

XXIV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA-VENEZUELA 2011

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA ESPECTRAL DE DIGRAFOS

Juan Rada y Alfredo Ríos

MÉRIDA, VENEZUELA, 4 AL 10 DE SEPTIEMBRE DE 2011

XXIV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA – VENEZUELA 2011

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA ESPECTRAL
DE DIGRAFOS

Juan Rada
Alfredo J. Ríos

Departamento de Matemáticas
Universidad Simón Bolívar

juanrada@usb.ve alfrios@usb.ve

MÉRIDA, VENEZUELA, 4 AL 10 DE SEPTIEMBRE DE 2011

XXIV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las siguientes instituciones: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Universidad de Oriente y Universidad Simón Bolívar, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana.

La XXIV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS recibió apoyo financiero de: Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, Banco Central de Venezuela, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), Fundacite Mérida, Unión Matemática de América Latina y el Caribe, y CIMPA (Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées).

2010 Mathematics Subject Classification: 15A18, 05C50

©Ediciones IVIC

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

RIF: G-20004206-0

Introducción a la Teoría Espectral de Digrafos

Juan Rada y Alfredo J. Ríos

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas

Preprensa e impresión: Gráficas Lauki C. A.

Depósito legal If66020115102607

ISBN 978-980-261-130-0

Caracas, Venezuela

2011

Índice general

Introducción	v
1. Aspectos de la teoría de matrices	1
1.1. Matrices hermitianas	1
1.2. Normas matriciales y el radio espectral	10
1.3. Matrices positivas	20
1.4. Matrices no-negativas	26
1.5. Matrices primitivas	33
2. Teoría espectral de digrafos	35
2.1. Digrafos	35
2.2. Espectro de un digrafo	42
2.3. Espectro de algunos digrafos especiales	51
2.4. Cotas para el radio espectral de un digrafo	62
2.5. Digrafos con pocos autovalores	64
3. Energía de un digrafo	75
3.1. Energía de un digrafo	75
3.2. Cotas para la energía de un digrafo	84
3.3. Energía de digrafos normales	89
3.4. Digrafos equienergéticos	96

Introducción

El objetivo de este curso es estudiar la teoría de digrafos usando técnicas del álgebra lineal. La idea general consiste en asociar a un digrafo una matriz, luego usando resultados del álgebra lineal deducir teoremas sobre la estructura del digrafo. El área de las matemáticas que estudia esta conexión entre digrafos y matrices recibe el nombre de *teoría espectral de digrafos*.

La teoría espectral de *grafos* es un tema dentro de las matemáticas de mucha riqueza que ha sido bien desarrollado y sigue siendo un fuerte tema de investigación ([1],[2],[7],[8],[9] y [15]). Sin embargo, la teoría espectral de digrafos no ha sido tan desarrollada. Recientemente, R. Brualdi publicó el artículo *Spectra of digraphs* [3], donde presenta una puesta al día sobre la teoría espectral de digrafos, incluyendo algunos resultados clásicos importantes.

Existen varias matrices que se pueden asociar de manera natural a un digrafo, como por ejemplo, la matriz de adyacencia o la matriz laplaciana, quizás las dos más importantes. Nuestro interés en este curso es la matriz de adyacencia. Si D es un digrafo con n vértices, etiquetados por v_1, \dots, v_n , entonces la matriz de adyacencia de D , denotado por $A = A(D)$, es la matriz de tamaño $n \times n$ cuya entrada ij viene dada por

$$[A]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe un arco de } v_i \text{ a } v_j, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Como la matriz de adyacencia de un grafo G es una matriz simétrica real, entonces los autovalores son números reales. Así, la teoría espectral de grafos se basa fuertemente en la teoría de matrices hermitianas, por ejemplo, el Teorema de Courant-Fischer o el Teorema de los autovalores entrelazados, tema que tratamos en la Sección 1.1 del Capítulo 1.

En general, la matriz de adyacencia de un digrafo es una matriz no-simétrica y, en consecuencia, los autovalores pueden ser números complejos. Todavía en este caso tenemos a nuestra disposición la teoría de matrices no-negativas, donde el radio espectral, introducido en la Sección 1.2, juega un papel fundamental. Una ilustración de este hecho aparece en la elegante teoría de Perron-Frobenius que comenzamos a desarrollar a partir de la Sección 1.3 y que además, tiene

múltiples aplicaciones en probabilidades, sistemas dinámicos, economía e incluso en los motores de búsqueda de internet.

