

XXIV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS  
EMALCA-VENEZUELA 2011

---

INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE  
LOS ELEMENTOS FINITOS:  
UN ENFOQUE MATEMÁTICO

Giovanni Calderón y Rodolfo Gallo

MÉRIDA, VENEZUELA, 4 AL 10 DE SEPTIEMBRE DE 2011



XXIV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS  
EMALCA – VENEZUELA 2011

---

INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS  
FINITOS: UN ENFOQUE MATEMÁTICO

Giovanni Calderón  
Rodolfo Gallo

Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias  
Universidad de Los Andes

giovanni@ula.ve      rodolfog@ula.ve

---

MÉRIDA, VENEZUELA, 4 AL 10 DE SEPTIEMBRE DE 2011

## XXIV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las siguientes instituciones: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Universidad de Oriente y Universidad Simón Bolívar, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana.

La XXIV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS recibió apoyo financiero de: Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, Banco Central de Venezuela, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), Universidad de los Andes (CEP, CD-CHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), Fundacite Mérida, Unión Matemática de América Latina y el Caribe, y CIMPA (Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées).

2010 Mathematics Subject Classification: 65N30

©Ediciones IVIC

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

RIF: G-20004206-0

**Introducción al Método de los Elementos Finitos: un enfoque matemático**

Giovanni Calderón y Rodolfo Gallo

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas

Preprensa e impresión: Gráficas Lauki C. A.

Depósito legal If66020115102608

ISBN 978-980-261-129-4

Caracas, Venezuela

2011

# Prefacio

El modelado de distintos procesos físicos, cuya correcta comprensión, predicción y control son importantes para las ciencias y la ingeniería, se hace a través de ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Entre tales procesos se pueden citar: los problemas de la mecánica de fluidos, reacciones químicas, deformación de los cuerpos sólidos, campos electromagnéticos y muchas más. En la mayoría de los casos, la solución exacta de estos modelos es desconocida y a veces ni siquiera se sabe si existe una solución única. Por estas razones, en general, la única manera de resolver las EDP que se plantean en estos modelos es recurriendo a métodos numéricos para definir una solución aproximada. Hoy en día, los métodos numéricos para EDP constituyen una parte indivisible de la ciencia y la ingeniería moderna. Resulta común, debido a su potencial y versatilidad, que el método de elementos finitos (MEF) sea frecuentemente el más utilizado para obtener una solución aproximada a cualquiera de estos problemas.

La partida de nacimiento del método está fechada en 1956, ver Turner *et al.* [1], y surge de la resolución de problemas estructurales complejos (con mentalidad práctica ingenieril). No obstante, tiene hondas raíces matemáticas, en la línea del procedimiento de Ritz para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales (el método de Ritz data de 1909) o dentro de los llamados métodos de residuos ponderados (el método de Galerkin). Esta generalidad empezó a atraer el interés de los matemáticos, los cuales contribuyeron decisivamente a explicar con rigor las bases del MEF. Sin embargo, debe hacerse notar que la contribución de los matemáticos al MEF ha ido siempre muy por detrás de las aplicaciones prácticas. El primer libro importante en que se analiza el MEF desde un punto de vista matemático fue publicado en 1973, ver Strang and Fix [2], casi 20 años después de la presentación del método.

Hoy en día, dos grandes líneas de investigación enmarcan el MEF. Una, como herramienta ingenieril, donde sus áreas básicas de desarrollo han estado muy vinculadas a la presión de la industria por resolver determinados problemas. La segunda, de carácter matemático, busca dar el rigor teórico a las distintas técnicas numéricas que envuelven el método, y principalmente desarrollada por grupos de investigación de índole académico. En muchas etapas de su evolución se ha concebido y aplicado con éxito una determinada técnica numérica antes de encontrar su justificación matemática rigurosa. Resulta imposible describir exhaustivamente el estado del arte en cualquiera de estas dos líneas de investigación. Por tal motivo, en este texto, solo se hará hincapié en algunas referencias de carácter general, y que han constituido una fuente primordial de información para el desarrollo del texto.

Es común que un curso de introducción al MEF siga una vertiente netamente informática, dejando de lado los fundamentos matemáticos. Este hecho produce un perfil exclusivo de usuario y limita al estudiante a iniciarse en campos de investigación relacionados con las propiedades y evolución del MEF. Ahora bien, la forma más elegante de explicar los fundamentos matemáticos del MEF parte del análisis funcional; este es el marco en el que hay que situarse si se quiere estudiar con rigor las bases del MEF e investigar sobre sus propiedades matemáticas. Sin embargo, desde un punto de vista pedagógico, iniciar el estudio del MEF, situándose en este marco puramente matemático, tiene serios inconvenientes. Pues, se corre el riesgo de desanimar a los estudiantes que se acercan por primera vez al MEF y de fomentar entre ellos la idea de que el método es solo una gran teoría matemática, difícil de entender, y sin relación aparente con la forma en que luego se resuelven los problemas reales. Debido a que el objetivo general del texto es el de proporcionar al estudiante (postgraduados, o estudiantes avanzados, en matemáticas o ingeniería) las bases matemáticas e informáticas en el uso del MEF para la resolución de problemas de las ciencias y la ingeniería, el enfoque del texto se realizará buscando una doble vertiente. Por una parte, se sigue una descripción rigurosa en el formalismo matemático que fundamenta el MEF. Por otra, se hará énfasis en la implementación del método y el postproceso de los resultados en aplicaciones prácticas.

Se debe destacar que el texto representa, desde el punto de vista de los autores, una introducción del MEF; el cual ha ido evolucionando en

el transcurso de varios años, siendo usado para el dictado de cursos electivos en el postgrado de matemáticas. Y, aunque con este enfoque se gana en rigor y elegancia matemática, se pierde en la profundidad del tipo de problema a resolver. Pues, en todo el texto, solo serán tratados problemas estacionarios de campo escalar. Dejando los problemas transitorios y mecánicos fuera del alcance del curso. De esta forma, el material está organizado de la siguiente manera:

En el primer capítulo, se desarrollan los fundamentos del análisis funcional necesarios para emprender la formulación y análisis del método, ver, por ejemplo, Adams [3] y Brézis [4]. Sin embargo, y en línea general, los textos de carácter matemático, incluyen las herramientas necesarias del análisis funcional a medida que desarrollan el método, entre otros se pueden citar los textos de Brenner y Scott [5], Šolín [6], Reddy [7], Ciarlet [8], Oden [9].

El segundo capítulo está dedicado a la formulación variacional del problema. En el tercer capítulo, se introduce el método de Galerkin y sus propiedades. En estos dos capítulos, cualquiera de los textos citados anteriormente pueden ser usados. Además, se pueden citar a Johnson [10], Becker *et al.* [11], Oden y Carey [12].

En el cuarto y último capítulo, se formula el MEF junto a todas las herramientas matemáticas necesarias para su implementación. Nuevamente, cualquiera de la literatura citada puede ser útil al momento de seguir el capítulo. Textos con un enfoque más ingenieril, pueden estar dados por Zienkiewicz [13], Lewis [14] y Cerrolaza [15]. Estos textos, además, pueden ser usados para extender los conocimientos al estudio de problemas mecánicos.

Al final de cada apartado, se presenta una lista de ejercicios relacionados con el contenido del capítulo. Los códigos (MATLAB) de ayuda para la implementación de algunos de los ejercicios, el tutorial del software propuesto para la generación de la malla, además, de material que puede complementar a este texto, se puede encontrar en la página web: <http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/giovanni>.

Textos, orientados a temas particulares de la ciencia mediante el uso del MEF, son cada día más abundantes y específicos. Líneas de investigación, donde en el pasado otros métodos numéricos predominaban, hoy son influenciadas muy satisfactoriamente por el MEF. Por ejemplo, en el caso de la mecánica de los fluidos, han surgido nuevos enfoques para el

método, que lo han colocado, en muchos caso, por arriba de los métodos tradicionales, ver Rivière [16], Li [17], Donea y Huerta [18], y Thomée [19], entre otros. Por otro lado, y debido principalmente a la complejidad de los problemas tratados, las soluciones aproximadas obtenidas por el MEF son, o requieren ser, certificadas “aceptadas” mediante cotas de error. Estas son impuestas según las propiedades del problema o exigencias particulares requeridas por el usuario. En el presente, la mayoría de los avances realizados dentro del campo del MEF se dan en esta dirección. Debido a esto, existen diversas técnicas para resolver el problema de la estimación y corrección del error. Entre los textos básicos, en esta dirección, se pueden citar, Ainsworth y Oden [20] y, Bangerth y Rannacher [21], entre otros.

Como nota final, queremos agradecer al comité organizador de la *XXIV Escuela Venezolana de Matemáticas*, la oportunidad de dictar este curso, el cual puede contribuir al empuje que necesitan las matemáticas aplicadas en nuestras licenciaturas y postgrados.

Los autores.

# Contenido

<b>Prefacio</b>	<b>iii</b>
<b>1 Preliminares del Análisis Funcional</b>	<b>1</b>
1.1 Espacios lineales . . . . .	1
1.1.1 Espacios $\mathbf{L}^p(\Omega)$ . . . . .	2
1.1.2 Complementos ortogonales en espacios de Hilbert . . . . .	3
1.1.3 Operadores en espacios lineales normados . . . . .	4
1.1.4 Operadores en un espacio de Hilbert real . . . . .	6
1.2 Funcionales lineales . . . . .	8
1.3 Distribuciones y Espacios de Sobolev $\mathbf{H}^m(\Omega)$ . . . . .	10
1.3.1 El espacio de Sobolev . . . . .	13
1.4 Formas bilineales . . . . .	15
1.4.1 Formas bilineales continuas . . . . .	16
1.4.2 Formas bilineales H-elípticas . . . . .	17
1.5 El Teorema de Lax-Milgram . . . . .	18
1.6 Fórmula de Green . . . . .	21
Ejercicios . . . . .	22
<b>2 Formulación Variacional para Problemas de Valor de Frontera</b>	<b>25</b>
2.1 Problema modelo unidimensional . . . . .	26
2.1.1 Formulación variacional del problema modelo unidimensional . . . . .	28
2.1.2 Equivalencia del problema fuerte y variacional . . . . .	30
2.1.3 Condición de frontera no homogénea . . . . .	31
2.2 Problema modelo 2D . . . . .	32
2.2.1 Condición de frontera Dirichlet homogénea . . . . .	33

2.2.2	Condición de frontera Dirichlet no homogénea . . .	37
2.2.3	Condición de frontera Neumann . . . . .	38
2.2.4	Condición de frontera Robin . . . . .	39
2.2.5	Condición de frontera esencial y natural . . . . .	40
2.2.6	Combinación de condiciones de frontera naturales y esenciales . . . . .	41
	Ejercicios . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Método de aproximación</b>	<b>45</b>
3.1	El método de Galerkin . . . . .	46
3.2	Propiedades de la aproximación de Galerkin . . . . .	51
3.2.1	Ortogonalidad del error y Lema de Céa . . . . .	51
3.2.2	Convergencia del método de Galerkin . . . . .	54
	Ejercicios . . . . .	57
<b>4</b>	<b>El Método de los Elementos Finitos</b>	<b>59</b>
4.1	El MEF para problemas de segundo orden . . . . .	60
4.1.1	La malla de elementos finitos . . . . .	61
4.1.2	Puntos nodales . . . . .	61
4.1.3	Funciones bases $\phi_i$ . . . . .	62
4.1.4	La solución aproximada . . . . .	65
4.2	Problema unidimensional . . . . .	67
4.2.1	Ensamblaje (1D) . . . . .	73
4.2.2	La transformación isoparamétrica . . . . .	75
4.2.3	Integración numérica . . . . .	76
4.2.4	Estimación del error . . . . .	77
4.3	Elementos bidimensionales . . . . .	79
4.3.1	Elementos triangulares . . . . .	80
4.3.2	Derivadas y gradientes en el elemento de referencia	83
4.3.3	Matriz de rigidez elemental $K^{(e)}$ . . . . .	84
4.3.4	Vector de carga elemental $F^{(e)}$ . . . . .	86
4.3.5	Coordenadas de área . . . . .	87
4.3.6	Integración numérica en elementos triangulares . .	89
4.3.7	Elementos Rectangulares . . . . .	90
4.3.8	Integración numérica en elementos rectangulares .	93
4.4	Problema bidimensional . . . . .	93
4.4.1	Ejemplo 1. Malla triangular . . . . .	93
4.4.2	Ejemplo 2. Malla rectangular . . . . .	98

4.5 Condiciones de contorno esenciales . . . . . 105  
4.5.1 Método 1: Eliminación de filas y columnas . . . . . 105  
4.5.2 Método 2: Penalización . . . . . 106  
4.5.3 Método 3: Multiplicadores de Lagrange . . . . . 107  
4.6 Funciones de forma de orden superior . . . . . 108  
4.6.1 Funciones de forma de elementos rectangulares . . . 109  
4.6.2 Funciones de forma de elementos triangulares . . . 111  
Ejercicios . . . . . 115

**Bibliografía** . . . . . **123**



# Capítulo 1

## Preliminares del Análisis Funcional

Antes de considerar los aspectos referentes al Método de los Elementos Finitos (MEF) y su implementación, se introducen algunos conceptos y resultados de Análisis Funcional a los que se hará referencia con regularidad a lo largo del texto.

### 1.1 Espacios lineales

Sea  $\mathbf{E}$  un espacio lineal sobre el campo  $\mathbf{K}$  de los números reales o complejos. Por lo general, siempre se tratará con espacios lineales reales. El espacio  $\mathbf{E}$  es de *dimensión*  $n$ , si el número máximo de vectores linealmente independientes que existen en él es  $n$ . En cambio, si en  $\mathbf{E}$  se puede encontrar cualquier número finito de elementos linealmente independientes, se dice que es de *dimensión infinita*.

El espacio  $\mathbf{C}[a, b]$  es el conjunto de todas las funciones reales continuas definidas en el intervalo  $[a, b]$ . Se denota por  $\mathbf{C}^n[a, b]$ , al conjunto de todas las funciones reales que poseen  $n$  derivadas continuas en  $[a, b]$ .

En un espacio lineal se puede asignar a cada elemento  $x$  la noción de longitud por medio del número real  $\|x\|$ , llamado norma de  $x$ . Un espacio lineal  $\mathbf{E}$  en el que se ha introducido una norma se llama *espacio normado*.

Sea  $\mathbf{E}$  un espacio normado. La sucesión  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{E}$  se dice *acotada* en  $\mathbf{E}$ , si existe un  $C > 0$  tal que  $\|u_n\| < C$  para todo  $n$ . La sucesión

se dice *convergente en  $\mathbf{E}$* , si existe un elemento  $u \in \mathbf{E}$  tal que para todo  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$  existe un  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|u - u_n\| < \varepsilon$  para todo  $n > N_0$ . El elemento  $u$  es el límite de la sucesión  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Usualmente, se escribirá de forma indistinta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \quad \text{o} \quad \|u - u_n\| \rightarrow 0, \quad \text{para } n \rightarrow \infty$$

La sucesión  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{E}$  es una *sucesión de Cauchy* (o sucesión fundamental), si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|u_n - u_m\| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } n, m \geq N_0$$

Un espacio lineal normado  $\mathbf{E}$  se llama *completo (cerrado)*, cuando toda sucesión fundamental de este espacio converge hacia un cierto elemento  $u \in \mathbf{E}$ . Los espacios lineales normados completos se llaman *espacios de Banach*. Todo espacio lineal normado de dimensión finita es completo.

Una forma conocida de introducir una norma en un espacio lineal consiste en definir en este el producto escalar o producto interior  $(\cdot, \cdot)$ .

**Lema 1.1.** *Sea  $\mathbf{E}$  un espacio con producto interno. Entonces la función  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ , con  $u \in \mathbf{E}$ , es una norma en  $\mathbf{E}$ .*

Los espacios dotados de un producto interno son llamados *espacios producto interno*. Un espacio lineal real normado  $\mathbf{E}$ , en el cual la norma está generada por un producto escalar, es decir,  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ , se llama *espacio euclidiano*. Un espacio euclidiano completo es llamado *espacio de Hilbert  $\mathbf{H}$* . Todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach (pero no viceversa).

**Lema 1.2.** *(Regla del paralelogramo) Sea  $\mathbf{V}$  un espacio real normado. Si la norma  $\|\cdot\|$  satisface la regla del paralelogramo*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad \forall u, v \in \mathbf{V} \quad (1.1)$$

*entonces ésta induce un producto interno en  $\mathbf{V}$ . Este producto interno es definido por la relación*

$$(u, v) = \frac{1}{4} \left( \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 \right) \quad (1.2)$$

**Demostración:** Ejercicio. Se puede ver la página 392 de [6]. ■

### 1.1.1 Espacios $L^p(\Omega)$

Se introducen algunos espacios de Hilbert que resultan naturales para la

formulación variacional de los problemas de valor de frontera a considerar. Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^d$ , con  $d = 2$  o  $3$ , y  $p \in \mathbb{R}$  con  $p \geq 1$ . Una función  $u$  definida en  $\Omega$  se dice que pertenece a  $\mathbf{L}^p(\Omega)$  si  $u$  es medible y la integral (Lebesgue)  $\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$ , esto es:

$$\mathbf{L}^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

y

$$\mathbf{L}^{\infty}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \right\}$$

donde el supremo se toma sobre todos los subconjuntos de  $\Omega$  con medida distinta de cero (es decir, se cumple casi en todas parte de  $\Omega$  excepto en un conjunto de medida cero). Estos espacios se dotan de norma:

$$\|u\|_p = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \|u\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

Un caso especial de estos espacios, lo representa el espacio

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \int_{\Omega} u^2 d\Omega < \infty \right\}$$

dotado del producto escalar y norma

$$(u, v)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv d\Omega, \quad \|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \left[ \int_{\Omega} (v(x))^2 d\Omega \right]^{1/2} = (v, v)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^{1/2}$$

**Observación:** *Al menos en los aspectos más prácticos, para tener una idea de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , es suficiente usar la integral de Riemann; desde este punto de vista se puede pensar en una función  $v \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  como una función continua a trozos, posiblemente no acotada, tal que  $\int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty$ .*

### 1.1.2 Complementos ortogonales en espacios de Hilbert

Sea  $\mathbf{U}$  un espacio con producto interno y  $\mathbf{V}$  un subespacio de  $\mathbf{U}$ ; se define el *complemento ortogonal*  $\mathbf{V}^{\perp}$  de  $\mathbf{V}$  como el conjunto

$$\mathbf{V}^{\perp} = \{w \in \mathbf{U}; (w, v) = 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}\}$$

esto es,  $\mathbf{V}^{\perp}$  consiste de todos los elementos de  $\mathbf{U}$  que son ortogonales a todo elemento de  $\mathbf{V}$ . Si  $w$  pertenece a  $\mathbf{V}^{\perp}$ , se dice que  $w$  es ortogonal a  $\mathbf{V}$  y se escribe  $w \perp \mathbf{V}$ . Puesto que  $(v, v) = 0$  implica que  $v = 0$ , está claro que el único miembro tanto de  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{V}^{\perp}$  es el elemento cero:  $\mathbf{V} \cap \mathbf{V}^{\perp} = \{0\}$ .

**Teorema 1.1.** *(El teorema de la proyección)* Sea  $\mathbf{V}$  un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert  $\mathbf{H}$ . Entonces cada  $u \in \mathbf{H}$  se puede escribir únicamente en la forma

$$u = v + w, \quad v \in \mathbf{V}, \quad w \in \mathbf{V}^\perp$$

esto es,  $\mathbf{H} = \mathbf{V} \oplus \mathbf{V}^\perp$ .

### 1.1.3 Operadores en espacios lineales normados

Sean  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{F}$  dos espacios lineales normados. Se dice que sobre el conjunto  $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$  se da un operador  $A$  con valores en  $\mathbf{F}$  ( $A : \mathbf{D} \subset \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ , operador que actúa de  $\mathbf{E}$  en  $\mathbf{F}$ ), si a cada elemento  $x \in \mathbf{D}$  se pone en correspondencia por una regla determinada un elemento  $Ax \in \mathbf{F}$ .

El conjunto  $\mathbf{D}$  es el *dominio de definición* del operador  $A$  ( $Dom(A)$ ). El conjunto de todos los elementos  $Ax$  es el campo de valores del operador  $A$  y se denota por  $R(A)$  (*Rango de A o imagen de A*)

$$R(A) = \{v \in \mathbf{F}, A(u) = v \text{ para algún } u \in \mathbf{E}\}$$

El *espacio nulo*  $N(A)$  de  $A$  es el conjunto de todos los elementos del dominio de  $A$  cuya imagen es cero:

$$N(A) = \{u \in \mathbf{E} : Au = 0\}.$$

Un operador  $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$  es *inyectivo* (o uno-a-uno), si dos elementos distintos  $u_1 \neq u_2$  de  $\mathbf{E}$  son aplicados en dos elementos distintos de  $\mathbf{F}$ . Esto es,  $A$  es 1 - 1 si  $u_1 \neq u_2$  implica  $Au_1 \neq Au_2$ .

**Teorema 1.2.** *Un operador  $A$  es 1 - 1 si, y solo si, el espacio nulo de  $A$  es  $N(A) = \{0\}$ .* ■

Un operador  $A$  se llama *lineal*, si

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$$

para todos los  $u, v \in Dom(A)$  y  $\alpha, \beta$  números del campo  $\mathbf{K}$ . El espacio lineal de todos los operadores lineales  $A : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$  se denota por  $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ .

**Ejemplo 1.1.** Uno de los operadores lineales más importantes del Análisis es el operador de diferenciación ( $Dy(x) = \frac{d}{dx}y(x) = y'(x)$ ), que puede ser considerado en diferentes espacios. Este operador no está definido sobre todo el espacio de las funciones continuas  $\mathbf{C}[a, b]$ , sino en el espacio más reducido  $\mathbf{C}^1[a, b]$  de las funciones que tienen primera deri-

vada continua y su campo de valores es  $\mathbf{C}[a, b]$

$$\frac{d^n}{dx^n} : \mathbf{C}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{C}[a, b]$$

No resulta muy conveniente considerar el operador que actúa de  $\mathbf{C}^1[a, b]$  en  $\mathbf{C}[a, b]$ , ya que no se puede aplicar dos veces a cualquier función de  $\mathbf{C}^1[a, b]$ . Si se considera el operador de diferenciación en el espacio aún más reducido  $\mathbf{C}^2[a, b]$ , se puede considerar la ecuación diferencial  $y''(x) + y(x) = f(x)$ , o en forma de operadores  $Ly(x) = y''(x) + y(x) = f(x)$ , donde  $L$  es un operador de  $\mathbf{C}^2[a, b]$  en  $\mathbf{C}[a, b]$ . ■

Un operador lineal  $A$  se llama *acotado*, si existe una constante  $M > 0$  tal que para cualquier  $x \in \text{Dom}(A)$  se cumple que

$$\|Ax\|_F \leq M \|x\|_E$$

donde  $\|\cdot\|_E$  es la norma en  $\mathbf{E}$  y  $\|\cdot\|_F$  es la norma de  $\mathbf{F}$ . La menor de las constantes  $M$ , para la que se cumple la desigualdad anterior, se llama *norma del operador* y se denota mediante  $\|A\|$ .

De la definición de norma se deduce que

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_F$$

es decir, la cota superior mínima de los valores que toma  $\|Ax\|_F$  sobre la bola unitaria del espacio  $\mathbf{E}$  se llama norma del operador lineal  $A$ . Es evidente la siguiente propiedad

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}$$

En un espacio de dimensión finita, todo operador lineal es acotado.

Para resolver las ecuaciones del tipo  $Ax = y$ , se introduce el concepto de operador inverso  $A^{-1}$ . Sea  $A$  un operador de  $\mathbf{E}$  en  $\mathbf{F}$ . Si a cada  $y \in \mathbf{F}$  le corresponde uno y solo un  $x \in \mathbf{E}$ , para el cual  $Ax = y$ , entonces, por esta correspondencia se define el operador  $A^{-1}$  inverso de  $A$  con dominio de definición  $\mathbf{F}$  y campo de valores  $\mathbf{E}$ .

El operador inverso  $A^{-1}$  existe si, y solo si, la ecuación homogénea  $Ax = 0$  posee solo la solución trivial. El operador inverso  $A^{-1}$  existe y es acotado si, y solo si, existe una constante  $\delta > 0$  tal que

$$\|Ax\|_F \geq \delta \|x\|_E$$

para todos los  $x \in \mathbf{E}$ .

### 1.1.4 Operadores en un espacio de Hilbert real

Sea  $A$  un operador lineal acotado que actúa en el espacio de Hilbert real  $\mathbf{H}$ . De acuerdo con la definición general de norma de un operador, se tiene que

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \sqrt{(Ax, Ax)/(x, x)}, \quad x \in \mathbf{H}$$

Por consiguiente, se cumple la desigualdad  $(Ax, Ax) \leq \|A\|^2 (x, x)$  para cualquier  $x \in \mathbf{H}$ . Utilizando la desigualdad de Cauchy, se obtiene

$$(Ax, x) - \|Ax\| \|x\| = \sqrt{(Ax, Ax)/(x, x)} \leq \sqrt{\|A\|^2 (x, x)^2} = \|A\| (x, x)$$

El operador  $A^*$  se llama *operador conjugado* de  $A$ , si para todos los  $x, y \in \mathbf{H}$  se cumple que  $(Ax, y) = (x, A^*y)$ . El operador  $A$  se llama *autoconjugado* (simétrico) en  $\mathbf{H}$ , si  $A^* = A$ , es decir,  $(Ax, y) = (x, Ay)$ , para cualesquiera  $x, y \in \mathbf{H}$ .

**Ejemplo 1.2.** Sea el operador  $A$  una matriz de orden  $m \times n$ ,  $A = (a_{ij})$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$   $j = 1, 2, \dots, n$ , y sean  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  dos vectores de dimensiones  $n$  y  $m$ , respectivamente. Entonces el producto escalar

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i = \sum_{j=1}^n x_j \left( \sum_{i=1}^m a_{ji} y_i \right) = (\mathbf{x}, A^*\mathbf{y})$$

De aquí se deduce que el operador conjugado de la matriz  $A$  es la matriz transpuesta  $A' = (a_{ji})$ .

Si el operador  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $n$ ,  $A = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  y los vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  son de dimensiones  $n$ , entonces, para el producto escalar se obtiene

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i = \sum_{j=1}^n x_j \left( \sum_{i=1}^n a_{ji} y_i \right) = (\mathbf{x}, A'\mathbf{y})$$

De aquí se deduce que para que el operador  $A$  sea autoconjugado, la matriz cuadrada  $A$  tiene que ser simétrica ( $A = A'$ ). ■

El operador  $A$  que actúa en el espacio de Hilbert  $\mathbf{H}$  se llama *positivo* ( $A > 0$ ) si  $(Ax, x) > 0$  para todos los  $x \in \mathbf{H}$ , excepto  $x = 0$ . El operador  $A$  es no negativo ( $A \geq 0$ ), si  $(Ax, x) \geq 0$  para todos los  $x \in \mathbf{H}$ .

**Ejemplo 1.3.** Sea el espacio  $\mathbf{F} = \mathbf{C}[0, 1]$  con producto escalar  $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$  y considere el operador  $Ly = -y''$ , definido en el conjunto

$\mathbf{E} = \{y \in \mathbf{C}^2[0, 1]; y(0) = y(1) = 0\}$ ;  $\mathbf{E}$  es un subespacio lineal de  $\mathbf{F}$  y  $Ly \in \mathbf{F}$  para todo  $y \in \mathbf{E}$  (es decir,  $y''(t)$  es una función continua). Para todo  $y, z \in \mathbf{E}$ , se tiene que

$$(Ly, z) = - \int_0^1 Ly(t) z(t) dt = - \int_0^1 y''(t) z(t) dt$$

Integrando esta expresión por partes y teniendo en cuenta que  $y(0) = y(1) = z(0) = z(1) = 0$ , se obtiene

$$(Ly, z) = - \int_0^1 y''(t) z(t) dt = -z(t) y'(t) \Big|_0^1 + \int_0^1 y'(t) z'(t) dt$$

es decir,

$$(Ly, z) = \int_0^1 y'(t) z'(t) dt \tag{1.3}$$

Análogamente, se obtiene que  $(Lz, y) = \int_0^1 y'(t) z'(t) dt$ . Luego, se puede concluir que  $(Ly, z) = (Lz, y) = (y, Lz)$ , Por tanto, el operador  $L$  es simétrico.

Por otro lado, de (1.3) se obtiene que  $(Ly, y) = \int_0^1 [y'(t)]^2 dt > 0$ . Si se tuviera que  $(Ly, y) = \int_0^1 [y'(t)]^2 dt = 0$ , esto implicaría que  $y'(t) \equiv 0$ , ya que  $y'(t)$  es una función continua. Entonces  $y(t) = k$ , donde  $k$  es una constante. Por otra parte, se tiene que  $y(0) = 0$ , por lo que  $k = 0$  y se obtendría que  $y(t) = k = 0$ . Por consiguiente,  $(Ly, y) > 0$  excepto cuando  $y(t) = 0$ , y se puede afirmar que  $L$  es un operador positivo. ■

Ahora, se puede utilizar el operador  $L$  para definir un nuevo producto escalar en  $\mathbf{E}$ , es decir,  $(y, z)_L = (Ly, z)$ . A este producto escalar se le llama con frecuencia *producto escalar energético* o *energía del operador*  $L$ . A partir de este ejemplo, se puede enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.** *Todo operador lineal  $A$ , simétrico y definido positivo de un espacio lineal  $\mathbf{E}$  en un espacio lineal  $\mathbf{F}$  que tiene producto escalar  $(\cdot, \cdot)$ , da lugar a un segundo producto escalar energético  $(\cdot, \cdot)_A$  definido por  $(y, z)_A = (Ay, z)$ , para cada  $y, z \in \mathbf{E}$ , siempre que  $\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$ .*

Se puede ahora introducir el *espacio energético*  $\mathbf{H}_A$  que se compone de los elementos  $y, z, \dots \in \mathbf{H}$  con producto escalar  $(y, z)_A = (Ay, z)$  y *norma energética*

$$\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}$$

## 1.2 Funcionales lineales

Un *funcional lineal* (o *forma lineal*) es un caso particular de un operador lineal, es decir, es un operador lineal que transforma el espacio dado  $\mathbf{E}$  en valores de  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ . El espacio de todos los funcionales lineales de un espacio normado  $\mathbf{E}$  sobre su cuerpo,  $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{K})$ , se le llama *espacio dual* de  $\mathbf{E}$ , y suele denotarse por  $\mathbf{E}'$ .

**Ejemplo 1.4.** Algunos ejemplos de funcionales:

- Sea  $\mathbf{E} = \mathbb{R}^n$ . El operador  $F : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$  definido como el promedio de las componentes del vector  $f(\mathbf{v}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$ , para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{E}$ , es un funcional lineal sobre  $\mathbf{E}$ , es decir,  $f \in \mathbf{E}'$ .
- El operador integral  $A : \mathbf{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por  $A(f) = \int_a^b f(x) dx$ , para todo  $f \in \mathbf{C}[a, b]$ , es un funcional lineal sobre  $\mathbf{C}[a, b]$ .

■

**Teorema 1.4. (Teorema de Representación de Riesz)** *Sea  $\mathbf{H}$  un espacio de Hilbert y sea  $F$  un funcional lineal continuo de  $\mathbf{H}'$ . Entonces existe un único elemento  $u \in \mathbf{H}$  tal que*

$$F(v) = (u, v) \quad \forall v \in \mathbf{H}$$

Además,  $\|F\|_{\mathbf{H}'} = \|u\|_{\mathbf{H}}$ .

**Demostración:** Nos restringimos, nuevamente, a espacios de Hilbert reales (véase, por ejemplo, [32] para el caso complejo). En primer lugar, se prueba la unicidad: supongamos que existen dos elementos  $u, w \in \mathbf{H}$  tal que

$$F(v) = (v, u) = (v, w) \quad \forall v \in \mathbf{H}$$

luego, por la linealidad del producto interno

$$(v, u - w) = 0 \quad \forall v \in \mathbf{H}$$

Tomando  $v = u - w$ , se tiene que  $u = w$ .

A continuación se prueba la existencia: si el espacio nulo  $N(F) = \mathbf{H}$ , entonces  $F$  es el funcional lineal cero y se puede definir  $u = 0$ . Si  $N(F) \neq \mathbf{H}$ , entonces existe un elemento  $v_0 \in \mathbf{H}$  tal que  $F(v_0) \neq 0$ . Ya que  $N(F)$  es un subespacio cerrado de  $\mathbf{H}$ , es posible escribir  $\mathbf{H}$  como una suma directa  $\mathbf{H} = N(F) \oplus N(F)^\perp$ . Así, el elemento  $v_0 \in \mathbf{H}$  puede

descomponerse en la suma  $v_0 = v_1 + v_2$ ,  $(v_1, v_2) = 0$ , donde  $v_1 \in N(F)$  y  $v_2 \in N(F)^\perp$ . En particular, si  $F(v_2) \neq 0$ , para  $z = vF(v_2) - F(v)v_2$  se cumple lo siguiente:

$$F(z) = F(v)F(v_2) - F(v)F(v_2) = 0 \quad \forall v \in \mathbf{H}$$

así,  $z \in N(F)$  para todo  $v \in \mathbf{H}$ . Ahora, ya que  $v_2 \in N(F)^\perp$ , se tiene

$$(v_2, z) = (v_2, vF(v_2) - F(v)v_2) = F(v_2)(v_2, v) - F(v)(v_2, v_2) = 0$$

lo que implica que

$$F(v) = F(v_2)(v_2, v)/\|v_2\|^2 \quad \forall v \in \mathbf{H}$$

Finalmente, se tiene

$$u = \frac{f(v_2)}{\|v_2\|^2} v_2 \tag{1.4}$$

Queda por demostrar que  $\|F\|_{\mathbf{H}'} = \|u\|_{\mathbf{H}}$ . De la desigualdad de Cauchy-Schwarz ( $|(u, v)|^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$ ), se tiene

$$\|F\| = \sup_{v \neq 0} \frac{|f(v)|}{\|v\|} = \sup_{v \neq 0} \frac{(u, v)}{\|v\|} \leq \sup_{v \neq 0} \frac{\|u\| \|v\|}{\|v\|} = \|u\|$$

Además,

$$\|F(u)\|^2 = |(u, u)| = \|u\|^2 \leq \|F\| \|u\|$$

así,  $\|F\| \geq \|u\|$ . Por lo tanto,  $\|F\|_{\mathbf{H}'} = \|u\|_{\mathbf{H}}$ . ■

El procedimiento que se muestra en la prueba del Teorema de Representación de Riesz nos permite construir los representantes de la forma lineal sobre espacios de Hilbert de forma explícita, a través de (1.4).

**Ejemplo 1.5.** Sea  $f$  un funcional de  $\mathbb{R}^n$  ( $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ), entonces  $f(x)$  es un número real y, de acuerdo al Teorema de Representación de Riesz, se puede encontrar un único punto  $y \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(x) = x \cdot y$ .

Por ejemplo, si  $f$  es definida por  $f(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  para  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , entonces se puede encontrar  $y = (y_1, \dots, y_n)$  tal que  $x \cdot y = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ . Basta tomar  $y = (1, 1, \dots, 1)$ . ■

**Ejemplo 1.6.** Sea  $f$  un funcional lineal de  $\mathbf{L}^2(0, 1)$  definido por  $f : \mathbf{L}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $v \rightarrow f(v) = \int_0^{1/2} v(x) dx$ . De acuerdo al teorema, existe un único  $u \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  con la propiedad que

$$f(v) = (u, v) \quad \text{o} \quad \int_0^{1/2} v(x) dx = \int_0^1 u(x)v(x) dx$$

Claramente,  $u(x)$  es la función

$$u(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

■

### 1.3 Distribuciones y Espacios de Sobolev $H^m(\Omega)$

*Notación multi-índice:* Sea  $\mathbb{Z}_+^n$  el conjunto de todas las  $n$ -uplas de enteros no negativos: un miembro de  $\mathbb{Z}_+^n$  es usualmente denotado por  $\alpha$  o  $\beta$ , por ejemplo,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , donde cada  $\alpha_i \geq 0$ . Se denota por  $|\alpha|$ , la suma  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  y por  $\mathbf{D}^\alpha u$  la derivada parcial

$$\mathbf{D}^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Así, si  $|\alpha| = m$ , entonces  $\mathbf{D}^\alpha u$  denota una de las derivada parciales de orden  $m$  de  $u$ .

**Definición 1.1.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un subconjunto abierto y acotado. El espacio de distribuciones (funciones infinitamente diferenciables que, junto con todas sus derivadas, tienen soporte compacto) es definido por*

$$\mathbf{C}_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in \mathbf{C}^\infty(\Omega) : \text{sop}(\varphi) \subset \Omega; \text{sop}(\varphi) \text{ es compacto}\}$$

donde  $\text{sop}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$ .

**Definición 1.2.** *Una distribución en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , también llamada función generalizada, será un funcional lineal continuo que actúa sobre  $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ . Esto es,  $\phi : \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ .*

**Ejemplo 1.7.** El funcional delta de Dirac, dado por

$$\delta : \mathbf{C}_0^\infty(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \delta(u) = \int_\alpha^\beta \delta(x - a)u(x)dx = u(a)$$

con  $\alpha < x < \beta$ , define una distribución. La continuidad de  $\delta$  se sigue de

$$|\delta(u)| = |u(a)| \leq \sup |u(x)| = \|u\|_\infty$$

■

Si  $f$  es una función localmente integrable en  $\Omega$  ( $\int_K |f|dx < \infty$ , para cada subconjunto  $K$  cerrado de  $\Omega$ ) entonces se puede definir una distribución asociada con  $f$  por

$$F : \mathbf{C}_0^\infty \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(\phi) = \int_{\Omega} f \phi \, dx, \quad \phi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$$

Una distribución que es generada por una función localmente integrable se llama una *distribución regular*, en caso contrario, se dice que es una distribución singular.

