observación 13.

Para el caso de que A sea una matriz irreducible de ceros y unos, se tiene entonces que $r > \max\{a_{ii}; 1 \leq i \leq n\}$. Así que, si A tiene algún 1 en la diagonal entonces $r > 1$.

Proposición 16. *Sea A una matriz irreducible $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $n \geq 2$. Si z es un autovector positivo y no nulo, entonces z es estrictamente positivo y z es un autovector asociado a r .*

Demostración. Sea $z > 0$ tal que $Az = \rho z$. Si $\rho \neq r$, entonces $y = \frac{1}{r}A^t y \gg 0$, satisface $\langle z, y \rangle = 0$, imposible, por lo tanto, $\rho = r$ y el resultado sigue de la proposición en la página 143. \square

Observación 14.

Si B es una matriz que satisface $|B| \leq A$, entonces $r(B) \leq r(A)$. Esto se deduce de $\|Bx\| \leq |B| \|x\| \leq A \|x\|$ y la definición del radio espectral.

Las proposiciones siguientes, las establecemos sin demostración.

Proposición 17 (H. Wielandt). *Sea A una matriz irreducible y B una matriz positiva tal que $B \leq A$. Si $r(B) = r(A)$ y si λ es autovalor de B con $r(B) = |\lambda|$, entonces, existe una matriz diagonal D_λ , tal que $B = \lambda D_\lambda \overline{AD_\lambda}$, donde $\overline{D_\lambda} =$ matriz conjugada de D_λ .*

Teorema 10 (Frobenius). *Sea A una matriz irreducible y r su radio espectral. Entonces el espectro periférico de A es cíclico y de la forma rH , donde H es el grupo cíclico de todos los h -ésimos raíces de la unidad para algún $h \geq 1$.*

Corolario 22 (Frobenius). *Sea A una matriz irreducible y r su radio espectral. Sea H el grupo de raíces de la unidad tal que $\sigma_p(A) = rH$. Cada elemento $\lambda \in rH$ es una raíz simple de la ecuación característica y, en consecuencia, un autovalor simple de A .*

Corolario 23 (Frobenius). *Sea A una matriz irreducible y r su radio espectral. Sea H el grupo de raíces de la unidad tal que $\sigma_p(A) = rH$. Entonces, el grupo de las notaciones inducidas por H deja invariante el espectro de A .*

Teorema 11. *Sea A una matriz irreducible, r su radio espectral y $\sigma_p(A) = rH$, donde H es el grupo de los h -ésimas raíces de la unidad. Se cumple que \mathbb{C}^n es suma directa de h ideales $J_0, J_1, J_2, \dots, J_{h-1}$ tales que $AJ_{k+1} \subset J_k$ y $J_n = J_0$.*

Como consecuencia de este resultado, vemos que si A es una matriz irreducible y h el número de puntos de su espectro periférico, entonces, existe una matriz P de permutación tal que

$$P^{-1}AP = \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & A_{h-1h} \\ A_{h1} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Esta manera de representar A , tiene como consecuencia el

Teorema 12 (Perron). *Si A es una matriz estrictamente positiva, su radio espectral es el único autovalor de módulo $r(A)$ y es una raíz simple de la ecuación característica.*

Nota. El número de puntos en $\sigma_p(A)$ es llamado el *índice de ciclicidad* de A . A se dice *cíclica de orden h* si $h > 1$ y si $h = 1$ la matriz A se dice *primitiva*.

2. Otras propiedades de las matrices irreducibles

Sea A una matriz irreducible sobre \mathbb{C}^n , $n \geq 2$ y sea y un vector positivo con j coordenadas no nulas, entonces $(A + I)y$ tiene al menos $(j + 1)$ coordenadas no nulas. Esto implica que $(A + I)^{n-1}$ es una matriz estrictamente positiva (para darse cuenta de esto, basta suponer $y = (y_1, \dots, y_j, 0, 0, \dots, 0)$ con $y_i > 0$ $1 \leq i \leq j$ y aplicar $(A + I)y$ sabiendo que A no puede tener la forma $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$).

Indiquemos por $A^q = (a_{ij}^q) = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{q\text{-veces}}$.

Proposición 18. *Sea A una matriz positiva. A es irreducible si para cada (i, j) existe q tal que $a_{ij}^q > 0$.*

Demostración. Vimos que $(A + I)^{n-1} \gg 0$. Sea $B = (A + I)^{n-1}A$.

$$\begin{aligned} B &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} I^k A^{n-1-k} \right) A = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A^{n-k} \\ &= A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} A \\ \therefore b_{ij} &= a_{ij}^n + \binom{n}{1} a_{ij}^{(n-1)} + \cdots + \binom{n}{n-1} a_{ij}. \end{aligned}$$

Como B es estrictamente positiva, $b_{ij} > 0$ y para cada (i, j) existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $a_{ij}^q > 0$. □

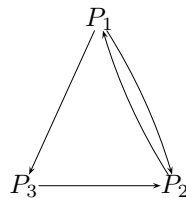
La siguiente propiedad, caracteriza una matriz irreducible a través de su grafo asociado.

Definición 35. Sea A una matriz. El grafo dirigido asociado a A consiste en n vértices: P_1, P_2, \dots, P_n con la propiedad de que para cada par de vértices (P_i, P_j) , existe una arista de P_i a P_j si $a_{ij} \neq 0$.

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene grafo dirigido asociado



Definición 36. Un gráfico dirigido G , se dice *fuertemente conexo*, si para cada par (P_i, P_j) de vértices de G existe una sucesión de aristas (i.e. un camino) que comienza en P_i y termina en P_j .

Teorema 13. Sea A una matriz positiva. A es irreducible si, y sólo si, su gráfico dirigido $G(A)$ es fuertemente conexo.