Como mencionamos antes, uno de los problemas fundamentales es obtener información estructural de un digrafo a partir del estudio algebraico de las matrices asociadas. Esto lo ilustraremos a lo largo del Capítulo 2. Un ejemplo de este hecho viene dado a través de la matriz potencia de la matriz de adyacencia, que tiene conexión directa con el número de caminos del digrafo. Como consecuencia, se obtiene una relación interesante entre los momentos espectrales de un digrafo con el número de caminos cerrados que el digrafo posee. Otra ilustración importante viene dada por el Teorema de Sachs, donde se establece una conexión entre los coeficientes del polinomio característico y la estructura cíclica del digrafo.

Además, estudiaremos en este capítulo el polinomio característico de digrafos que se obtienen a partir de operaciones bien conocidas entre digrafos, y también discutiremos el espectro de digrafos que aparecen frecuentemente en la literatura, como son por ejemplo, los digrafos circulantes, regulares, fuertemente regulares o bipartitos (Sección 2.3).

El origen de la teoría espectral de grafos la podemos ubicar en el artículo de E. Hückel del año 1931 en la química cuántica [23], y el célebre artículo matemático de Collatz y Sinogowitz [5] del año 1957. Más tarde se reconoció que las dos teorías eran esencialmente las mismas. El Teorema de Collatz y Sinogowitz establece que si G es un grafo con m aristas y n vértices, entonces el radio espectral $\rho(G)$ de G satisface la desigualdad $\rho(G) \geq \frac{2m}{n}$. Más aún, la igualdad se satisface si, y sólo si, G es un grafo $\frac{2m}{n}$ -regular. Este resultado fue generalizado para digrafos y será el contenido de la Sección 2.4. Básicamente lo que demostramos es que el radio espectral de un digrafo D satisface la desigualdad $\rho(D) \geq \frac{c_2}{n}$, donde c_2 es el número de caminos cerrados de longitud 2, y la igualdad ocurre cuando D es el digrafo simétrico asociado a un grafo $\frac{c_2}{n}$ -regular [16]. Si además el digrafo es normal, es decir, la matriz de adyacencia es normal, entonces la cota mejora sustancialmente sustituyendo c_2 por a , el número de arcos de D [36].

El estudio de los grafos con pocos autovalores fue propuesto por M. Doob [10] en el año 1970. En ese artículo, Doob caracteriza los grafos que poseen hasta 3 autovalores diferentes. Este problema se planteó para digrafos en general en [30] y lo desarrollamos en la Sección 2.5. Es una consecuencia inmediata del Teorema de Sachs que un digrafo tiene un sólo autovalor si, y sólo si, el digrafo es acíclico. Surge naturalmente la pregunta: ¿cuáles digrafos tienen exactamente dos autovalores diferentes? Estos resultan ser, en esencia, sumas directas de digrafos completos.

El caso de tres autovalores diferentes es mucho más complicado, aún en el caso de digrafos bipartitos. La diferencia con el caso simétrico radica en que el polinomio minimal de un digrafo bipartito con tres autovalores puede tener

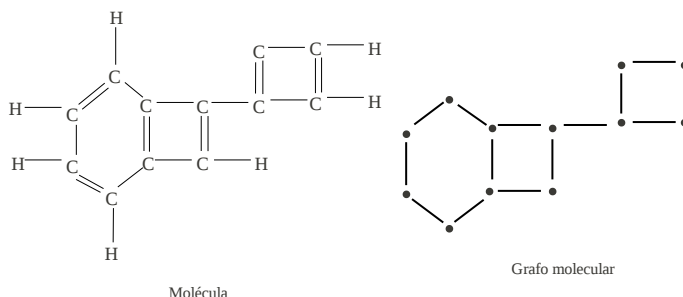


Figura 1: Grafo Molecular

el grado muy grande, de hecho, puede ser igual al grado del polinomio característico (los llamados digrafos no-derogatorios). Sin embargo, presentamos una caracterización de los digrafos bipartitos con tres autovalores, en términos de su espectro, lo que nos permite construir familias infinitas de digrafos en esta clase.