**Ejemplo 1.8.** La función  $\mathbf{H}(x)$ , definida en  $[-1, 1]$  por

$$\mathbf{H}(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

es localmente integrable y genera la distribución  $\mathbf{H}$  que satisface

$$\mathbf{H}(\phi) = \int_{-1}^1 \mathbf{H}(x) \phi(x) \, dx \quad \circ \quad \mathbf{H}(\phi) = \int_0^1 \phi(x) \, dx$$

■

**Teorema 1.5.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  abierto,  $u \in \mathbf{C}^m(\Omega)$  y  $\alpha$  un multi-índice tal que  $|\alpha| \leq m$ . Entonces

$$\int_{\Omega} D^\alpha u(x) \phi(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \phi(x) \, dx, \quad \forall \phi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) \quad (1.5)$$

Ya que  $u \in \mathbf{C}^m(\Omega)$  esta genera una distribución, denotada por  $u$ , tal que  $u(\phi) = \int_{\Omega} u \phi \, dx$ , o ya que  $\mathbf{D}^\alpha \phi$  también pertenece a  $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ ,

$$u(\mathbf{D}^\alpha \phi) = \int_{\Omega} u \mathbf{D}^\alpha \phi \, dx$$

Además,  $\mathbf{D}^\alpha u$  es continua así que puede generar una distribución regular (denotada por  $\mathbf{D}^\alpha u$ ) que satisface

$$\mathbf{D}^\alpha u(\phi) = \int_{\Omega} (\mathbf{D}^\alpha u) \phi \, dx$$

De esto se tiene que (1.5) puede escribirse como

$$\mathbf{D}^\alpha u(\phi) = (-1)^{|\alpha|} u(\mathbf{D}^\alpha \phi) \quad \forall \phi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) \quad (1.6)$$

Se toma (1.6) como la base para definir la derivada de cualquier distribución  $f$ , como sigue: la *derivada parcial generalizada* (o la  $\alpha$ -ésima *derivada de distribución*) de una distribución  $f$  es definida por la distribución, denotada por  $\mathbf{D}^\alpha f$ , que satisface

$$\mathbf{D}^\alpha f(\phi) = (-1)^{|\alpha|} f(\mathbf{D}^\alpha \phi), \quad \phi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) \quad (1.7)$$

Así, se usa la misma notación para la derivada generalizada de una dis-

tribución como la usada para la derivada convencional de una función. De hecho, si la función pertenece a  $\mathbf{C}_0^\infty(\bar{\Omega})$  entonces la derivada generalizada coincide con la  $\alpha$ -ésima derivada parcial convencional para  $|\alpha| \leq m$ .

**Ejemplo 1.9.** La primera derivada generalizada de la función  $\mathbf{H}(x)$  es la distribución  $\mathbf{H}'$  que satisface

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'(\phi) &= (-1)^1 \mathbf{H} \left( \frac{d\phi}{dx} \right) = - \int_{-1}^1 \mathbf{H}(x) \frac{d\phi}{dx} dx \quad (\mathbf{H} \text{ es loc. integrable}) \\ &= - \int_0^1 \frac{d\phi}{dx} dx = -\phi(x) \Big|_0^1 = \phi(0) = \delta(\phi), \quad \phi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

así,  $\mathbf{H}' = \delta$ , esto es, la derivada  $H'$  de la función  $H$  es el delta de Dirac. ■

Una función  $u$  localmente integrable genera una distribución, también denotada por  $u$ , que satisface

$$u(\phi) = \int_{\Omega} u \phi dx \quad \phi \in \mathbf{C}_o^\infty(\Omega)$$

Además, la distribución  $u$  tiene derivada de distribución de todo orden, en particular, la derivada  $D^\alpha u$  es definida por (1.7). Por supuesto,  $D^\alpha u$  puede o no puede ser una distribución regular; si es una distribución regular, entonces naturalmente esta es generada por una función localmente integrable  $D^\alpha u(x)$ , así que

$$D^\alpha u(\phi) = \int_{\Omega} D^\alpha u(x) \phi(x) dx \quad (1.8)$$

Se sigue en este caso de (1.7) y (1.8) que las funciones  $u$  y  $D^\alpha u$  están relacionados por

$$\int_{\Omega} D^\alpha u(x) \phi(x) dx = (-1)^m \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \phi(x) dx \quad (1.9)$$

para  $|\alpha| = m$ . La función  $D^\alpha u$ , obtenida de esta manera, es llamada la  $\alpha$ -ésima *derivada débil* de la función  $u$ . Por supuesto, si  $u$  es suficientemente suave para pertenecer a  $\mathbf{C}^m(\bar{\Omega})$ , entonces estas derivadas débiles coinciden con sus derivadas clásicas para  $|\alpha| \leq m$ .

**Ejemplo 1.10.** La función  $u(x) = |x|$  pertenece a  $\mathbf{C}[-1, 1]$ , pero la derivada clásica  $u'$  no existe en el origen. Sin embargo, la derivada débil existe:

$$\begin{aligned}
 D^\alpha u(x) &= (-1)^m \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \phi(x) dx = - \int_{\Omega} |x| \phi'(x) dx \\
 &= - \int_{-1}^0 x \phi'(x) dx + \int_0^1 x \phi'(x) dx = - \int_{-1}^0 \phi(x) dx + \int_0^1 \phi(x) dx \\
 &= \int_{-1}^1 H(x) \phi(x) dx
 \end{aligned}$$

donde

$$H(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Por tanto,  $D^\alpha u = D' u = u' = H(x)$ . Nótese además que  $u' \in L_2(-1, 1)$ , la cual es, por supuesto, localmente integrable. ■

El ejemplo anterior ilustra una diferencia fundamental entre las derivadas débil y clásica. La derivada clásica, si existe, debe ser por lo menos continua. Una derivada débil, por otra parte, necesita solamente ser localmente integrable.

### 1.3.1 El espacio de Sobolev

Los espacios de Sobolev son definidos como sigue:

**Definición 1.3. (Espacio de Sobolev)** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto abierto,  $k \geq 1$  un entero positivo y  $p \in [1, +\infty)$ . Se define

$$\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) = \{f \in \mathbf{L}^p(\Omega) : D^\alpha f \text{ existe y pertenece a } \mathbf{L}^p(\Omega) \ \forall \alpha, \ |\alpha| \leq k\}$$

Para  $1 < p < \infty$  la norma  $\|\cdot\|_{k,p}$  es definida como

$$\|f\|_{k,p} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha f|^p dx \right)^{1/p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p}$$

Para  $p = \infty$ , se tiene

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$$

En el caso especial  $p = 2$  se abrevia  $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) = \mathbf{H}^k(\Omega)$ .

En el espacio  $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$  se usa la siguiente seminorma estándar:

$$|f|_{k,p} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha f|^p dx \right)^{1/p} = \left( \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p}$$

para  $1 \leq p < \infty$ , y

$$|f|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_\infty$$

**Teorema 1.6.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  abierto,  $k \geq 1$  un entero positivo y  $p \in [1, +\infty]$ . Entonces el espacio de Sobolev  $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach.*

**Teorema 1.7.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  abierto,  $k \geq 1$  un entero positivo. Entonces el espacio de Sobolev  $\mathbf{H}^k(\Omega) = \mathbf{W}^{k,2}(\Omega)$ , dotado del producto interno,*

$$(f, g)_{k,2} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f D^\alpha g dx = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

*es un espacio de Hilbert.*

Un subespacio  $\mathbf{H}^k(\Omega)$  de uso frecuente en el resto del texto es

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega); v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

donde,  $\mathbf{H}^1(a, b) = \{u : u \text{ y } u' \in \mathbf{L}^2(a, b)\}$  representa el espacio lineal de funciones que junto con su primera derivada son de cuadrado integrable, y  $\partial\Omega$  denota el contorno del dominio. La formulación débil de una EDP de segundo orden con condiciones de contorno Dirichlet, por lo general, se lleva acabo en este espacio.

La desigualdad de Poincaré-Friedrichs dice que la  $H^k$ -seminorma

$$|u|_{k,2} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2}$$

es una norma en el espacio  $\mathbf{H}_0^k(\Omega)$  en todo dominio acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Esta norma, además, es equivalente a la  $H^k$ -norma

$$\|u\|_{k,2} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2}$$

La equivalencia de  $|\cdot|_{k,2}$  y  $\|\cdot\|_{k,2}$  en el espacio  $\mathbf{H}_0^k(\Omega)$  encuentra aplicaciones en el análisis de unicidad de soluciones de EDP así como también en la práctica computacional.

**Teorema 1.8.** *(Desigualdad básica de Poincaré-Friedrichs en  $\mathbf{H}_0^k(\Omega)$ ) Supongamos que el dominio acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  está contenido en un cubo  $d$ -dimensional con longitud en sus aristas  $C > 0$ . Entonces*

$$\|u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C|u|_{1,2} \quad \forall u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

**Teorema 1.9.** *(Desigualdad general de Poincaré-Friedrichs en  $\mathbf{H}_0^k(\Omega)$ ) Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un dominio acotado. Entonces la seminorma  $|\cdot|_{k,2}$  es una*

norma en el espacio  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , equivalente a la norma  $\|\cdot\|_{k,2}$ . Si  $\Omega$  está contenido en un cubo  $d$ -dimensional con longitud en sus aristas  $C > 0$ . Entonces

$$|u|_{k,2} \leq \|u\|_{k,2} \leq (1 + C)^k |u|_{k,2} \quad \forall u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

**Ejemplo 1.11.** Considere la función  $u(x)$  definida sobre  $\Omega = (0, 2)$  por

$$u(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 2x^2 - 2x + 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Se tiene entonces que

$$v(x) = u'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 4x - 2, & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

la cual es una función continua. La derivada (débil) de esta función es

$$w(x) = u''(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x \leq 1 \\ 4, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Por inspección se ve que  $u, u'$  y  $u''$  pertenecen a  $\mathbf{L}^2(0, 2)$ ; sin embargo, la derivada (generalizada) de  $u''$  es  $u''' = 2\delta \in \mathbf{L}^2(0, 2)$ . De esto se tiene que  $u$  es un miembro de  $\mathbf{H}^2(0, 2)$ , la función  $v$  pertenece a  $\mathbf{H}^1(0, 2)$  y  $w$  pertenece a  $\mathbf{L}^2(0, 2) = \mathbf{H}^0(0, 2)$ . Las respectivas normas son:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2}^2 &= (u, u)_{H^2} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 2} (D^\alpha u)^2 dx = \int_{\Omega} \sum_{\alpha=0}^2 (D^\alpha u)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} [u^2 + (u')^2 + (u'')^2] dx = 71.37 \\ \|v\|_{H^1}^2 &= \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 1} (D^\alpha v)^2 dx = \int_{\Omega} [v^2 + (v')^2] dx = 39, \\ \|w\|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega} w^2 dx = \int_0^1 4 dx + \int_1^2 16 dx = 4x \Big|_0^1 + 16x \Big|_1^2 = 20 \end{aligned}$$

■

## 1.4 Formas bilineales

Otro tipo especial de operador que pueden ocurrir muy frecuentemente en el estudio de problemas de valor de frontera es uno que mapea un par de elementos a los números reales, y que es lineal en cada uno de estos.

$B$  es una *forma bilineal* si

$$B : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbf{U}, \mathbf{V} \text{ espacios lineales}),$$

$$B(\alpha u + \beta w, v) = \alpha B(u, v) + \beta B(w, v), \quad u, w \in \mathbf{U}, \quad v \in \mathbf{V}$$

$$B(u, \alpha v + \beta w) = \alpha B(u, v) + \beta B(u, w), \quad u \in \mathbf{U}, \quad v, w \in \mathbf{V}$$

**Ejemplo 1.12.** Sea  $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{C}^1[a, b]$ , entonces el operador definido por

$$B : \mathbf{C}^1[a, b] \times \mathbf{C}^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{con} \quad B(u, v) = \int_a^b (uv + u'v') dx$$

es una forma bilineal. ■

**Ejemplo 1.13.** Sean  $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ ; el operador  $B(x, y) = x \cdot y$ , es una forma bilineal. Un ejemplo de una forma no lineal es:

$$B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad B(x, y) = |x| + |y|$$

aquí  $B(\alpha x + \beta z, y) = |\alpha x + \beta z| + |y| \neq \alpha B(x, y) + \beta B(z, y)$ . ■

### 1.4.1 Formas bilineales continuas

Consideremos una forma bilineal  $B : \mathbf{U} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  son espacios lineales normados. Si existe una constante  $k > 0$  tal que

$$|B(u, v)| \leq k \|u\| \|v\| \quad \text{para todo } u \in \mathbf{U}, v \in \mathbf{V} \quad (1.10)$$

entonces  $B$  es llamada una *forma bilineal continua* (esta definición debe ser comparada con la del operador acotado, o funcional lineal acotado).

A continuación, se discute un ejemplo que es típico de una clase de problemas que aparecerán más adelante.

**Ejemplo 1.14.** Se puede mostrar que  $\mathbf{H}^1(a, b)$  es un espacio normado completo con la norma definida por

$$\|u\|_1^2 = \int_a^b [u^2 + (u')^2] dx$$

A partir de este espacio, se define la forma bilineal

$$B : \mathbf{H}^1(a, b) \times \mathbf{H}^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad B(u, v) = \int_a^b [u'v' + cuv] dx$$

donde  $c(x)$  es una función positiva acotada con  $c_1 \geq c(x) \geq c_2 > 0$  para  $x \in (a, b)$ . Para mostrar que  $B$  es continua considere

$$\begin{aligned}
 |B(u, v)| &= \left| \int_a^b [u'v' + cuv] dx \right| \leq \left| \int_a^b [u'v' + c_1uv] dx \right| \\
 &= |(u', v') + c_1(u, v)| \leq |(u', v')| + c_1|(u, v)| \\
 &\leq \|u'\| \|v'\| + c_1 \|u\| \|v\| \quad (\text{Se usa desigualdad de Schwarz})
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|B(u, v)|^2 \leq \left[ \|u'\| \|v'\| + c_1 \|u\| \|v\| \right]^2 \tag{1.11}$$

Utilizando la desigualdad de Schwarz para  $\mathbb{R}^n$ :

$$\left( \sum a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum a_i^2 \right) \left( \sum b_i^2 \right) \quad \text{para } a, b \in \mathbb{R}^n$$

Asumiendo que  $n = 2$ ,  $a = (c_1 \|u\|, \|u'\|)$  y  $b = (\|v\|, \|v'\|)$ , de (1.11) se tiene que

$$\begin{aligned}
 |B(u, v)|^2 &\leq \left[ c_1^2 \|u\|^2 + \|u'\|^2 \right] \left[ \|v\|^2 + \|v'\|^2 \right] \\
 &= \left[ c_1^2 \|u\|^2 + \|u'\|^2 \right] \|v\|_1^2 \\
 &\leq k^2 \left[ \|u\|^2 + \|u'\|^2 \right] \|v\|_1^2 = k^2 \|u\|_1^2 \|v\|_1^2
 \end{aligned}$$

con  $k = \max(1, c_1)$ . Tomando el cuadrado a ambos lados de la igualdad, se tiene que  $B$  es continua. ■

### 1.4.2 Formas bilineales H-elípticas

Dada una forma bilineal  $B : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\mathbf{H}$  es un espacio producto interno, se dice que  $B$  es H-elíptica, si existe una constante  $\alpha > 0$  tal que

$$B(v, v) \geq \alpha \|v\|_{\mathbf{H}}^2 \quad \forall v \in \mathbf{H}. \tag{1.12}$$

Así una forma H-elíptica es acotada inferiormente.

**Ejemplo 1.15.** Del ejemplo previo

$$\begin{aligned}
 |B(v, v)| &= \left| \int_a^b [(v')^2 + cv^2] dx \right| \geq \left| \int_a^b [(v')^2 + c_2v^2] dx \right| \\
 &\geq \alpha \left| \int_a^b [(v')^2 + v^2] dx \right| = \alpha \|v\|_1^2
 \end{aligned}$$

con  $\alpha = \min(1, c_2)$ , y así  $B$  es  $H^1$ -elíptica. ■

El teorema de representación de Riesz para funcionales lineales tiene una contraparte para formas bilineales. Supongamos que se tiene un espacio producto interno  $\mathbf{H}$ , un funcional lineal  $F$  de  $\mathbf{H}$  y un miembro  $u$  de  $\mathbf{H}$ ; entonces se puede definir una forma bilineal  $B$  continua,  $H$ -elíptica en  $\mathbf{H}$  de acuerdo a la regla

$$B : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathbf{H} \quad (1.13)$$

De la  $H$ -elíptica de  $B$  y continuidad de  $F$  se tiene

$$\alpha \|u\|^2 \leq B(u, u) = F(u) \leq \|F\| \|u\|$$

y así

$$\|u\|_1 \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right) \|F\|_{\mathbf{H}'} \quad (1.14)$$

En el sentido anterior, entonces,  $u$  y  $F$  generan la forma bilineal  $B$ . Ahora se prueba en sentido inverso: dada una forma bilineal  $B$  y un funcional lineal con las propiedades convenientes, entonces existe un único  $u \in \mathbf{H}$  satisfaciendo (1.13) y (1.14). Este es el teorema de Lax-Milgram.

**Ejemplo 1.16.** (*Producto interno energético, norma energética*) Sea  $\mathbf{H}$  un espacio de Hilbert y  $B : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal acotada, simétrica y  $H$ -elíptica. La forma bilineal define el producto interno  $(u, v)_e = B(u, v)$  en  $\mathbf{H}$ , llamado *producto interno energético*. La norma inducida por el producto interno energético,  $\|u\|_e = \sqrt{(u, u)_e}$  es llamada *norma energética*. ■

## 1.5 El Teorema de Lax-Milgram

En este apartado, se presenta y analiza el conocido Teorema de Lax-Milgram, el cual será aplicado, en los siguientes apartados, al estudio del buen comportamiento de las formulaciones variacionales de varios Problemas de Valor de Frontera lineales elípticos.

**Teorema 1.10.** (**El Teorema de Lax-Milgram**) *Sea  $\mathbf{H}$  un espacio de Hilbert y sea  $B : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal,  $H$ -elíptica, continua definida en  $\mathbf{H}$ . Entonces, dado cualquier funcional lineal  $F$  definida en  $\mathbf{H}$ , existe un único elemento  $u \in \mathbf{H}$  tal que*

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathbf{H} \quad (1.15)$$

además,

$$\|u\|_1 \leq \alpha^{-1} \|F\|_{\mathbf{H}'} \quad (1.16)$$

La prueba de este teorema es bastante larga, para hacerla más digerible será partida en una serie de cinco lemas.

**Lema 1.3.** *Dado cualquier  $u \in \mathbf{H}$  existe un único elemento  $w \in \mathbf{H}$  tal que*

$$B(u, v) = (w, v) \quad \forall v \in \mathbf{H} \quad (1.17)$$

**Demostración:** Dado cualquier  $u \in \mathbf{H}$ ,  $B(u, \cdot)$  es un funcional lineal acotado definido en  $\mathbf{H}$  ya que

$$B(u, \cdot) : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}, \quad B(u, v) \leq K' \|v\|$$

donde  $K' = K \|u\|$ . Ahora, de acuerdo al Teorema de Representación de Riesz, existe un único elemento  $w$  en  $\mathbf{H}$  tal que  $B(u, v) = (w, v)$ . ■

**Lema 1.4.** *Sea  $A$  el operador que asocia  $u$  con  $w$ :*

$$A : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}, \quad Au = w \quad (1.18)$$

*Entonces  $A$  es un operador lineal acotado.*

**Demostración:** Sea  $w_1, w_2 \in \mathbf{H}$ , del lema anterior se tiene asociado elementos  $u_1, u_2$  en  $\mathbf{H}$  definidos por

$$B(u_1, v) = (w_1, v), \quad B(u_2, v) = (w_2, v) \quad \forall v \in \mathbf{H}$$

Ya que  $B$  es bilineal,

$$B(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha B(u_1, v) + \beta B(u_2, v) = (\alpha w_1 + \beta w_2, v) \quad (1.19)$$

Además, de la definición de  $A$  se tiene

$$Au_1 = w_1, \quad Au_2 = w_2, \quad \text{así} \quad \alpha Au_1 + \beta Au_2 = \alpha w_1 + \beta w_2 \quad (1.20)$$

A partir de (1.17) - (1.19), se ve que  $A$  mapea  $\alpha u_1 + \beta u_2$  en  $\alpha w_1 + \beta w_2$  :

$$A(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha w_1 + \beta w_2 \quad (1.21)$$

La linealidad de  $A$  se sigue de (1.20) y (1.21).  $A$  es acotado, pues tomando  $v = Au$  en (1.17) y usando la continuidad de  $B$  y (1.18),

$$K \|u\| \|Au\| \geq B(u, Au) = (w, Au) = \|Au\|^2$$

Entonces,  $\|Au\| \leq K \|u\|$ . ■

**Lema 1.5.**  *$A$  es uno-uno con inversa  $A^{-1}$  acotada.*

**Demostración:** Sea  $R(A)$  el rango de  $A$  (por supuesto,  $R(A) \subset \mathbf{H}$ ). Se debe mostrar que  $Az = 0$  solo para  $z=0$  y usar el Teorema 1.2 para mos-

trar que  $A$  es  $1 - 1$ . Sea  $z$  tal que  $Az = 0$ . Entonces, ya que  $A$  por definición mapea  $z$  en un miembro  $Az$  de  $\mathbf{H}$  tal que  $B(z, v) = (Az, v)$ , se tiene

$$B(z, v) = (0, v) = 0 \quad \forall v \in \mathbf{H}$$

En particular, para  $v = z$ ,

$$0 = B(z, z) \geq \alpha \|z\|^2$$

de manera que  $\|z\| = 0$  o  $z = 0$ . De aquí  $A$  es  $1 - 1$ , y su inversa  $A^{-1} : R(A) \rightarrow \mathbf{H}$  existe. Además,  $A^{-1}$  es lineal ya que  $A$  es lineal (ejercicio), y  $A^{-1}$  es acotado pues

$$\alpha \|u\|^2 \leq B(u, u) = (w, u) \leq \|w\| \|u\|, \quad (\text{usando la des. de Schawarz})$$

de donde  $\|u\| = \|A^{-1}w\| \leq \alpha^{-1} \|w\|$ . ■

**Lema 1.6.**  $R(A)$  es un espacio completo.

**Demostración:** Sea  $\{w_k\}$  una sucesión de Cauchy en  $R(A)$ . Ya que el  $R(A)$  es un subconjunto de  $\mathbf{H}$ ,  $\{w_k\}$  también es una sucesión de Cauchy en  $\mathbf{H}$ , y así esta es convergente en  $\mathbf{H}$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w_k - w\| = 0 \quad \text{en } \mathbf{H}$$

Se tiene que demostrar que  $w$  está en el  $R(A)$ . Para hacer esto, se define  $u_k$  tal que  $Au_k = w_k$ . Entonces

$$\|u_k - u_\ell\| = \|A^{-1}w_k - A^{-1}w_\ell\| = \|A^{-1}(w_k - w_\ell)\| \leq \|A^{-1}\| \|w_k - w_\ell\|$$

de modo que

$$\lim_{k, \ell \rightarrow \infty} \|u_k - u_\ell\| \leq \|A^{-1}\| \lim_{k, \ell \rightarrow \infty} \|w_k - w_\ell\| = 0$$

(pues  $\{w_k\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbf{H}$ ). De esto,  $\{u_k\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbf{H}$ , con límite  $u \in \mathbf{H}$ . Además, ya que  $Au_k = w_k$  se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Au_k = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k = w \quad \text{o} \quad w = A \left( \lim_{k \rightarrow \infty} u_k \right) = Au$$

(recuerde que: Un operador  $T : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ , con  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  espacios normados, es continuo si, y solo, si es acotado). Por lo tanto,  $w$  está en el rango de  $A$ , y ya que  $w$  es el límite de una sucesión arbitraria de Cauchy, el  $R(A)$  es completo. ■

**Lema 1.7.**  $R(A) = \mathbf{H}$ , esto es,  $A$  es biyectivo.

**Demostración:** Supongamos que  $R(A)$  es un subespacio de  $\mathbf{H}$ , por lo

tanto existe un elemento  $u_0 \neq 0$  en  $R(A)^\perp$  tal que

$$(u_0, t) = 0 \quad \forall t \in R(A)$$

Además, de los lemas anteriores se tiene:

$$Au_0 = w_0 \quad \Rightarrow \quad w_0 \in R(A)$$

$$B(u_0, v) = (w_0, v) \quad \forall v \in \mathbf{H}$$

En particular, si se define  $v = u_0$ , entonces

$$\alpha \|u_0\|^2 \leq B(u_0, u_0) = (w_0, u_0) = 0, \quad \text{pues } w_0 \in R(A) \text{ y } u_0 \in R(A)^\perp$$

Por lo tanto,  $u_0 = 0$ , lo cual es una contradicción. Así,  $R(A)^\perp = \{0\}$  y  $R(A) = \mathbf{H}$ . ■

Finalmente, se recopila toda la información dada para dar la prueba del **Teorema de Lax-Milgram**:

**Demostración:** El Lema 1.3 muestra que para cualquier  $u \in \mathbf{H}$  existe un único  $w \in \mathbf{H}$  definido a partir de (1.17). Sin embargo, este lema no prueba el inverso: de hecho, se define el operador  $A$  por (1.18), y para probar que el inverso es cierto es necesario demostrar que  $A$  es biyectivo. Esto se hace en los Lemas 1.5, 1.6 y 1.7. Por tanto, se concluye que dado cualquier  $w \in \mathbf{H}$  existe un único  $u \in \mathbf{H}$  tal que

$$B(u, v) = (w, v) \tag{1.22}$$

Por el Teorema de Representación de Riesz, todo funcional lineal acotado  $F$  puede ser expresado en la forma

$$F(v) = (w, v) \quad \forall v \in \mathbf{H} \tag{1.23}$$

con  $\|F\| = \|w\|$ . Así, (1.22) y (1.23) implican (1.15), y (1.16) se sigue de la H-élpicidad de  $B$  y la continuidad de  $F$ , como en (1.13) y (1.14). Esto prueba el teorema. ■

## 1.6 Fórmula de Green

Antes de continuar, resulta apropiado recordar una fórmula de Green que será de importancia fundamental en todos los apartados subsiguientes. Se empieza desde el *Teorema de la divergencia* (en dos dimensiones) o también llamado *Teorema de Gauss*.

**Teorema 1.11. (Teorema de la divergencia)** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domi-*

no acotado con frontera continua Lipschitz. Todo campo vectorial suave  $\mathbf{A} = (A_1, A_2) \in [\mathbf{C}^1(\Omega) \cap \mathbf{C}(\bar{\Omega})]^2$  satisface<sup>1</sup>

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds$$

donde  $\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}$ , y  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  la norma exterior unitaria a  $\partial\Omega$ . ■

Aquí  $d\Omega$  denota el elemento de área en  $\mathbb{R}^2$  y  $ds$  es el elemento de longitud de arco a lo largo de  $\partial\Omega$ . Si se aplica el Teorema de la divergencia a  $\mathbf{A} = (vw, 0)$  y  $\mathbf{A} = (0, vw)$ , se tiene que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} w d\Omega + \int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} v w n_i ds, \quad i = 1, 2 \quad (1.24)$$

Denotando por  $\nabla v$  el gradiente de  $v$ , es decir,  $\nabla v := (\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2})$ , se obtiene de (1.24) la siguiente fórmula de Green:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w d\Omega &\equiv \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} \left[ v \frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + v \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2 \right] ds - \int_{\Omega} v \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial n} ds - \int_{\Omega} v \Delta w d\Omega \end{aligned}$$

Así,

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w d\Omega = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial n} ds - \int_{\Omega} v \Delta w d\Omega \quad (1.25)$$

y  $\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2$  es la *derivada normal*, es decir, la derivada en la dirección del vector normal exterior sobre la frontera  $\partial\Omega$ .

## Ejercicios

1.1 ¿Cuál de los siguientes operadores es lineal?

(i)  $T : \mathbf{L}^2(-1, 1) \rightarrow \mathbf{L}_2(-1, 1)$ ,  $T(u) = \int_{-1}^1 K(x, y)u(y) dy$ ;

---

<sup>1</sup>De aquí en adelante, se utiliza la notación  $\int_{\Omega} d\Omega = \int \int_{\Omega} dx dy$ .

(ii)  $T : \mathbf{C}^1[a, b] \rightarrow \mathbf{C}^1[a, b], \quad T(u) = x^2 \partial u / \partial x + 2u;$

(iii)  $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad M(\mathbf{x}) = xy.$

1.2 Si  $T : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$  es un operador lineal invertible de  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$ , donde  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  son espacios lineales, muestre que  $T^{-1}$  es lineal.

1.3 Muestre que el operador identidad  $I : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$  es continuo, donde  $\mathbf{U}$  es cualquier espacio normado. Si  $\mathbf{V}$  es el espacio normado  $\mathbf{C}^1[a, b]$  con la norma  $\|u\|_v = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ , y  $\mathbf{W}$  es el espacio  $\mathbf{C}^1[a, b]$  con la norma del supremo, encuentre un ejemplo que muestre que  $I : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  no es continuo.

1.4 Si  $T : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$  y  $S : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  son operadores lineales acotados, muestre que  $ST : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{W}$  es acotado con  $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$ .

1.5 Muestre que el espacio nulo  $N(T)$  de un operador  $T : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$  es cerrado si  $T$  es un operador lineal acotado.

1.6 Muestre que el  $N(P) = R(P)^\perp$  y  $R(P) = N(P)^\perp$  si  $P$  es una proyección ortogonal en un espacio con producto interno.

1.7 Sea  $T$  una transformación definida por

$$T : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}), \quad T(u) = \begin{cases} u(x), & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

Muestre que  $T$  es una proyección ortogonal. ¿Cuál es el rango y espacio nulo de  $T$ ?

1.8 Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  simétrica y definida positiva, es decir  $x^T A x > 0$  para todo vector  $x \neq 0$ . Entonces, el espacio  $\mathbb{R}^n$  es un espacio de Hilbert dotado del producto interno  $(x, y) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i y_j$ . Dada una función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , encuentre el elemento  $x$  tal que  $F(y) = (x, y)$  donde  $F$  es definida por: (i)  $F(y) = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ ; (ii)  $F(y) = y_1$ .

1.9 Para cada  $F \in \mathbf{L}^2(0, 1)$  sea  $u(x)$  la solución de  $u'' + u' - 2u = F$  con  $u(0) = u(1) = 0$ . Definir el funcional  $\ell$  por  $\ell : \mathbf{L}^2(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$\ell(F) = \int_0^1 u(x) dx$ . Mostrar que este funcional es lineal acotado, y encontrar la función  $u$ , el valor de  $\ell(F)$ , y el elemento  $g$  tal que  $\ell(F) = (g, F)$ , cuando  $F(x) = 2x$ .

1.10 Repita el ejercicio anterior para la ecuación diferencial  $u'' - 2u' + u = F$ .

1.11 Si  $\mathbf{U}$  es un espacio normado (no necesariamente completo), pruebe que  $\mathbf{U}'$  es un espacio de Banach.

1.12 Si  $B : \mathbf{U} \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma bilineal de un espacio  $\mathbf{U}$  con producto interno, mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} B(u_n, u_n) = B(u, v)$  si  $u_n \rightarrow u$  y  $v_n \rightarrow v$ .

1.13 Sea  $F : \mathbf{H}_0^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $B : \mathbf{H}_0^1(0, 1) \times \mathbf{H}_0^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definidos por

$$F(v) = \int_0^1 (-1 - 4x)v dx, \quad B(u, v) = \int_0^1 (x + 1)u'v' dx,$$

donde  $\mathbf{H}_0^1(0, 1) = \{v \in \mathbf{L}^2(0, 1) : v' \in \mathbf{L}^2(0, 1), v(0) = v(1) = 0\}$  es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u, v)_{H_0^1} = \int_0^1 (uv + u'v') dx = (u, v) + (u', v').$$

Mostrar que  $F$  es continuo, que  $B$  es continuo y  $\mathbf{H}_0^1$ -elíptica y verifique que el único elemento  $u$  que satisface  $B(u, v) = F(v)$  es  $u(x) = x^2 - x$ . **Sugerencia:** puede ser necesario usar integración por partes. Se puede asumir que existe una constante  $C > 0$  tal que  $\|v\| \leq C\|v'\|$ .

1.14 Sea  $B : \mathbf{U} \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal continua,  $U$ -elíptica, y definida por la forma bilineal  $\tilde{B} : \mathbf{U} \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\tilde{B}(u, v) = B(u, v) + (u, cv)$ . Si  $U = \mathbf{H}_0^1(0, 1)$  y  $c(x)$  satisface  $0 < c_1 \leq c(x) \leq c_2$ , muestra que  $\tilde{B}$  es continua y  $U$ -elíptica.

## Capítulo 2

# Formulación Variacional para Problemas de Valor de Frontera

Desde un punto de vista matemático, el MEF es una técnica general para construir soluciones aproximadas de problemas de valor de frontera (PVF)<sup>1</sup>. El método implica dividir el dominio de la solución en un número finito de subdominios simples, los elementos finitos, y usando conceptos variacionales se construye una aproximación de la solución sobre la colección de elementos finitos.

El método variacional constituye una herramienta fundamental para el estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales parciales y el eje fundamental del MEF. Por esto, el objetivo esencial del capítulo consiste en definir la formulación variacional o forma débil de algunos PVF de tipo elíptico y estudiar el buen planteamiento de esta formulación variacional. Para seguir los resultados variacionales que se presentan en los siguientes apartados, es apropiado que el lector tenga presente los resultados del análisis funcional dados en el capítulo anterior.

Debido a la simplicidad técnica que presentan los problemas unidimensionales, resulta apropiado presentar en estos las ideas fundamentales que involucran este tema. Con este fin, se limita nuestra atención por el momento a lo más simple, un PVF en una dimensión (problema de fron-

---

<sup>1</sup>Estos problemas de la física matemática son conocidos también como problemas de valores de contorno (PVC)

tera en dos puntos) caracterizado por una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de segundo orden, junto a un par de condiciones de frontera. Se hará referencia a este ejemplo como nuestro problema modelo. Aunque el problema modelo no represente ninguna dificultad ni mucho interés práctico, tanto su estructura matemática y su enfoque en la formulación de su aproximación son esencialmente las mismas que en los problemas más complejos. Posteriormente, se analiza la forma débil para PVF elíptico en 2D y las distintas posibilidades en sus condiciones de frontera: Dirichlet, Neumann y Robin. Además, se presentan resultados sobre la existencia y unicidad de la solución de estos nuevos problemas.

## 2.1 Problema modelo unidimensional

Se considera el problema de encontrar una función  $u = u(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , la cual satisface la siguiente EDO y condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} -u''(x) + u &= f(x), & \text{para } 0 < x < 1, \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned} \tag{C}$$

donde  $f$  es una función conocida y suficientemente suave (continua). Un problema de este tipo puede surgir como modelo, en particular, en el estudio de la vibración de una barra elástica, una cuerda elástica o en la distribución de temperatura en una barra.

Los datos del problema consisten en: el dominio de la solución (en este caso, el dominio es simplemente el intervalo unitario  $0 \leq x \leq 1$ ), la parte no homogénea de la ecuación diferencial (representada por la función  $f(x)$ ), los coeficientes de las derivadas de  $u$  (las constantes -1 y 1) y los valores de frontera que demanda la solución obtenida (en este problema,  $u = 0$  en  $x = 0$  y  $x = 1$ ).

El problema modelo planteado en (C) (ecuación diferencial junto a las condiciones de frontera) recibe el nombre de *forma fuerte o clásica* del problema, porque impone las condiciones más exigentes a la función que se trata de obtener, en cuanto al orden de derivabilidad, cumplimiento de la ecuación y condiciones de frontera punto a punto dentro del dominio de cálculo.

Los datos del problema modelo son suaves, como consecuencia de esta suavidad, existe una única función  $u$  la cual satisface el problema en todo punto del dominio. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones, una

o varias de estas características apropiadas del problema fallan o bien, no existe una solución a la declaración clásica del problema debido a que alguno de los datos no son suaves, o si una solución suave existe, esta no puede ser encontrada en el sentido usual debido a la complejidad del dominio, los coeficientes, y las condiciones de frontera.

Como ejemplo a este tipo de dificultad, se considera en lugar de  $f(x)$  (suave) en (C), el problema

$$-u''(x) + u = \delta(x - 1/2), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (2.1)$$

donde  $\delta(x - 1/2)$  es el delta de Dirac<sup>2</sup> (un impulso unitario o fuerza puntual concentrada en  $x = 1/2$ ). Resulta así, que cualquier función  $u$  que satisfaga (2.1) debe tener una discontinuidad en su primera derivada  $u'$  en  $x = 1/2$ ; su segunda derivada  $u''$  no existe en  $x = 1/2$  (en un sentido tradicional) (ver Ejercicios 2.1 y 2.2).

¡Algo parece estar mal! ¿Cómo puede una función  $u$  satisfacer (2.1) en todo el intervalo  $0 < x < 1$  cuando su segunda derivada no puede existir en  $x = 1/2$  debido a los datos muy irregulares que presenta el problema?

La dificultad proviene de requerir que la solución  $u$  de (2.1) satisfaga la forma fuerte del problema. Para superar esta dificultad, se reformula el PVF de modo que se exija a la función incógnita un orden menor de derivabilidad y, en vez del cumplimiento punto a punto, un cumplimiento en promedio de la ecuación diferencial y de las condiciones de frontera. Por contraste con la forma fuerte del problema, tales reformulaciones son llamadas *formulación débil o variacional* del problema y están diseñadas para dar cabida a datos o soluciones irregulares del problema (2.1), así como a soluciones muy suaves, como la del problema modelo (C).

Cada vez que que una solución suave clásica de un problema existe, es también la solución del problema débil. Por tanto, no se pierde nada por la reformulación de un problema a una forma más débil y a cambio obtener la ventaja de ser capaz de considerar problemas con soluciones bastante irregulares.