Demostración. A es irreducible, entonces, para cada (i, j) existe $q \in \mathbb{N}$, tal que $a_{ij}^q > 0$. Sea P la matriz asociada a A definida por $p_{ij} = 1 \Leftrightarrow a_{ij} > 0$ y $p_{ij} = 0$ en otro caso. Se tiene $p_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ existe una arista de P_i a P_j .

Para cada (i, j) , tal que $p_{ij} = 1$, diremos que el camino desde el vértice P_i al vértice P_j , tiene largo 1. Diremos que el camino de P_i a P_j tiene largo 2, si existe P_k , tal que $p_{ik} = 1$ y $p_{kj} = 1$. Esto quiere decir: $P_i \xrightarrow{1} P_k \xrightarrow{1} P_j$. Por lo tanto el camino de P_i a P_j tiene largo 2. Diremos que el camino de P_i a P_j , tiene largo s si no hay camino de P_i a P_j de largo $p < s$ y es posible encontrar índices k_1, k_2, \dots, k_{s-1} , tales que

$$P_i \xrightarrow{1} P_{k_1} \xrightarrow{1} P_{k_2} \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{1} P_{k_{s-1}} \xrightarrow{1} P_j.$$

Como $p_{ij}^q > 0 \Leftrightarrow a_{ij}^q > 0$. Es suficiente probar que P es irreducible $\Leftrightarrow G(P)$ es fuertemente conexo. El resultado sigue de notar que $p_{ij}^q > 0 \Leftrightarrow$ hay un camino de largo q de P_i a P_j . \square

Bibliografía

- [1] R. L. Adler, A. G. Konheim, M. H. Mc Andrew «Topological Entropy». Transactions of the AMS vol 144, (1965) pg. 309-319.
- [2] Solange Aranzubia V. « Igualdad de la entropía en órbitas periódicas maximales vecinas y continuidad, a manera de ejemplo, en $\theta = \underline{101}$, en el mundo de Milnor-Thurston.» Tesis de Magister USACH 2011.
- [3] P. Boyland. « Bifurcation of circle maps: Amold's tongue, Bistability and Rotation Intervals ». Comm. in Math. Phys 106 pp 353 - 381 (1986)
- [4] R. Bowen «Periodic points and measure for axiom A diffeomorphisms». Transactions of the AMS vol 154, Feb 1971 pg. 377-388.
- [5] R. Bowen «Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces». Transactions of th AMS vol 153, jan 1971 pg. 401-414.
- [6] L. Block, J. Guckenheim, M. M, L. S. Young. «Periodic points and topological entropy». Lectures Notes in Mathematics. N.º 819.1978.Springer Verlag.
- [7] J. Guckenheimer; R. F. Williams. « Structural Stability of Lorenz Attractors». Publ. Math IHES 50, pp 59 - 72 (1979).
- [8] E. Inda R. « La combinatoria de la sucesión que dobla periodo y los valores máximo y mínimo de la entropía de órbitas periódicas en el Mundo de Milnor-Thurston ». Tesis de Magister USACH 2011.
- [9] R. Labarca, C. Moreira «Essential dynamics for Lorenz maps on the real line and the lexicographical world». Annales de L'Institut H. Poincaré, Analyse non-Linéaire, 23 (2006) 683-694.

- [10] R. Labarca; C. Moreira. « Bifurcation of the essential dynamics of Lorenz maps on the real line and the bifurcation scenario for Lorenz like flows: The contracting case ». *Proyecciones* 2010 Vol 29 N°3 pp 247 - 293
- [11] R. Labarca, A. Pumariño, J. A. Rodriguez «On the Boundary of topological Chaos for the Milnor-Thurston World». *Commun in Contemp. Math* 11 (2009) N.º 6 pg. 1049-1066.
- [12] R. Labarca, C. Moreira, A. Pumarino, J. A. Rodriguez «On Bifurcations Sets for symbolic dynamics in the Milnor-Thurston World 1». Preprint 2010 y sometido.
- [13] J. Milnor, W. Thurston « On iterated maps on the interval». *Lect. Notes in Math* 1342 pp 465-563 Springer Verlag (1988).
- [14] R. Mañé «Ergodic Theory and Differentiable dynamics». *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* (3), 8 Springer-Verlag 1987 xii + 317 pp.
- [15] Laura Martignon «Matrices Positiva», 16º Coloquio Brasileiro de Matemática, 1987.

Asociación Matemática Venezolana

Presidente: Rafael Sánchez Lamonedá

Consejo Directivo Nacional

Rafael Sánchez Lamonedá
Capítulo Capital

Sergio Muñoz
Capítulo de Centro Occidente

Oswaldo Araujo
Capítulo de Los Andes

Said Kas-Danouche
Capítulo de Oriente

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela
<http://amv.ivic.gob.ve>

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Consejo Directivo

Director

Eloy Sira

Subdirector

Alberto Quintero

Representantes del Ministerio del Poder Popular para Ciencia,
Tecnología e Industrias Intermedias

Guillermo Barreto

Juan Luis Cabrera

Representante del Ministerio del Poder Popular para la
Educación Superior

Prudencio Chacón

Representantes Laborales

Jesús Acosta

María Celia Sulbarán (suplente)

Evencia Bernal (suplente)

Gerencia General

Lira Parra

Comisión Editorial

Coordinador

Eloy Sira

Horacio Biord

Erika Wagner

Rafael Gassón

Jesús Eloy Conde

Héctor Suárez

Lucía Antillano

María Teresa Curcio

Pamela Navarro



Gobierno **Bolivariano**
de Venezuela

Ministerio del Poder Popular
para **Ciencia, Tecnología e Industrias Intermedias**