Por último, damos una aplicación en el Capítulo 3 de la teoría espectral de digrafos a la energía. La energía de un *grafo* G se define como

$$E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores reales del grafo G . El concepto de la energía tiene una motivación química. A saber, para aquellos grafos G que en la teoría de Hückel representan el esqueleto carbón-átomo de algún hidrocarburo conjugado (ver la Figura 1), $E(G)$ está relacionado con la energía π -electrón total. Detalles sobre este tema aparecen en el libro [19].

En el año 1978 [18], I. Gutman propuso que el invariante E , tal como se definió antes, se considerara para todos los grafos, independientemente de sus posibles aplicaciones a la química. Esto motivó a muchos investigadores a estudiar las propiedades matemáticas de la energía, algunas de valiosa aplicación a la química y otras de interés principalmente matemático (para una revisión sobre la literatura reciente sobre la energía, referimos a [20]).

Una de las fórmulas fundamentales en la teoría de la energía es la fórmula integral de Coulson, que expresa la energía de un grafo en términos del polinomio característico del grafo. En [31], la fórmula integral de Coulson se generalizó a

digrafos:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(n - \frac{ix\Phi'_D(ix)}{\Phi_D(ix)} \right) dx = \sum_{i=1}^n |\operatorname{Re} z_i|$$

donde z_1, \dots, z_n son los (posiblemente complejos) autovalores del digrafo D y $\operatorname{Re} z_i$ denota la parte real de z_i . En consecuencia, el concepto de la energía fue naturalmente extendido a digrafos como

$$e(D) = \sum_{i=1}^n |\operatorname{Re} z_i|$$

En el Capítulo 3 hacemos una puesta al día sobre el estudio de las propiedades matemáticas de la energía de un digrafo ([16],[26],[31],[34],[35] y [36]).

Algunos comentarios sobre la notación que usaremos a lo largo de estas notas. Denotaremos por $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ al espacio de las matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en el cuerpo \mathbb{F} . Usualmente haremos $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, el cuerpo de los números complejos o $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, el cuerpo de los números reales. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, entonces la entrada ij de A la denotamos por $[A]_{ij}$ o a veces simplemente por a_{ij} . También usaremos la notación $(A)_{i*}$ y $(A)_{*j}$, para denotar la fila i y la columna j de A , respectivamente.

El espacio \mathbb{C}^n representa el espacio de las n -uplas $z = (z_1, \dots, z_n)^\top$, donde $z_i \in \mathbb{C}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Trabajaremos con las normas usuales sobre \mathbb{C}^n :

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^n |z_i|, \quad \|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} \quad \text{y} \quad \|z\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|,$$

donde $|z|$ es el módulo del número complejo z . El producto interno sobre \mathbb{C}^n es

$$\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i$$

donde $w = (w_1, \dots, w_n)^\top$ y \bar{w}_i es el conjugado de w_i .

Para más detalles sobre la teoría de matrices, hacemos referencia a los libros [28, 22].

Capítulo 1

Algunos aspectos de la teoría de matrices

1.1. Matrices hermitianas

Nuestro objetivo en esta primera sección es estudiar las matrices normales y, en particular, las matrices hermitianas. Demostraremos el célebre Teorema de Courant-Fischer sobre los autovalores de una matriz hermitiana y deduciremos, a partir de este, el Teorema de los autovalores entrelazados.

Comenzamos recordando que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, entonces la matriz conjugada de A , \overline{A} , se define por $[\overline{A}]_{ij} = \overline{[A]_{ij}}$. La traspuesta conjugada, denotada por A^* , se define como $A^* = \overline{A}^\top$.

Definición 1.1.1. *Una matriz $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es unitaria si $U^*U = I_n$.*

Las matrices unitarias están caracterizadas en la siguiente Proposición.

Proposición 1.1.2. *Sea $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. U es unitaria;
2. U es invertible y $U^{-1} = U^*$;
3. U^* es unitaria;
4. Las columnas de U forman una base ortonormal de \mathbb{C}^n ;
5. Las filas de U forman una base ortonormal de \mathbb{C}^n ;
6. $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Si U es unitaria, entonces $U^*U = I_n$. Esto implica que $UU^* = I_n$ (vea el Ejercicio 1.1.3). En consecuencia, U y U^* son invertibles y $U^* = U^{-1}$.

$2 \Rightarrow 1$. Es claro.

$1 \Leftrightarrow 3$. Esto es consecuencia de $U^{**} = U$ y la equivalencia $U^*U = I_n$ si, y sólo si, $UU^* = I_n$.