---

<sup>2</sup>Se debe recordar que  $\delta(x - 1/2)$  es una distribución; un funcional sobre  $\mathbf{C}_0^\infty$  definido por  $\delta(x - 1/2)\phi(x) = \phi(1/2)$ , para cualquier función  $\phi \in \mathbf{C}_0^\infty$ . La operación  $\delta(x - 1/2)\phi(x)$  es algunas veces escrita como  $\int_0^1 \delta(x - 1/2)\phi(x)dx = \phi(1/2)$ .

### 2.1.1 Formulación variacional del problema modelo unidimensional

Una declaración débil del problema modelo es dada como sigue: Encontrar  $u$  tal que (C) se cumpla en un sentido de promedios ponderados, es decir, se quiere que

$$\int_0^1 (-u'' + u)v dx = \int_0^1 f(x)v dx \quad (2.2)$$

para todo miembro  $v$  de una clase apropiada de funciones. La *función de peso* o *función de prueba*,  $v$ , es cualquier función de  $x$  tal que las integrales dadas en (2.2) tengan sentido<sup>3</sup>. Se denota el conjunto de tales funciones, que son cero en  $x = 0$  y  $x = 1$ , con la letra  $\mathbf{V}_v$ .

En esta etapa, hay dos puntos que deben ser bien apreciados:

- La formulación débil (2.2) es tan válida y significativa como la forma clásica (C); de hecho, se probará que la solución de (C), además, satisface (2.2) y, en efecto, es la única solución de (2.2).
- La especificación del conjunto  $\mathbf{V}_v$  de funciones de peso es un ingrediente esencial de una formulación débil aceptable.

Aunque puede que no sea inmediatamente obvio, las funciones de prueba en el problema variacional (2.2) pueden no pertenecer al conjunto  $\mathbf{V}_u$  para las cuales la solución pertenece (ver Ejercicio 2.3). El conjunto  $\mathbf{V}_u$ , para el cual la solución pertenece, es llamado la *clase de funciones admisibles* para este tipo de problemas. La suavidad depende de los requisitos que se consideren para el par de conjuntos de funciones,  $\mathbf{V}_v$  y  $\mathbf{V}_u$ . Por ejemplo,  $u$  puede ser seleccionada de una clase de funciones  $\mathbf{V}_u$  la cual tiene la propiedad que su segunda derivada, cuando se multiplica por una función de peso  $v$ , produce una función  $u''v$  que es integrable sobre el intervalo  $0 < x < 1$ . Por otra parte, no es necesario que las funciones de peso que aparecen en (2.2) sean derivables. De esta forma,

---

<sup>3</sup>Es fácil encontrar funciones que no son lo suficientemente suaves para servir como funciones de peso. Por ejemplo, para  $f(x) = x$ ,  $u(x) = x - \sinh(x)$ , y  $v(x) = x^{-3}$ , entonces ni  $\int_0^1 (-u'' + u)v dx$  o  $\int_0^1 x v dx$  tiene valores finitos y (2.2) no tiene sentido. Hay, sin embargo, una multitud de funciones las cuales son perfectamente aceptables como funciones de peso. La especificación exacta de tales funciones es central en la teoría del MEF y será discutida en detalle posteriormente.

a pesar de que (2.2) es una forma débil perfectamente válida de (C), el hecho que  $\mathbf{V}_v$  y  $\mathbf{V}_u$  no sean los mismos conduce a una falta de simetría en la formulación que normalmente se prefiere evitar. En otras palabras, la forma débil (2.2) no es la más adecuada para propósitos computacionales o teóricos.

Para obtener una formulación débil simétrica de (C), se observa que si  $u$  y  $v$  son funciones suficientemente suaves, entonces integrando por partes el primer término del lado izquierdo de (2.2) y pidiendo que las funciones de peso se anulen en la frontera,  $v(0) = v(1) = 0$ , se tiene

$$-\int_0^1 u''v dx = \int_0^1 u'v' dx - u'v|_0^1 = \int_0^1 u'v' dx$$

Por tanto, (2.2) puede ser reemplazado por el siguiente problema variacional: encontrar  $u \in \mathbf{V}$  tal que

$$\int_0^1 (u'v' + uv) dx = \int_0^1 f(x)v dx, \quad \forall v \in \mathbf{V} \quad (2.3)$$

donde,

$$\mathbf{V} = \left\{ v : v \in \mathbf{C}[0,1], \quad v' \text{ es continua y acotada a trozos en } [0,1], \text{ y} \right. \\ \left. v(0) = v(1) = 0 \right\}$$

Ahora existe una simetría en la formulación: el mismo orden de derivada tanto de las funciones de peso como de las funciones de ensayo y se tiene  $\mathbf{V}_v = \mathbf{V}_u = \mathbf{V}$ . Además, ya que (2.2) contiene segundas derivadas de la solución  $u$  mientras que (2.3) solo tiene primeras derivadas, se tiene que pasando de (C) a (2.2) y a (2.3) se ha debilitado progresivamente los requerimientos sobre la solución y, de tal modo, progresivamente ampliado la clase de datos para los cuales esta declaración del problema tiene sentido.

El conjunto  $\mathbf{V}$  es llamado la *clase de funciones admisibles* para el problema (2.3), ya que este contiene solo las funciones que satisfacen las condiciones de frontera y son suficientemente regulares para que las integrales en (2.3) tengan sentido. Dado que  $v$  puede ser una función en el conjunto de funciones admisibles, se debe tomar la posibilidad que  $v = u$ . Así, será necesario que  $(v')^2$  sea lo suficientemente suave para que su

integral pueda ser calculado. Por lo tanto, se debe definir el conjunto de funciones admisibles  $\mathbf{V} = \mathbf{H}_0^1(0, 1)$ . Aquí,  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  es el espacio de Sobolev definido anteriormente:  $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : v(0) = v(1) = 0\}$ , con  $\mathbf{H}^1(\Omega) = \{v : v, v' \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$ . Así, el PVF (C) puede tener la siguiente formulación variacional: encontrar  $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  tal que

$$\int_0^1 (u'v' + uv)dx = \int_0^1 f(x)v dx, \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \quad (2.4)$$

Si se compara el problema de valor de frontera variacional (PVFV) (2.4) con la formulación variacional (2.3) se nota que el espacio  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  es más grande que el espacio  $\mathbf{V}$  usado en la formulación (2.3). El espacio  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  está especialmente adaptado para la formulación variacional de (C) y es, de hecho, el espacio más grande para el cual la formulación variacional dada en (2.4) se cumple. Desde un punto de vista matemático, la elección correcta del espacio de funciones es esencial, ya que esto puede hacer que sea más fácil de probar la existencia de una solución para el problema continuo. Desde el punto de vista de elementos finitos, la formulación (2.4) frente a (2.3) es de interés debido principalmente a la estima del error en la norma indicada por (2.4).

### 2.1.2 Equivalencia del problema fuerte y variacional

Ahora se demuestra que la solución  $u$  del PVF o ecuación diferencial (C) también es solución del problema variacional (2.4). Usando la notación de producto interno, se tiene que el problema (2.4) se puede formular como: encontrar  $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  tal que

$$(u', v') + (u, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \quad (V)$$

donde,  $(v, w) = \int_0^1 v(x)w(x)dx$ .

Que la solución de (C) sea solución de (V) quedó justificado en el apartado anterior donde se fue deduciendo paso a paso esta implicación. Se demuestra ahora, que una solución de (V) es determinada de forma única. Supongamos para esto que  $u_1$  y  $u_2$  son soluciones de (V), es decir,  $u_1, u_2 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  y

$$(u_1', v') + (u_1, v) = (f, v), \quad (u_2', v') + (u_2, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

Restando las ecuaciones y seleccionando  $v = u_1 - u_2 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , se tiene

$$\int_0^1 (u'_1 - u'_2)^2 dx + \int_0^1 (u_1 - u_2)^2 dx = 0$$

lo cual muestra que  $u'_1 - u'_2 = 0$  y  $u_1 - u_2 = 0$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ , y la unicidad queda probada.

Finalmente, se prueba que si  $u$  es la solución de (V) entonces  $u$  además satisface (C). Sea  $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  tal que

$$\int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx - \int_0^1 fvd x = 0 \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

Si se supone además, que  $u''$  existe y es continua, entonces se puede integrar por partes y usando el hecho que  $v(0) = v(1) = 0$ ,

$$-\int_0^1 u''v dx + \int_0^1 uv dx - \int_0^1 fvd x = -\int_0^1 (u'' - u + f)v dx = 0, \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

Pero con la suposición que  $(u'' - u + f)$  es continua, la cual se cumple solo si (ejercicio)

$$(u'' - u + f)(x) = 0 \quad 0 < x < 1$$

se puede probar que  $u$  es solución de (C).

Así, se tiene visto que, si  $u$  es la solución de (V) y además satisface la hipótesis de regularidad ( $u''$  es continua), entonces  $u$  es solución de (C). Entonces se tiene mostrado que los dos problemas (C) y (V) son equivalentes.

La formulación (V) se dice que es una *formulación débil* de (C) y la solución de (V) se dice que es una *solución débil* de (C). Si  $u$  es una solución débil de (C) entonces no es claro de inmediato que  $u$  sea también una solución clásica de (C), ya que este requiere que  $u$  sea suficientemente regular para que  $u''$  quede definida en un sentido clásico.

### 2.1.3 Condición de frontera no homogénea

Se considera  $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$  y una función de carga  $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Se va a resolver la ecuación de Poisson

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{en } \Omega \tag{2.5}$$

provista de condiciones de contorno Dirichlet no homogéneas

$$u(a) = g_a, \quad u(b) = g_b \tag{2.6}$$

Se debe notar que las funciones que satisfacen las condiciones dadas en (2.6) no pueden constituir un espacio vectorial. Este sería el caso con condiciones de contorno Dirichlet iguales a cero; sin embargo, en el caso no homogéneo, la suma de dos funciones que cumplen (2.6) no satisfacen la condición. Por tanto, se tiene que descomponer la función  $u$  buscada en

$$u(x) = u^*(x) + \bar{u}(x) \quad (2.7)$$

donde  $u^* \in \mathbf{H}^1(a, b)$ , llamada el *levantamiento Dirichlet*, es una función conocida que satisface las condiciones de contorno

$$u^*(a) = g_a, \quad u^*(b) = g_b \quad (2.8)$$

y la función  $\bar{u}$ , satisface la condición de frontera Dirichlet homogénea

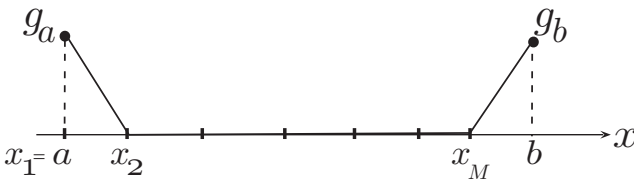
$$\bar{u}(a) = \bar{u}(b) = 0 \quad (2.9)$$

representa la parte desconocida de la solución  $u$ . La función  $\bar{u}$  ya puede buscarse en un espacio de funciones lineales, normalmente,  $\mathbf{V} = \mathbf{H}_0^1(a, b)$ .

Por lo tanto, la tarea consiste en encontrar  $\bar{u} \in \mathbf{V}$  satisfaciendo la formulación variacional

$$\int_0^1 \bar{u}'(x)v'(x)dx = \int_0^1 [f(x)v(x) - (u^*)'(x)v'(x)]dx, \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

En la práctica, suele escogerse  $u^*$  tan simple como sea posible, es decir, como una función lineal continua por partes que se anula en todos los puntos interiores (ver Figura 2.1).



**Figura 2.1:** Ejemplo de una función levantamiento Dirichlet para problemas 1D.

## 2.2 Problema modelo 2D

Se va a considerar el PVF en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  abierto y acotado con frontera Lipschitz. La frontera  $\partial\Omega$  se divide en dos partes  $\Gamma_d$  y  $\Gamma_n$ , tal

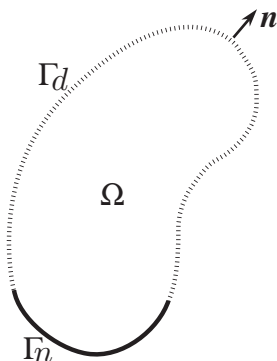
que  $\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_n$ , donde se aplicarán distintos tipos de condiciones de contorno. El problema modelo en su forma fuerte se define por

$$-\nabla \cdot (a_1 \nabla u) + a_0 u = f \quad \text{en } \Omega, \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{array}{l} u = g_1(x) \quad \text{sobre } \Gamma_d \\ c_1 u + c_2 \frac{\partial u}{\partial n} = g_2(x) \quad \text{sobre } \Gamma_n \end{array} \right\} \text{Dirichlet y Neumann} \quad (2.11)$$

De forma indistinta, se usará  $\partial\Omega$  o  $\Gamma$  para definir el contorno del problema. Además, para asegurar la existencia y la unicidad de la solución se añaden las condiciones

$$a_1 \geq C_{min} > 0 \quad \text{y} \quad a_0 \geq 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.12)$$



**Figura 2.2:** Dominio  $\Omega$  y sus fronteras para problemas 2D.

El problema (2.10) es bastante general; incluso con  $a_0 \equiv 0$ , se pueden modelar una serie de problemas de física y mecánica, por ejemplo: transferencia de calor en estado estacionario, desplazamiento de una membrana elástica, deflexión transversal de un cable, deformación axial de una barra, flujo laminar, flujo en tuberías y flujos en medios porosos.

### 2.2.1 Condición de frontera Dirichlet homogénea

Para empezar, se considera a (2.10) solo con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas en todo el contorno,  $\Gamma_n = \emptyset$ , es decir,

$$u(x) = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (2.13)$$

La solución clásica del problema (2.10), (2.13) es una función  $u \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\bar{\Omega})$  que satisface la ecuación (2.10) en todo  $\Omega$  y cumple la condición de contorno (2.13) para todo  $x \in \partial\Omega$ . Naturalmente, se debe asumir que  $f \in \mathbf{C}(\Omega)$ . Sin embargo, ni el requerimiento más fuerte  $f \in \mathbf{C}(\bar{\Omega})$  garantizan la resolución del problema, para el cual se requieren aún más condiciones de suavidad.

Para reducir las restricciones de regularidad antes dicha, se introduce la *formulación variacional* del problema (2.10), (2.13). La derivación de la formulación variacional de (2.10) consiste en los siguientes cuatro pasos:

1. Se Multiplica (2.10) con una función test  $v \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$  (conjunto de funciones infinitamente suaves que se anulan en la frontera de  $\Omega$ )

$$-\nabla \cdot (a_1 \nabla u)v + a_0 uv = fv$$

2. Integrar sobre  $\Omega$

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (a_1 \nabla u)v d\Omega + \int_{\Omega} a_0 uv d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad (2.14)$$

3. Se usa la fórmula de Green (1.25) para reducir el máximo orden de la derivada presente en la ecuación. Además, del hecho que  $v$  se anule sobre la frontera  $\partial\Omega$  permite anular la integral en la frontera. Así, de la primera integral de (2.14) se tiene

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \nabla \cdot (a_1 \nabla u)v d\Omega &= -\int_{\Omega} [\nabla a_1 \cdot \nabla u]v d\Omega - \int_{\Omega} a_1 \Delta u v d\Omega \\ &= -\int_{\Omega} [\nabla a_1 \cdot \nabla u]v d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (a_1 v) d\Omega + \int_{\partial\Omega} a_1 v \frac{\partial u}{\partial n} ds \\ &= -\int_{\Omega} [\nabla a_1 \cdot \nabla u]v d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot [\nabla a_1 v + a_1 \nabla v] d\Omega \end{aligned}$$

Agrupando con el resto de la ecuación (2.14) resulta

$$\int_{\Omega} a_1 \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\Omega} a_0 uv d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad (2.15)$$

4. Encontrar el espacio de funciones más grande posible para  $u$ ,  $v$  y las otras funciones en (2.15) donde todas las integrales son finitas. Originalmente, (2.15) fue derivada bajo la suposición de regularidad de que  $u \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\bar{\Omega})$  y  $v \in \mathbf{C}_0^\infty$ . Toda integral de (2.15)

permanece finita cuando estas hipótesis se debilitan a

$$u, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad f \in \mathbf{L}^2(\Omega) \quad (2.16)$$

Similarmente, las hipótesis de regularidad para los coeficientes  $a_1$  y  $a_0$  se pueden reducir a  $a_1, a_0 \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ .

La *formulación variacional* para el problema (2.10), (2.13) se define como sigue: Dado  $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , encontrar una función  $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  tal que

$$B(u, v) = l(v), \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \quad (2.17)$$

donde

$$B(u, v) = \int_{\Omega} [a_1 \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv] d\Omega \quad l(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

Nuevamente, la formulación variacional (2.17) se dice que es una *formulación débil o forma débil* de (2.10), (2.13) y la solución de (2.17) se dice que es una *solución débil* de (2.10), (2.13). Nuevamente, si  $u$  es una solución débil de (2.10), (2.13), entonces no es claro de inmediato que  $u$  sea también una solución clásica de (2.10), (2.13), ya que este requiere que  $u$  sea suficientemente regular para que  $\nabla \cdot (a_1 \nabla u)$  quede definido en un sentido clásico, que en este caso significa que  $u \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\bar{\Omega})$ . La ventaja matemática de la forma débil (2.17) es que es fácil de probar la existencia de una solución débil de (2.10), (2.13), mientras que es relativamente difícil probar la existencia de una solución clásica de (2.10), (2.13). Para probar la existencia de una solución clásica de (2.10), (2.13) se inicia usualmente con la solución débil de (2.10), (2.13) y se muestra, a menudo con un considerable esfuerzo, que en realidad esta solución es lo suficientemente regular para ser también una solución clásica. En problemas no lineales las complicaciones aumentan, pues suele ser muy difícil o prácticamente imposible demostrar la existencia de soluciones clásicas mientras que la existencia de soluciones débiles puede seguir al alcance.

### Unicidad de la solución

La existencia y unicidad de la solución del problema modelo (2.17) puede ser probada usando el Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.10) bajo las siguientes hipótesis.

**Lema 2.1.** *Se asume que  $a_1 \geq C_{min} > 0$  y  $a_0 \geq 0$  en  $\Omega$  (condición*

(2.12)). Entonces la forma variacional (2.17) tiene una única solución  $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ .

**Demostración:** Si se puede mostrar que  $l$  es continuo y que  $B$  es continua y  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ -elíptica, entonces se consigue garantizar la existencia de una única solución de (2.17).

Primero, si  $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  entonces  $l$  es continuo ya que

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v d\Omega \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} && \text{(desigualdad de Schwarz)} \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^2} && \text{(pues } \|v\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^k}) \end{aligned}$$

Fijando  $\|f\|_{L^2} = K$ , entonces  $|l(v)| \leq K \|v\|_{H^2}$  y así  $l$  es acotado y, por lo tanto, continuo.

Ahora, ya que  $a_1, a_0 \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ , entonces existe un  $C_{max} < \infty$  tal que  $|a_1(x)| \leq C_{max}$  y  $|a_0(x)| \leq C_{max}$  en  $\Omega$ . Por lo tanto,

$$|B(u, v)| \leq \int_{\Omega} \left[ a_1 |\nabla u \cdot \nabla v| + a_0 |uv| \right] d\Omega \leq C_{max} \int_{\Omega} \left[ |\nabla u \cdot \nabla v| + |uv| \right] d\Omega \quad (2.18)$$

Ya que  $\nabla u, \nabla v \in [\mathbf{L}^2(\Omega)]^2$ , entonces usando la desigualdad de Hölder (ver A.50 de [6]) se tiene

$$\int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| d\Omega \leq \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega \right)^{1/2} = |u|_{1,2} |v|_{1,2} \quad (2.19)$$

Análogamente, para el producto  $|uv|$  se obtiene

$$\int_{\Omega} |uv| d\Omega \leq \left( \int_{\Omega} u^2 d\Omega \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} v^2 d\Omega \right)^{1/2} = \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \quad (2.20)$$

La norma  $\|\cdot\|_{1,2}$  se obtiene sumando un término no negativo a la seminorma  $|\cdot|_{1,2}$ ,

$$|u|_{1,2} |v|_{1,2} \leq \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2} \quad (2.21)$$

Similarmente, para la norma  $\mathbf{L}^2$ ,

$$\|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2} \quad (2.22)$$

Finalmente, relacionando (2.18)-(2.22) se obtiene

$$|B(u, v)| \leq 2C_{max} \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2}$$

lo que significa que la forma bilineal está acotada por la constante  $C_a = 2C_{max}$ . A continuación, se prueba la  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ -elíptica de  $B(u, v)$ . Usan-

do la desigualdad básica de Poincaré-Friedrichs (Teorema 1.8) en el espacio  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , junto con la condición (2.12) se obtiene que existe una constante  $C_b > 0$  tal que

$$\begin{aligned} B(v, v) &= \int_{\Omega} a_1 |\nabla v|^2 + a_0 v^2 d\Omega \geq \int_{\Omega} a_1 |\nabla v|^2 d\Omega \\ &\geq C_{min} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega = C_{min} \|v\|_{1,2}^2 \geq C_{min} C_b^2 \|v\|_{1,2}^2 \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Así, la forma bilineal  $B(\cdot, \cdot)$  es acotada y  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ -elíptica, y usando el Teorema de Lax-Milgram se tiene la existencia y unicidad de la solución para todo  $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . ■

### 2.2.2 Condición de frontera Dirichlet no homogénea

En este apartado se considera la ecuación modelo (2.10) junto a una condición de contorno más general, la condición de contorno de Dirichlet (sobre todo el contorno del dominio) de la forma

$$u(x) = g(x) \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \quad (2.23)$$

donde  $g \in \mathbf{C}(\Omega)$ . A los efectos de la formulación débil, se considera una función  $G \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\bar{\Omega})$  tal que  $G = g$  sobre  $\partial\Omega$  (la llamada función de levantamiento Dirichlet de  $g$ ). Observe que  $G$  no es única, pero se verá más adelante que la solución es invariante en su elección. Escribiendo  $u = G + U$ , el problema (2.10), (2.23) puede ser reformulado en: encontrar  $U \in \mathbf{C}_0^2$  tal que

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot [a_1 \nabla(U + G)] + a_0(U + G) &= f \quad \text{en} \quad \Omega, \\ (U + G) &= g \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$-\nabla \cdot [a_1 \nabla U] + a_0 U = f + \nabla \cdot (a_1 \nabla G) - a_0 G \quad \text{en} \quad \Omega, \quad (2.24)$$

$$U = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \quad (2.25)$$

Excepto por el ajuste hecho al lado derecho, este problema es idéntico al problema modelo (2.10), (2.13). Por lo tanto, se procede de forma análoga para obtener su formulación variacional: encontrar  $U \in \mathbf{V} = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  tal que

$$B(U, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathbf{V} \quad (2.26)$$

con

$$B(U, v) = \int_{\Omega} [a_1 \nabla U \cdot \nabla v + a_0 U v] d\Omega,$$

$$l(v) = \int_{\Omega} [f v - a_1 \nabla G \cdot \nabla v - a_0 G v] d\Omega$$

Esta formulación débil se puede definir con criterios más débiles en  $f$ ,  $g$  y  $G$ . En particular, se puede asumir que  $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  y  $G \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  con la traza de  $g \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ .

Se tiene visto que la forma bilineal  $B(\cdot, \cdot)$  es acotada y  $V$ -elíptica (ver Lema 2.1 del apartado anterior). En otras palabras, El Teorema de Lax-Milgram asegura la existencia y unicidad de la solución en (2.26) para toda función de levantamiento  $G$ .

Para justificar la independencia de la solución  $u = U + G$  de la función de levantamiento Dirichlet  $G$ , supongamos que  $U_1 + G_1 = u_1 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  y  $U_2 + G_2 = u_2 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  son dos soluciones débiles. Por (2.26) la diferencia  $u_1 - u_2 \in \mathbf{V} = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , lo cual satisface

$$B(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

Tomando  $u_1 - u_2$  por  $v$  y usando la propiedad  $\mathbf{V}$ -elíptica de la forma bilineal  $B$ , se obtiene

$$0 = B(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq C \|u_1 - u_2\|_{\mathbf{V}}^2$$

Esto significa que  $\|u_1 - u_2\|_{\mathbf{V}} = 0$ , es decir que  $u_1 = u_2$  en  $\Omega$ .

### 2.2.3 Condición de frontera Neumann

Se considera ahora el modelo (2.10) junto a la condición de frontera Neumann (nuevamente en todo el contorno  $\partial\Omega$ )

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (2.27)$$

donde  $g \in \mathbf{C}(\Omega)$  y  $\mathbf{n}$  representa la norma unitaria exterior a  $\partial\Omega$  (Ver Figura 2.2) y  $\partial u / \partial \mathbf{n} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$ . En este caso se debe fortalecer la hipótesis de positividad del coeficiente  $a_0$

$$a_0(x) \geq \tilde{C}_{min} > 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.28)$$

La formulación débil del problema (2.10), (2.27) se deriva de la siguiente manera: suponga que  $u \in \mathbf{C}^\infty(\Omega) \cap \mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$ . Multiplique (2.10)

por una función test  $v \in \mathbf{C}^\infty(\Omega) \cap \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ , integrar sobre  $\Omega$ , y usando la fórmula de Green para reducir el máximo orden de las derivadas parciales. Las integrales de frontera no desaparecen como ocurrió en el caso de condiciones de frontera Dirichlet homogéneas, surgiendo un integral en la frontera,

$$\int_{\Omega} [a_1 \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv] d\Omega - \int_{\partial\Omega} a_1 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v ds = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

Al sustituir la condición de frontera (2.27) en la integral de frontera, se obtiene la formulación débil siguiente: dada  $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  y  $g \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega)$  encontrar  $u \in \mathbf{V} = \mathbf{H}^1(\Omega)$  tal que

$$B(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathbf{V} \quad (2.29)$$

donde

$$B(u, v) = \int_{\Omega} [a_1 \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv] d\Omega, \quad l(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} a_1 g v ds$$

Observe que, aunque la forma bilineal  $B(\cdot, \cdot)$  está dada por la misma fórmula que en el caso de las condiciones de contorno Dirichlet, es diferente ya que el espacio  $\mathbf{V}$  ha cambiado.

La acotación de la forma bilineal  $B(\cdot, \cdot)$  en  $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$  se puede demostrar de forma análoga a la prueba del Lema 2.1. Nótese, sin embargo, que no se puede utilizar la desigualdad de Poincaré-Friedrichs para probar la propiedad  $\mathbf{V}$ -elíptica de  $B(\cdot, \cdot)$ , ya que ahora la solución no es cero en la frontera. Aquí la hipótesis adicional (2.28) entra en juego y se obtiene

$$B(v, v) \geq \min\{C_{min}, \tilde{C}_{min}\} \|v\|_{\mathbf{V}}^2$$

El Teorema de Lax-Milgram garantiza que el problema (2.29) tiene una única solución  $u \in \mathbf{V}$ .

## 2.2.4 Condición de frontera Robin

Existen casos donde la condición de contorno implica una combinación de valores de la función y su derivada normal. Considere la ecuación modelo (2.10) junto a las condiciones de frontera

$$c_1 u + c_2 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (2.30)$$

donde  $f \in \mathbf{C}(\Omega)$ ,  $g \in \mathbf{C}(\partial\Omega)$ , y  $c_1, c_2 \in \mathbf{C}(\partial\Omega)$  son tales que  $c_1 c_2 > 0$  y  $0 < \varepsilon \leq |c_2|$  sobre  $\partial\Omega$ . Las hipótesis (2.12) y (2.28) sobre los coeficientes  $a_0, a_1$  se siguen cumpliendo.

Para una función suficientemente regular  $u \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$  la forma débil

$$\int_{\Omega} [a_1 \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv] d\Omega - \int_{\partial\Omega} a_1 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v ds = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

es derivada análogamente al caso de condiciones de frontera Neumann. Usando la condición de frontera (2.30), se obtiene la siguiente forma débil: dada  $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $g \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega)$ , y  $a_0, a_1 \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ , encontrar  $u \in \mathbf{V} = \mathbf{H}^1(\Omega)$  tal que

$$B(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

donde

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \int_{\Omega} [a_1 \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv] d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{a_1 c_1}{c_2} u v ds, \\ l(v) &= \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{a_1 g}{c_2} v ds \end{aligned}$$

Se puede probar que la forma bilineal  $B(\cdot, \cdot)$  es acotada y  $\mathbf{V}$ -elíptica (usar para esto el Teorema A.28 de [6]), entonces a partir del Teorema de Lax-Milgram se tiene la unicidad de la solución.

### 2.2.5 Condición de frontera esencial y natural

Las condiciones de contorno Dirichlet son llamadas *esenciales*, ya que básicamente influyen en la formulación débil: estas determinan el espacio de funciones en que la solución es determinada. Por otra parte, las condiciones de frontera Neumann no influyen en el espacio funcional y pueden ser incorporadas en la integral de contorno de forma natural. Por tanto, se les llama *naturales*. En general, si se tiene el siguiente PVF

$$\left. \begin{aligned} Au &= f && \text{en } \Omega, \\ A_0 u &= g_0 \\ A_1 u &= g_1 \\ &\vdots \\ A_{m-1} u &= g_{m-1} \end{aligned} \right\} \text{sobre } \partial\Omega$$

con  $A$  un operador diferencial de orden  $2m$ , entonces las condiciones de frontera se dividen en dos subconjuntos (según el orden de  $A_i$ ):

1. Si el orden  $< m$ , son llamadas condiciones de frontera esenciales.
2. Si el orden  $\geq m$ , son llamadas condiciones de frontera naturales.

Habitualmente, el espacio  $\mathbf{V}$ , conocido como el espacio de funciones admisibles, es definido por

$$\mathbf{V} = \left\{ v \in \mathbf{H}^m(\Omega) : v \text{ satisface toda condición de frontera esencial} \right\}$$

### 2.2.6 Combinación de condiciones de frontera naturales y esenciales

Lo que resta por discutir es la combinación de condiciones de contorno esenciales y naturales. Elijamos, por ejemplo, las condiciones de Dirichlet y Neumann para este propósito. Por consiguiente, supongamos que la frontera  $\partial\Omega$  se divide en dos partes abiertas, disjuntas y no vacías  $\Gamma_n$  y  $\Gamma_d$  (ver Figura 2.2), y consideremos el problema

$$-\nabla \cdot (a_1 \nabla u) + a_0 u = f \quad \text{en } \Omega, \quad (2.31)$$

$$u = g_D \quad \text{sobre } \Gamma_d, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_N \quad \text{sobre } \Gamma_n \quad (2.33)$$

La forma débil es derivada como sigue: en primer lugar se extiende la función  $g_D \in \mathbf{C}(\Gamma_d)$  al resto de la frontera  $\partial\Omega$  introduciendo una función  $\tilde{g}_D \in \mathbf{C}(\partial\Omega)$  tal que  $\tilde{g}_D \equiv g_D$  sobre  $\Gamma_d$ . La no unicidad de esta extensión no va a causar ningún problema. Después se define la función levantamiento Dirichlet  $G \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$  de  $\tilde{g}_D$  (es decir,  $G \equiv \tilde{g}_D$  sobre  $\partial\Omega$ ). La solución  $u$  se busca en la forma  $u = U + G$  análogo al caso Dirichlet puro. Las ecuaciones

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot [a_1 \nabla (U + G)] + a_0 (U + G) &= f && \text{en } \Omega, \\ (U + G) &= g_D && \text{sobre } \Gamma_d, \\ \frac{\partial (U + G)}{\partial \mathbf{n}} &= g_N && \text{sobre } \Gamma_n \end{aligned}$$

se convierten

$$-\nabla \cdot [a_1 \nabla U] + a_0 U = f + \nabla \cdot (a_1 \nabla G) - a_0 G \quad \text{en } \Omega, \quad (2.34)$$

$$U = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_d, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial(U+G)}{\partial \mathbf{n}} = g_N \quad \text{sobre } \Gamma_n \quad (2.36)$$

El espacio apropiado para la función  $U$  es

$$\mathbf{V} = \{u \in \mathbf{H}^1(\Omega) : u = 0 \text{ sobre } \Gamma_d\}$$

Aplicando el procedimiento estándar, que ya se ha aplicado varias veces, se llega a la forma débil

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [a_1 \nabla U \cdot \nabla v + a_0 U v] d\Omega &= \int_{\Omega} [f v - a_1 \nabla G \cdot \nabla v - a_0 G v] d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_N} \left( a_1 \frac{\partial(U+G)}{\partial \mathbf{n}} \right) ds, \quad \forall v \in \mathbf{V} \end{aligned}$$

Usando la condición de frontera Neumann (2.36) sobre  $\Gamma_n$ , se obtiene finalmente el siguiente problema débil: encontrar una función  $U$  en el espacio  $\mathbf{V}$  tal que

$$B(U, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathbf{V} \quad (2.37)$$

donde

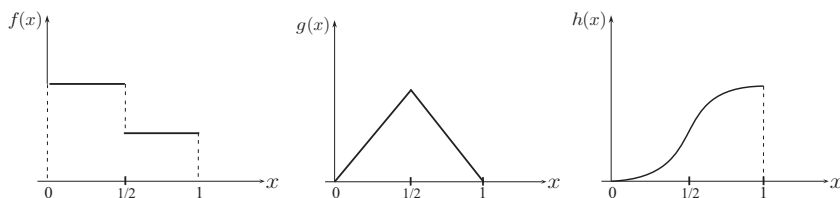
$$\begin{aligned} B(U, v) &= \int_{\Omega} [a_1 \nabla U \cdot \nabla v + a_0 U v] d\Omega, \\ l(v) &= \int_{\Omega} [f v - a_1 \nabla G \cdot \nabla v - a_0 G v] d\Omega + \int_{\Gamma_N} a_1 g_N v ds \end{aligned}$$

La forma bilineal es acotada y  $\mathbf{V}$ -elíptica (la prueba resulta análoga a la del Lema 2.1). La desigualdad de Poincaré-Friedrichs se cumple en  $\mathbf{V}$  debido a que la condición de contorno es cero para  $U$  sobre  $\Gamma_d$  (ver Observación A.8 de Šolín [6]). Por tanto, el Teorema de Lax-Milgram implica que el problema (2.37) tiene una única solución  $U \in \mathbf{V}$ . Como de costumbre, la solución final que satisface tanto la condición de frontera natural como la esencial es  $u = U + G$ .

## Ejercicios

- 2.1 Considere el PVF,  $-u''(x) = \delta(x - 1/2)$ ,  $0 < x < 1$ , con  $u(0) = u(1) = 0$ , donde  $\delta(x - 1/2)$  es el delta de Dirac correspondiente a una fuerza puntual en  $x = 1/2$ . Construya la solución exacta  $u$  de este problema y bosqueje la gráfica de  $u$  y  $u'$  como función de  $x$ . ¿Cómo es la gráfica de  $u''$ ? ¿Tiene sentido la forma clásica de este problema en  $x = 1/2$ ?
- 2.2 Encuentre la solución  $u$  del PVF (2.1) y bosqueje la gráfica de  $u$  y  $u'$  como función de  $x$ . Comente sobre  $u''$  y el sentido de la declaración clásica del PVF.
- 2.3 (a) Considere el siguiente PVF,  $-u''(x) = x$ ,  $0 < x < 1$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$  y las siguientes representaciones variacionales:
- (b) Encontrar  $u \in \mathbf{V}_u$  tal que  $u(0) = u(1) = 0$  y  $\int_0^1 (-u'' - x)v dx = 0$  para todo  $v \in \mathbf{V}_v$ .
- (c) Encontrar  $u \in \mathbf{V}_u$  tal que  $\int_0^1 (u'v' - xv) dx = 0$  para todo  $v \in \mathbf{V}_v$ .
- (d) Encontrar  $u \in \mathbf{V}_u$  tal que  $\int_0^1 (-uv'' - xv) dx = 0$  para todo  $v \in \mathbf{V}_v$  tal que  $v(0) = v(1) = 0$ .

Discutir las propiedades de las funciones de peso y de las funciones de ensayo de cada uno de los problemas variacionales (b), (c) y (d), de modo que estos problemas se correspondan con el problema fuerte dado en (a). Además, suponga que  $f$ ,  $g$ , y  $h$  son las tres funciones que se muestran en la Figura 2.3.



**Figura 2.3:** Funciones  $f$ ,  $g$ , y  $h$  del Ejercicio 2.3

La función  $h$  es dada por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(x-1)^2, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Para cada problema (b), (c) y (d), determine independientemente si  $f$ ,  $g$ , y  $h$  pertenecen a la clase de funciones de ensayo o de peso.

2.4 Muestre que  $-u'' = f$ ,  $0 < x < 1$ , con  $u(0) = u'(1) = 0$ , tiene la siguiente formulación variacional: encontrar  $u \in \mathbf{V}$  tal que  $(u', v') = (f, v)$  para todo  $v \in \mathbf{V}$ , donde  $\mathbf{V} = \{v \in \mathbf{H}^1(0, 1) : v(0) = 0\}$ .

2.5 Muestre que una formulación variacional del PVF

$$-xu'' - u' + u = \sin(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

es: encontrar  $u \in \mathbf{H}_0^1(0, 1)$  tal que  $\int_0^1 (xu'v' + uv - v \sin(x)) dx = 0$  para todo  $v \in \mathbf{H}_0^1(0, 1)$ .

2.6 Mostrar que si  $w \in \mathbf{C}[0, 1]$  y  $\int_0^1 wv dx = 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}$ , entonces  $w(x) = 0$  para todo  $x \in [0, 1]$ .

2.7 Encuentre la forma débil correspondiente del problema

$$-(p(x)u')' + r(x)u = f, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) + u(1) = 0.$$

Muestre que la forma bilineal asociada es  $\mathbf{V}$ -elíptica y continua; aquí  $p_1 \geq p(x) \geq p_0 > 0$ ,  $r_1 \geq r(x) \geq r_0 > 0$

2.8 Considere el PVF,  $-\Delta u = f$  en  $\Omega$ , con  $u = u_0$  sobre  $\partial\Omega$ , donde  $f$  y  $u_0$  son dadas. Encuentre la formulación variacional del problema.

2.9 Justifique por qué el PVF,  $-\nabla^2 u = f$  en  $\Omega$ , con  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , no tiene solución única.