$1 \Leftrightarrow 4$. El elemento ij de la matriz U^*U es

$$[U^*U]_{ij} = \sum_k [U^*]_{ik} [U]_{kj} = \sum_k [U]_{kj} [\overline{U}]_{ki} = \langle U_{*j}, U_{*i} \rangle$$

Por lo tanto, $U^*U = I_n$ si, y sólo si, $\langle U_{*j}, U_{*i} \rangle = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es el delta de Kronecker.

$3 \Leftrightarrow 5$ Es similar al argumento anterior.

$1 \Rightarrow 6$. $\|Ux\|_2^2 = (Ux)^*(Ux) = (x^*U^*)(Ux) = x^*x = \|x\|_2^2$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

$6 \Rightarrow 1$. Supongamos que

$$x^*U^*Ux = x^*x \text{ para todo } x \in \mathbb{C}^n \quad (1.1)$$

Llamemos u_i a la columna i de U . Entonces, colocando $x = e_i$ en (1.1), obtenemos que $u_i^*u_i = 1$ para todo i . Si ahora colocamos $x = e_j + e_k$ ($j \neq k$) en (1.1), entonces obtenemos $0 = u_j^*u_k + u_k^*u_j = 2\text{Re}(u_j^*u_k)$. Por último, colocamos $x = e_j + ie_k$ en (1.1) para obtener $0 = 2\text{Im}(u_j^*u_k)$. Por lo tanto, $u_j^*u_k = 0$ para todo $j \neq k$, o equivalentemente, $U^*U = I_n$. \square

Ejercicio 1.1.3. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Demuestre que si $AB = I_n$, entonces $BA = I_n$.

Ejercicio 1.1.4. Si $W \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ es unitaria, entonces $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es unitaria.

Ejercicio 1.1.5. Si $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son unitarias, entonces UV es unitaria.

Definición 1.1.6. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Decimos que la matriz A es unitariamente equivalente a la matriz B si existe una matriz unitaria $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $B = U^*AU$.

Ejercicio 1.1.7. La relación “equivalencia unitaria” es una relación de equivalencia sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Uno de los resultados más importantes en la teoría elemental de matrices establece que cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es unitariamente equivalente a una matriz triangular superior que tiene los autovalores de A en la diagonal.

Teorema 1.1.8. (Schur) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces existe una matriz unitaria $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $U^*AU = T$, donde T es una matriz triangular superior.

Demostración. La demostración la haremos por inducción sobre n , siendo el caso $n = 1$ trivial. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $x \in \mathbb{C}^n$ un autovector de A asociado al autovalor λ y supongamos que $\|x\|_2 = 1$. Extendemos este vector a una base ortonormal x, y_2, \dots, y_n de \mathbb{C}^n . Consideremos la matriz $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que tiene primera columna a x y para $2 \leq j \leq n$, la columna j de V es y_j . Entonces

$$(V^*AV)_{*1} = (V^*A)V_{*1} = V^*Ax = \lambda V^*x = (\lambda, 0, \dots, 0)^\top$$

y, por lo tanto,

$$V^*AV = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

donde $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Por hipótesis de inducción, existe una matriz unitaria $W \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ y una matriz triangular superior $S \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, tal que

$$W^*BW = S$$

Construyamos la matriz unitaria $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces VU es unitaria y

$$(VU)^*A(VU) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

es una matriz triangular superior. □

Notamos que, en el Teorema de Schur, ni la matriz unitaria U ni la matriz triangular T son únicas, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.9. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Entonces

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad I_n^{-1}AI_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

donde $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Nos planteamos ahora el problema de determinar cuando una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es unitariamente diagonalizable, es decir, unitariamente equivalente a una matriz diagonal.

Definición 1.1.10. Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es normal si $AA^* = A^*A$.

Ejemplo 1.1.11. Veamos algunos ejemplos de matrices normales:

1. Toda matriz unitaria es normal;
2. AA^* y A^*A son matrices normales, para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Ejercicio 1.1.12. Demuestre que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es normal si, y sólo si, toda matriz que es unitariamente equivalente a A es normal.

Proposición 1.1.13. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. A es unitariamente diagonalizable;
2. A es normal;
3. $\sum_{i,j} |[A]_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$;
4. Existe una base ortonormal de \mathbb{C}^n formada por autovectores de A .

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es unitariamente equivalente a la matriz diagonal D , entonces $U^*AU = D$, donde U es una matriz unitaria. Luego $A = UDU^*$ y, en consecuencia,

$$AA^* = (UDU^*)(UD^*U^*) = U(DD^*)U^*$$

y

$$A^*A = (UD^*U^*)(UDU^*) = U(D^*D)U^*$$

Como $DD^* = D^*D$ concluimos que A es normal.

$2 \Rightarrow 1$. Por el Teorema de Schur existe una matriz unitaria U y una matriz triangular superior T tal que

$$U^*AU = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A . Como U es unitaria y A es normal entonces es fácil ver que T es normal. Por lo tanto,

$$(T^*T)_{11} = \overline{\lambda_1}\lambda_1 = (TT^*)_{11} = \overline{\lambda_1}\lambda_1 + \overline{t_{12}}t_{12} + \cdots + \overline{t_{1n}}t_{1n}$$

En consecuencia,

$$t_{12} = \cdots = t_{1n} = 0$$

Análogamente,

$$(T^*T)_{22} = \overline{\lambda_2}\lambda_2 = (TT^*)_{22} = \overline{\lambda_2}\lambda_2 + \overline{t_{23}}t_{23} + \cdots + \overline{t_{2n}}t_{2n}$$

y por lo tanto,

$$t_{23} = \cdots = t_{2n} = 0$$

Continuando así concluimos que $T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

1 \Rightarrow 3. Supongamos que $D = U^*AU$, donde U es unitaria y D diagonal. Entonces usando el hecho de que la traza es invariante por semejanza obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 &= \text{tr}(D^*D) = \text{tr}(U^*A^*UU^*AU) \\ &= \text{tr}(U^*A^*AU) = \text{tr}(A^*A) = \sum_{i,j} \left| [A]_{ij} \right|^2 \end{aligned}$$

3 \Rightarrow 1. Sabemos por el Teorema de Schur que existe una matriz unitaria U tal que $U^*AU = T$, donde T tiene la forma dada en (1.2). Luego, $A = UTU^*$ y $A^* = UT^*U^*$ y, por lo tanto, $AA^* = UTT^*U^*$. Se deduce que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 &= \sum_{i,j} \left| [A]_{ij} \right|^2 = \text{tr}(AA^*) = \text{tr}(TT^*) \\ &= \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 + \sum_{i < j} |t_{ij}|^2 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\sum_{i < j} |t_{ij}|^2 = 0$$

y así, $t_{ij} = 0$ para todo $i < j$. Esto demuestra que T es diagonal.

1 \Rightarrow 4. Supongamos que $AU = UD$, donde $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Por el Teorema 1.1.2, las columnas de U forman una base ortonormal de \mathbb{C}^n . Además,

$$A[U]_{*j} = [AU]_{*j} = [UD]_{*j} = U[D]_{*j} = U\lambda_j e_j = \lambda_j [U]_{*j}$$

lo que demuestra que las columnas de U son autovectores de A .

4 \Rightarrow 1. Sea $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de \mathbb{C}^n formada por autovectores de A . Consideremos la matriz U que tiene como columna j a u_j . Entonces

$$(U^*AU)_{*j} = (U^*A)u_j = U^*\lambda_j u_j = \lambda_j e_j$$

Así, $U^*AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y A es unitariamente diagonalizable. \square

Ejercicio 1.1.14. Si B es una matriz normal, entonces

$$|x^* B x| \leq \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es un autovalor de } B\} \cdot \|x\|_2^2$$

Definición 1.1.15. Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es hermitiana si $A^* = A$.

Claramente, toda matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es hermitiana.

Ejemplo 1.1.16. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es normal pero no es unitaria ni hermitiana.

Proposición 1.1.17. Los autovalores de una matriz hermitiana son números reales.

Demostración. Sea A una matriz hermitiana y λ un autovalor de A . Sea $x \neq 0$ un autovector asociado. Como $Ax = \lambda x$, entonces $x^* A = \bar{\lambda} x^*$. Multiplicamos por x^* a la izquierda de la primera relación y por x a la derecha en la segunda, para obtener

$$\begin{aligned} x^* A x &= \lambda x^* x \\ x^* A x &= \bar{\lambda} x^* x \end{aligned}$$

Se deduce que $\lambda x^* x = \bar{\lambda} x^* x$ y como $x \neq 0$, $\lambda = \bar{\lambda}$. Es decir, λ es un número real. \square

Como los autovalores de una matriz hermitiana $A \in M_n(\mathbb{C})$ son números reales, entonces los podemos ordenar de forma no-decreciente

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \tag{1.3}$$

Teorema 1.1.18. (Rayleigh-Ritz) Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz hermitiana con autovalores ordenados como en (1.3). Entonces

1. $\lambda_n = \max_{\|x\|_2=1} x^* A x$;
2. $\lambda_1 = \min_{\|x\|_2=1} x^* A x$.