2.10 Considere el PVF

$$\begin{aligned} Au &= f \text{ en } \Omega \\ B_j u &= g_j \text{ sobre } \partial\Omega, \quad (j = 0, 1, \dots, m-1) \end{aligned}$$

donde  $A$  es un operador de orden  $2m$ . Sea  $\phi$  una función conocida en  $C^{2m}(\bar{\Omega})$  tal que  $B_j \phi = g_j$  sobre  $\partial\Omega$ . Pruebe que el PVF puede ser transformado en el problema

$$\begin{aligned} Aw &= \hat{f} \text{ en } \Omega \\ B_j w &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde  $w = u - \phi$  y  $\hat{f} = f - A\phi$

## Capítulo 3

# Método de aproximación

Dados los fundamentos matemáticos y la teoría básica sobre la formulación variacional de EDP, en este capítulo se introduce un método para encontrar una solución aproximada del problema variacional (el método de Galerkin) para posteriormente dar un caso especial del mismo, el método de los elementos finitos. El método de Galerkin resulta ser un caso particular del método de los residuos ponderados (MRP) (ver, por ejemplo, [7]). Sin embargo, en ningún momento se hará referencia al MRP, pues su omisión no repercutirá en el desarrollo y análisis del MEF.

Como marco general, sea  $\mathbf{V}$  un espacio de Hilbert,  $B(\cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal (procedente, por ejemplo, de la formulación débil de EDP) y  $l \in \mathbf{V}'$  (representando, por ejemplo, el lado derecho de la EDP). Entonces se quiere encontrar  $u \in \mathbf{V}$  tal que

$$B(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathbf{V} \quad (3.1)$$

Se supone que la forma bilineal  $B(\cdot, \cdot)$  es acotada y  $\mathbf{V}$ -elíptica, es decir, existen constantes  $k$  y  $\alpha$  tal que

$$|B(u, v)| \leq k \|u\|_{\mathbf{V}} \|v\|_{\mathbf{V}} \quad \forall v \in \mathbf{V} \quad (3.2)$$

y

$$B(v, v) \geq \alpha \|v\|_{\mathbf{V}}^2 \quad \forall v \in \mathbf{V} \quad (3.3)$$

### 3.1 El método de Galerkin

La idea básica detrás del método de Galerkin es muy simple. La dificultad de resolver (3.1) viene con el hecho de que  $\mathbf{V}$  es un espacio muy grande (infinito dimensional), resultando imposible crear un procedimiento lógico para encontrar la solución. El método de Galerkin<sup>1</sup>, que se publicó por primera vez en 1915, se basa en una sucesión de subespacios de dimensión finita  $\{\mathbf{V}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{V}$ , que converge a  $\mathbf{V}$ , tal que

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{V}_i} = \mathbf{V} \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{V}_n \subset \mathbf{V}_{n+1} \subset \mathbf{V}$ , y  $\dim(\mathbf{V}_n) = N_n < \infty$  para todo  $n = 1, 2, \dots$ . Cada subespacio  $\mathbf{V}_n$  es generado seleccionando un conjunto de funciones linealmente independientes  $\{\phi_i\}_{i=1}^{N_n}$  en  $\mathbf{V}$  y representa al mismo tiempo un espacio de Hilbert (Hilbert es cerrado).

Teniendo definido el espacio  $\mathbf{V}_n$ , se plantea el problema (3.1) sobre  $\mathbf{V}_n$  en lugar de  $\mathbf{V}$ . Esto es, se busca una función  $u_n \in \mathbf{V}_n$  que satisfaga

$$B(u_n, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathbf{V}_n \quad (3.5)$$

Este problema normalmente se denomina *problema discreto o aproximación de Galerkin*<sup>2</sup>. Se mostrará que bajo hipótesis apropiadas la sucesión de soluciones  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $u_n \in \mathbf{V}$ , calculadas exactamente, converge a la solución exacta del problema (3.1).

**Lema 3.1.** (*Unicidad*) *El problema variacional discreto (3.5) tiene una única solución  $u_n \in \mathbf{V}_n$ .*

**Demostración:** La forma  $B(\cdot, \cdot)$ , restringida a  $\mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n$ , obviamente, sigue siendo bilineal, acotada y  $\mathbf{V}$ -elíptica. La forma lineal  $l(v)$ , restringida a  $\mathbf{V}_n$ , sigue siendo lineal y por tanto  $l \in \mathbf{V}'_n$ . Así, las hipótesis

<sup>1</sup>Boris Grigorievich Galerkin (1871-1945) matemático ruso que alcanzó la fama por sus resultados relacionados sobre la solución numérica de EDP y el estudio sobre el análisis de tensiones en presas. Sus trabajos, encontraron muchas aplicaciones industriales, principalmente en la construcción de grandes presas y centrales hidroeléctricas.

<sup>2</sup>En el caso que la forma bilineal sea simétrica, la solución discreta también se caracteriza por la propiedad  $J(u_n) = \inf\{J(v_n) : v_n \in \mathbf{V}_n\}$ , donde el funcional  $J$  es dado por  $J(v) = \frac{1}{2}B(u, v) - l(v)$ . Esta definición alternativa de la solución discreta es conocida como el *método de Ritz*, un enfoque desde este punto de vista puede encontrarse, entre otros, en el texto de Ciarlet [8].

del Teorema de Lax-Milgram se siguen cumpliendo y por tanto existe una única solución de (3.5). ■

La esencia del método de Galerkin se debe a que la solución  $u_n \in \mathbf{V}_n$  para el problema discreto, se puede encontrar explícitamente como una combinación lineal de las funciones base de  $\mathbf{V}_n$  con coeficientes desconocidos. Por consiguiente, para  $u_n$  existen escalares  $a_j$  y, para cualquier  $v_n \in \mathbf{V}_n$  escalares  $b_j$ , tales que

$$u_n = \sum_{j=1}^{N_n} a_j \phi_j, \quad v = \sum_{i=1}^{N_n} b_i \phi_i \quad (3.6)$$

Sustituyendo (3.6) en (3.5), se obtiene

$$B\left(\sum_j a_j \phi_j, \sum_i b_i \phi_i\right) = l\left(\sum_i b_i \phi_i\right)$$

Usando el hecho que  $B$  es bilineal y  $l$  lineal

$$\sum_i b_i \left( \sum_j B(\phi_j, \phi_i) a_j - l(\phi_i) \right) = 0$$

o, más concisamente

$$\sum_{i=1}^{N_n} b_i \left( \sum_{j=1}^{N_n} K_{ij} a_j - F_i \right) = 0 \quad (3.7)$$

donde

$$K_{ij} := B(\phi_i, \phi_j) \quad \text{y} \quad F_i := l(\phi_i) \quad (3.8)$$

son, respectivamente una matriz  $N_n \times N_n$  (*matriz de rigidez*) y un vector de dimensión  $N_n$  (*vector de carga*). Note que  $K_{ij}$  y  $F_i$  pueden ser evaluadas puesto que las  $\phi_i$  son funciones conocidas y tanto  $B$  como  $l$  están dadas explícitamente.

Como los coeficientes  $b_i$  son arbitrarios, se sigue que (3.7) se cumple solo si la parte interna del paréntesis es cero, lo cual reduce el problema a resolver el sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^{N_n} K_{ij} a_j = F_i \quad i = 1, 2, \dots, N_n \quad (3.9)$$

Una vez resuelto este sistema de ecuaciones, la solución aproximada  $u_n$  se puede encontrar a partir de (3.6).

**Ejemplo 3.1.** Considere el PVF

$$-u'' = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad \text{en } \Omega = (0, 1), \quad u(0) = u'(1) = 0$$

Multiplicando la ecuación por la función test e integrando por partes

$$-\int_0^1 u''v dx = -[v(1)u'(1) - v(0)u'(0)] + \int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 u'v' dx$$

Entonces, la correspondiente forma variacional es: encontrar  $u \in \mathbf{V}$  tal que

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)v dx \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

donde  $\mathbf{V} = \{v \in \mathbf{H}^1(0, 1) : v(0) = 0\}$  (note que  $u'(1) = 0$  es una condición de frontera natural). Se define  $\mathbf{V}_n$  como el subespacio de  $\mathbf{V}$  generado por  $\phi_i(x) = x^i$ , con  $i = 1, 2, 3, \dots, N_n$ . Se tiene entonces que

$$K_{ij} = B(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \phi_i' \phi_j' dx \quad \text{y} \quad F_i = l(\phi_i) = \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\phi_i dx.$$

Si se supone que  $N_n = 2$ , se obtiene las funciones base  $\{\phi_1, \phi_2\} = \{x, x^2\}$  y el conjunto de ecuaciones

$$K_{11}a_1 + K_{12}a_2 = F_1$$

$$K_{21}a_1 + K_{22}a_2 = F_2$$

donde

$$K_{11} = \int_0^1 \phi_1' \phi_1' dx = 1, \quad K_{12} = \int_0^1 \phi_1' \phi_2' dx = 2 \int_0^1 x dx = 1 = K_{21},$$

$$K_{22} = \int_0^1 \phi_2' \phi_2' dx = 4 \int_0^1 x^2 dx = \frac{4}{3}x^3 = \frac{4}{3},$$

$$F_1 = l(\phi_1) = \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)x dx = 0.4052847344,$$

$$F_2 = l(\phi_2) = \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)x^2 dx = 0.3183098861$$

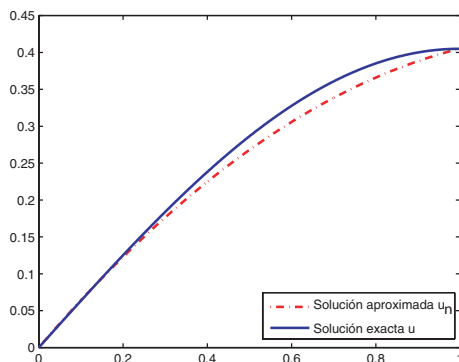
Obteniendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 0.40528 \\ a_1 + \frac{4}{3}a_2 &= 0.31831 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_1 &= 0.6662 \\ a_2 &= 0.2609 \end{aligned}$$

Entonces, la solución  $u_n$  queda dada por

$$u_n = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) = 0.6662x - 0.2609x^2$$

La solución exacta a este problema es  $u(x) = 0.405 \sin(\pi x/2)$ , y es comparada con la solución aproximada en la Figura 3.1. Vemos, una simple aproximación, como la dada en un espacio de dos dimensiones, apenas si se distingue de la solución exacta. ■



**Figura 3.1:** Solución exacta (línea continua) y solución aproximada (línea punteada) del Ejemplo 3.1

Con el fin de mostrar la no singularidad de la matriz de rigidez  $K_n = (K_{ij})_{i,j=1}^{N_n}$ , se prueba primero que ésta tiene la propiedad de definida positiva.

**Lema 3.2.** (Definida positiva de  $K_n$ ) Sea  $\mathbf{V}_n$  un espacio de Hilbert con  $\dim(\mathbf{V}_n) = N_n < \infty$  y  $B(\cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal  $\mathbf{V}$ -elíptica. Entonces la matriz de rigidez  $K_n$  del problema discreto (3.9) es definida positiva.

**Demostración:** El objetivo es demostrar que  $Y^T K Y > 0$  para todo  $Y \in \mathbb{R}^{N_n}$  y  $Y \neq 0$ . Sea  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{N_n})^T$  un vector arbitrario, y  $v$  dada por  $v = \sum_{i=1}^{N_n} y_i \phi_i$ , donde  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_n}\}$  es una base de  $\mathbf{V}_n$ , junto con la propiedad  $\mathbf{V}$ -elíptica de  $B(\cdot, \cdot)$ , se tiene

$$\begin{aligned} Y^T K Y &= \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} y_i K_{ij} y_j = B\left(\sum_{i=1}^{N_n} y_i \phi_i, \sum_{j=1}^{N_n} y_j \phi_j\right) \\ &= B(u, v) \geq \alpha \|v\|_{\mathbf{V}}^2 > 0, \end{aligned}$$

lo cual completa la prueba. ■

**Corolario 3.1.** (No singularidad de  $K_n$ ) La matriz de rigidez  $K_n$  del problema discreto (3.9) es no singular.

**Demostración:** Este hecho se sigue inmediatamente de la existencia y unicidad de la solución  $u_n \in \mathbf{V}$  (Lema 3.1). Alternativamente, supongamos que  $K_n$  es singular. Entonces existe un vector no trivial  $Y_0 \in \mathbb{R}^{N_n}$  tal que  $K_n Y_0 = 0$ . Por tanto, necesariamente  $Y_0^T K_n Y_0 = 0$ , lo cual es contradictorio con la propiedad de definida positiva de  $K_n$  (Lema 3.2). ■

Así, se concluye que el sistema de ecuaciones lineales (3.9) tiene una única solución  $Y_n$  que define una única solución  $u_n \in \mathbf{V}_n$  de (3.5) a través de (3.6).

La forma bilineal  $B(\cdot, \cdot)$  define un producto interno en  $\mathbf{V}$ , si  $B$  es simétrica y  $\mathbf{V}$ -elíptica; de hecho, las propiedades de linealidad y simetría son obvias, mientras la propiedad de definida positiva viene de la  $\mathbf{V}$ -elipticidad de  $B$ :

$$B(v, v) \geq \alpha \|v\|_{\mathbf{V}}^2 > 0 \quad \forall v \neq 0$$

Como antes, se denota el producto interno por  $(\cdot, \cdot)_B$  y nos referimos a este como el *producto interno energético*; la correspondiente norma es llamada *norma de energía*, y es denotada por  $\|\cdot\|_B$ . Así, se tiene

$$(u, v)_B = B(u, v), \quad \|u\|_B^2 = (u, u)_B \quad (3.10)$$

Ahora, si el sistema de funciones bases  $\{\phi_i\}_{i=1}^{N_n}$  se elige de una manera tal que sean *ortogonales respecto al producto interno de la energía*, entonces el sistema de ecuaciones (3.9) se simplifica considerablemente, ya que

$$K_{ij} = B(\phi_i, \phi_j) = (\phi_i, \phi_j)_B = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

y así  $K_{ii} a_i = F_i$  o  $a_i = F_i / K_{ii}$ ; este es el caso del ejemplo anterior.

Sin embargo, un comentario es apropiado para lo dicho anteriormente. Mientras que para el ejemplo anterior resultado absolutamente simple encontrar una base ortogonal respecto al producto interno  $(\cdot, \cdot)_B$ , en general esto es muy difícil. Se podría por supuesto elegir cualquier base no ortogonal y utilizar el procedimiento de Gram-Schmidt para ortogonalizar u ortonormalizar, pero para todos excepto los problemas más triviales, esto es un proceso laborioso y poco se gana de este.

El problema de cómo construir una base  $\{\phi_i\}_{i=1}^{N_n}$  de manera tal que  $\mathbf{V}_n$  se aproxime a  $\mathbf{V}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , puede ser complicado. Recuerde que mientras bases ortogonales para espacios tales como  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  son bien

conocidas (ver, por ejemplo, sección 23 de [7]), al usar el método de Galerkin se requiere encontrar bases del espacio  $\mathbf{V}$  que son subespacios de un espacio de Sobolev  $\mathbf{H}^m(\Omega)$ , y que son definidos en dominios  $\Omega$  los cuales pueden ser absolutamente irregulares en forma. Un método muy simple y elegante para construir tales bases es proporcionado por el método de los elementos finitos. Antes de describir este procedimiento se discuten algunas características importantes de las aproximaciones de Galerkin.

## 3.2 Propiedades de la aproximación de Galerkin

En el apartado anterior fue presentado el método de Galerkin y se ilustró como el método es usado en la práctica. Sin embargo, resulta necesario, conocer bajo que condiciones el método resulta convergente y que características de precisión presenta la solución aproximada  $u_n$ . Con este fin, se introduce la propiedad de ortogonalidad del error en problemas elípticos. Además, se enuncia y prueba el Lema de Céa. A partir de estos resultados se prueba que la sucesión de Galerkin  $\{u_n\}_{n=1,2,\dots}$  converge a la solución del problema.

### 3.2.1 Ortogonalidad del error y Lema de Céa

El error  $e_n := u - u_n$  de la solución para el problema discreto (3.9) presenta la siguiente propiedad de ortogonalidad.

**Lema 3.3.** (*Ortogonalidad del error para problemas elípticos*) Sea  $u \in \mathbf{V}$  la solución exacta del problema continuo (3.1) y  $u_n$  la solución exacta del problema discreto (3.5). Entonces el error  $e_n = u - u_n$  satisface

$$B(u - u_n, v) = 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}_n \quad (3.11)$$

**Demostración:** Sustrayendo (3.5) de (3.1) y restringidos al espacio  $\mathbf{V}_n \subset \mathbf{V}$ . ■

**Interpretación Geométrica** Si la forma bilineal  $B(\cdot, \cdot)$  es simétrica, se induce un producto interno energético  $(u, v)_B = B(u, v)$ . Se sigue de (3.11) que

$$B(e_n, v) = (e_n, v)_B = 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}_n$$

es decir, el error de la aproximación de Galerkin,  $e_n$ , es ortogonal al sub-

espacio  $\mathbf{V}_n$  respecto al producto interno energético (ver Figura 3.2). De ahí que la solución aproximada  $u_n \in \mathbf{V}_n$  es una proyección ortogonal de la solución exacta  $u \in \mathbf{V}$  en el subespacio  $\mathbf{V}_n$  respecto al producto interno energético. De hecho, según el Teorema 23.1 (apartado 23 de [7]), si  $\{\phi_k\}_{k=1}^N$  es una base ortonormal de  $\mathbf{V}_n$  respecto a  $(\cdot, \cdot)_B$ , entonces la proyección ortogonal sobre  $\mathbf{V}_n$  es definida por

$$\mathcal{P}v = \sum_{k=1}^N (v, \phi_k)_B \phi_k \quad (3.12)$$

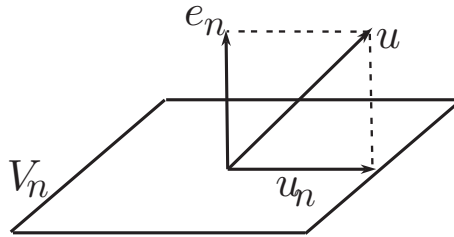
Pero de (3.11) si se toma  $v = \phi_k$  se encuentra que

$$(u, \phi_k)_B = (u_n, \phi_k)_B$$

de modo que

$$\mathcal{P}u = \sum_{k=1}^N (u_n, \phi_k)_B \phi_k = \mathcal{P}u_n = u_n \quad (3.13)$$

Por tanto, la proyección ortogonal de la solución  $u$  sobre  $\mathbf{V}_n$  es la solución aproximada  $u_n$ , usando el producto interno  $(\cdot, \cdot)_B$ . Claramente,  $e_n = u - u_n = u - \mathcal{P}u \in N(\mathcal{P})$ , esto es  $(e_n, v)_B = 0$ , lo cual confirma (3.11).



**Figura 3.2:** Interpretación geométrica de la ortogonalidad de Galerkin.

La analogía geométrica se puede llevar un poco más lejos. La Figura 3.2 sugiere fuertemente que la distancia  $\|u - v\|$ , con  $v \in \mathbf{V}_n$  arbitraria, es un mínimo cuando  $v = u_n$ . Lo cual, además, se puede ver del siguiente cálculo,

$$\begin{aligned} B(u - v, u - v) &= B(u - u_n + u_n - v, u - u_n + u_n - v) \\ &= B(e_n + (u_n - v), e_n + (u_n - v)) \\ &= B(e_n, e_n) + 2B(e_n, u_n - v) + B(u_n - v, u_n - v) \end{aligned}$$

usando el hecho de que  $B$  es bilineal. El segundo término del lado derecho es cero, ya que  $e_n$  es ortogonal a todo miembro de  $\mathbf{V}_n$  usando el producto interno  $(\cdot, \cdot)_B$ . Así,

$$\|u - v\|_B^2 = \|e_n\|_B^2 + \|u_n - v\|_B^2$$

y para  $u$  y  $u_n$  fijas (y por lo tanto para  $e_n$  fijo) se concluye que  $\|u - v\|_B$  es más pequeño cuando  $v = u_n$ , esto es

$$\|u - u_n\|_B = \inf_{v \in \mathbf{V}_n} \|u - v\|_B \quad (3.14)$$

En otras palabras, la función  $v$  que es más cercana a  $u$  es la aproximación de Galerkin. En este sentido, *la aproximación de Galerkin es la mejor aproximación a  $u$  en  $\mathbf{V}_n$* . ■

A continuación se introduce el Lema de Céa, el cual establece la relación entre el error de la aproximación  $e_n = u - u_n$  y las propiedades de la interpolación del subespacio  $\mathbf{V}_n$ , usando las constantes,  $\alpha$  y  $k$ , que surgen de la continuidad y la propiedad  $\mathbf{V}$ -elíptica de la forma bilineal  $B$ .

**Teorema 3.1** (Lema de Céa). *Sea  $\mathbf{V}$  un espacio de Hilbert,  $B(\cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal acotada y  $\mathbf{V}$ -elíptica y  $l \in \mathbf{V}'$ . Sea  $u \in \mathbf{V}$  la solución del problema (3.1). Además, sea  $\mathbf{V}_n$  un subespacio de  $\mathbf{V}$  y  $u_n \in \mathbf{V}_n$  la solución de la aproximación de Galerkin (3.5). Sea  $k$  y  $\alpha$  las constantes de continuidad y  $\mathbf{V}$ -elíptica de la forma  $B(\cdot, \cdot)$ . Entonces*

$$\|u - u_n\|_V \leq \frac{k}{\alpha} \inf_{v \in \mathbf{V}_n} \|u - v\|_V \quad (3.15)$$

**Demostración:** Usando (3.11) se obtiene que

$$\begin{aligned} B(u - u_n, u - u_n) &= B(u - u_n, u - v) - B(u - u_n, u_n - v) \\ &= B(u - u_n, u - v) \end{aligned}$$

para cualquier  $v \in \mathbf{V}_n$ . Por la  $\mathbf{V}$ -elípticidad de la forma bilineal  $B(\cdot, \cdot)$ , se tiene

$$B(u - u_n, u - u_n) \geq \alpha \|u - u_n\|_V^2 \quad (3.16)$$

La acotación de  $B(\cdot, \cdot)$  produce

$$B(u - u_n, u - u_n) \leq k \|u - u_n\|_V \|u - v\|_V \quad \forall v \in \mathbf{V}_n \quad (3.17)$$

De (3.16) y (3.17) se obtiene

$$\|u - u_n\|_V \leq \frac{k}{\alpha} \|u - v\|_V \quad \forall v \in \mathbf{V}_n$$

lo cual completa la prueba.  $\blacksquare$

El Teorema 3.1 se probó por primera vez por Cía [22] en 1964 para el caso simétrico y ampliado para el caso no simétrico cuatro años más tarde en [23].

**Observación 1.** *El Lema de Cía afirma que el error de aproximación  $e_n$  depende de la elección del subespacio de Galerkin  $\mathbf{V}_n$ , pero no depende de la selección de la base. Por lo tanto, cuando se trabaja con MEF para problemas elípticos, se debe pensar en términos de espacios de funciones en lugar de un conjunto de funciones bases en concreto. Además, los resultados numéricos deben ser independientes de las funciones base seleccionadas. La selección de la base es un asunto relacionado con el número de condición de la matriz de rigidez  $K_n$ , la cual influye en el desempeño de los métodos iterativos usados para resolver el sistema.*

### 3.2.2 Convergencia del método de Galerkin

La convergencia del método de Galerkin para problemas elípticos es una simple consecuencia del Lema de Cía (Teorema 3.1).

**Teorema 3.2.** *Sea  $\mathbf{V}$  un espacio de Hilbert y  $\mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}_2 \subset \dots \subset \mathbf{V}$  una sucesión de estos subespacios finito dimensional tal que*

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{V}_i} = \mathbf{V} \quad (3.18)$$

*se cumple. Además, supongamos que  $B(\cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma bilineal acotada y  $\mathbf{V}$ -elíptica y  $l \in \mathbf{V}'$ . Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_V = 0$$

*es decir, el método de Galerkin para el problema (3.1) es convergente.*

**Demostración:** Dada la solución exacta  $u \in \mathbf{V}$  de (3.1), por (3.18) es posible encontrar una sucesión  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $v_n \in \mathbf{V}_n \subset \mathbf{V}$  para cada  $n = 1, 2, \dots$ , y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - v_n\|_V = 0 \quad (3.19)$$

El Lema 3.1 nos da la existencia y unicidad de la solución  $u_n \in \mathbf{V}_n$  del problema discreto (3.5) para cualquier  $n \geq 1$ . Por el Lema de Cía,

$$\|u - u_n\|_V \leq \frac{k}{\alpha} \inf_{v \in \mathbf{V}_n} \|u - v\|_V \leq \frac{k}{\alpha} \|u - v_n\|_V, \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Por (3.19) se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_V = 0$$

■

El Lema de Céa nos dice que para conseguir una cierta idea del tamaño del error  $u - u_n$ , no es de hecho necesario trabajar con  $u_n$ ; basta escoger cualquier miembro  $v_n \in \mathbf{V}_n$  y encontrar la distancia de  $u$  a  $v_n$ . Una vez calculada esta distancia, (3.15) o (3.20) nos asegura que el error será acotado superiormente por  $(k/\alpha)\|u - v_n\|_V$ . La pregunta que surge de forma inmediata es: ¿qué función  $v_n$  se utiliza para este propósito? La opción más conveniente es tomar la *interpolación de  $u$* : es decir, una función  $I_n u$  en  $\mathbf{V}_n$  cuyos valores coinciden con los de  $u$  en  $N$  puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de  $\Omega$ . Ya que  $I_n u$  tiene la representación

$$I_n u = \sum_{k=1}^N \tilde{a}_k \phi_k \quad (3.21)$$

donde  $\{\phi_k\}$  es la base de  $\mathbf{V}_n$ , entonces se pueden determinar los coeficientes  $\tilde{a}_k$  del hecho que

$$u(x_k) = I_n u(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Esto es, se resuelve para  $\tilde{a}_k$ , las  $N$  ecuaciones simultáneamente

$$\sum_{j=1}^N \tilde{a}_j \phi_j(x_k) = u(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, N$$

El operador  $\mathcal{P} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  definido por  $\mathcal{P}u = I_n u$  es un *operador de proyección*.

Un ejemplo sencillo es dado para el subespacio de dos dimensiones de  $\mathbf{H}^1(0, 1)$  que consiste de las funciones

$$\phi_1(x) = x \quad \phi_2(x) = 1 - x \quad (3.22)$$

Supongamos que se requiere que la interpolantes  $I_n u$  sea igual a  $u$  en los puntos  $x_1 = 1/3$  y  $x_2 = 2/3$ , entonces de (3.21) y (3.22) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\tilde{a}_1 + \frac{2}{3}\tilde{a}_2 &= u\left(\frac{1}{3}\right) \\ \frac{2}{3}\tilde{a}_1 + \frac{1}{3}\tilde{a}_2 &= u\left(\frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

Resolviendo, se obtiene

$$\tilde{a}_1 = 2u\left(\frac{2}{3}\right) - u\left(\frac{1}{3}\right), \quad \tilde{a}_2 = 2u\left(\frac{1}{3}\right) - u\left(\frac{2}{3}\right)$$

Con la selección (3.21) para  $v_n$ , (3.20) queda dada por

$$\|u - u_n\| \leq \frac{k}{\alpha} \|u - I_n u\| \quad (3.23)$$

y el problema de la convergencia, se reduce al de probar, si  $I_n u \rightarrow u$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y, si esto ocurre, con qué velocidad ocurre. Se ha reducido así el problema de la convergencia de la aproximación de Galerkin a uno de convergencia de interpolación.

En el caso del MEF, que se caracteriza por el hecho de que las funciones bases son polinomios a trozos, se verá que la distancia entre  $u$  y su interpolante  $I_n u$  satisface una desigualdad de la forma

$$\|u - I_n u\|_{\mathbf{V}} \leq C H^\beta \quad (3.24)$$

donde  $H$  representa el tamaño de elemento (por ejemplo,  $H = 1/N_n$ , para el caso unidimensional),  $C$  una constante independiente de  $H$ , y  $\beta$  positivo. Entonces (3.24) nos dice que

$$\|u - u_n\|_{\mathbf{V}} \leq \frac{Ck}{\alpha} H^\beta \quad (3.25)$$

Por lo tanto, como la aproximación mejora progresivamente a medida que  $N_n$  se haga más grande y  $H$  se haga más pequeño, se puede esperar que  $u_n$  converge a  $u$  con una velocidad que esta determinada por la magnitud de  $\beta$ . Esto se escribe como

$$\|u - u_n\| = \mathcal{O}(H^\beta) \quad (3.26)$$

y se dice que *la convergencia de  $u_n$  a  $u$  es de orden  $\beta$* . Claramente, se debe buscar que  $\beta$  sea tan grande como sea posible.

Un resultado como (3.23) es llamado una *estimación de error de interpolación*, por razones obvias, mientras que (3.25) y (3.26) son llamadas *estimaciones del error de Galerkin*. La manera de examinar la convergencia de las aproximaciones de Galerkin estarán siempre vía las estimaciones de la forma (3.25).

En el caso del problema modelo unidimensional, las siguientes estimaciones a priori del error se pueden probar para funciones base lineales a trozos

$$\|e\|_E \leq C_1 H, \quad \|e\|_2 \leq C_2 H^2, \quad \|e\|_\infty \leq C_3 H^2$$

Geoméricamente, se puede observar que la gráfica de una función real  $E(h)$  de la forma  $CH^\beta$  es una línea recta de pendiente  $\beta$  e interceptada por el eje de las ordenadas en  $\log(C)$  sobre una gráfica logarítmica:

$$\log(E) = \beta \log(H) + \log(C)$$

Así, si la igualdad en (3.24) se cumple, una gráfica de  $\log(\|E\|)$  contra  $\log(H)$  debe producir una línea recta, para  $H$  suficientemente pequeña, la pendiente es el orden de convergencia respecto a la norma  $\|\cdot\|$ ; la constante  $C$  desplazará la línea hacia arriba o hacia abajo.

## Ejercicios

- 3.1 Use el método de Galerkin con las funciones  $\{\phi_1, \phi_2\} = \{x^2 - 2x, x(x-1)^2\}$  para obtener una solución aproximada (dos parámetros) de la solución del PVF

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{con} \quad u(0) = 0, \quad \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{en} \quad x = 1$$

Encuentre la ecuación residual  $\varepsilon(x) = d^2u_n/dx^2 + u_n - 1$ . Grafique en conjunto la solución aproximada  $u_n$ , la solución exacta  $u = -\cos(x) - \tan(1)\sin(x) + 1$ , y la ecuación residual  $\varepsilon(x)$ .

- 3.2 Determine los parámetros de la solución  $u_n(x) = a_1(1-x^2) + a_2(1-x_4)$  del problema

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (1+x^2)u = 1, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{con} \quad u(-1) = 0, \quad u(1) = 0$$

Encuentre la ecuación residual  $\varepsilon(x)$  y grafique las soluciones obtenidas.

- 3.3 El PVF  $(xu')' = x$  en  $\Omega = (1, 2)$ ,  $u(1) = u(2) = 0$ , tiene la solución exacta  $u(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{4} \frac{\ln(x)}{\ln(2)} - \frac{1}{4}$ . Use el método de Galerkin para

encontrar una solución aproximada  $u_n$  en el subespacio de  $\mathbf{H}_0^1(1, 2)$  generado por  $\phi_1(x) = (x - 1)(x - 2)$  y  $\phi_2(x) = x(x - 1)(x - 2)$ . Compare la solución exacta y aproximada de forma gráfica y usando el error  $\|e\|_{L^\infty}$ ,  $\|e\|_{L_2}$  y  $\|e\|_{H^1}$ , donde  $e = u - u_n$ .

- 3.4 Use el método de Galerkin con funciones base  $\phi_1(x, y) = (x - x^2)(y - y^2)$  y  $\phi_2(x, y) = (x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x)(y^3 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{2}y)$  para resolver el PVF

$$-\nabla^2 u = xy \quad \text{en } \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

- 3.5 Dado el problema variacional  $B(u, v) = l(v)$ , para todo  $v \in \mathbf{V}$ , con  $B$  simétrica y  $\mathbf{V}$ -elíptica, muestre que la aproximación de Galerkin  $u_n$  satisface

$$\|u - u_n\|_B^2 = \|u\|_B^2 - \|u_n\|_B^2$$

esto es, el error en norma de energía es igual al error en energía. De esto se deduce que  $\|u_n\|_B \leq \|u\|_B$ .

- 3.6 Sea  $\mathbf{V}_n$  un subespacio de  $\mathbf{H}^1(1, 1)$  generado por las tres funciones

$$\phi_1(x) = \frac{1}{2}x(x - 1), \quad \phi_2(x) = 1 - x^2, \quad \phi_3(x) = \frac{1}{2}x(x + 1)$$

y defina la interpolante  $I_n u$  de  $u \in \mathbf{H}^1(-1, 1)$  por  $I_n u = \sum_{k=1}^3 a_k \phi_k(x)$

donde  $a_k = u(x_k)$  y  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$ . Encuentre  $I_n u$  si  $u(x) = \sin(\pi(x - \frac{1}{2}))/2$ , y evalúe  $\|u - u_n\|_{H^1}$ .

- 3.7 Considere el problema discreto variacional: encontrar  $u_n \in \mathbf{H}_0^1(0, 1)$  tal que

$$\int_0^1 (u'_n v'_n + u_n v_n) dx = \int_0^1 x v_n dx, \quad \forall v_n \in \mathbf{H}_0^1(0, 1)$$

Para  $N_n = 3$  y seleccionando  $\phi_j = \sin(j\pi x)$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Calcule  $K_{ij}$  y  $F_j$  y encuentre la solución aproximada  $u_n$ . Grafique la solución exacta y aproximada y comente sobre la precisión de la solución encontrada.

- 3.8 Construya funciones base  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  que sean polinomios de grado  $(i + 1)$  y satisfaga las condiciones de frontera del problema del ejercicio 3.7. Repita el ejercicio 3.7 para esta base de funciones.

## Capítulo 4

# El Método de los Elementos Finitos

En situaciones prácticas, la determinación de funciones bases apropiadas para usar en el método de Galerkin puede ser extremadamente difícil, especialmente en casos donde el dominio  $\Omega$  no tiene una forma simple. El MEF supera esta dificultad proporcionando una manera sistemática para generar funciones bases en dominios con una forma bastante arbitraria. Lo que hace al método especialmente atractivo es el hecho que estas funciones bases son polinomios a trozos que son diferentes de cero solo en una parte relativamente pequeña de  $\Omega$ , lo cual resulta en que las evaluaciones de las integrales de  $K_{ij}$  y  $F_j$  son muy simples.

Las incógnitas de un problema variacional representan en general componentes de un campo vectorial. Por ejemplo, el desplazamiento  $u(x, y)$  en una placa bidimensional es un vector ( $2 \times 1$ ). Sin embargo, cantidades como temperatura, presión y potenciales de corriente son de naturaleza escalar. Por ejemplo, en la conducción de calor bidimensional de estado estable, el campo de temperatura  $T(x, y)$  es la incógnita a determinar. Esta es la clase de problemas más simple y los más comúnmente encontrados en casi todas las ramas de la ingeniería y la física, y la mayor parte de las propiedades de las aproximaciones mediante MEF pueden ser demostradas en este contexto. De esta forma, se centra el desenvolvimiento del método para problemas que pueden verse como casos especiales de

la ecuación de Helmholtz, dada por

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \lambda u + G = 0 \quad (4.1)$$

junto con las condiciones de frontera sobre  $u(x, y)$  y sus derivadas. La generalización a PVF de mayor orden y a problemas en  $\mathbb{R}^n$  para  $n \geq 3$  se sigue de una manera natural.

En los siguientes apartados se delinean los pasos que nos llevan a la construcción del MEF para PVF (campo escalar) definidos en  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^2$ . Posteriormente, se describen en detalle algunas funciones bases comúnmente usadas en la implementación del método. Se muestra, por medio de ejemplos cómo el método es usado para resolver PVF en  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^2$ .

Finalmente, se adjunto al texto un código para resolver el tipo de problema a discutir en este capítulo. Aunque no se analiza el desarrollo de dicho código, se motiva al lector que ejecute los ejemplos dados y haga algunas pequeñas modificaciones para implemente los ejemplos dejados en la lista de ejercicios.

## 4.1 El MEF para problemas de segundo orden

Supongamos que se tiene el siguiente PVFV: encontrar  $u \in \mathbf{V}$  tal que

$$B(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in \mathbf{V} \quad (4.2)$$

Para un PVF de segundo orden, el espacio de funciones admisibles  $\mathbf{V}$  consiste de todas aquellas funciones en  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  que satisface las condiciones de frontera esenciales.

Una aproximación de Galerkin  $u_n$  a la solución de (4.2) puede ser encontrada construyendo un subespacio finito dimensional  $\mathbf{V}_n$  de  $\mathbf{V}$ , el cual es generado por un número finito de funciones bases  $\phi_i$ . Entonces se plantea el problema de encontrar un  $u_n \in \mathbf{V}_n$  que satisface

$$B(u_n, v_n) = \ell(v_n) \quad \forall v_n \in \mathbf{V}_n \quad (4.3)$$

El objetivo entonces es describir un método para construir funciones bases  $\phi_i$  apropiadas; una vez hecho esto, el problema se reduce a resolver

$$\sum_j K_{ij} a_j = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.4)$$

donde, como ya se dijo en (3.8)

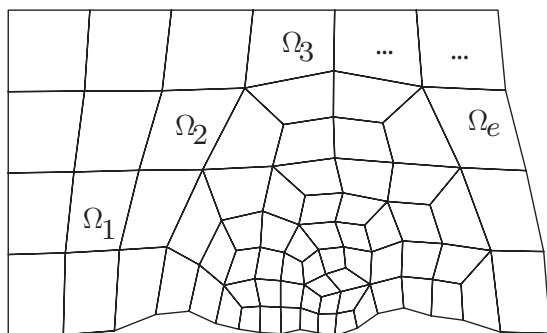
$$K_{ij} = B(\phi_i, \phi_j) \quad \text{y} \quad F_i = l(\phi_i) \quad (4.5)$$

### 4.1.1 La malla de elementos finitos

Se comienza subdividiendo el dominio  $\Omega$  en un número finito  $E$  de subdominios  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_E$ , llamados los elementos finitos. Estos elementos no se solapan y cubren  $\Omega$ , por tanto, satisfacen

$$\Omega_\ell \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{para} \quad \ell \neq j, \quad \bigcup_{e=1}^E \bar{\Omega}_e = \bar{\Omega} \quad (4.6)$$

Para evitar complicaciones innecesarias, se asume que el dominio  $\Omega$  es poligonal si es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ . Es decir, la frontera  $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$  de  $\Omega$  se compone de segmento rectos. Bajo estas condiciones, es fácil ver que el dominio entero se puede cubrir exactamente por elementos poligonales, como muestra la Figura 4.1.