Demostración. Como A es hermitiana, por la Proposición 1.1.13, existe una matriz unitaria U tal que $A = U D U^*$, donde $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Luego, si $x \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$\begin{aligned} x^* A x &= x^* U D U^* x = (U^* x)^* D (U^* x) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i |(U^* x)_i|^2 \end{aligned}$$

Así,

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^n |(U^*x)_i|^2 \leq x^*Ax \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n |(U^*x)_i|^2$$

Ahora, como U es unitaria,

$$\sum_{i=1}^n |(U^*x)_i|^2 = \|U^*x\|_2^2 = \|x\|_2^2$$

y, por lo tanto,

$$\lambda_1 \|x\|_2^2 \leq x^*Ax \leq \lambda_n \|x\|_2^2$$

Luego

$$\max_{\|x\|_2=1} x^*Ax \leq \lambda_n \text{ y } \lambda_1 \leq \min_{\|x\|_2=1} x^*Ax.$$

Sea u un autovector asociado a λ_n tal que $\|u\|_2 = 1$. Entonces

$$\max_{\|x\|_2=1} x^*Ax \geq u^*Au = u^*(\lambda_n u) = \lambda_n$$

Similarmente, si v es un autovector asociado a λ_1 tal que $\|v\|_2 = 1$, entonces

$$\min_{\|x\|_2=1} x^*Ax \leq v^*Av = v^*(\lambda_1 v) = \lambda_1.$$

□

Es natural ahora preguntarse si hay una expresión similar para los autovalores intermedios en (1.3) de una matriz hermitiana A . Denotemos por S_k al conjunto de todos los subespacios de \mathbb{C}^n con dimensión k .

Teorema 1.1.19. (*Courant-Fischer*) Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz hermitiana con autovalores ordenados como en (1.3). Entonces

1. $\lambda_k = \min_{W \in S_k} \left(\max_{\substack{x \in W \\ \|x\|_2=1}} x^*Ax \right);$
2. $\lambda_k = \max_{W \in S_{n-k+1}} \left(\min_{\substack{x \in W \\ \|x\|_2=1}} x^*Ax \right).$

Demostración. Comenzamos demostrando (1.). Como A es hermitiana, existe una matriz unitaria U tal que $U^*AU = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Luego es suficiente demostrar el resultado para $A = D$. Sea W un subespacio de \mathbb{C}^n con dimensión k y $T = \text{gen}(e_k, \dots, e_n) \subseteq \mathbb{C}^n$. Como

$$\dim(W + T) = \dim(W) + \dim(T) - \dim(W \cap T)$$

es claro que $W \cap T \neq \langle 0 \rangle$. Sea $y \in W \cap T$ tal que $\|y\|_2 = 1$, digamos $y = (0, \dots, 0, y_k, \dots, y_n)^\top$. Entonces

$$y^* D y = \sum_{j=k}^n \lambda_j |y_j|^2 \geq \lambda_k \sum_{j=k}^n |y_j|^2 = \lambda_k$$

Por lo tanto

$$\max_{\substack{x \in W \\ \|x\|_2=1}} x^* D x \geq \max_{\substack{y \in W \cap T \\ \|y\|_2=1}} y^* D y \geq \lambda_k,$$

esto para cualquier subespacio W de \mathbb{C}^n de dimensión k . En consecuencia,

$$\min_{W \in S_k} \left(\max_{\substack{x \in W \\ \|x\|_2=1}} x^* D x \right) \geq \lambda_k$$

Por otra parte, consideremos el subespacio $T' = \text{gen}(e_1, \dots, e_k) \subseteq \mathbb{C}^n$. Para todo $z = (z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)^\top \in T'$ tal que $\|z\|_2 = 1$ tenemos

$$z^* D z = \sum_{j=1}^k \lambda_j |z_j|^2 \leq \lambda_k \sum_{j=1}^k |z_j|^2 = \lambda_k$$

Por lo tanto,

$$\min_{W \in S_k} \left(\max_{\substack{x \in W \\ \|x\|_2=1}} x^* D x \right) \leq \max_{\substack{z \in T' \\ \|z\|_2=1}} z^* D z \leq \lambda_k.$$

El argumento para la segunda parte del Teorema es similar. \square

Ejercicio 1.1.20. Demuestre la segunda parte del Teorema 1.1.19.