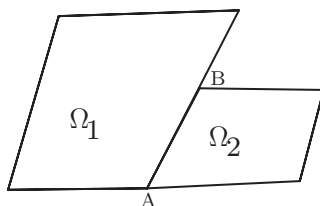


**Figura 4.1:** Discretización por elementos finitos del dominio  $\Omega$  en una malla compuesta por elementos cuadriláteros.

Se impone una condición más a la subdivisión de  $\Omega$ : todo lado de la frontera de un elemento en  $\mathbb{R}^2$  es o parte de la frontera  $\partial\Omega$ , o es un lado de otro elemento. Esta condición elimina la situación tal como la que se muestra en la Figura 4.2, en la cual  $AB$  es un lado de  $\Omega_2$  pero no de  $\Omega_1$ .

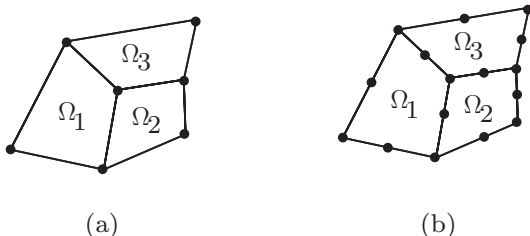
### 4.1.2 Puntos nodales

Se identifican ciertos puntos en el dominio subdividido llamados *nodos* o *puntos nodales*; estos puntos desempeñan un papel dominante en el



**Figura 4.2:** Discretización no aceptada del dominio  $\Omega$ .

MEF, como se pondrá en evidencia a medida que se vaya desarrollando el método. Los nodos se asignan, por lo menos, en los vértices de los elementos como se muestra en la Figura 4.3.a, pero para mejorar la aproximación, otros nodos se pueden introducir, por ejemplo, en los puntos medios de los lados de los elementos tal como se indica en la Figura 4.3.b. En cualquier caso, hay un total de  $m$  nodos, los cuales son numerados  $1, 2, \dots, m$  y tienen vectores de posición  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . El conjunto de elementos y nodos que componen el dominio  $\Omega$  es llamado *la malla de elementos finitos*.



**Figura 4.3:** Configuración de los nodos en los elementos del dominio  $\Omega$ .

### 4.1.3 Funciones bases $\phi_i$

Definida la malla de elementos finitos, se está listo para proceder a definir las funciones base de elementos finitos. En el procedimiento se debe tener presente que las funciones bases definen un subespacio de  $\mathbf{V}$ , así que ellas deben ser funciones en  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  que satisfagan las condiciones de frontera esenciales. Se deja a un lado, por el momento, la cuestión de las

condiciones de frontera esenciales y se procede a construir un sistema de funciones con las características siguientes:

- (i) Las funciones  $\phi_i$  son continuas, esto es,  $\phi_i \in \mathbf{C}(\bar{\Omega})$ .
- (ii) Hay un total de  $m$  funciones bases, y cada función  $\phi_i$  es distinta de cero solo en aquellos elementos que están conectado por el nodo  $i$ .
- (iii)  $\phi_i$  es igual a 1 en el nodo  $i$ , e igual a cero en los otros nodos:

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases} \quad (4.7)$$

- (iv)  $\varphi_i^{(e)}$  será la *restricción* de  $\phi_i$  al elemento  $\Omega_e$ , en otras palabras,

$$\varphi_i^{(e)} = \phi_i \Big|_{\Omega_e}; \quad (4.8)$$

entonces  $\varphi_i^{(e)}$  es una función polinomial.

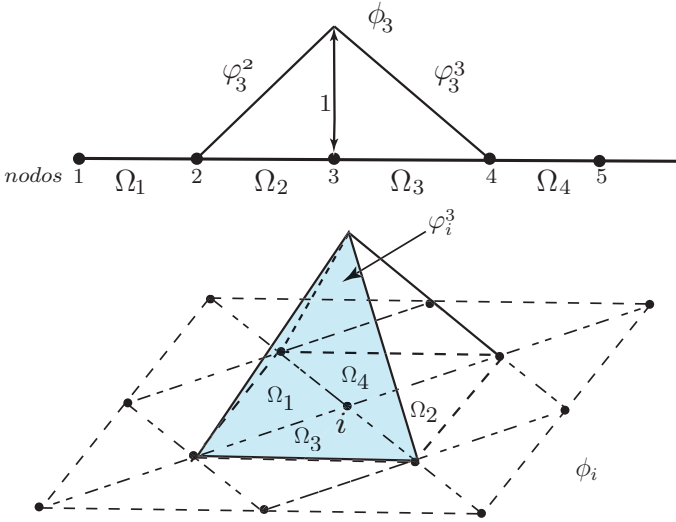
De (iii) y (iv) es claro que la función  $\varphi_i^{(e)}$  define un elemento ( $e$ ) con las características

$$\varphi_i^{(e)}(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases} \quad (4.9)$$

con los índices  $i$  y  $j$  recorriendo todos los nodos de  $\Omega_e$ . Llamaremos a  $\varphi_i^{(e)}$  función de base local (Ver Figura 4.4). La definición de dichas funciones locales constituye el ingrediente fundamental del MEF. Las funciones locales se conocen por distintos nombres, el más extendido es quizás el de *funciones de forma o funciones de interpolación*, porque proporcionan las formas que puede adoptar localmente el campo incógnita. La elección de estas está condicionado no solo por la geometría de los elementos finitos, sino también, por el tipo de problema que se intenta resolver (elasticidad, plasticidad, transferencia de calor, etc.)

No es difícil demostrar que las condiciones (i) y (iv) aseguran que las funciones  $\varphi_i$  pertenecen a  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ , como fue requerido (ejercicio). Por lo tanto, se van a definir funciones base las cuales son polinomiales a trozos, y con la propiedad adicional que tengan *soporte pequeño*, esto es, que sean distintas de cero solo en una región pequeña del dominio.

Con lo dicho, se tiene entonces que  $N_n$  está relacionado implícitamente con el tamaño de elemento  $H$ . De esta manera, y solo como notación, la solución  $u_n$  y el espacio  $\mathbf{V}_n$  serán además denotados usando el subíndice



**Figura 4.4:** Ejemplo de funciones base  $\phi_i$  y funciones de base local  $\varphi_i^e$  para una malla en 1D (parte superior) y 2D con elementos triangulares (parte inferior).

$H$  (esto es,  $u_H$  y  $\mathbf{V}_H$ ). Así, la solución aproximada de Galerkin y las funciones de ponderación a utilizar quedan dadas por

$$u_H(x) = \sum_{i=1}^m a_i \phi_i(x), \quad v_H(x) = \sum_{i=1}^m b_i \phi_i(x) \quad (4.10)$$

Ejemplos específicos de funciones de ponderación serán dados en el siguiente apartado. Sin embargo, se debe observar que de (4.7) se encuentra

$$v_H(x_j) = \sum_{i=1}^m b_i \phi_i(x_j) = b_j$$

esto es, el coeficiente  $b_j$  es simplemente *el valor de  $v_H$  en el nodo  $j$* .

Hasta el momento, no se ha dicho nada sobre las condiciones de frontera esenciales, las cuales forman parte de la definición de  $\mathbf{V}_H$ . Así, si se denota por  $\mathbf{X}_H$  el espacio generado por las funciones bases  $\{\phi_i\}_{i=1}^m$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_H &= \{v_H \in \mathbf{X}_H : v_H \text{ satisface las conds. de frontera esenciales}\} \\ &= \text{span} \{\phi_i : \phi_i \text{ satisface las conds. de frontera esenciales}\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

De la misma manera, se denota por  $\mathbf{X}_e$  el espacio generado por las funciones  $\varphi_i^e$ , esto es,

$$\mathbf{X}_e = \text{span} \left\{ \varphi_i^{(e)} \right\} = \left\{ v_H |_{\Omega_e}, v_H \in \mathbf{X}_H \right\}$$

es decir,  $\mathbf{X}_e$  es el espacio que consiste de la restricción de todas las funciones en  $\mathbf{X}_H$  a  $\Omega_e$ . Debido a (iv) se tiene que  $\mathbf{X}_e$  consiste de todos los polinomios hasta un cierto grado dado.

#### 4.1.4 La solución aproximada

Dado que  $\varphi_i^{(e)}$  es la restricción de  $\phi_i$  a  $\Omega_e$ , se tiene que (4.5) se puede escribir como

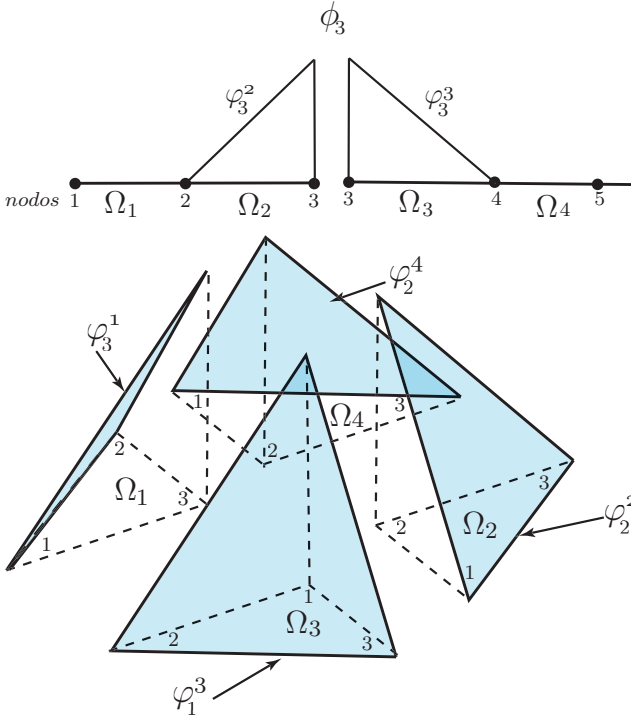
$$K_{ij} = B(\phi_i, \phi_j) = \sum_{e=1}^E B^{(e)}(\phi_i, \phi_j) = \sum_{e=1}^E \underbrace{B^{(e)}(\varphi_i^{(e)}, \varphi_j^{(e)})}_{K_{ij}^{(e)}} \quad (4.12)$$

y

$$F_i = l(\phi_i) = \sum_{e=1}^E l^{(e)}(\phi_i) = \sum_{e=1}^E \underbrace{\ell^{(e)}(\varphi_i^{(e)})}_{F_i^{(e)}} \quad (4.13)$$

Aquí se ha usado el hecho, en primer lugar, que  $B(\phi_i, \phi_j)$  es de la forma  $\int_{\Omega} \dots$ , lo cual puede escribirse como una suma de integrales  $\sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \dots$  sobre cada elemento  $\Omega_e$ . Así, la evaluación actual de  $K_{ij}$  y  $F_i$  se reduce a la evaluación de una serie de matrices  $K_{ij}^{(e)}$  y vectores  $F_i^{(e)}$  para cada elemento, y entonces se suman estas contribuciones sobre todos los elementos. La condición (ii), del apartado anterior, da lugar a una simplificación adicional: ya que  $\phi_i = 0$  para todo elemento que no tenga al nodo  $i$  como uno de sus nodos, claramente  $K_{ij}^{(e)} = 0$  si los nodos  $i$  y  $j$  no pertenecen a  $\Omega_e$ . Se sigue entonces, que una enumeración apropiada de los nodos dará lugar a una matriz  $K$  que tiene una estructura de banda en la cual todas las entradas distintas de cero están alrededor de la diagonal principal. Desde un punto de vista de cómputo esto representa una ventaja adicional.

Debe quedar claro lo que se ha discutido: se puede construir una función base  $\phi_i$  a partir de parches formados por las funciones bases local  $\varphi_i^{(e)}$  asociadas, al nodo  $i$ , como se muestra en la Figura 4.5.



**Figura 4.5:** Funciones base local  $\varphi_i^e$  para una malla en 1D (parte superior) y 2D con elementos triangulares (parte inferior). Al unir las funciones  $\varphi_i^{(e)}$  de los elementos que comparten el nodo  $i$ , se forma la función base,  $\phi_i$ , correspondiente al nodo  $i$ .

### Solución del sistema de ecuaciones

El método numérico utilizado para resolver el sistema lineal de ecuaciones,  $Ka = F$ , reviste una importancia fundamental en el desenvolvimiento computacional del MEF. En general, la selección de dicho método dependerá del tamaño del sistema a resolver. Los métodos directos (eliminación Gaussiana, Choleski, Frontal, QR, etc.) obtienen una solución aproximada en un número finito de pasos y son apropiados para sistemas pequeños y densos. Una excelente referencia para el estudio de los métodos directos es el libro de Datta [24]. Los métodos iterativos, por otro lado, resultan apropiados para resolver grandes sistemas lineales de ecuaciones, con matriz sparse (que tiene muy pocos elementos diferentes de cero) y usualmente con una estructura (cero-no-ceros) preestablecida.

En el caso de matrices simétricas definidas positivas, el método iterativo más conocido es el de gradientes conjugados, desarrollado por Hestenes y Stiefel [25] en 1952 y, posteriormente, redescubierto por Reid [26] en 1971. No obstante, existe un sin fin de referencias literarias para el estudio de tales métodos. Un enfoque más clásico se puede encontrar en el libro de Isaacson y Keller [27]. El libro de Molina y Raydán [28] junto a las referencias que se dan en este, constituye un compendio más reciente para el caso de métodos iterativos.

La discusión comparativa acerca de las ventajas, limitaciones y bondades de los diferentes métodos es un aspecto que, por su complejidad, escapa del alcance de este libro y ahondar en esta dirección solo nos alejaría de los objetivos que se siguen. Así, solo nos resta limitarnos al uso de las librerías (software) existentes y motivar al lector, interesado en estos aspectos, a consultar las referencias antes mencionadas.

## 4.2 Problema unidimensional

En este apartado, se darán los detalles de un procedimiento sistemático para la creación de las funciones bases locales  $\varphi_i^{(e)}$  y, por lo tanto, las funciones bases  $\phi_i$ , para el caso de un problema unidimensional; posteriormente, se pondrán en práctica en el desarrollo de un ejemplo. Para esto, consideremos un problema de segundo orden definido en un subconjunto  $\Omega = (a, b)$  de la recta real. El dominio es dividido en elementos  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_E$ , donde cada elemento  $\Omega_e$  es un segmento de longitud  $h_e$ .

Supongamos ahora que nos gustaría que  $\mathbf{X}_H$  fuera el espacio de polinomios a trozos de grado 1, es decir, líneas rectas a trozos. Entonces si se denota al conjunto de todos los polinomios de grado  $\leq k$  en  $\Omega_e$  por  $\mathbf{P}_k(\Omega_e)$ ,  $\mathbf{X}_e$  es igual que  $\mathbf{P}_1(\Omega_e)$ . Además, ya que toda línea recta es de la forma  $y(x) = a + bx$ , se sigue que, con un conocimiento de los valores de  $y$  en dos puntos de  $\Omega_e$ , es suficiente para determinar  $y(x)$  en  $\Omega_e$ . Con esto en mente, se definen puntos nodales en las aristas de todos los elementos, así que cada elemento tiene dos puntos nodales. Como se muestra en la Figura (4.6), en vista de este simple arreglo, se puede numerar los nodos secuencialmente de modo que  $\Omega_e$  será conectado a los nodos  $e$  y  $e + 1$ .

El siguiente paso es definir dos funciones de forma lineales  $\varphi_i^{(e)}$  y  $\varphi_{i+1}^{(e)}$  que generan  $\mathbf{X}_e$  y satisfaga (4.9). Haciendo uso de las propiedades de los



**Figura 4.6:** Malla de elementos finitos 1D .

polinomios de Lagrange, se tiene que las únicas funciones que cumplen todos los requerimientos coinciden precisamente con los polinomios de Lagrange (es por esto que a los elementos se les denomina lagrangianos):

$$\varphi_i^{(e)}(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \left( \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \tag{4.14}$$

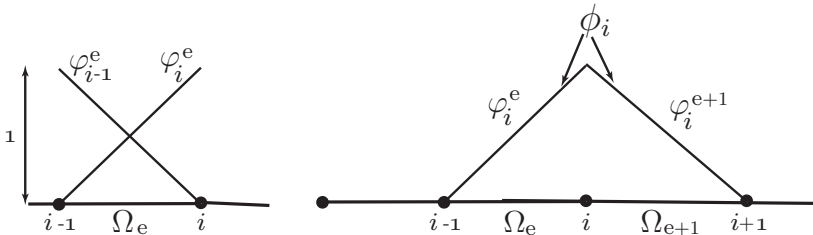
Así, para el caso lineal, se tiene entonces de (4.14) que:

$$\varphi_i^{(e)}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_e}, \quad \varphi_{i+1}^{(e)}(x) = \frac{(x - x_i)}{h_e} \tag{4.15}$$

con  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$  y  $h_e = x_{i+1} - x_i$  (longitud del elemento). Se debe notar que toda función base  $\phi_i$  es una función lineal a trozos (tipo sombrero) formada al unir las funciones bases asociadas al nodo  $i$ . Por lo tanto, cada función  $v_H$  en  $\mathbf{X}_H$  es una función lineal a trozos de la forma

$$v_H(x) = \sum_{i=1}^m b_i \phi_i(x)$$

en la cual  $b_i$  es el valor de  $v_H$  en el nodo  $i$  (Figura 4.7).



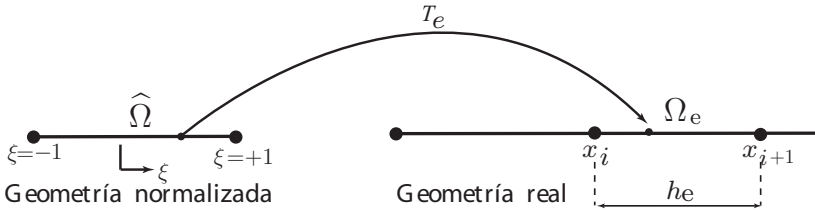
**Figura 4.7:** Funciones de forma 1D.

En lugar de definir funciones base locales para cada elemento como en (4.15), se puede simplificar el trabajo considerablemente creando un

elemento de referencia  $\widehat{\Omega}$  (sistema de coordenadas natural o normalizado basado en la variable  $\xi$ ), el cual está aislado de la malla de elementos finitos actual y que es referido a su propio sistema de coordenadas  $\xi$ . El elemento de referencia se extiende de  $\xi = -1$  a  $\xi = +1$  y tiene el mismo sistema de puntos nodales que los elementos  $\Omega_e$  en la malla actual (dos nodos en este caso). Esta situación es mostrada en la Figura 4.8. Cada elemento de  $\Omega_e$  puede ahora ser visto como un mapeo de  $\widehat{\Omega}$  a  $\Omega_e$ , mediante la transformación

$$x = \frac{h_e}{2} \xi + x_c \quad \text{o} \quad \xi = \frac{2}{h_e} (x - x_c) \quad (4.16)$$

donde  $x_c$  es la coordenada del centro de  $\Omega_e$  ( $x_c = \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)$ ) y  $h_e$  es la longitud de  $\Omega_e$  (ver la Figura 4.8). Así, como  $\xi$  va de  $-1$  a  $+1$ ,  $x$  va de  $x_i$  a  $x_{i+1}$ .



**Figura 4.8:** Definición del sistema de coordenadas naturales  $\xi$ . Geometrías real y normalizada del elemento.

La ventaja de crear un elemento de referencia de esta forma es que se puede definir, de una vez por todas, funciones de base locales  $\widehat{\varphi}_1$  y  $\widehat{\varphi}_2$  en  $\widehat{\Omega}$  con las propiedades requeridas. Teniendo hecho esto, se utiliza (4.16) para mapear  $\widehat{\varphi}_1$  y  $\widehat{\varphi}_2$  en  $\varphi_i^{(e)}$  y  $\varphi_{i+1}^{(e)}$ , respectivamente, definiendo  $\varphi_i^{(e)}$  y  $\varphi_{i+1}^{(e)}$  funciones en  $\Omega_e$  que satisfacen

$$\varphi_i^{(e)}(x) = \widehat{\varphi}_1(\xi), \quad \varphi_{i+1}^{(e)}(x) = \widehat{\varphi}_2(\xi) \quad (4.17)$$

Para un elemento lagrangiano de dos nodos con  $\xi_1 = -1$  y  $\xi_2 = +1$  (geometría normalizada), se deduce a partir de (4.14) que

$$\widehat{\varphi}_1(\xi) = \frac{1}{2} (1 - \xi), \quad \widehat{\varphi}_2(\xi) = \frac{1}{2} (1 + \xi) \quad (4.18)$$

Es inmediato ver que sustituyendo el valor de  $\xi$  dado por (4.16) y usando (4.17) se recupera la expresión cartesiana (4.15) de las funciones de

forma, por ejemplo

$$\varphi_i^{(e)}(x) = \widehat{\varphi}_1(\xi) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{h_e} (x - x_c) \right) = \frac{1}{h_e} (x_{i+1} - x)$$

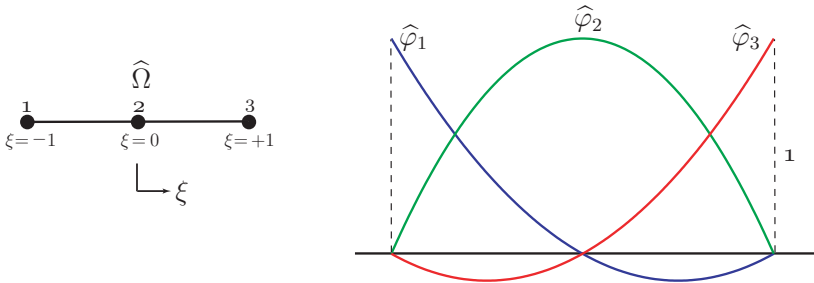
No obstante, esta operación no será necesaria y de hecho es de poco interés práctico.

En el futuro se definirán las funciones bases locales en un elemento de referencia, con la suposición de que las funciones de base locales reales pueden ser recuperadas por medio de una relación tal como (4.17). El procedimiento se amplía fácilmente a aproximaciones de un orden más alto. Por ejemplo, si se desea construir un espacio de funciones cuadráticas a trozos, es decir,  $\mathbf{X}_e$  igual a  $P_2(\Omega_e)$ , se tiene que toda función  $y \in \mathbf{X}_e$  es de la forma  $y(x) = a + bx + cx^2$  y conociendo los valores de  $y$  en tres puntos de  $\Omega_e$  es suficiente para determinar  $y$  en todo  $\Omega_e$ . Por lo tanto, se deben poner nodos en los extremos y en el punto medio de los elementos, de modo que un elemento arbitrario tiene asociado los nodos  $i$ ,  $i + 1$  y  $i + 2$ .

Seguidamente, se define un elemento de referencia  $\widehat{\Omega}$  con nodos en los extremos y en el centro ( $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = 0$  y  $\xi_3 = +1$ ), y las funciones base cuadráticas quedan dadas según (4.14) por

$$\widehat{\varphi}_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1), \quad \widehat{\varphi}_2(\xi) = (1 + \xi)(1 - \xi), \quad \widehat{\varphi}_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad (4.19)$$

y se muestra en la Figura 4.9. Naturalmente las funciones en (4.19) y las



**Figura 4.9:** Elemento unidimensional cuadrático y funciones de forma.

funciones base locales  $\varphi_i^{(e)}(x)$ ,  $\varphi_{i+1}^{(e)}(x)$ ,  $\varphi_{i+2}^{(e)}(x)$  son generadas usando

$$\varphi_i^{(e)}(x) = \widehat{\varphi}_1(\xi), \quad \varphi_{i+1}^{(e)}(x) = \widehat{\varphi}_2(\xi), \quad \varphi_{i+2}^{(e)}(x) = \widehat{\varphi}_3(\xi) \quad (4.20)$$

Proponemos al lector que obtenga las expresiones de las funciones de forma cúbicas de cuatro nodos  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = -1/3$ ,  $\xi_3 = 1/3$  y  $\xi_4 = +1$ , así como la de otros elementos lagrangianos de órdenes superior.

Ahora se muestra como una solución aproximada en un PVF de dos puntos puede ser encontrada, usando funciones bases lineales a trozos.

**Ejemplo:** Considere el PVF

$$-u'' = f(x) \quad x \in \Omega = (0, 1), \tag{4.21}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{4.22}$$

El correspondiente PVFV es: encontrar  $u \in \mathbf{V} = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  tal que

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f(x)v dx, \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

y el problema aproximado: encontrar  $u_H \in \mathbf{V}_H$  tal que

$$\int_0^1 u_H'v_H' dx = \int_0^1 f(x)v_H dx, \quad \forall v_H \in \mathbf{V}_H$$

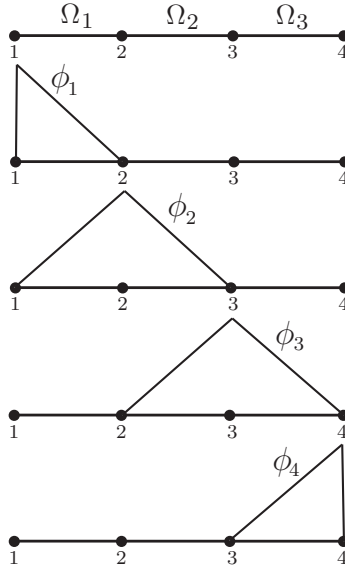
donde  $\mathbf{V}_H = \{v_H \in \mathbf{X}_H : v_H(0) = v_H(1) = 0\}$ . Supongamos, para efectos del cálculo, que la malla de elementos finitos consta de tres elementos (ver Figura 4.10). Debido a que se quiere que  $\mathbf{X}_H$  sea generado por funciones base lineales a trozos, los nodos son requeridos en los extremos de los elementos solamente, y las funciones bases  $\phi_i$  son formadas al unir las funciones definidas en (4.15) (ver Figura 4.10). Estas funciones generan a  $\mathbf{X}_H$ .

De (4.12) y (4.13) se tiene que  $\sum_{j=1}^4 K_{ij}a_j = F_i$ , para  $i = 1 : 4$ , donde cada  $K_{ij}$  está dado por

$$\begin{aligned} K_{ij} &= B(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx = \sum_{k=1}^{E=3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d\varphi_i^{(k)}}{dx} \frac{d\varphi_j^{(k)}}{dx} dx \\ &= \sum_{k=1}^{E=3} K_{ij}^{(k)} \end{aligned}$$

En la igualdad anterior se usó el hecho que las restricciones de  $\phi_i$  al elemento  $\Omega_e$  es  $\varphi_i^{(e)}$ . Por supuesto,  $\varphi_i^{(e)} = 0$  si el nodo  $i$  no es un nodo de  $\Omega_e$ .

Dado que  $K_{ij}^{(e)} = 0$  si el nodo  $i$  o el nodo  $j$  no pertenece a  $\Omega_e$ , se tiene



**Figura 4.10:** Funciones base lineales a trozos  $\phi_i$  para una malla de 3 elementos generadas por funciones de forma,  $\varphi_1^e, \varphi_2^e$  definidas sobre cada elemento.

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= K_{11}^{(1)}, & K_{12} &= K_{12}^{(1)}, & K_{13} &= 0, & K_{14} &= 0 \\
 K_{21} &= K_{21}^{(1)}, & K_{22} &= K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)}, & K_{23} &= K_{23}^{(2)}, & K_{24} &= 0 \\
 K_{31} &= 0, & K_{32} &= K_{32}^{(2)}, & K_{33} &= K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)}, & K_{34} &= K_{34}^{(3)} \\
 K_{41} &= 0, & K_{42} &= 0, & K_{43} &= K_{43}^{(3)}, & K_{44} &= K_{44}^{(3)}
 \end{aligned}$$

Agrupando los resultados, se tiene que la matriz global (matriz de rigidez)  $K$  queda dada por

$$K = \begin{bmatrix}
 \boxed{K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)}} & 0 & 0 \\
 \boxed{K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)}} + \boxed{K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)}} & 0 \\
 0 & \boxed{K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)}} + \boxed{K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)}} \\
 0 & 0 & \boxed{K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)}}
 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, para  $F_i = \int_0^1 f \phi_i dx$ , con  $i = 1 : 4$  se tiene, con un razonamiento análogo al hecho anteriormente, que

$$F_i = \sum_{k=1}^{E=3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \varphi_i^{(k)} dx = \sum_{k=1}^{E=3} F_i^{(k)}$$

Así, el vector de carga  $F$ , viene dado por

$$F = \left[ \begin{array}{c} \boxed{F_1^{(1)}} \\ \boxed{F_2^{(1)}} \\ \boxed{F_2^{(2)}} \\ \boxed{F_3^{(2)}} \\ \boxed{F_3^{(3)}} \\ \boxed{F_4^{(3)}} \end{array} \right]$$

**Observación 2.** Dado que  $\phi_1$  y  $\phi_4$  no satisfacen la condición (4.22) se tiene que  $\mathbf{V}_H = \{v_H \in \mathbf{X}_H : v_H(0) = v_H(1) = 0\} = \text{span}\{\phi_2, \phi_3\}$  y el sistema final  $Ka = F$  se reduce al imponer las condiciones de contorno. Resulta habitual que las condiciones de contorno sean impuestas una vez construido el sistema global final. Existen distintas maneras de imponer dichas condiciones, en el apartado 4.5, se analizan algunas de estas.

### 4.2.1 Ensamblaje (1D)

Se observa que las expresiones de  $K$  y  $F$  pueden obtenerse ensamblando las contribuciones de cada elemento de la malla:

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} \end{bmatrix} \quad F^{(e)} = \begin{bmatrix} F_1^{(e)} \\ F_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

donde  $K_{ij}^{(e)}$  y  $F_i^{(e)}$  coinciden con los dados en (4.12) y (4.13), es decir

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \frac{d\varphi_i^{(e)}}{dx} \frac{d\varphi_j^{(e)}}{dx} dx \quad F_i = \int_{\Omega_k} f \varphi_i^{(e)} dx$$

El elemento  $\Omega_e$  contiene los nodos  $x_e$  y  $x_{e+1}$ . La información que proporciona la conectividad dice que, en el elemento  $e$ , el nodo 1 (local) es el nodo  $e$  (global) y el nodo 2 es el nodo  $e+1$ . Así, la matriz elemental,  $K^{(e)}$ , se ensambla en la global a partir de:

$$\begin{array}{ll} K_{11}^{(e)} \longrightarrow K_{e,e} & K_{12}^{(e)} \longrightarrow K_{e,e+1} \\ K_{21}^{(e)} \longrightarrow K_{e+1,e} & K_{22}^{(e)} \longrightarrow K_{e+1,e+1} \end{array}$$

y el vector de carga elemental  $F^{(e)}$  se ensambla en el vector global usando

$$F_1^{(e)} \longrightarrow F_e \qquad F_2^{(e)} \longrightarrow F_{e+1}$$

**Observación 3.** *Resulta importante resaltar que  $K^{(e)}$  tiene tantas filas y columnas como grados de libertad posee el elemento. En nuestro caso (problemas de campo escalar) un grado de libertad por nodo. Recuerde, además, que en el ejemplo que se sigue se está trabajando con elementos lineales (dos nodos).*

Para facilitar el trabajo de cálculo, en vez de operar sobre cada elemento  $\Omega_e$ , se utiliza el elemento de referencia  $\widehat{\Omega}$  junto a las funciones de forma ya definidas. A partir de la transformación  $\widehat{\Omega} \rightarrow \Omega_e$  se tiene que  $\frac{dx}{d\xi} = h_e/2$ . Esto permite transformar las integrales sobre  $\Omega_e$  en integrales sobre  $\widehat{\Omega}$ :

$$\int_{x_e}^{x_{e+1}} F(x) dx = \int_0^1 F(\xi) \frac{h_e}{2} d\xi \quad (4.23)$$

Por otro lado, se debe tener en cuenta que, las derivadas de  $\varphi_i^{(e)}(x)$  respecto de  $x$  se han de evaluar a partir de  $\widehat{\varphi}_i(\xi)$ , que es el único dato del que se quiere disponer. Así, usando la regla de la cadena

$$\frac{d\varphi_i^{(e)}}{dx} = \frac{d\widehat{\varphi}_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = J^{-1} \frac{d\widehat{\varphi}_i}{d\xi}$$

donde

$$J := \frac{dx}{d\xi}$$

es el jacobiano de la transformación o cambio de variable. Así, usando el teorema del cambio de variable para integrales, el cálculo de un coeficiente de la matriz elemental se puede llevar al dominio de referencia

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \frac{d\varphi_i^{(e)}}{dx} \frac{d\varphi_j^{(e)}}{dx} dx = \int_{-1}^{+1} \left( J^{-1} \frac{d\widehat{\varphi}_i}{d\xi} \right) \left( J^{-1} \frac{d\widehat{\varphi}_j}{d\xi} \right) |J| d\xi \quad (4.24)$$

Al mismo tiempo, la solución aproximada  $u_H$  puede ser evaluada en el interior de cada elemento a partir de la representación

$$u_H(x) = \sum_{j=1}^{m_e} a_j \widehat{\varphi}_j(x) \quad (4.25)$$

donde  $m_e$  es el número de nodos por elemento, y  $x = x(\xi)$  evaluada usando una transformación isoparamétrica que será justificada en el siguiente apartado.

**Observación 4.** La evaluación de la integral (4.23) sobre cada elemento puede resultar, en general, completamente tediosa, y en muchos casos imposible de realizar exactamente. Sin embargo, en la práctica,  $f$  es sustituida por su interpolante  $f_H$  en  $\mathbf{X}_H$ . Esto permite que la evaluación de los términos  $F_i$  sean hechos muy fácilmente (exactamente). La interpolación de  $f$  es una función de la forma

$$f_H(x) = \sum_{i=1}^m c_i \phi_i(x), \quad \text{con } c_i = f(x_i)$$

De todo lo dicho, se va a sistematizar la manera de definir la transformación  $x(\xi)$  y se va a integrar numéricamente con una cuadratura estándar (definida sobre  $\widehat{\Omega} = [-1, 1]$ ).

#### 4.2.2 La transformación isoparamétrica

El cálculo de  $\frac{d\varphi_i}{dx}$  sería inmediato si las funciones de forma se expresan en la coordenada cartesiana  $x$ . No obstante, como se ha indicado, esto no será así debido a la utilización del sistema de coordenadas naturales. Así, la evaluación de dicha derivada implica la evaluación de  $\frac{d\xi}{dx}$ , lo que exige conocer una relación explícita entre  $x$  y  $\xi$ .

Si la geometría del elemento se expresa en función de los nodos y las funciones de forma utilizadas para describir la aproximación de la incognita, la formulación se denomina *transformación isoparamétrica*. Para elementos lineales resulta

$$x(\xi) = x_i \widehat{\varphi}_1(\xi) + x_{i+1} \widehat{\varphi}_2(\xi)$$

La transformación dada en (4.16) resulta ser isoparamétrica, pues  $x(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)x_i + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_{i+1}$ , con  $x_i$  y  $x_{i+1}$  los nodos del elemento (verificar dicha afirmación). De lo cual  $\frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) = h_e/2$ .

Aunque, de (4.16) ya conociamos el resultado, hay que resaltar que en este caso particular pueden obtenerse estas expresiones de una manera más sencilla. No obstante, es preferible seguir un procedimiento más sistemático que facilitará la comprensión del desarrollo de elementos isoparamétricos más complejos.

La idea de interpolar los desplazamientos y las coordenadas del elemento con las mismas funciones de forma es original de Taig [29], quien la utilizó para desarrollar elementos cuadriláteros de cuatro nodos. Posteriormente, Irons [30] extendió estas ideas para obtener elementos de

mayor orden.

### 4.2.3 Integración numérica

Pese a la gran simplicidad de los elementos unidimensionales, el cálculo analítico de las integrales del elemento pueden resultar laborioso. En particular, si se usa una formulación isoparamétrica que conduzca a expresiones racionales en los coeficientes de  $K_{ij}^{(e)}$  o  $F_i^{(e)}$ . De hecho, en la mayor parte de los elementos bi o tridimensionales isoparamétricos el cálculo directo de dichas integrales es inabordable, salvo en raras excepciones, y es imprescindible hacer uso de las cuadraturas numéricas.

Abordar los fundamentos matemáticos relacionados con las cuadraturas numéricas no están dentro de los objetivos del texto, pues estos son seguidos en un primer curso de análisis numérico. Sin embargo, motivamos al lector a profundizar en el tema, se recomienda, por ejemplo, el libro de Hildebrand [31]. Recordaremos únicamente la *integración numérica de Gauss-Legendre* por ser el procedimiento más popular y utilizado en relación con el MEF. Se dan únicamente las ideas básicas de la regla de integración en su aplicación unidimensional, posteriormente se dará la extensión a dos y tres dimensiones.

Sea  $f(\xi)$  una función para la que se desea calcular la integral en el intervalo  $[-1, +1]$ , es decir,

$$I(f) = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi$$

La regla de integración o cuadratura expresa el valor de dicha integral como la suma de los productos de los valores de  $f$  en una serie de puntos conocidos en el interior del intervalo por unos coeficientes (llamados pesos) determinados. Es decir, para una *cuadratura de orden  $p$* , se tiene

$$I_p(f) = \sum_{i=1}^p f(\xi_i) \omega_i \quad (4.26)$$

donde  $\omega_i$  es el peso correspondiente al punto de integración  $i$ , y  $p$  el número de dichos puntos. Resulta importante destacar que la cuadratura de Gauss-Legendre de orden  $n$  integra exactamente un polinomio de grado  $2n - 1$  o menor. En la Tabla 4.1 se muestran las coordenadas  $\xi_i$  y los pesos  $\omega_i$  para las cinco primeras cuadraturas.