Observamos que tomando $k = n$ en la fórmula min-max y tomando $k = 1$ en la fórmula max-min del Teorema 1.1.19, recuperamos el Teorema de Rayleigh-Ritz. En ese caso $S_n = \mathbb{C}^n$.

Una aplicación importante del Teorema de Courant-Fischer es el Teorema de los autovalores entrelazados.

Ejercicio 1.1.21. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $B = \begin{pmatrix} A & w \\ w^* & \alpha \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{C})$, donde $w \in \mathbb{C}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces B es hermitiana si, y sólo si, A es hermitiana.

Proposición 1.1.22. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz hermitiana con autovalores ordenados como en (1.3). Sea $B = \begin{pmatrix} A & w \\ w^* & \alpha \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ con autovalores

$$\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n \leq \beta_{n+1}$$

donde $w \in \mathbb{C}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\beta_1 \leq \lambda_1 \leq \beta_2 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \beta_n \leq \lambda_n \leq \beta_{n+1}$$

Demostración. Sea U una matriz unitaria tal que

$$U^*AU = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Sea $V = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{C})$. Por la Proposición 1.1.2, V es una matriz unitaria. Por lo tanto,

$$\tilde{B} = V^*BV = \begin{pmatrix} \Lambda & y \\ y^* & \alpha \end{pmatrix},$$

donde $y = U^*w$. Sea $x \in \mathcal{L} = \text{gen}\{e_1, \dots, e_i\} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\|x\|_2 = 1$. Entonces $x = (x_1, \dots, x_i, 0, \dots, 0)^\top$ y

$$x^* \tilde{B}x = \sum_{j=1}^i \lambda_j |x_j|^2 \leq \lambda_i \sum_{j=1}^i |x_j|^2 = \lambda_i$$

Ahora aplicando el Teorema de Courant-Fischer a la matriz hermitiana \tilde{B} obtenemos

$$\beta_i = \min_{W \in \mathcal{S}_i} \left(\max_{\substack{x \in W \\ \|x\|_2=1}} x^* \tilde{B}x \right) \leq \max_{\substack{x \in \mathcal{L} \\ \|x\|_2=1}} x^* \tilde{B}x \leq \lambda_i$$

por otro lado, sea $z = \mathcal{T} = \text{gen}\{e_i, \dots, e_n\} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\|z\|_2 = 1$. Entonces $z = (0, \dots, 0, z_i, \dots, z_n, 0)^\top$ y

$$z^* \tilde{B}z = \sum_{j=i}^n \lambda_j |z_j|^2 \geq \lambda_i \sum_{j=i}^n |z_j|^2 = \lambda_i$$

De nuevo por el Teorema de Courant-Fischer aplicado a la matriz \tilde{B} deducimos

$$\beta_{i+1} = \max_{W \in \mathcal{S}_{n-i+1}} \left(\min_{\substack{x \in W \\ \|x\|_2=1}} x^* \tilde{B}x \right) \geq \min_{\substack{x \in \mathcal{T} \\ \|x\|_2=1}} x^* \tilde{B}x \geq \lambda_i$$

□

Ahora podemos demostrar el Teorema de autovalores entrelazados:

Corolario 1.1.23. Sea $B \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ una matriz hermitiana con autovalores ordenados

$$\beta_1 \leq \beta_2 \leq \cdots \leq \beta_n \leq \beta_{n+1}$$

y $A \in M_n(\mathbb{C})$ una submatriz principal de B con autovalores

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

Entonces

$$\beta_1 \leq \lambda_1 \leq \beta_2 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \beta_n \leq \lambda_n \leq \beta_{n+1}$$

Demostración. Como A es una submatriz principal de B , entonces existe una matriz de permutación P tal que

$$P^T B P = \begin{pmatrix} A & w \\ w^* & \alpha \end{pmatrix}$$

Ahora aplicamos el Teorema anterior. □

1.2. Normas matriciales y el radio espectral

Las normas matriciales son esenciales para estudiar las series de potencias de las matrices, que aplicaremos luego para encontrar cotas del radio espectral de una matriz.