Obsérvese que los puntos de integración están todos expresados en el

espacio normalizado  $-1 \leq \xi \leq 1$ , lo que resulta de gran utilidad para el cálculo de las matrices del elemento referidas a las coordenadas naturales. La popularidad de la cuadratura de Gauss-Legendre se debe a que utiliza el mínimo número de puntos de integración para conseguir un error determinado en el cálculo de la integral. Por consiguiente, minimiza el número de veces que hay que calcular el valor de la función a integrar.

$p$	$\pm\xi$	$\omega_i$
1	0.0	2.0
2	0.5773502692	1.0
3	0.774596697	0.5555555556
	0.0	0.8888888889
4	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
5	0.9061798459	0.2369268851
	0.5384693101	0.4786286705
	0.0	0.5688888889

**Tabla 4.1:** Coordenadas y pesos de la cuadratura de Gauss-Legendre.

#### 4.2.4 Estimación del error

Una estimación a priori del error para interpolación de Lagrange lineal a trozos puede ser obtenida usando series de Taylor. Sea  $E = g - g_H$  la función error de interpolación y considere un elemento arbitrario  $\Omega_e$  con puntos  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$  en la malla. Supongamos que  $g$  tiene segunda derivada acotada. Ahora, sobre  $\Omega_e$ ,  $E = g - g_H$  puede ser expandida en una serie de Taylor alrededor de un punto interior  $\hat{x}$ :

$$E(x) = E(\hat{x}) + E'(\hat{x})(x - \hat{x}) + \frac{1}{2}E''(\zeta)(x - \hat{x})^2 \quad (4.27)$$

donde  $\zeta$  es un punto entre  $\hat{x}$  y  $x$ .

Ya que  $g_H$  es la interpolante de  $g$ , el error  $E$  es cero en los nodos  $x_i, x_{i+1}$  (extremos del elemento). Seguidamente se selecciona  $\hat{x}$  como el punto en el cual  $|E|$  es máximo. En este punto,  $E'(\hat{x}) = 0$ , así que (4.27) se reduce a

$$E(x) = E(\hat{x}) + \frac{1}{2}E''(\zeta)(x - \hat{x})^2$$

para  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ . A continuación, se toma  $x = x_i$  o  $x = x_{i+1}$ , cualquiera de los dos que este más cerca de  $\hat{x}$  (digamos  $x_i$ ). Entonces

$$|E(\hat{x})| = \frac{1}{2}|E''(\zeta)|(x_i - \hat{x})^2$$

Ya que  $x_{i+1} - x_i = H$ , entonces  $|x_i - \hat{x}| \leq H/2$  en (4.27) y se obtiene la cota de error

$$|E(\hat{x})| \leq \frac{H^2}{8}|E''(\zeta)| \quad (4.28)$$

Finalmente,  $E = g - g_H$  implica  $E'' = g'' - g_H'' = g''$  dentro de  $\Omega_e$ . Introduciendo este resultado en (4.28) y maximizando sobre todos los elementos, se obtiene la estimación final

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |E(x)| \leq \frac{H^2}{8} \max_{0 \leq x \leq 1} |g''(x)| \quad (4.29)$$

Ya que  $g''$  es acotada sobre el dominio,  $g'' \leq C < \infty$ , con  $C$  constante.

Un proceso similar puede ser usado para derivar cotas de error para elementos lagrangianos de mayor orden. Para elementos finitos empleando polinomios completos de grado  $\beta$ , la cota de error asume la forma

$$\|E\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |E(x)| \leq CH^{\beta+1} \quad (4.30)$$

donde  $C$  es una constante independiente de  $H$  (ver ejercicio 4.1). Esta estimación del error indica que la interpolante de elemento finito  $g_H$  de  $g$  puede converger a  $g$  (en norma  $\|\cdot\|_\infty$ ) con un orden de  $\beta + 1$  cuando  $H$  tiende a cero.

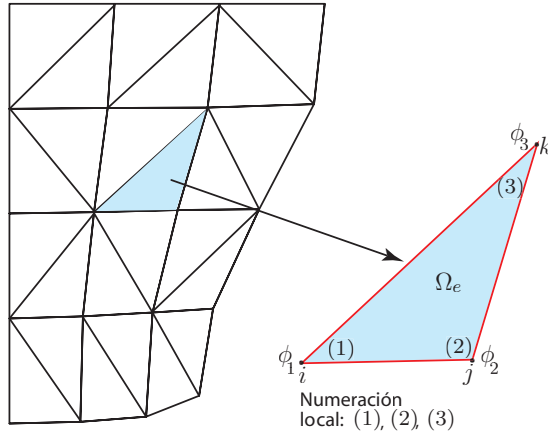
Un comentario final de considerable importancia debe hacerse. Para llegar a la cota de error (4.30), se asumió que la función  $g$  dada es tan suave que esta tiene derivadas continuas de orden  $\leq \beta$ . Sí, por el contrario,  $g$  tiene derivadas continuas solo de orden  $s$ , donde  $0 < s < \beta$ . Entonces, no importa cuan grande sea el grado  $\beta$  de nuestro polinomio de interpolación  $g_H$ , solo sus  $s$  primeros términos podrán ser efectivos en la aproximación de  $g$ . Por tanto, en lugar de (4.30), se tiene

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |g(x) - g_H(x)| \leq CH^s$$

y la exactitud de nuestra aproximación, que se mantiene independiente de  $\beta$ , no se puede aumentar al incrementar el grado de los polinomios base  $\varphi_i^{(e)}$ . Se puede, por supuesto, mejorar la precisión mediante la reducción de  $H$ , siempre y cuando  $s > 0$ .

### 4.3 Elementos bidimensionales

La formulación del MEF para problemas bidimensional sigue los pasos usados en el caso de problemas unidimensionales. Se empieza entonces, suponiendo que el dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es poligonal (como ya se dijo antes) y que este se subdivide en elementos bidimensionales de  $m_e$  nodos (ver, Figura 4.11 para el caso de elementos triangulares de tres nodos y la Figura 4.1 para el caso de elementos cuadriláteros). La aproximación de



**Figura 4.11:** Discretización del dominio bidimensional  $\Omega$  por elementos triangulares de tres nodos.

Galerkin  $u_H$  queda dada entonces por

$$u(x) \approx u_H(x) = \sum_{i=1}^m a_i \phi_i(x, y) \tag{4.31}$$

donde  $\phi_i$  son las funciones base bidimensional (ver Figura 4.4) y  $a_i$  los valores nodales de la solución aproximada. El sistema de ecuaciones que surge de la discretización se obtiene sustituyendo la solución aproximada (4.31) en la forma débil (4.2) tal como se hizo en el caso 1D, obteniéndose formas equivalentes en 2D de las ecuaciones (4.12) y (4.13). Por lo tanto, resulta claro que los cálculos a realizar para definir las contribuciones  $K_{ij}^{(e)}$  (matriz elemental de rigidez) y  $F_i^{(e)}$  (vector de carga elemental) cambian elemento a elemento en la malla, resultando engorrosos de realizar en términos de cada elemento  $\Omega_e$  de la malla (ver Figura 4.11). Así, nuevamente, el concepto clave en el enfoque del MEF es la

definición de un elemento de referencia  $\widehat{\Omega}$  junto a sus funciones de forma, tal como el descrito en el caso de problemas unidimensionales.

En los subsiguientes apartados, se particulariza el tipo de elemento finito a utilizar (triángulos y cuadriláteros) y, en cada caso, se define el elemento de referencia y sus funciones de forma, junto a las propiedades intrínsecas que presenta.

### 4.3.1 Elementos triangulares

Una función lineal en dos dimensiones es de la forma  $f(x, y) = a + bx + cy$ , con  $a$ ,  $b$  y  $c$  constantes. Por lo cual, tres valores independientes de  $f$  deben ser especificados para que  $f$  pueda ser determinada de forma única. Esto sugiere que los elementos más simples deben tener tres nodos, es decir, deben ser triángulos y los nodos los pondremos en los vertices del mismo. Esta forma de colocar los nodos asegura que cualquiera de los lados  $ij$ ,  $jk$  o  $ki$  de  $\Omega_e$  (ver Figure 4.11) se comparte con un elemento adyacente  $\Omega_w$ , por lo tanto, la función lineal a trozos formada por la unión de las funciones definidas en  $\Omega_e$  y  $\Omega_w$  será continua en la interfaz de los elementos (elementos de clase  $\mathbf{C}^0$ ). Así, si se quiere que  $\mathbf{X}_H$  sea el espacio de polinomios a trozos de grado 1, y por consiguiente  $\mathbf{X}_e$  el espacio  $\mathbf{P}_1(\Omega_e)$ .

Puesto que, la superficie solución es plana en cada elemento, se tiene que la solución  $u_H^e = u_H|_{\Omega_e}$  es una función lineal de la forma

$$u_H^e(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y$$

las tres constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son determinadas requiriendo que

$$\begin{aligned} u_H^e(x_i, y_i) &= \alpha + \beta x_i + \gamma y_i = a_i \\ u_H^e(x_j, y_j) &= \alpha + \beta x_j + \gamma y_j = a_j \\ u_H^e(x_k, y_k) &= \alpha + \beta x_k + \gamma y_k = a_k \end{aligned}$$

donde  $i$ ,  $j$  y  $k$  denotan los tres vertices del elemento triangular  $\Omega_e$ . A resolver el sistema (usando la regla de Cramer)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2A_e} \left[ (x_j y_k - x_k y_j) a_i - (x_i y_k - x_k y_i) a_j + (x_i y_j - x_j y_i) a_k \right] \\ \beta &= \frac{1}{2A_e} \left[ -(y_k - y_j) a_i - (y_k - y_i) a_j + (y_j - y_i) a_k \right] \\ \gamma &= \frac{1}{2A_e} \left[ (x_k - x_j) a_i - (x_k - x_i) a_j + (x_j - x_i) a_k \right] \end{aligned}$$

con

$$A_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_j - x_i)(y_k - y_j) + (x_k - x_j)(y_i - y_j)]$$

el área del elemento triangular  $\Omega_e$ . Sustituyendo los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  en  $u_H^e(x, y)$ , se obtiene

$$u_H^e(x, y) = \frac{1}{2A_e} [(\hat{a}_1 + \hat{b}_1x + \hat{c}_1y)u_i + (\hat{a}_2 + \hat{b}_2x + \hat{c}_2y)u_j + (\hat{a}_3 + \hat{b}_3x + \hat{c}_3y)u_k]$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{a}_i &= x_jy_k - x_ky_j & \hat{b}_i &= y_j - y_k & \hat{c}_i &= x_k - x_j \\ \hat{a}_j &= x_ky_i - x_iy_k & \hat{b}_j &= y_k - y_i & \hat{c}_j &= x_i - x_k \\ \hat{a}_k &= x_iy_j - x_jy_i & \hat{b}_k &= y_i - y_j & \hat{c}_k &= x_j - x_i \end{aligned} \quad (4.32)$$

Entonces, la ecuación se puede compactar como

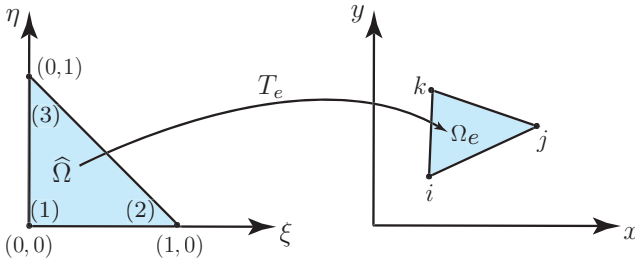
$$u_H^e(x, y) = u_i\varphi_i^{(e)} + u_j\varphi_j^{(e)} + u_k\varphi_k^{(e)},$$

lo cual permite identificar las funciones de forma del elemento por

$$\varphi_I^{(e)} = \frac{1}{2A_e} (\hat{a}_I + \hat{b}_Ix + \hat{c}_Iy) \quad I = i, j, k \quad (4.33)$$

Claramente, la condición  $\varphi_I^{(e)}(x_J, y_J) = 1$  si  $I = J$ , y cero en los otros casos ( $I, J = i, j, k$ ) es satisfecha. La función base  $\phi_i$  formada por las unión de todas las funciones base  $\varphi_i^{(e)}$  asociadas al nodo  $i$  es la contraparte en 2D de las funciones sombrero en 1D, y presenta forma piramidal (ver Figura 4.4). Naturalmente,  $\phi_i$  es lineal a trozos y es distinta de cero solo en los elementos que tienen al nodo  $i$  como uno de sus lados. El tratamiento para los nodos de frontera, será llevado de forma análoga al dado para el caso unidimensional.

Se quiere ahora, definir un elemento de referencia  $\hat{\Omega}$  y una transformación invertible de  $\hat{\Omega}$  a cada elemento  $\Omega_e$ , en un sistema de coordenadas naturales o normalizado  $\xi\eta$ . El más simple está dado por el triángulo que tiene sus lados sobre los ejes  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  y  $1 - \xi - \eta = 0$  (triángulo isósceles recto), como se muestra en la Figura 4.12. La transformación



**Figura 4.12:** Coordenadas naturales en un elementos triangulares.

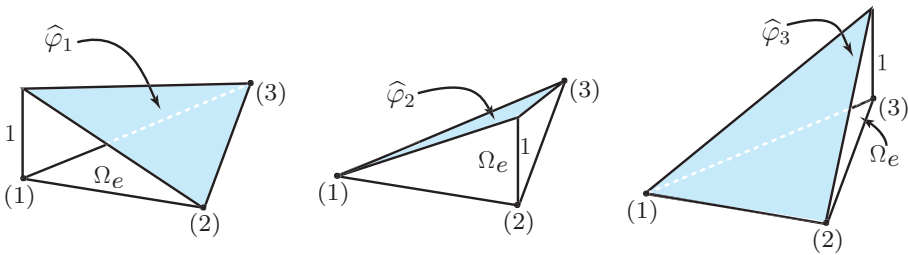
$T_e : \widehat{\Omega} \rightarrow \Omega_e$ , es definida por una simple transformación de coordenadas

$$T_e : \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta) \end{aligned}$$

y nos referimos al elemento  $\Omega_e$ , como la imagen de  $\widehat{\Omega}$  bajo la transformación  $T_e$ <sup>1</sup>. A partir de (4.32) y (4.33), las funciones de forma del elemento triangular de tres nodos vienen dadas por

$$\widehat{\varphi}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad \widehat{\varphi}_2(\xi, \eta) = \xi, \quad \widehat{\varphi}_3(\xi, \eta) = \eta \quad (4.34)$$

y las mismas se muestran en la Figura 4.13.



**Figura 4.13:** Funciones de forma del triángulo de tres nodos.

Si la geometría del elemento se expresa en función de los nodos y las funciones de forma (4.34), entonces la transformación isoparamétrica,  $T_e$ , queda dada por

<sup>1</sup>Por supuesto, existe la posibilidad de requerir más de un elemento de referencia en un problema. Por ejemplo, cuando elementos triangulares y cuadriláteros son utilizados al mismo tiempo. Sin embargo, para simplificar, restringimos la atención a un único elemento de referencia.

$$x = \sum_{j=1}^3 x_j \widehat{\varphi}_j(\xi, \eta), \quad y = \sum_{j=1}^3 y_j \widehat{\varphi}_j(\xi, \eta) \quad (4.35)$$

donde  $(x_j, y_j)$ , con  $j = 1, 2, 3$ , representan las coordenadas  $xy$  de los vértices en el sistema numérico local. Sustituyendo (4.34) en (4.35) e invirtiendo, se obtiene la transformación  $T_e^{-1} : \Omega_e \rightarrow \widehat{\Omega}$ , definida por

$$\begin{aligned} \xi = \xi(x, y) &= \frac{1}{2A_e} \left[ (y_k - y_i)(x - x_i) - (x_k - x_i)(y - y_i) \right] \\ \eta = \eta(x, y) &= \frac{1}{2A_e} \left[ (y_i - y_j)(x - x_i) + (x_j - x_i)(y - y_i) \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde  $A_e$  representa el área del elemento  $\Omega_e$ . Entonces, a partir de (4.34) y (4.36) se obtienen las funciones base en  $\Omega_e$

$$\varphi_i^{(e)}(x, y) = \widehat{\varphi}_1(\xi, \eta), \quad \varphi_j^{(e)}(x, y) = \widehat{\varphi}_2(\xi, \eta), \quad \varphi_k^{(e)}(x, y) = \widehat{\varphi}_3(\xi, \eta)$$

### 4.3.2 Derivadas y gradientes en el elemento de referencia

Hay varias propiedades elementales de la transformación de coordenadas que deben analizarse antes de pasar a las consideraciones del cálculo de las matrices y vectores elementales. En primer lugar, se debe expresar las derivadas de una función en coordenadas  $xy$  en términos de sus derivadas en coordenadas  $\xi\eta$ . De acuerdo a la transformación  $T_e$ , una función puede considerarse como una función implícita de  $\xi$  y  $\eta$ , entonces usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

lo cual puede ser escrito en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

La matriz  $2 \times 2$  de derivadas parciales en (4.37) es llamada la *matriz Jacobiana* de la transformación y es denotada por  $J$ . Obviamente, una condición necesaria y suficiente para que el sistema (4.37) sea invertible es que el determinante  $|J|$  de la matriz Jacobiana sea distinto de cero en  $(\xi, \eta) \in \widehat{\Omega}$ . El funcional  $|J|$  es usualmente llamado el *Jacobiano* de la transformación

$$|J| = \det J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (4.38)$$

Así, cada vez que  $|J| \neq 0$  se puede escribir

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

donde las  $J_{ij}$  son respectivas componentes de la matriz Jacobiana.

A partir de (4.37) y (4.39) se tiene que la representación para el gradiente en los distintos sistemas de coordenadas queda dado por

$$\nabla_{\xi\eta} = J \nabla_{xy} \quad y \quad \nabla_{xy} = J^{-1} \nabla_{\xi\eta} \quad (4.40)$$

Por lo tanto, las derivadas parciales son ahora representadas enteramente en términos de las coordenadas  $\xi, \eta$

$$\frac{\partial}{\partial x} = J_1 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = J_2 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

donde  $J_1$  y  $J_2$  son la primera y segunda fila de  $J^{-1}$ .

Un resultado adicional que se requerirá es la relación del diferencial de área respecto a las coordenadas naturales

$$dx dy = \det J d\xi d\eta \quad (4.42)$$

La demostración de este resultado se puede encontrar en la mayoría de los textos de Cálculo (ver, por ejemplo, página 916 de Swokowski [33]).

Una interpretación geométrica del Jacobiano se indica en la Figura 4.14. Para un punto  $(\xi, \eta)$  de  $\widehat{\Omega}$ , un elemento de área  $d\widehat{\Omega}$  es dado por  $d\widehat{\Omega} = d\xi d\eta$ . La imagen de esta área en el plano  $xy$  tiene el área  $d\Omega = |J| d\xi d\eta$ . El valor de  $|J|$  puede ser visto como la razón de cambio de área de elementos en puntos  $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  y  $(\xi, \eta)$ . Un valor positivo de  $|J|$  en todo punto indica que  $T_e$  es una transformación adecuada (sistemas de coordenadas de mano derecha). La presencia en  $\widehat{\Omega}$  de puntos en los cuales  $|J| = 0$  indica que el área de  $\widehat{\Omega}$  es “comprimida” en una línea (o un punto) en  $\Omega_e$ . Esta condición implica que el mapeo  $T_e$  es no invertible (es decir,  $T_e^{-1}$  no existe). Valores negativos de  $|J|$  indican que alguna porción de  $\widehat{\Omega}$  ha sido “proyectada o puesta” fuera del elemento  $\Omega_e$ .

### 4.3.3 Matriz de rigidez elemental $K^{(e)}$

Cuando se quiere usar los resultados obtenidos en el apartado anterior

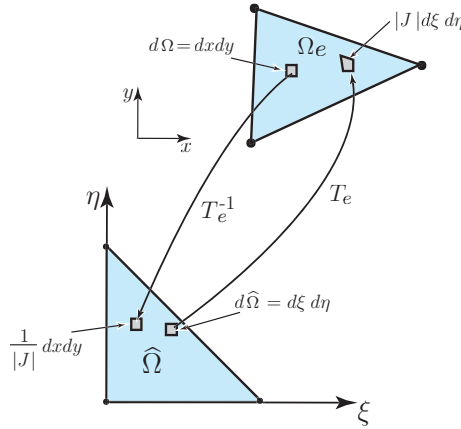


Figura 4.14: Transformación de elementos de área.

para evaluar las integrales que surgen en la matriz de rigidez  $K^e$ , el siguiente desarrollo resulta típico del análisis necesario para cumplir dicha tarea. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que para un problema bidimensional, los  $K_{ij}$  de la discretización de la forma débil (ecuación (4.5)) vienen dados por

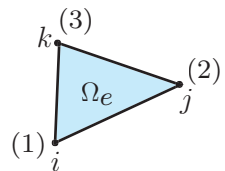
$$K_{ij} = B(\phi_i, \phi_j) = \sum_{e=1}^E \underbrace{B^{(e)}(\varphi_i^{(e)}, \varphi_j^{(e)})}_{K_{ij}^{(e)}}$$

con

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_i^{(e)} \cdot \nabla \varphi_j^{(e)} d\Omega, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (4.43)$$

Sin embargo, las contribuciones a la matriz elemental de  $\Omega_e$  son dadas únicamente por las  $\varphi_i$  relacionadas con los nodos del elemento. Es decir,  $\varphi_i^{(e)}, \varphi_j^{(e)}, \varphi_k^{(e)}$ . Así, usando la numeración de referencia local, se tiene que la matriz elemental es dada por

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} & K_{13}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} & K_{23}^{(e)} \\ K_{31}^{(e)} & K_{32}^{(e)} & K_{33}^{(e)} \end{bmatrix}$$



donde, de (4.40), (4.42) y (4.43), se tiene

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\widehat{\Omega}} (J^{-1} \nabla_{\xi\eta} \widehat{\varphi}_i) \cdot (J^{-1} \nabla_{\xi\eta} \widehat{\varphi}_j) |J| d\xi d\eta, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.44)$$

están ahora completamente representados en términos de las coordenadas naturales  $\xi\eta$ .

En algunos casos, principalmente para efectos de implementación de códigos, resulta apropiado ver los cálculos de forma matricial. Así, de (4.41) se tiene

$$\frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x} = J_1 \begin{bmatrix} \frac{\partial \widehat{\varphi}_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \widehat{\varphi}_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial y} = J_2 \begin{bmatrix} \frac{\partial \widehat{\varphi}_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \widehat{\varphi}_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Además, si  $\varphi^{(e)} = [\varphi_i^{(e)} \quad \varphi_j^{(e)} \quad \varphi_k^{(e)}] = \widehat{\varphi} = [\widehat{\varphi}_1 \quad \widehat{\varphi}_2 \quad \widehat{\varphi}_3]$ , se tiene

$$\frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x} = J_1 \begin{bmatrix} \frac{\partial \widehat{\varphi}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \widehat{\varphi}_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \widehat{\varphi}_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \widehat{\varphi}_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \widehat{\varphi}_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \widehat{\varphi}_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J_1 \Lambda^T = (\Lambda J_1^T)^T$$

De igual forma

$$\frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial y} = J_2 \Lambda^T = (\Lambda J_2^T)^T$$

Ahora, como de (4.43)

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \left[ \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial y} \right] d\Omega$$

entonces, usando la notación matricial anterior, se puede expresar la matriz elemental como

$$K^{(e)} = \int_{\widehat{\Omega}} \Lambda [J_1^T J_1 + J_2^T J_2] \Lambda^T |J| d\xi d\eta \quad (4.45)$$

#### 4.3.4 Vector de carga elemental $F^{(e)}$

A igual que para el caso de la matriz de rigidez, supongamos que el vector de carga de la discretización está dada por

$$F_i = l(\phi_i) = \sum_{e=1}^E \underbrace{l^{(e)}(\varphi_i^{(e)})}_{F_i^{(e)}} \quad \text{con} \quad F_i^{(e)} = \int_{\Omega_e} f \varphi_i^{(e)} d\Omega$$

El vector elemental,  $F^{(e)} = [F_1^{(e)}, F_2^{(e)}, F_3^{(e)}]^T$ , queda entonces representado (completamente en las coordenadas naturales  $\xi\eta$ ) por las contribuciones locales

$$F_i^{(e)} = \int_{\hat{\Omega}} f \hat{\varphi}_i |J| d\xi d\eta \tag{4.46}$$

La forma de  $f$ , puede ocasionar que la cuadratura gaussiana usada en (4.46) no pueda evaluar la integral exactamente. En tal caso, se puede tener una buena aproximación al valor de la integral, si la función  $f$  es reemplazada por interpolantes lineales (al igual que para el caso unidimensional). Esto es,  $f = \hat{\varphi} f_i$ , donde  $f_i = [f_1, f_2, f_3]^T$ , y  $f_i$  usualmente seleccionada con el valor de  $f$  evaluada en el nodo en cuestión. Con esta suposición resulta que

$$F^{(e)} \approx \int_{\hat{\Omega}} \hat{\varphi}^T \hat{\varphi} f_i |J| d\xi d\eta = \left( \int_{\hat{\Omega}} \hat{\varphi}^T \hat{\varphi} |J| d\xi d\eta \right) f_i \tag{4.47}$$

### 4.3.5 Coordenadas de área

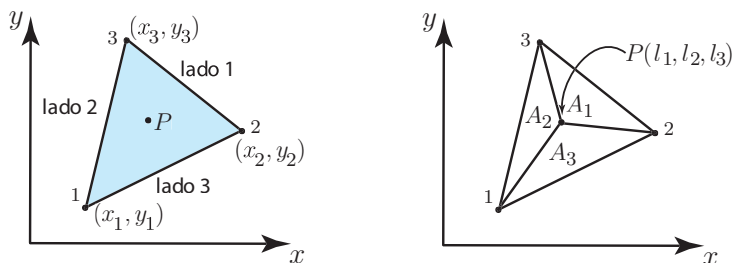
Las expresiones  $\xi$ ,  $\eta$ , y  $1 - \xi - \eta$  en (4.34) y (4.36) pueden ser convenientemente interpretadas en términos de relaciones de área. Esto conduce a la introducción de las *coordenadas de área* que facilitan tanto el desarrollo de familias de funciones de forma de mayor orden para elemento triangulares (ver, apartado 4.6), como la derivación de fórmulas de integración más apropiadas para este tipo de elemento.

Se considera un elemento triangular dado en coordenadas rectangulares, con  $P(x, y)$  un punto en el interior del mismo (Figura 4.15). El punto  $P$ , en el interior del triángulo, se va a identificar especificando sus coordenadas locales  $(l_1, l_2, l_3)$ , que se definen de la siguiente forma:

$$l_1 = \frac{A_1}{A}, \quad l_2 = \frac{A_2}{A}, \quad l_3 = \frac{A_3}{A} \tag{4.48}$$

donde  $A$  representa el área total del triángulo y  $A_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ , el área de los subtriángulos  $i$ , como se muestra en la Figura 4.15. Sumando las fórmulas de (4.48) se obtiene que

$$l_1 + l_2 + l_3 = 1 \tag{4.49}$$



**Figura 4.15:** Coordenadas de área para triángulos.

pues,  $A_1 + A_2 + A_3 = A$ . Además de satisfacer la ecuación (4.49), las coordenadas  $l_i$  son tales que si  $P$  se sitúa sobre el nodo:

$$(x_1, y_1) \Rightarrow (l_1, l_2, l_3) = (1, 0, 0), \quad \text{pues } A_1 = A, A_2 = A_3 = 0$$

$$(x_2, y_2) \Rightarrow (l_1, l_2, l_3) = (0, 1, 0), \quad \text{pues } A_2 = A, A_1 = A_3 = 0$$

$$(x_3, y_3) \Rightarrow (l_1, l_2, l_3) = (0, 0, 1), \quad \text{pues } A_3 = A, A_1 = A_2 = 0$$

Cada coordenada de área  $l_i$  varía linealmente sobre el triángulo, ya que cada área  $A_i$  es proporcional a la distancia al lado  $i$ . Luego existe una relación lineal entre las coordenadas cartesianas  $x, y$  de un punto y las coordenadas de área:

$$\begin{aligned} x &= l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3, \\ y &= l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Agrupando las ecuaciones (4.49) y (4.50) se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema, resulta

$$l_i = \frac{1}{2A} [\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y], \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.51)$$

donde  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  quedan dadas como en el caso de la ecuación (4.33). Es decir, las coordenadas de área  $l_1, l_2$  y  $l_3$  son simplemente una nueva manera de ver las funciones de forma dadas en (4.33).

Las ecuación (4.49) indica que las variables de área  $l_1, l_2$  y  $l_3$  no son linealmente independientes. Generalmente, se seleccionan dos, de las tres, como las variables independientes y se elimina la tercera. Tomando

$l_1 = 1 - l_2 - l_3$  y sustituyendo en (4.50) se obtiene que

$$\begin{aligned} x &= x_1 + l_2(x_2 - x_1) + l_3(x_3 - x_1) = x(l_2, l_3) \\ y &= y_1 + l_2(y_2 - y_1) + l_3(y_3 - y_1) = y(l_2, l_3) \end{aligned} \quad (4.52)$$

representa una transformación entre las variables globales  $(x, y)$  y las variables locales (área)  $(l_2, l_3)$ .

### 4.3.6 Integración numérica en elementos triangulares

La ventaja principal que se logra al utilizar las coordenadas naturales en lugar de la coordenadas cartesianas, consiste en lo fácil que resulta la evaluación de integrales de la forma

$$\int_{\Omega_e} l_1^a l_2^b l_3^c d\Omega_e, \quad \int_{\Gamma_e} l_i^a l_j^b ds$$

donde  $a, b$  y  $c$  son exponentes enteros, y  $\Gamma_e$  representa una segmento recto (arista de elementos de frontera). Las integrales de esta forma se evalúan rápidamente utilizando la relación

$$\int_A l_1^a l_2^b l_3^c dA = \frac{2(a! b! c!)A}{(a + b + c + 2)!}, \quad \int_{\Gamma_e} l_i^a l_j^b ds = \frac{a! b! \Gamma_e}{(a + b + 1)!} \quad (4.53)$$

Las integrales sobre  $\widehat{\Omega}$  tienen la forma  $\int_{\widehat{\Omega}} G(\xi, \eta) d\xi d\eta$  o, equivalentemente, en términos de coordenadas de área  $\int_{\widehat{\Omega}} G(l_1, l_2, l_3) dl_2 dl_3$ , con  $l_1 = 1 - \xi - \eta$ . Entonces,

$$\int_{\widehat{\Omega}} l_1^a l_2^b l_3^c dl_2 dl_3 = \frac{a! b! c!}{(a + b + c + 2)!}, \quad \int_0^1 l_i^a l_j^b ds = \frac{a! b!}{(a + b + 1)!} \quad (4.54)$$

Las fórmulas de integral de áreas obviamente serán usadas en general para evaluar integrales sobre elementos de área, y las integrales de línea para evaluar integrales sobre segmentos en elementos de frontera.

Por ejemplo, a partir de (4.47) se tiene que

$$\begin{aligned} F^{(e)} &\approx \int_{\widehat{\Omega}} \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 & l_1 l_3 \\ l_2 l_1 & l_2^2 & l_2 l_3 \\ l_3 l_1 & l_3 l_2 & l_3^2 \end{bmatrix} f_i |J| d\xi d\eta = |J| \begin{bmatrix} 4/4! & 2/4! & 2/4! \\ 2/4! & 4/4! & 2/4! \\ 2/4! & 2/4! & 4/4! \end{bmatrix} f_i \\ &= \frac{|J|}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_k \end{bmatrix} = \frac{|J|}{12} \begin{bmatrix} 2f_i + f_j + f_k \\ f_i + 2f_j + f_k \\ f_i + f_j + 2f_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.55)$$

### 4.3.7 Elementos Rectangulares

Una segunda categoría de elementos finitos está dada por aquellos que tienen forma rectangular (elementos de clase  $\mathbf{C}^0$ ). Si se sigue la idea de tener puntos nodales por lo menos en los vertices del elemento, entonces claramente el elemento rectangular más simple será uno con cuatro nodos, un nodo en cada esquina, ver Figura 4.16. Ahora bien, qué clase de espacio polinomial  $\mathbf{X}_e$  puede ser definido en  $\Omega_e$  de modo que cualquier función en  $\mathbf{X}_e$  sea determinada de forma única por sus valores en los cuatro vertices. Las funciones lineales son completamente determinadas

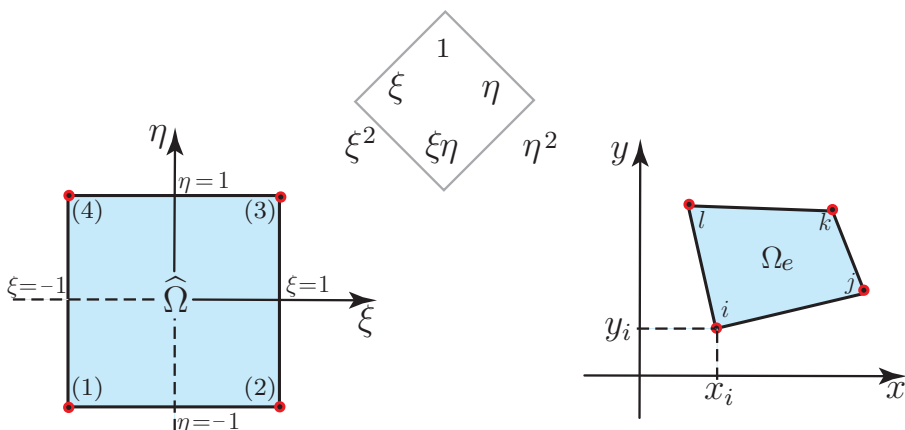


Figura 4.16: Elemento rectangular de cuatro nodos

por tres valores nodales, así que uno de los nodos puede sobrar. Por otro lado, funciones cuadráticas requieren seis valores nodales, lo cual es más de lo que se tiene a disposición. La solución al problema viene en retener del polinomio arbitrario

$$p(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + \dots$$

los primeros cuatro términos. Los términos constantes y lineales son obviamente retenidos, la pregunta que surge es, cuál de los términos restantes debe ser utilizado. Conservar los términos que implican a  $x^2$  o  $y^2$  no resulta apropiado, pues esto daría lugar a una aproximación ladeada en la cual un término cuadrático aparece solo para una de las coordenadas. Sin embargo, no hay objeción a conservar el término  $xy$ , esto asegura que las coordenadas  $xy$  estén representadas igualmente,

entonces la aproximación debe tener la forma

$$p(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (4.56)$$

y se llama a este, *polinomio bilineal*. En general, el espacio de polinomios con términos de grado  $\leq k$  en cada una de sus variables es denotado por  $\mathbf{Q}_k(\Omega)$ , de manera que  $p(x, y)$  en (4.56) es un miembro de  $\mathbf{Q}_1(\Omega)$ . Note que  $\mathbf{P}_k(\Omega) \subset \mathbf{Q}_k(\Omega) \subset \mathbf{P}_{2k}$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . La situación ahora es que  $\mathbf{X}_e = \mathbf{Q}_1(\Omega_e)$  así,  $\mathbf{X}_H$  consistirá del espacio de polinomios bilineales a trozos.

Nuevamente, para facilitar el cálculo se adopta un sistema de coordenadas naturales  $\xi\eta$  para definir la geometría del elemento de referencia  $\hat{\Omega}$ , que ahora es un cuadrado. Dichas coordenadas están normalizadas de manera que el elemento tenga sus lados en  $\xi = \pm 1$  y  $\eta = \pm 1$  (Figura 4.16). Las funciones de forma expresadas en coordenadas naturales deben satisfacer los mismos requisitos que en coordenadas cartesianas. Así, en elementos de clase  $\mathbf{C}^0$ , basta que las funciones de forma cumplan:

- Condición de compatibilidad nodal

$$\hat{\varphi}_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4.57)$$

- Condición de partición de la unidad

$$\sum_{i=1}^{m_e} \hat{\varphi}_i(\xi, \eta) = 1 \quad (4.58)$$

**Observación 5.** *Dentro de los elementos de clase  $\mathbf{C}^0$  (triangulares y rectangulares) se pueden distinguir dos familias claramente diferentes: la lagrangiana y la serendípita. Esta última, como ya se dijo antes, no será estudiada en este texto y, se remite al lector al texto de Zienkiewicz [13] donde puede encontrar una descripción detallada de la misma.*

Las funciones de forma de los elementos lagrangianos se pueden obtener fácilmente a partir de la interpolación de Lagrange en dos dimensiones. Así, la función de forma en un nodo cualquiera se obtiene como el producto de dos polinomios de Lagrange unidimensionales en cada una de las coordenadas  $\xi$  y  $\eta$  correspondientes a dicho nodo<sup>2</sup>. Es decir, si  $L_n^i(\xi)$

<sup>2</sup>Los polinomios de Lagrange unidimensionales en cada dirección  $\xi$  y  $\eta$  coinciden con las funciones de forma de los elementos de dos nodos unidimensionales.

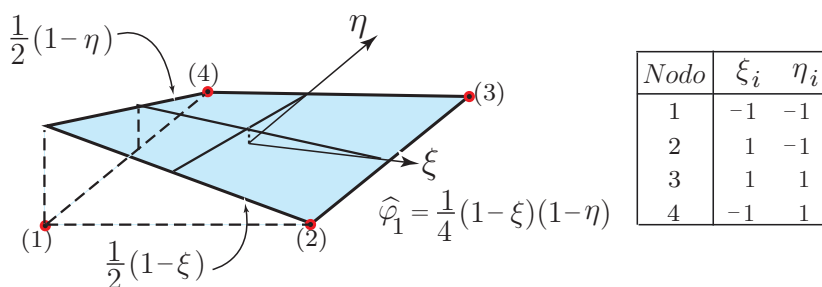
es el polinomio de Lagrange de grado  $n$  en la dirección  $\xi$  del nodo  $i$  y  $L_m^i(\eta)$  el de grado  $m$  en la dirección  $\eta$ , entonces

$$\widehat{\varphi}_i(\xi, \eta) = L_n^i(\xi)L_m^i(\eta) \quad (4.59)$$

En el caso lineal, se tiene

$$L_n^i(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_i\xi) \quad L_m^i(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta_i\eta)$$

donde  $\xi_i$  y  $\eta_i$  toman los valores de los nodos del elemento de referencia



$$\widehat{\varphi}_i = (\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)$$

**Figura 4.17:** Funciones de forma para el elemento rectangular lagrangiano de cuatro nodos

(ver tabla de la Figura 4.17). Por consiguiente, la función de forma del nodo  $i$  está dada por

$$\widehat{\varphi}_i(\xi, \eta) = L_n^i(\xi)L_m^i(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta) \quad (4.60)$$

En general:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) & \widehat{\varphi}_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ \widehat{\varphi}_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) & \widehat{\varphi}_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned}$$

En la Figura 4.17 se muestra la forma gráfica de la función de forma  $\widehat{\varphi}_1(\xi, \eta)$ , la gráfica de las tres funciones de forma restantes se encuentran con una simple rotación de los valores nodales. Resulta fácil comprobar que las funciones de forma definidas por (4.60) satisfacen las dos condiciones (4.57) y (4.58).

### 4.3.8 Integración numérica en elementos rectangulares

Reglas de cuadratura para elementos cuadriláteros se derivan generalmente de las fórmulas de cuadratura en una dimensión tratando la integral en el elemento de referencia como una integral doble. Si se escribe

$$\int_{\hat{\Omega}} G(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi \right] d\eta$$

y se aproximan las integrales respecto a  $\xi$  y  $\eta$  usando reglas de cuadratura de orden  $N$  en una dimensión, tales como las discutidas en el caso de problemas unidimensionales, se obtiene

$$\int_{\hat{\Omega}} G(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{m=1}^N \left[ \sum_{n=1}^N G(\xi_n, \eta_m) \omega_n \right] \omega_m \quad (4.61)$$

La doble sumatoria en (4.61) puede reducirse a una única suma en todo el conjunto de puntos de integración al etiquetar el punto  $(m, n)$  con el índice  $j$ , con  $N_j = N^2$ ,

$$\sum_{m=1}^N \left[ \sum_{n=1}^N G(\xi_n, \eta_m) \omega_n \right] \omega_m = \sum_{j=1}^{N^2} G(\xi_j, \eta_j) \tilde{\omega}_j \quad (4.62)$$

## 4.4 Problema bidimensional

En los dos apartados siguientes se muestra el ensamblaje final de la matriz de rigidez y vector de carga para dos ejemplos en particular.

### 4.4.1 Ejemplo 1. Malla triangular

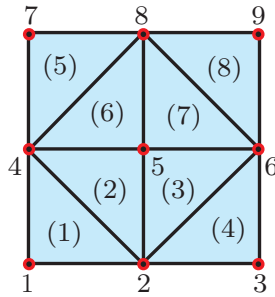
Se resuelve la ecuación de Poisson

$$-\Delta u = f(x, y) \quad \text{en } \Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

con condición de contorno de tipo Dirichlet homogéneas en todo el contorno  $\partial\Omega$  y un término fuente,  $f$ , seleccionado tal que la solución analítica está dada por  $u(x, y) = 1/2 (x^2 - 1)(y^2 - 1)$ . El problema débil o variacional queda entonces dado por: encontrar  $u \in \mathbf{V}$  tal que  $B(u, v) = l(v) \forall v \in \mathbf{V}$ , donde

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega, \quad l(v) = \int_{\Omega} (2 - x^2 - y^2)v d\Omega \quad (4.63)$$

y  $\mathbf{V} = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ . Para la discretización, se reemplaza  $\Omega$  por un dominio  $\Omega_H$  formado por una malla de 8 elementos finitos triangulares de tres nodos y  $m = 9$  puntos nodales, tal como se muestra en la Figura 4.18. La discretización  $\Omega_H$  del dominio  $\Omega$  es exacta debido a la geometría poligonal de  $\Omega$  (al igual que el dominio, la frontera discreta,  $\partial\Omega_H$ , coincide con la frontera  $\partial\Omega$ ). Se construye un conjunto de funciones base global  $\phi_i$ ,



**Figura 4.18:** Ejemplo 1. Discretización del dominio  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$  en una malla de ocho elementos finitos triangulares (nueve nodos).

Coordenadas		
Nodos	$x$	$y$
1	-1	-1
2	0	-1
3	1	-1
4	-1	0
5	0	0
6	1	0
7	-1	1
8	0	1
9	1	1

Conectividades			
Elementos	nodo 1	nodo 2	nodo 3
1	1	2	4
2	5	4	2
3	5	2	6
4	3	6	2
5	7	4	8
6	5	8	4
7	5	6	8
8	9	8	6

**Tabla 4.2:** Ejemplo 1: Izquierda: Valores nodales y su numeración en la malla (numeración global). Derecha: Topología de los elementos (nodos que corresponden a cada elemento).

$i = 1, \dots, m$ , usando elementos triangulares y, a partir de estas funciones,

se define un subespacio  $\mathbf{V}_H$  de  $\mathbf{V}$ . La aproximación de (4.63) entonces consiste en buscar una función  $u_H \in \mathbf{V}_H$ ,

$$u_H(x, y) = \sum_{j=1}^m a_j \phi_j(x, y) \tag{4.64}$$

tal que  $u_j = 0$  en los nodos de  $\partial\Omega$  y

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u_H \cdot \nabla v_H d\Omega, \quad l(v_H) = \int_{\Omega} (2 - x^2 - y^2)v_H d\Omega \tag{4.65}$$

para todo  $v_H \in \mathbf{V}_H$  tal que  $v_H = 0$  en  $\partial\Omega_H$ .

Sustituyendo  $u_H$  y  $v_H$  en (4.63) y simplificando términos (operaciones en las cuales ya estamos familiarizados), se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^m K_{ij} a_j = F_i, \quad i = 1, \dots, m$$

Pasando ahora los cálculos al elemento de referencia,  $\widehat{\Omega}$ , se obtiene que la matriz de rigidez elemental,  $K_{ij}^{(e)}$ , y vector de carga,  $F_i^{(e)}$ , están dados por

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_i^{(e)} \cdot \nabla \varphi_j^{(e)} d\Omega = \int_{\widehat{\Omega}} (J^{-1} \nabla_{\xi\eta} \widehat{\varphi}_i) \cdot (J^{-1} \nabla_{\xi\eta} \widehat{\varphi}_j) |J| d\xi d\eta$$

$$F_i^{(e)} = \int_{\Omega} f \varphi_i^{(e)} d\Omega = \int_{\widehat{\Omega}} f \widehat{\varphi}_i |J| d\xi d\eta$$

donde, las funciones de forma,  $\widehat{\varphi}_i$ , el Jacobiano,  $|J|$ , y el gradiente,  $\nabla_{\xi\eta}$ , son obtenidos de (4.13), (4.38) y (4.40), respectivamente.

El cálculo de la matriz elemental y su ensamblaje en la matriz global se lleva a cabo elemento a elemento:

Para el elemento  $k = 1$ , se tiene

$i_{local}$	$i_{global}$	$x_i$	$y_i$
1	1	-1	-1
2	2	0	-1
3	4	-1	0

$$J = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 & -y_1 + y_2 \\ -x_1 + x_3 & -y_1 + y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = J^{-1}$$

Es decir,  $\Omega_1$  y  $\widehat{\Omega}$  tienen la misma forma, pues  $|J| = 1$ . Además,

$$K_{ij}^{(1)} = \int_{\hat{\Omega}} \nabla_{\xi\eta} \hat{\varphi}_i \cdot \nabla_{\xi\eta} \hat{\varphi}_j d\xi d\eta$$

donde

$$\nabla_{\xi\eta} \hat{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \nabla_{\xi\eta} \hat{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla_{\xi\eta} \hat{\varphi}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

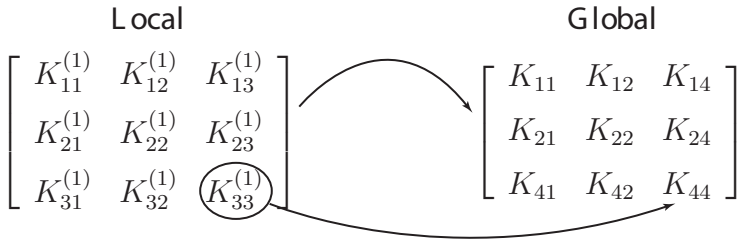
Usando (4.54) se tiene

$$\begin{aligned} K_{11}^{(1)} &= \int_{\hat{\Omega}} 2d\xi d\eta = 2 \frac{1}{2} = 1 & K_{12}^{(1)} &= \int_{\hat{\Omega}} -1d\xi d\eta = -1 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ K_{13}^{(1)} &= \int_{\hat{\Omega}} -1d\xi d\eta = -1 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} & K_{22}^{(1)} &= \int_{\hat{\Omega}} 1d\xi d\eta = 1 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ K_{23}^{(1)} &= \int_{\hat{\Omega}} 0d\xi d\eta = 0 & K_{33}^{(1)} &= \int_{\hat{\Omega}} 1d\xi d\eta = 1 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Ensamblaje global del elemento  $\Omega_1$ :  $K^1 \rightsquigarrow K$



Entonces, la matriz de rigidez  $K$  global después de ensamblar el primer elemento está dada por

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & K_{14}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & 0 & K_{24}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & 0 & K_{44}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el elemento  $k = 2$ , se tiene

$i_{local}$	$i_{global}$	$x_i$	$y_i$
1	5	0	0
2	4	-1	0
3	2	0	-1

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = J^{-1}, \quad |J| = 1$$

La matriz elemental para el elemento  $\Omega_2$

$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} K_{55} & K_{54} & K_{52} \\ K_{45} & K_{44} & K_{42} \\ K_{25} & K_{24} & K_{22} \end{bmatrix}$$

por lo tanto, después de ensamblar el segundo elemento, la matriz de rigidez  $K$  queda dada por

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & K_{14}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{33}^{(2)} & 0 & K_{24}^{(1)} + K_{32}^{(2)} & K_{31}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} + K_{23}^{(2)} & 0 & K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{21}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{13}^{(2)} & 0 & K_{12}^{(2)} & K_{11}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ensamblando todos los elementos, la matriz de rigidez resultante es

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

El vector de carga,  $F$ , se obtiene ensamblando las contribuciones elementales,  $F^{(e)}$ , tal como en la ecuación (4.55), y de forma análoga a lo hecho anteriormente para la matriz de rigidez.

Por último, se debe observar que la matriz de rigidez es singular (todas las columnas suman cero) antes de prescribir las condiciones de contorno esenciales. En otras palabras, resta por analizar la forma de imponer las condiciones de contorno esenciales al sistema  $Ka = F$ .

#### 4.4.2 Ejemplo 2. Malla rectangular

Se estudia la formulación de elementos finitos para el PVF dado por la

ecuación de Poisson<sup>3</sup> (transferencia de calor en estado estable) y condiciones de contorno mixtas

$$-\nabla^T(D\nabla u) = f \quad \text{en } \Omega, \quad (4.66)$$

$$\left. \begin{array}{l} u - u_d = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_d \\ q_n = \bar{q}_n + \alpha(u - u_\infty) \quad \text{sobre } \Gamma_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{condición Dirichlet} \\ \text{condición Neumann} \end{array} \quad (4.67)$$

siendo  $D = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix}$  la *matriz de conductividad* y  $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_n$  la frontera del dominio  $\Omega$ , tal como en el problema (2.10)-(2.11). Sin embargo, la división de  $\Gamma$  en dos zonas  $\Gamma_d$  y  $\Gamma_n$  es meramente conceptual, puesto que puede darse la situación de que estas condiciones se vayan alternando en los sucesivos puntos del contorno.

El flujo normal  $q_n$  se obtiene proyectando el flujo en el contorno sobre la normal. Así,

$$q_n = \mathbf{n}^T \mathbf{q} = n_x q_x + n_y q_y$$

Por otro lado, la relación entre flujo y gradiente se expresa por la *ley de Fourier*, que en forma matricial se escribe por  $\mathbf{q} = -D\nabla u$ . Ahora, sustituyendo  $q_x = -k_x \frac{\partial u}{\partial x}$  y  $q_y = -k_y \frac{\partial u}{\partial y}$  en las ecuaciones anteriores se obtiene la *condición de flujo prescrito* en el contorno (condición de Neumann) en la forma siguiente

$$k_x \frac{\partial u}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial u}{\partial y} n_y + \bar{q}_n + \alpha(u - u_\infty) = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_n \quad (4.68)$$

En lo anterior  $\bar{q}_n$  es el flujo prescrito en dirección normal al contorno  $\Gamma_n$  ( $\bar{q}_n$  es positivo, si el flujo es en dirección de la normal al contorno  $\mathbf{n}$ ). El último término de (4.68) expresa el flujo de calor que sale por el contorno debido a diferencia de temperatura entre los puntos del contorno y la temperatura ambiente  $u_\infty$ . El término  $\alpha$  es denominado *coeficiente de convección*.

Multiplicando (4.66) por la función test  $v$ , integrando sobre el dominio y usando la fórmula de Green (1.25), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v \cdot (D\nabla u) d\Omega &= \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} v \mathbf{n}^T D\nabla u ds \\ &= \int_{\Omega} f v d\Omega - \int_{\Gamma_d} v q_n ds - \int_{\Gamma_n} v [\bar{q}_n + \alpha(u - u_\infty)] ds \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Resulta instructivo plantear la solución general de la ecuación de Poisson utilizando una formulación matricial. El planteamiento matricial presenta además la ventaja de que es generalizable a la solución de otros problemas por el MEF.

La integral a lo largo de  $\Gamma_d$  se debe al flujo  $q_n$  que sale por el contorno  $\Gamma_d$  donde el valor de  $u$  es conocido (condición de contorno esencial), el signo negativo que precede la integral indica que el flujo normal  $q_n$  sale del contorno. Dicho flujo puede interpretarse como una reacción que se calcula una vez conocido el valor de  $u$  sobre  $\Gamma_d$ .

Seleccionando como funciones test las funciones  $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tal que  $v = 0$  sobre  $\Gamma_d$ , se obtiene la formulación variacional siguiente: encontrar  $u \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tal que  $u = u_d$  sobre  $\Gamma_d$  y

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot (D\nabla u) d\Omega + \int_{\Gamma_n} \alpha v u ds = \int_{\Omega} f v d\Omega - \int_{\Gamma_n} v [\bar{q}_n - \alpha u_{\infty}] ds \quad (4.69)$$

se cumple para todo  $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tal que  $v = 0$  sobre  $\Gamma_d$ .

Nuevamente, la forma débil (4.69) es el punto de partida para obtener las ecuaciones de la aproximación por el MEF. Supongamos ahora una discretización del dominio  $\Omega$  en elementos finitos bidimensionales (cuadriláteros) de  $m_e$  nodos (ver Figura 4.1). La aproximación de  $u$  por el MEF queda entonces dada en la forma usual

$$u \approx u_H = \sum_{i=1}^m a_i \phi_i(x, y) \quad (4.70)$$

donde  $\phi_i$  son las funciones base bidimensional para elementos cuadriláteros,  $a_i$  los valores nodales de la solución aproximada y  $m$  el número de nodos en la discretización del dominio  $\Omega$ . El sistema de ecuaciones de la discretización se obtiene sustituyendo la aproximación (4.70) en la forma débil (4.69) y escogiendo  $m$  funciones de peso  $\phi_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). De este modo,

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot (D\nabla u_H) d\Omega + \int_{\Gamma_n} \alpha \phi_i u_H ds = \int_{\Omega} f \phi_i d\Omega - \int_{\Gamma_n} \phi_i [\bar{q}_n - \alpha u_{\infty}] ds \quad (4.71)$$

La forma de Galerkin (4.71) en función de las contribuciones elementales

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^E \left[ \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_i^{(e)} \cdot \left( D\nabla \left( \sum_{j=1}^{m_e} u_j^{(e)} \varphi_j^{(e)} \right) \right) d\Omega + \int_{\Gamma_n^{(e)}} \alpha \varphi_i^{(e)} \left( \sum_{j=1}^{m_e} u_j^{(e)} \varphi_j^{(e)} \right) ds \right] \\ & = \sum_{e=1}^E \left[ \int_{\Omega_e} f \varphi_i^{(e)} d\Omega - \int_{\Gamma_n^{(e)}} \phi_i [\bar{q}_n - \alpha u_{\infty}] ds \right] \end{aligned} \quad (4.72)$$

donde la sumatoria se extiende sobre todos los elementos del dominio.

Como antes, la expresión (4.72) puede escribirse en forma matricial  $Ka = F$ , donde los términos de  $K$  y  $F$  se obtienen ensamblando las contribuciones elementales en la forma habitual. De este modo, y advirtiendo, nuevamente, que las funciones de forma  $\varphi_i^{(e)}$  valen cero fuera de cada elemento, puede deducirse que

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_i^{(e)} \cdot D \nabla \varphi_j^{(e)} d\Omega + \int_{\Gamma_n^{(e)}} \alpha \varphi_i^{(e)} \varphi_j^{(e)} ds = K_{ij}^{\text{int}(e)} + K_{ij}^{\text{front}(e)} \quad (4.73)$$

y

$$F_i^{(e)} = \int_{\Omega_e} f \varphi_i^{(e)} d\Omega - \int_{\Gamma_n^{(e)}} \varphi_i [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] ds \quad (4.74)$$

Es importante advertir que las contribuciones de cada elemento provenientes de las integrales sobre los contornos elementales se cancelan entre sí, cuando el elemento pertenece al interior del dominio. Los términos  $K_{ij}^{\text{int}(e)}$  y  $K_{ij}^{\text{front}(e)}$  en (4.73) representan las contribuciones de la conductividad y la convección en la matriz de rigidez elemental. El cálculo por separado de estos términos facilita la obtención de los coeficientes de la matriz de rigidez elemental.

De la misma manera, resulta apropiado separar las componentes del vector  $F_i^{(e)}$  como

$$F_i^{(e)} = f_i^{(e)} + f_i^{\text{front}(e)}$$

donde

$$f_i^{(e)} = \int_{\Omega_e} f \varphi_i^{(e)} d\Omega \quad (4.75)$$

es la contribución del término de fuente de calor sobre el dominio, y

$$f_i^{\text{front}(e)} = \int_{\Gamma_n^{(e)}} \varphi_i^{(e)} [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] ds \quad (4.76)$$

es la contribución del término de flujo de calor a través del contorno de Neumann donde se prescribe el flujo saliente.

Se particulariza ahora el proceso de obtención de las matrices y vectores elementales para elementos cuadriláteros de cuatro nodos. Así, a partir de (4.38), (4.40)-(4.42), se obtiene de (4.73)

$$\begin{aligned} K_{ij}^{\text{int}(e)} &= \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_i^{(e)} \cdot D \nabla \varphi_j^{(e)} d\Omega = \int_{\hat{\Omega}} J^{-1} \nabla_{\xi\eta} \hat{\varphi}_i \cdot D J^{-1} \nabla_{\xi\eta} \hat{\varphi}_j |J| d\xi d\eta \\ &= \int_{\hat{\Omega}} \left[ (J_1 \nabla_{\xi\eta} \hat{\varphi}_i) k_x (J_1 \nabla_{\xi\eta} \hat{\varphi}_j) + (J_2 \nabla_{\xi\eta} \hat{\varphi}_i) k_y (J_2 \nabla_{\xi\eta} \hat{\varphi}_j) \right] |J| d\xi d\eta \end{aligned}$$

Al igual que como con elementos triangulares, para efectos de implementación, se pueden expresar los cálculos en forma matricial. Si  $\varphi^{(e)} = [\varphi_i^{(e)}, \varphi_j^{(e)}, \varphi_k^{(e)}, \varphi_l^{(e)}] = \widehat{\varphi} = [\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2, \widehat{\varphi}_3, \widehat{\varphi}_4]$ , se tiene que

$$\nabla\varphi^{(e)} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial\widehat{\varphi}_1}{\partial\xi} & \frac{\partial\widehat{\varphi}_2}{\partial\xi} & \frac{\partial\widehat{\varphi}_3}{\partial\xi} & \frac{\partial\widehat{\varphi}_4}{\partial\xi} \\ \frac{\partial\widehat{\varphi}_1}{\partial\eta} & \frac{\partial\widehat{\varphi}_2}{\partial\eta} & \frac{\partial\widehat{\varphi}_3}{\partial\eta} & \frac{\partial\widehat{\varphi}_4}{\partial\eta} \end{bmatrix} = J^{-1}\Psi^T$$

Es decir,

$$\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial x} = J_1\Psi^T = (\Psi J_1^T)^T, \quad \frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial y} = J_2\Psi^T = (\Psi J_2^T)^T$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} K^{\text{int}(e)} &= \int_{\widehat{\Omega}} J^{-1}\Psi^T \cdot D J^{-1}\Psi^T |J| d\xi d\eta \\ &= \int_{\widehat{\Omega}} \Psi \left[ k_x J_1^T J_1 + k_y J_2^T J_2 \right] \Psi^T |J| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.77)$$

La evaluación de  $K_{ij}^{\text{front}(e)}$  en (4.73) y  $f_i^{\text{front}(e)}$  en (4.76) se lleva a cabo mediante la integración a lo largo de los lados del elemento de referencia que son transformados en los lados de la frontera del elemento  $\Omega_e$ , en los cuales las condiciones de frontera natural han sido prescritas ( $\Gamma_n^{(e)}$ ). Cualquier elemento en particular, puede tener uno o más lados (aristas) en la frontera del dominio o no tener ningún lado en dicha frontera. Se describe a continuación los cálculos que deben realizarse para uno de los lados; los procedimientos pueden repetirse cuando más de un lado del elemento se encuentra en la frontera. Para concretar, se supone que el lado  $\xi = 1$  del elemento de referencia es transformado sobre  $\Gamma_n^{(e)}$ .

Sea  $\widehat{\theta}_j$  la restricción de las funciones de forma  $\widehat{\varphi}_j$  del elemento de referencia para el lado  $\xi = 1$ :

$$\widehat{\theta}_j(\eta) = \widehat{\varphi}_j(1, \eta), \quad j = 1, \dots, m_e$$

Es importante advertir que excepto para los nodos que están en la frontera tratada,  $\xi = 1$ , las funciones de forma que no pertenecen al lado tienen valor cero sobre este lado,  $\widehat{\theta}_j(\eta) = 0$ . Teniendo entonces que

$$K_{ij}^{\text{front}(e)} = \int_{\Gamma_n^{(e)}} \alpha \varphi_i^{(e)} \varphi_j^{(e)} ds = \int_{-1}^1 \alpha \widehat{\theta}_i(\eta) \widehat{\theta}_j(\eta) |j(\eta)| d\eta \quad (4.78)$$

$$f_i^{\text{front}(e)} = \int_{\Gamma_n^{(e)}} \varphi_i^{(e)} [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] ds = \int_{-1}^1 [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] \widehat{\theta}_i(\eta) |j(\eta)| d\eta \quad (4.79)$$

donde  $|j|$  es el jacobiano de la transformación de  $\eta$  en el parámetro de longitud de arco  $s$  en el plano  $xy$ . Puesto que

$$ds = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta}(1, \eta) \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta}(1, \eta) \right)^2 \right]^{1/2} d\eta$$

se tiene

$$|j(\eta)| = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta}(1, \eta) \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta}(1, \eta) \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.80)$$

en el cual  $x(\xi, \eta)$  y  $y(\xi, \eta)$  son definidas a partir de la transformación isoparamétrica dada en (4.35).

Generalizando a todas las aristas del elemento de referencia, se tiene: Para el lado  $\eta = -1$ , entonces  $\widehat{\varphi}_3, \widehat{\varphi}_4$  son cero, y

$$K_{\eta=-1}^{\text{front}(e)} = \int_{-1}^1 \alpha \begin{bmatrix} \widehat{\theta}_1 \widehat{\theta}_1 & \widehat{\theta}_1 \widehat{\theta}_2 & 0 & 0 \\ \widehat{\theta}_2 \widehat{\theta}_1 & \widehat{\theta}_2 \widehat{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} |j(\xi)| d\xi$$

Para el lado  $\xi = 1$ , entonces  $\widehat{\varphi}_4, \widehat{\varphi}_1$  son cero, y

$$K_{\xi=1}^{\text{front}(e)} = \int_{-1}^1 \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\theta}_2 \widehat{\theta}_2 & \widehat{\theta}_2 \widehat{\theta}_3 & 0 \\ 0 & \widehat{\theta}_3 \widehat{\theta}_2 & \widehat{\theta}_3 \widehat{\theta}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} |j(\eta)| d\eta$$

Para el lado  $\eta = 1$ , entonces  $\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2$  son cero, y

$$K_{\eta=1}^{\text{front}(e)} = - \int_{-1}^1 \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{\theta}_3 \widehat{\theta}_3 & \widehat{\theta}_3 \widehat{\theta}_4 \\ 0 & 0 & \widehat{\theta}_4 \widehat{\theta}_3 & \widehat{\theta}_4 \widehat{\theta}_4 \end{bmatrix} |j(\xi)| d\xi$$

Para el lado  $\xi = -1$ , entonces  $\widehat{\varphi}_2, \widehat{\varphi}_3$  son cero, y

$$K_{\xi=-1}^{\text{front}(e)} = - \int_{-1}^1 \alpha \begin{bmatrix} \widehat{\theta}_1 \widehat{\theta}_1 & 0 & 0 & \widehat{\theta}_1 \widehat{\theta}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{\theta}_1 \widehat{\theta}_4 & 0 & 0 & \widehat{\theta}_4 \widehat{\theta}_4 \end{bmatrix} |j(\eta)| d\eta$$

En definitiva, la matriz de rigidez total del elemento se obtiene por

$$K^{(e)} = K^{\text{int}(e)} + K_{\eta=-1}^{\text{front}(e)} + K_{\xi=1}^{\text{front}(e)} + K_{\eta=1}^{\text{front}(e)} + K_{\xi=-1}^{\text{front}(e)}$$

Para evaluar las integrales en (4.78) (4.79) sobre el lado del elemento de referencia que este en juego, se continua utilizando las fórmulas de integración numérica. En el presente caso, una regla de cuadratura en una dimensión (como la usada anteriormente para el problema unidimensional) será necesaria.

La contribución del término de convección al vector de flujos,  $f_i^{\text{front}(e)}$ , en forma matricial se calcula como sigue

$$f_{\Gamma_n}^{\text{front}(e)} = \int_{\Gamma_n^{(e)}} [\varphi_1^{(e)} \varphi_2^{(e)} \varphi_3^{(e)} \varphi_4^{(e)}] [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] ds$$

Al igual que en el cálculo de la matriz de rigidez, en la evaluación de la integral anterior hay que tener en cuenta que sobre cada lado, solo son diferentes de cero las funciones de forma correspondientes a dicho lado. Así, el valor de  $f_{\Gamma_n}^{\text{front}(e)}$ , se obtiene para cada lado:

Para el lado  $\eta = -1$ ,

$$f_{\eta=-1}^{\text{front}(e)} = - \int_{-1}^1 [\widehat{\theta}_1 \ \widehat{\theta}_2 \ 0 \ 0] [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] |j(\xi)| d\xi$$

Para el lado  $\xi = 1$ ,

$$f_{\xi=1}^{\text{front}(e)} = - \int_{-1}^1 [0 \ \widehat{\theta}_2 \ \widehat{\theta}_3 \ 0] [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] |j(\eta)| d\eta$$

Para el lado  $\eta = 1$ ,

$$f_{\eta=1}^{\text{front}(e)} = + \int_{-1}^1 [0 \ 0 \ \widehat{\theta}_3 \ \widehat{\theta}_4] [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] |j(\xi)| d\xi$$

Para el lado  $\xi = -1$ ,

$$f_{\xi=-1}^{\text{front}(e)} = - \int_{-1}^1 [\widehat{\theta}_1 \ 0 \ 0 \ \widehat{\theta}_4] [\bar{q}_n - \alpha u_\infty] |j(\eta)| d\eta$$

## 4.5 Condiciones de contorno esenciales

Las matrices globales que resultan al terminar el proceso de ensamblaje de las matrices elementales son singulares. De modo que, el sistema de ecuaciones no podrá ser resuelto hasta que no sea modificado a través de la imposición de las condiciones de contorno esenciales. Este proceso suele ser trivial y representa una parte fundamental de cualquier código de elementos finitos. El número de variables, combinación y valores de estas, que deben especificarse o imponerse en el sistema depende de cada problema en particular.

Existen diferentes enfoques o métodos de introducir dichas condiciones de contorno en el sistema global de ecuaciones. En la gran mayoría de estas formas, el número de incógnitas nodales se reduce. Sin embargo, resulta más conveniente, computacionalmente hablando, introducir las variables conocidas de tal modo que deje el número de ecuaciones original inalterado y evitar de este modo, complicadas reestructuraciones de la matriz global de rigidez. Otro método para imponer las condiciones de contorno esenciales, y tal vez el más popular, es usando multiplicadores de Lagrange; sin embargo, en este caso, la matriz global aumenta su dimensión, tiene ceros en la diagonal y suele resultar mal condicionada.

Por último, un enfoque general del problema de imponer condiciones de contorno esenciales y restricciones multipunto, pero seguramente poco conocida, es la forma introducida por Ainsworth en [37].

A continuación, se describen las tres primera formas de imponer las condiciones de contorno esenciales.

### 4.5.1 Método 1: Eliminación de filas y columnas

Sea  $i$  la coordenada de una variable nodal prescrita del sistema global  $Ka = F$ . Entonces, el proceso se inicia al hacer  $K_{ii}$  igual a uno y los restantes valores de la  $i$ -ésima fila y la  $i$ -ésima columna de  $K$  se hacen iguales a cero. Por otro lado, el término  $F_i$  del vector  $F$  se reemplaza por el valor conocido  $a_i$  (condición esencial). Además, cada uno de los  $n - 1$  términos restantes de  $F$  se modifican restando de su respectivo valor, el valor de la variable prescrita multiplicado por el término correspondiente de la matriz  $K$  original. Este proceso se repite para cada  $a_i$  prescrito, presente en el problema.

Para ilustrar este procedimiento, se considera el siguiente ejemplo:

dato el sistema

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

suponga que se especifican las variables nodales  $a_1 = \alpha_1$  y  $a_4 = \alpha_4$ . Con el procedimiento descrito, el sistema anterior queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ F_2 - K_{21}\alpha_1 - K_{24}\alpha_4 \\ F_3 - K_{31}\alpha_1 - K_{34}\alpha_4 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Este sistema de ecuaciones, puede ahora resolverse para todas las variables nodales. La solución, por supuesto, establece que  $a_1 = \alpha_1$  y  $a_4 = \alpha_4$ , debiéndose determinar las incógnitas  $a_2$  y  $a_3$ .

### 4.5.2 Método 2: Penalización

En este caso, el término de la diagonal de  $K$ , asociada con la variable nodal prescrita, se multiplica por un número muy grande, por ejemplo  $10^{16}$ , mientras que el término correspondiente a  $F$  es reemplazado por la variable nodal prescrita, multiplicada por el mismo factor del término de la diagonal correspondiente. Este procedimiento se repite para todas las variables prescritas del problema. Este método hace que los términos no modificados de  $K$  sean extremadamente más pequeños si se comparan con los términos modificados. Una vez terminada esta modificación, se procede a resolver el sistema completo de ecuaciones.

Usando este procedimiento para resolver el sistema de ecuaciones (4.81) del ejemplo anterior, se tiene

$$\begin{bmatrix} 10^{16}K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & 10^{16}K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{16}\alpha_1 K_{11} \\ F_2 \\ F_3 \\ 10^{16}\alpha_4 K_{44} \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Para mostrar la efectividad de este procedimiento, consideremos la primera fila de (4.82):

$$10^{16}K_{11}a_1 + K_{12}a_2 + K_{13}a_3 + K_{14}a_4 = 10^{16}\alpha_1 K_{11}$$

Desde un punto de vista práctico, esta ecuación expresa que  $a_1 = \alpha_1$ , puesto que  $10^{16}K_{11} \gg K_{1j}$ , para  $j = 2, 3, 4$ .

Aunque esta última forma de imponer condiciones de contorno esenciales resulta computacionalmente más fácil de implementar, se tiene que ambos métodos preservan la propiedades de la matriz original del sistema: simetría, ancho de banda, número de condición, etc.

### 4.5.3 Método 3: Multiplicadores de Lagrange

El problema variacional  $B(u, v) = l(v)$ , en el caso de  $B$  simétrica, resulta equivalente al problema de minimización: encontrar  $u$  tal que

$$J(u) = \inf_{v \in \mathbf{V}} J(v)$$

donde,  $\mathbf{V}$  es el espacio de funciones admisibles y  $J$  es el funcional lineal dado por

$$J(v) = \frac{1}{2}B(v, v) - l(v)$$

De forma discreta, el problema queda dado por: encontrar el extremo  $a$  del funcional

$$J(a) = \frac{1}{2}a^T K a - a^T F \quad (4.83)$$

donde  $Ka = F$  representa el sistema global del problema antes de imponer las condiciones de contorno esenciales. Así, si  $K$  es simétrica y definida positiva,  $a$  es un extremo de (4.83) si, y solo si,  $\partial J / \partial a = 0$ . Es decir,

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\{K^T + K\}a = F$$

Por otro lado, al imponer las condiciones de contorno esenciales, dadas por el sistema  $Ga = g$  ( $m$  ecuaciones lineales no necesariamente homogéneas), usando multiplicadores de Lagrange, resulta el funcional

$$J(a, \lambda) = \frac{1}{2}a^T K a - a^T F + \lambda^T (Ga - g)$$

Ahora, el extremo se alcanza para

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\{K^T + K\}a - F + \lambda^T G = 0$$

Es decir, para  $Ka - F + \lambda^T G$ . En forma matricial

$$\begin{bmatrix} K & G^T \\ G & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ g \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Se debe notar, que al imponer las condiciones de contorno esenciales el sistema global pierde su estructura de almacenamiento, aumenta la dimensión de la matriz, presenta ceros en la diagonal y, en general la matriz resulta mal condicionada.

## 4.6 Funciones de forma de orden superior

El propósito de este apartado es dar a conocer algunas reglas fundamentales para generar funciones de forma de diversos elementos: triangulares y rectangulares de lados rectos de clase  $C^0$ . Un desarrollo más general sobre el tema puede verse, por ejemplo, en Zienkiewicz [13]. Las funciones de forma que se describen solo exigirán la satisfacción de los criterios dados por (4.57) y (4.58) y constituyen la continuación inmediata de las vista anteriormente (caso lineal).

Las funciones de forma solo pueden reproducir exactamente variaciones polinómicas de grado igual o inferior al del polinomio completo de mayor grado contenido en dichas funciones. Como consecuencia, la solución de elementos finitos será tanto mejor cuanto mayor sea el grado de dicho polinomio completo.

Un polinomio de dos variables de grado  $n$  se llama *completo* si este puede escribirse como

$$p(x, y) = \sum_{i=1}^p \alpha_i x^j y^k, \quad j + k \leq n$$

donde el número de términos en el polinomio es  $p = (n + 1)(n + 2)/2$ . Así, por ejemplo, para un polinomio lineal ( $p = 3$ ) se tiene que,  $p(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$ , mientras que para un polinomio cuadrático ( $p = 6$ ), resulta que  $p(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2$ . Una forma inmediata de identificar los términos de un polinomio completo de dos variables es utilizando el *triángulo de Pascal* (Tabla 4.3). Por tanto, los desarrollos polinómicos correspondientes a las funciones de forma de cada elemento pueden obtenerse directamente del triángulo de Pascal. Al mismo tiempo, dicha propiedad permite conocer la distribución de nodos internos y en los lados, pues dicha distribución guarda una perfecta analogía con la de los términos de dicho triángulo.

Triángulo de Pascal	Grado del polinomio	Número de términos $p = (n + 1)(n + 2)/2$
1	0	1
x        y	1	3
x <sup>2</sup> xy    y <sup>2</sup>	2	6
x <sup>3</sup> x <sup>2</sup> y  xy <sup>2</sup> y <sup>3</sup>	3	10
x <sup>4</sup> x <sup>3</sup> y  x <sup>2</sup> y <sup>2</sup> xy <sup>3</sup> y <sup>4</sup>	4	15

**Tabla 4.3:** Triángulo de Pascal en dos dimensiones.

### 4.6.1 Funciones de forma de elementos rectangulares

Para elementos rectangulares lagrangianos de orden superior, las funciones de forma se pueden obtener a partir de la interpolación de Lagrange en dos dimensiones (ver (4.59), y el desarrollo hecho para el caso lineal). Así, para un elemento rectangular lagrangiano de nueve nodos (ver Figura 4.19), las funciones de forma se obtienen del producto de dos polinomios de Lagrange de segundo grado en  $\xi$  y  $\eta$ . Dichos polinomios se obtienen directamente para cada nodo. Así, por ejemplo, para el nodo 1

$$L_2^1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - 1)\xi, \quad L_2^1(\eta) = \frac{1}{2}(\eta - 1)\eta$$

y la función de forma del nodo es

$$\hat{\varphi}_1(\xi, \eta) = L_2^1(\xi)L_2^1(\eta) = \frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta - 1)\xi\eta$$

Procediendo de manera idéntica para el resto de los nodos, pueden encontrarse las siguientes expresiones:

- Nodos de las esquinas,  $i = 1, 3, 5, 7$

$$\hat{\varphi}_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi\xi_i)(\eta^2 + \eta\eta_i)$$

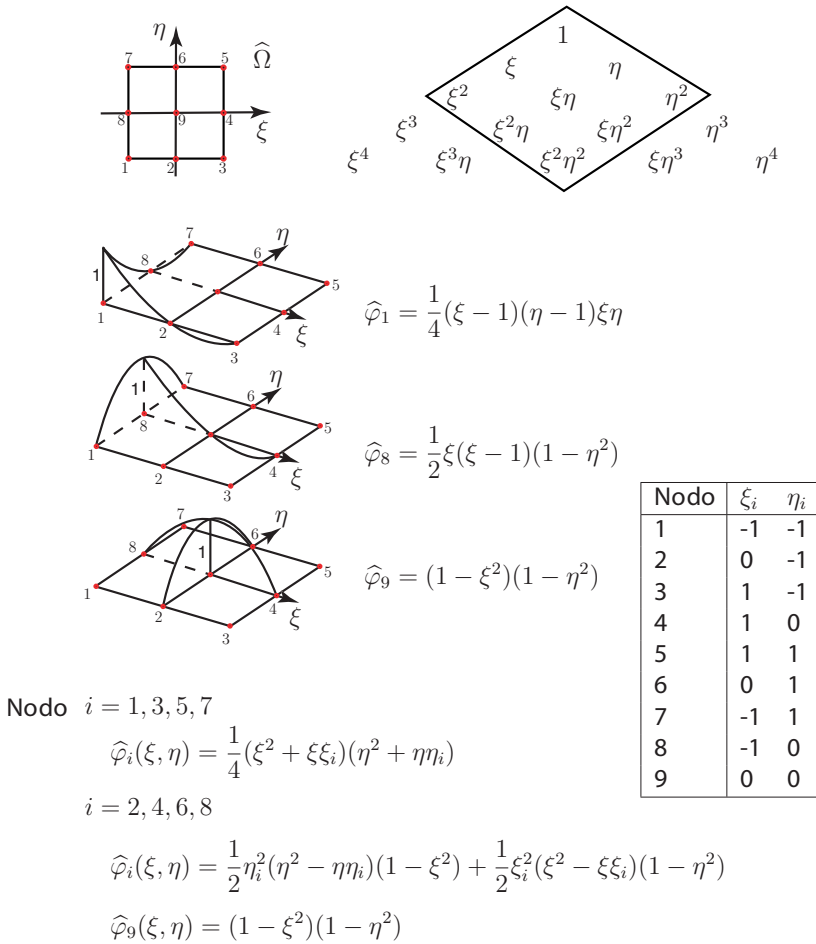
- Nodos intermedios en los lados,  $i = 2, 4, 6, 8$

$$\hat{\varphi}_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\eta_i^2(\eta^2 - \eta\eta_i)(1 - \xi^2) + \frac{1}{2}\xi_i^2(\xi^2 - \xi\xi_i)(1 - \eta^2)$$

- Nodo central

$$\hat{\varphi}_9(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

En la Figura 4.19 se presentan las funciones de forma para tres nodos en particular. Se aprecia en dicha figura que el elemento lagrangiano de



**Figura 4.19:** Elemento rectangular lagrangiano cuadrático de nueve nodos.

nueve nodos contiene todos los términos del polinomio completo de segundo grado más tres términos adicionales ( $\xi^2\eta$ ,  $\xi\eta^2$  y  $\xi^2\eta^2$ ) de los polinomios de tercer y cuarto grado. Por lo tanto, la aproximación del elemento es simplemente cuadrática. Se puede comprobar que dichas funciones de forma cumplen las condiciones impuestas por (4.57) y (4.58).

Elementos lagrangianos de mayor orden pueden obtenerse aumentando el grado de los polinomios de Lagrange en cada dirección  $\xi$  y  $\eta$ . Los elementos lagrangianos pueden tener diferente número de nodos en cada

dirección  $\xi$  y  $\eta$ . En este caso, las funciones de forma se obtienen de la misma manera. Las funciones de forma de estos elementos contienen polinomios completos en  $\xi$  y  $\eta$  de un grado igual al menor de los dos polinomios de Lagrange unidimensionales en cada dirección. Por lo tanto, el aumento del número de nodos en una única dirección no contribuye a incrementar el grado de aproximación, por lo que dichos elementos no son muy utilizados en la práctica.

#### 4.6.2 Funciones de forma de elementos triangulares

En el caso de elementos triangulares, estos permiten que se usen polinomios completos para definir funciones de forma. Los coeficientes de estos polinomios pueden calcularse siguiendo el procedimiento descrito anteriormente para el triángulo de tres nodos. No obstante, este procedimiento resulta complejo para elementos de orden superior y es mucho más sencillo la obtención de los coeficientes haciendo uso de las coordenadas naturales o de área descritas en el apartado 4.3.5.

Sea  $i$  un nodo cualquiera que ocupa la posición  $(I, J, K)$  en los lados o en el interior del elemento. Los valores de  $I, J$  y  $K$  coinciden con los exponentes con que van afectadas cada una de las coordenadas de área  $l_1, l_2, l_3$  en la expresión de la función de forma del nodo. Por consiguiente, se cumple que  $I + J + K = n$ . La función de forma del nodo  $i$  viene dada por<sup>4</sup>

$$\widehat{\varphi}_i = L_I^{s_1}(l_1)L_J^{s_2}(l_2)L_K^{s_3}(l_3) \quad (4.85)$$

El superíndice  $s_1$  corresponde al numero de orden que guarda el nodo  $i$  en dirección del eje  $l_1$ , es decir, para la coordenada de área  $l_1 = 1$ ,  $s_1 = 1$  y para  $l_1 = 0$ ,  $s_1 = n + 1$  ( $1 \leq s_1 \leq n + 1$ ).  $L_I^{s_1}(l_1)$  es el polinomio de Lagrange de grado  $I$  en  $l_1$  asociado al nodo  $i$ , que toma el valor uno en el nodo  $i$ , es decir

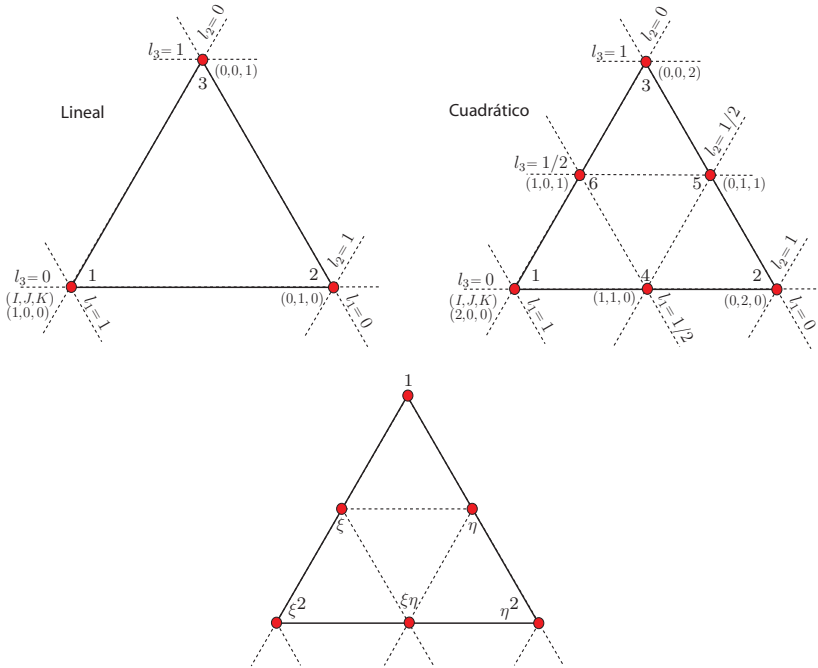
$$L_I^{s_1}(l_1) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq I, s_1}}^{n+1} \frac{(l_1 - l_1^j)}{(l_1^{s_1} - l_1^j)} \quad (4.86)$$

con idénticas expresiones para  $L_J^{s_2}(l_2)$  y  $L_K^{s_3}(l_3)$ . En (4.86)  $l_1^i$  es el valor

---

<sup>4</sup>La expresión (4.85) es válida para distribuciones de nodos arbitrarias que sigan el modelo de generación de la Figura 4.20 y, se simplifica si el espaciado de las líneas nodales es regular (por ejemplo,  $1/n$ ). La fórmula fue obtenida originalmente por Argyris y colaboradores [34] y formalizada de manera diferente por [35], [36].

de la coordenada de área  $l_1$  en el nodo  $i$ . Con el objetivo que la ecuación (4.86) sea consistente para todos los nodos, es necesario tomar en cuenta que  $L_0^{s1}(l_1) = 1$ , análogamente para  $L_0^{s2}(l_2)$  y  $L_0^{s3}(l_3)$ .



**Figura 4.20:** Elemento triangular lagrangiano lineales y cuadrático y términos de sus funciones de forma. Valores nodales de las coordenadas de área  $l_i$  y entre paréntesis los de las coordenadas  $(I, J, K)$  de cada nodo.

La dificultad mayor para aplicar la ecuación (4.86) consiste en deducir los valores  $I, J, K$  de cada nodo. Esto puede efectuarse fácilmente teniendo en cuenta que:

- La función de forma de cada nodo de vértice depende únicamente de una coordenada de área, de lo que se deduce el exponente que afecta a dicha función y, por tanto, el valor de  $I, J$  o  $K$  del nodo,
- Los nodos colocados sobre las rectas  $l_1 = \text{constante}$  tienen el mismo  $I$ , ocurriendo lo mismo con  $l_2$  y  $J$  y  $l_3$  y  $K$ .
- Los valores  $I, J, K$  asociados a  $l_1, l_2, l_3$  decrecen de unidad en unidad desde sus valores máximos sobre las rectas  $l_i = 1$  que pasan

sobre los nodos de vértice, hasta el valor cero sobre la recta  $l_i = 0$  que coincide con el lado opuesto al vértice en cuestión, ver Figura 4.20.

Se aclara el procedimiento descrito aplicándolo a los caso lineal y cuadrático.

**Funciones de forma del elemento triangular de tres nodos:** Las funciones de forma del elemento triangular de tres nodos son polinomios de primer grado,  $n = 1$ . La posición de cada nodo y sus coordenadas de área pueden verse en la Figura 4.20. Por ejemplo, para el nodo 1, la posición  $(I, J, K)$  es  $(1, 0, 0)$ . Las coordenadas de área en el nodo son  $(1, 0, 0)$  y, por tanto,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_1 &= L_1^{s_1}(l_1)L_0^{s_2}(l_2)L_0^{s_3}(l_3) = L_1^1(l_1)L_0^2(l_2)L_0^2(l_3) = L_1^1(l_1) \\ &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1,1}}^2 \frac{(l_1 - l_1^j)}{(l_1^1 - l_1^j)} = \frac{(l_1 - l_1^2)}{(l_1^1 - l_1^2)} = l_1 \end{aligned}$$

Resulta inmediato encontrar las funciones de forma  $\widehat{\varphi}_2 = L_1^{s_2=1}(l_2) = l_2$ , y  $\widehat{\varphi}_3 = L_1^{s_3=1}(l_3) = l_3$ ; resultados, por otra parte, ya conocidos.

**Funciones de forma del elemento triangular de seis nodos:** Las funciones de forma del elemento triangular cuadrático de seis nodos son polinomios completos de segundo grado,  $n = 2$ . La posición de los nodos y el valor de las coordenadas de área de cada nodo pueden verse en la Figura 4.20. Sistematizando el proceso, se tiene, por ejemplo, para los nodos 1 y 4:

Nodo 1

- Posición  $(I, J, K) : (2, 0, 0)$
- Coordenadas de área:  $(1, 0, 0)$

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_1 &= L_2^{s_1}(l_1)L_0^{s_2}(l_2)L_0^{s_3}(l_3) = L_2^1(l_1)L_0^3(l_2)L_0^3(l_3) = L_2^1(l_1) \\ &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1,1}}^3 \frac{(l_1 - l_1^j)}{(l_1^1 - l_1^j)} = \frac{(l_1 - l_1^2)(l_1 - l_1^3)}{(l_1^1 - l_1^2)(l_1^1 - l_1^3)} = \frac{(l_1 - 1/2)(l_1 - 0)}{(1 - 1/2)(1 - 0)} \\ &= (2l_1 - 1)l_1 \end{aligned}$$

Nodo 4

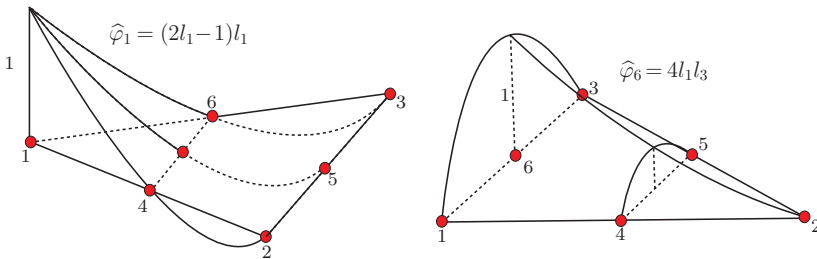
- Posición  $(I, J, K) : (1, 1, 0)$
- Coordenadas de área:  $(1/2, 1/2, 0)$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_4 &= L_1^{s_1}(l_1)L_1^{s_2}(l_2)L_0^{s_3}(l_3) = L_1^2(l_1)L_1^2(l_2)L_0^3(l_3) = L_1^2(l_1)L_1^2(l_2) \\ &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1,2}}^3 \frac{(l_1 - l_1^j)}{(l_1^2 - l_1^j)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1,2}}^3 \frac{(l_2 - l_2^j)}{(l_2^2 - l_2^j)} = \frac{(l_1 - l_1^3)(l_2 - l_2^3)}{(l_1^2 - l_1^3)(l_2^2 - l_2^3)} \\ &= \frac{(l_1 - 0)(l_2 - 0)}{(1/2 - 0)(1/2 - 0)} = 4l_1l_2 \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, se obtiene fácilmente para todos los nodos

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1 &= (2l_1 - 1)l_1 & \hat{\varphi}_2 &= (2l_2 - 1)l_2 & \hat{\varphi}_3 &= (2l_3 - 1)l_3 \\ \hat{\varphi}_4 &= 4l_1l_2 & \hat{\varphi}_5 &= 4l_2l_3 & \hat{\varphi}_6 &= 4l_1l_3 \end{aligned}$$

En la Figura 4.21 se muestra la geometría de dos funciones de forma características.



**Figura 4.21:** Funciones de forma de un nodo de esquina y un nodo lateral en un elemento triangular cuadrático.

## Ejercicios

- 4.1 El error para la interpolación de Lagrange en  $\beta + 1$  puntos de una función suave  $g$  es

$$E(x) = \frac{P_{\beta+1}(x) d^{\beta+1}g(\zeta)}{(\beta + 1)! dx^{\beta+1}}, \quad x_i \leq \zeta \leq x_{i+1}$$

donde  $\{x_i\}$  son los puntos de la interpolación y

$$P_{\beta+1}(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{\beta+1})$$

Usando este resultado sobre el elemento de referencia  $-1 \leq \xi \leq 1$  y la transformación de  $-1 \leq \xi \leq 1$  a  $x \in \Omega_e$ , muestre que

$$\max_{x \in \Omega_e} |E(x)| \leq \frac{H^{\beta+1}}{2^{\beta+1}(\beta + 1)!} \max_{x \in \Omega_e} \left| \frac{d^{\beta+1}g(x)}{dx^{\beta+1}} \right|$$

- 4.2 Calcule la solución exacta y la aproximación por elementos finitos para 2, 4, y 6 elementos del PVF

$$-u'' = 1 - x^2, \quad 0 < x < 1 \quad \text{con} \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Calcule el error  $\|e\|_E$  y  $\|e\|_\infty$  para cada malla y cree la gráfica  $\log(\|e\|)$  contra  $\log(H)$ . ¿Cuál es el orden de convergencia para cada norma? Verifique el error puntual de la solución en  $x = 1/8$  para cada malla. ¿Cuál es el orden de convergencia aquí? Verifique el error puntual en el nodo central  $x = 1/2$ . ¿Qué resultado importante se puede encontrar?

- 4.3 Considere el problema de Neumann

$$-u'' = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad \text{con} \quad u'(0) = 1, \quad u'(1) = 2$$

Desarrolle el sistema lineal de ecuaciones que describen una aproximación de este problema utilizando solo dos elementos y funciones de forma lineales. Los valores de  $K_{ij}$  y  $F_i$  no es necesario calcularlos. Imponga las condiciones de contorno para reducir el sistema.

- 4.4 La función  $u$  definida por

$$u(x) = (1 - x) [\tan^{-1}(\alpha(x - x_0)) + \tan^{-1}(\alpha x_0)]$$

está diseñada para mostrar un comportamiento que va desde muy suave a casi discontinua alrededor de  $x = x_0$ , variando los valores de los parámetros  $\alpha$  y  $x_0$ . Las propiedades de  $u$  la convierten en una

candidata ideal para su uso en estudios numéricos de soluciones de elementos finitos. Tenga en cuenta que

$$u'(x) = -[\tan^{-1}(\alpha(x - x_0))] + \tan^{-1}(\alpha x_0) + \frac{(1 - x)\alpha}{1 + \alpha^2(x - x_0)^2}$$

y que  $u$  es la solución de la ecuación diferencial

$$-(k(x)u'(x))' = f(x)$$

donde,  $k(x) = 1/\alpha + \alpha(x - x_0)^2$  y

$$f(x) = 2\{1 + \alpha(x - x_0) \tan^{-1}(\alpha(x - x_0)) + \tan^{-1}(\alpha x_0)\}$$

Además,  $u$  tiene valores de frontera  $u(0) = 0$  y  $u(1) = 0$ .

*Experimentación numérica:*

Realice las modificaciones necesarias al código de elementos finitos adjunto al texto para resolver el PVF anterior con  $x_0 = 0.5$  y  $\alpha = 5$  (problema bastante suave) y una malla uniforme de 8 elementos. Estudie el efecto de variar el orden de integración sobre elementos de diferente orden, es decir, para elementos lineales, cuadráticos y cúbicos. ¿Observa alguna falla? Usando la norma de energía, analice la precisión de la solución de elementos finitos. Discuta sus resultados y saque conclusiones.

Usando el problema y la malla del caso anterior, estudie la precisión punto a punto de la solución de elementos finitos  $u_H$  y el flujo  $\sigma_H$  evaluando la solución en varios puntos (por ejemplo, en 10 puntos igualmente espaciados) y uno o dos elemento cerca de  $x_0$ . Para cada tipo de elemento, el lector debe descubrir ciertos puntos en los cuales  $u_H$  tiende a ser más preciso y ciertos puntos donde  $\sigma_H$  es más preciso.

Amplíe el estudio a un problema mas “fuerte” (digamos,  $\alpha = 50$ ). Reporte sus resultados en forma de gráfica (error contra coordenada del elemento  $\xi$ ) para los diferentes tipo de elementos. Saque sus conclusiones sobre los resultados obtenidos.

La existencia de estos puntos especiales en los cuales una mejor precisión es usualmente encontrada resulta de extremado valor para el análisis de elementos finitos. Este fenómeno de mayor precisión que la media es llamado *superconvergencia*. Los códigos de aplicaciones típicamente evalúan la solución solo en estos puntos. Usted puede modificar el código propuesto para que esto suceda.

Para el problema suave ( $\alpha$  pequeño) y el problema fuerte ( $\alpha$  grande) estudie el orden de convergencia para los elementos lineales, cuadráticos y cúbicos. Use mallas uniformes de 4, 8, 16 y 24 elementos ( $H = 1/4, 1/8, 1/16, 1/24$ ). Estudie la convergencia tanto en norma energética como en norma  $\mathbf{L}^2$ . Gráficar  $\log(\|u - u_H\|)$  contra  $\log(H)$  y determinar el orden de convergencia experimental. Compare los valores experimentales con los obtenidos en (4.30). Estimaciones de error de la forma (4.30) son *asintóticas*; es decir, que exhiben cada vez mayor precisión a medida que  $H$  se hace pequeño, alcanzando la exactitud en el límite  $H \rightarrow 0$ . Es interesante preguntarse que tan pequeño debe ser  $H$  para observar un comportamiento asintótico (líneas rectas en la gráfica del  $\log(\|u - u_H\|)$  contra  $\log(H)$ ). ¿Qué significan los resultados de sus experimentos numéricos?

Para un problema fuerte ( $x_0 = 0.75$  y  $\alpha = 250$ ) y un número de nodos (por ejemplo, 30), intente variar el espaciamiento y el orden de los elementos para obtener una solución de elementos finitos de alta precisión (medida en norma de energía). Puede ser que tenga suerte o necesite varios ensayos para lograr buenos resultados.

Una estrategia razonable es comenzar con una malla uniforme, evaluar los resultados en varios puntos dentro de cada elemento y graficar  $u$  contra  $x$ . De esta gráfica, las regiones en las cuales cambios rápidos estén teniendo lugar pueden ser fácilmente detectadas. De acuerdo a lo dicho en el apartado 4.2.4, se debe esperar que los elementos lineales se comporten pobremente cuando  $u''$  es grande, así que, o bien  $H$  debe ser pequeño o se usan elementos de orden superior (o las dos cosas). Similarmente, valores grandes de  $d^3u/dx^3$  dan lugar a grandes errores con los elementos de segundo grado, y así sucesivamente. Use estas ideas para la construcción de las sub-siguientes mallas.

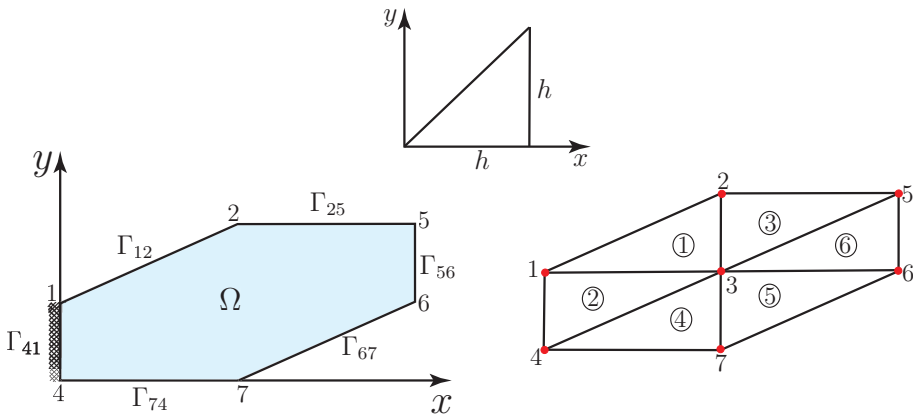
Este ejercicio ilustra un importante aspecto práctico del análisis de elementos finitos: mallas uniformes son raramente las más efectivas. El MEF ofrece la oportunidad de definir pequeños elementos donde ellos sean necesarios y utilizar elementos grandes en regiones donde estos sean más que suficientes. Por supuesto, en aplicaciones prácticas, la solución exacta no está disponible, pero un análisis preliminar de los elementos finitos usando una malla uniforme y gruesa puede ser usado para obtener una imagen aproximada de la solución. La

mallla puede entonces ser refinada en las regiones de cambios rápidos para las ejecuciones posteriores. La automatización de estos procedimientos sigue siendo objeto de considerables esfuerzos de investigación hoy en día.

4.5 Considere la formulación de una aproximación por elementos finitos del problema:

$$\begin{aligned}
 -\Delta u &= f(x, y), & \text{en } \Omega \\
 u &= 0, & \text{sobre } \Gamma_{41} \\
 \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_{12}, \Gamma_{25}, \Gamma_{67}, \Gamma_{74} \\
 \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u &= \gamma, & \text{sobre } \Gamma_{56}
 \end{aligned}$$

donde  $\Omega$  es el dominio poligonal mostrado en la Figura 4.22 y  $\Gamma_{41}$ ,  $\Gamma_{12}$ ,  $\Gamma_{25}$ ,  $\Gamma_{56}$ ,  $\Gamma_{67}$  y  $\Gamma_{74}$  son los segmentos de la frontera indicados en la Figura.



**Figura 4.22:** Ejercicio 4.5. Izquierda: Dominio poligonal  $\Omega$ . Derecha: Discretización del dominio en elementos finitos.

- (a) Suponga que todos los elementos mostrados en la mallla de la Figura 4.22 son triángulos isosceles. Derive la matriz de rigidez elemental  $K^e$  y el vector de carga  $F^e$  para el elemento mostrado en la parte superior de la Figura 4.22 para el caso de  $f(x, y) = 1$ .

- (b) Suponga que las coordenadas de los nodos en la malla son:  $(x_1, y_1) = (0, 1)$ ,  $(x_2, y_2) = (1, 2)$ ,  $(x_3, y_3) = (1, 1)$ ,  $(x_4, y_4) = (0, 0)$ ,  $(x_5, y_5) = (2, 2)$ ,  $(x_6, y_6) = (2, 1)$ ,  $(x_7, y_7) = (1, 0)$ . Usando los resultados de la parte (a), calcule las matrices elementales y vectores de carga para los seis elementos, dando valores numéricos explícitos para todas las entradas.
- (c) Sume las matrices obtenidas en (b) para obtener  $K$  y  $F$  global (aún no están impuestas las condiciones de contorno).
- (d) Obtenga el sistema final de ecuaciones al imponer a  $K$  y  $F$  las condiciones de contorno.
- (e) Describa que modificaciones en el análisis son necesarias en el caso de condiciones de contorno no homogéneas sobre  $\Gamma_{41}$ .
- (f) Describa las modificaciones necesarias en el análisis del problema para el caso en el cual, las condiciones de contorno tienen la condición de Neumann  $\partial u(s)/\partial n = \gamma(s)$  sobre  $\partial\Omega$ :

$$\gamma(s) = \begin{cases} \gamma_0 & \text{sobre } \Gamma_{41} \\ 0 & \text{sobre } \Gamma_{12} \text{ y } \Gamma_{25} \\ \gamma_1 & \text{sobre } \Gamma_{56} \\ 0 & \text{sobre } \Gamma_{67} \text{ y } \Gamma_{74} \end{cases}$$

donde  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  son constantes. Si  $f(x, y) = 1$  que condiciones son necesarias sobre  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  para que exista una solución de este problema.

#### 4.6 Para el PVF

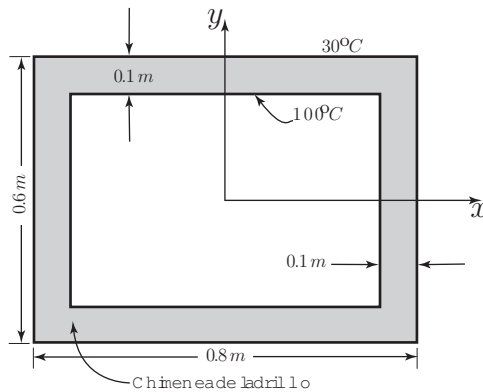
$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, & \text{en } \Omega &= (0, 1) \times (0, 1) \\ u &= u(x, y), & \text{sobre } \Gamma_d & \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= -4, & \text{sobre } \Gamma_n & \end{aligned}$$

donde  $\Gamma_n$  es el segmento del dominio para  $x = 0$ ,  $\Gamma_d$  el resto del contorno de  $\Omega$  y  $f(x, y)$  es tal que la solución exacta del problema es  $u(x, y) = x^3 + 3y^2 + 4x$ . Utilice el código adjunto para resolver el problema usando elementos finitos triangulares y rectangulares. Estudie la convergencia tanto en norma energética como en norma  $\mathbf{L}^2$ . Gráfique  $\log(\|u - u_H\|)$  contra  $\log(H)$  y determinar el orden de convergencia experimental.

4.7 La chimenea de ladrillos mostrada en la Figura 4.23 tiene 6 metros de altura. Las superficies interiores están a una temperatura uniforme de  $100^\circ\text{C}$  y las superficies exteriores se mantienen a una temperatura uniforme de  $30^\circ\text{C}$ . La conductividad térmica del ladrillo usado es  $0.72\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}$ . Por lo tanto, la ecuación a resolver es un caso particular de la ecuación de Helmholtz (4.1) o ecuación de calor en estado estable

$$-k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = G \quad (4.87)$$

Use un modelo apropiado del dominio (1/4 de simetría) para determinar la razón total de calor transferido a través de la pared de la chimenea. ¿Qué condiciones de contorno artificiales impondría en las fronteras que surgen a dividir el dominio? Justifique su respuesta.



**Figura 4.23:** Ejercicio 4.7. Dominio bidimensional para la conducción de calor en una chimenea.

4.8 En la Figura 4.24 se muestra una presa sobre un suelo homogéneo isotrópico que tiene fronteras confinadas impermeables. Las paredes y base de la presa son impermeables. La presa retiene agua con altura constante de 4 metros; el nivel de aguas abajo es cero. A partir de (4.87), ahora  $T$  representa potencial hidráulico (o carga hidráulica), determine y trace las líneas equipotenciales y encuentre la cantidad de agua que se infiltra bajo la presa por ancho unitario de ésta. Considere una conductividad hidráulica de  $k = 30\text{ m}/\text{día}$ .

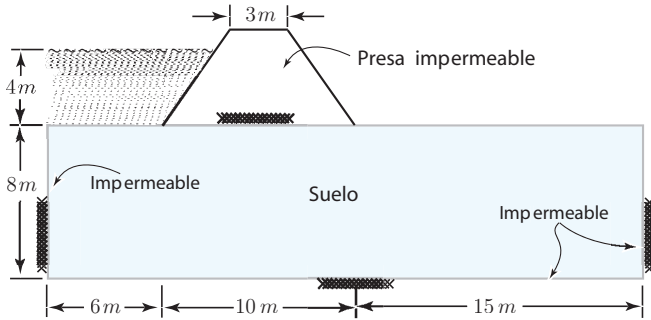


Figura 4.24: Ejercicio 4.8. Dominio bidimensional para el problema de la presa.

4.9 El freno electromagnético es un elemento que se suele disponer en vehículos de gran tonelaje. Este dispositivo de seguridad surgió de la necesidad de un freno alternativo al freno convencional y que no tuviese el inconveniente del sobrecalentamiento y pérdida de eficacia en pendientes pronunciadas. Los frenos convencionales se calientan con facilidad al hacer un uso continuado en largas bajadas, esto se evita con el freno electromagnético, pues su funcionamiento no comporta rozamiento entre elementos. Además evita las pérdidas de adherencia en pavimentos deslizante, puesto que la fuerza se reparte por igual en todas las ruedas motrices.

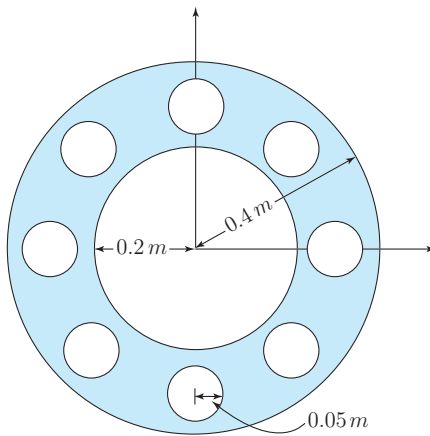


Figura 4.25: Ejercicio 4.9. Geometría del disco de freno electromagnético.

El problema viene modelizado por la ecuación del calor en 3D. Sin embargo, la simetría del problema permite en este caso obviar el espesor, y realizar por tanto un cálculo más simplificado en 2D (Figura 4.25). El problema se quiere resolver despreciando la fase transitoria, únicamente se tiene en cuenta su face estacionaria, es decir, se quiere resolver nuevamente la ecuación (4.87) sujeta a condiciones de frontera del tipo

$$T = t_0, \quad -k \frac{\partial T}{\partial n} = q_0, \quad -k \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_\infty). \quad (4.88)$$

En otras palabras, se considera que el vehículo está frenando de forma constante e ininterrumpidamente.  $G$  es la fuente de calor en Julios por unidad de superficie. Es decir, la integral de la función  $G$  sobre toda la superficie de la sección de freno electromagnético, es igual a la pérdida de energía cinética del vehículo. Esta función  $G$  representa trabajo de frenado que se supone constante en el tiempo y uniforme en toda su superficie.

Para el estudio se consideran los siguientes valores: radio máximo del freno =  $0.4m$ , radio mínimo del freno =  $0.2m$ , radio de los orificios =  $0.05m$ . A partir de estos datos se obtiene un valor para la fuente de calor  $Q = 238732.41 J/m^2$ . El coeficiente de conductividad térmica  $k = 45W/m^\circ C$  y condiciones de contorno:

- $T = 0^\circ C$  en el contorno de los orificios para representar el efecto del liquido refrigerante.
- La parte exterior del disco está expuesta a una temperatura de  $T_\infty = 20^\circ C$  con un coeficiente de transferencia de calor por convección en el acero de  $\alpha = 15$ .

Obtenga la distribución de temperatura utilizando lo mejor posible la simetría del dominio.

# Bibliografía

- [1] M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin and L.J. Topp, *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*. Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 23, 9, 1956.
- [2] G. Strang and G.J. Fix, *An anysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, 1973.
- [3] R. Adams, *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [4] Haïm Brézis, *Análisis Funcional*. Alianza, España, 1984.
- [5] S. C. Brenner and L.R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [6] Pavel Šolín, *Partial Differential Equations and the Finite Element Method*. John Wiley & Sons, Ltd 2006.
- [7] B Dayanad Reddy, *Functional Analysis and Boundary value Problems: an Introductory Treatment*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.
- [8] P.G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, 1978.
- [9] J.T. Oden and J.N. Reddy, *An introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.
- [10] Claes Johnson, *Numerical Solution of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge University Press. 1990.

- [11] E.B. Becker, G.F. Carey and J.T. Oden, *Finite Elements - An Introduction*. Prentice-Hall, vol. I, 1983.
- [12] J.T. Oden and G.F. Carey, *Finite Elements - Mathematical Aspects*. Prentice-Hall, vol. IV, 1983.
- [13] O.C. Zienkiewicz, *The finite Element Method*. McGraw-Hill, England, 1982.
- [14] P.E. Lewis and J.P. Ward, *The finite Element Method*. Addison Wesley, 1991.
- [15] Miguel Cerrolaza, *El método de los elementos finitos para ingeniería y ciencias aplicadas: teoría y programación*. CDCH, Universidad Central de Venezuela, 2007.
- [16] Béatrice Rivière, *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equation*. SIAM, 2008.
- [17] B.Q. Li, *Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer*. Springer-Verlag, 2006.
- [18] Jean Donea and Antonio Huerta, *Finite element Methods for flow Problems*. John Wiley & Sons Ltd., 2003.
- [19] Vidal Thomée, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Lecture Notes in Mathematics 1054. Springer-Verlag, 1984.
- [20] Mark Ainsworth and J.T. Oden, *A Posteriori Error Estimation In Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000.
- [21] W. Bangerth and R. Rannacher, *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations*. Lecture in Mathematics. Birkhäuser Verlag, 2003.
- [22] J. Céa, *Approximation variationnelle des problèmes aux limites*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **14**, 345-444, 1964.
- [23] G. Birkhoff, M.H. Schultz, R.S. Varga, *Piecewise Hermite interpolation in one and two variables with application to partial differential equations*. Numer Math. **11**, 232-256, 1968.

- [24] Biswa Nath Datta, *Numerical Linear Algebra and Applications*. Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California, 1995.
- [25] M.R. Hestenes and E.L. Stiefel, *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*. J. Res. Natl. Bur. Stand., Section B, 49: 409-436, 1952.
- [26] J.K. Reid, *On the method of conjugate gradients for the solution of large sparse systems of linear equations*. Large Sparse Sets of Linear Equations, Academic Press, 1971.
- [27] Eugene Isaacson and Herbert Bishop Keller, *Analysis of Numerical Methods*. Dover Publications, INC., New York, 1966.
- [28] Brígida Molina y Marcos Raydán, *Métodos Iterativos tipo Krylov para Sistemas Lineales*. Escuela Venezolana de Matemáticas, 2004.
- [29] I.C. Taig and R.I. Kerr, *Some problems in the discrete element representation of aircraft structures*. Matrix Methods of Structureal Analysis, (Ed. B.M. Fraeijs of Veubeke), Pergamon Press, 1964.
- [30] B.M. Irons, *Numerical integration applied to finite element method*. Conf. Use of Digital Computer in Struct. Eng., Univ. Newcastle, 1966.
- [31] F.B. Hildebrand, *Introduction to Numerical Analysis*. Dover Publications, INC. New York, 1987.
- [32] H.G. Heuser, *Functional Analysis*. John Wiley & Sons, 1982.
- [33] Earl W. Swokowski, *Cálculo con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamericano, México, 1989.
- [34] J.H. Argyris, I. Fried, and D.W. Scharpf, *The TET 20 and the TEA 8 elements for the matrix displacement method*. Aero. J., 72, 618-625, 1968.

- [35] P. Silvester, *Higher order polynomial triangular finite elements for potential problems*. Int. J. Eng. Sci., 7, 849-861, 1969.
- [36] R.L.Taylor, *On completeness of shape functions for finite element analysis*. Int. J. Num. Meth. Eng., 4, 17-22, 1972.
- [37] Mark Ainsworth, *Essential boundary conditions and multi-point constraints in finite element analysis*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 190, 6323-6339, 2001.

## **Asociación Matemática Venezolana**

Presidente: Rafael Sánchez Lamonedá

### **Consejo Directivo Nacional**

Rafael Sánchez Lamonedá  
Capítulo Capital

Sergio Muñoz  
Capítulo de Centro Occidente

Oswaldo Araujo  
Capítulo de Los Andes

Said Kas-Danouche  
Capítulo de Oriente

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela

Asociación Matemática Venezolana  
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela  
<http://amv.ivic.gob.ve>

# **Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas**

## **Consejo Directivo**

Director

Eloy Sira

Subdirector

Alberto Quintero

Representantes del Ministerio del Poder Popular para Ciencia,  
Tecnología e Industrias Intermedias

Guillermo Barreto

Juan Luis Cabrera

Representante del Ministerio del Poder Popular para la  
Educación Superior

Prudencio Chacón

Representantes Laborales

Jesús Acosta

María Celia Sulbarán (suplente)

Evencia Bernal (suplente)

Gerencia General

Lira Parra

## **Comisión Editorial**

Coordinador

Eloy Sira

Horacio Biord

Erika Wagner

Rafael Gassón

Jesús Eloy Conde

Héctor Suárez

Lucía Antillano

María Teresa Curcio

Pamela Navarro



Gobierno **Bolivariano**  
de Venezuela

Ministerio del Poder Popular  
para **Ciencia, Tecnología e Industrias Intermedias**