Definición 1.2.1. Una función $\|\cdot\| : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma matricial si para todo $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ se satisfacen los siguientes axiomas:

1. $\|A\| \geq 0$ y $\|A\| = 0$ si, y sólo si, $A = 0$;
2. $\|cA\| = |c| \|A\|$ para todo $c \in \mathbb{C}$;
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
4. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

En otras palabras $\|\cdot\| : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma vectorial sobre $M_n(\mathbb{C})$ en el sentido usual, que además es submultiplicativa (condición 4).

Ejercicio 1.2.2. Sea $\|\cdot\| : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ una norma matricial y $U \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz invertible. Entonces $\|\cdot\|_* : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|B\|_* = \|U^{-1} B U\|$, para todo $B \in M_n(\mathbb{C})$ es una norma matricial.

Consideremos las normas vectoriales bien conocidas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ sobre el espacio vectorial $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$. Sabemos que satisfacen las tres primeras condiciones, pero ¿serán normas matriciales sobre $M_n(\mathbb{C})$?

Ejercicio 1.2.3. La norma $\|\cdot\|_1 : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$ es una norma matricial.

Ejercicio 1.2.4. La norma $\|\cdot\|_2 : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|A\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ es una norma matricial.

Ejercicio 1.2.5. La norma $\|\cdot\|_\infty : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$ no es una norma matricial.

Es posible construir normas matriciales sobre $M_n(\mathbb{C})$ a partir de normas vectoriales definidas sobre \mathbb{C}^n .

Proposición 1.2.6. Sea $\|\cdot\|$ una norma vectorial sobre \mathbb{C}^n . Entonces $|||\cdot||| : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$|||A||| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

es una norma matricial sobre $M_n(\mathbb{C})$ que satisface $\|Ax\| \leq |||A||| \|x\|$, para todo $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $x \in \mathbb{C}^n$.

Demostración. Como la función $\|Ax\|$ es continua en x y la bola unitaria $B = \{x \in \mathbb{C}^n : \|x\| = 1\}$ es compacta, entonces la función $|||\cdot||| : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $|||A||| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$, está bien definida.

1. Claramente $|||A||| \geq 0$ para todo $A \in M_n(\mathbb{C})$. Si $|||A||| = 0$, entonces $Ax = 0$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$ y así $A = 0$.

2. Sea $c \in \mathbb{C}$ y $A \in M_n(\mathbb{C})$. Entonces

$$|||cA||| = \max_{\|x\|=1} \|cAx\| = \max_{\|x\|=1} |c| \|Ax\| = |c| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |c| |||A|||$$

3. Si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, entonces

$$\begin{aligned} |||A+B||| &= \max_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax+Bx\| \\ &\leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = |||A||| + |||B||| \end{aligned}$$

Veamos ahora que $\|Ax\| \leq |||A||| \|x\|$, para todo $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $x \in \mathbb{C}^n$. El caso $x = 0$ es trivial. Si $x_0 \neq 0$, entonces

$$|||A||| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|}$$

4. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Existe $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tal que $\|x_0\| = 1$ y

$$\| \|AB\| \| = \|ABx_0\|$$

Entonces por lo anterior,

$$\| \|AB\| \| = \|ABx_0\| \leq \| \|A\| \| \|Bx_0\| \leq \| \|A\| \| \| \|B\| \| \|x_0\| = \| \|A\| \| \| \|B\| \|$$

□

La norma matricial $\| \cdot \| : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ introducida en la Proposición 1.2.6 se llama la norma matricial inducida por la norma vectorial $\| \cdot \|$.

Ejemplo 1.2.7. La norma matricial inducida por la norma vectorial $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ viene dada por

$$\| \|A\| \|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

para toda matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$. En efecto, para todo $x \in \mathbb{C}^n$ tenemos

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i A_{*i} \right\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \|x_i A_{*i}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|A_{*i}\|_1 \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \left(\max_k \|A_{*k}\|_1 \right) = \|x\|_1 \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\| \|A\| \|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \leq \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$. Para ver la desigualdad contraria, observamos que para todo $k = 1, \dots, n$ se tiene que

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \geq \|Ae_k\|_1 = \|A_{*k}\|_1$$

y, en consecuencia,

$$\| \|A\| \|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \geq \max_k \|A_{*k}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Ejemplo 1.2.8. La norma matricial inducida por la norma vectorial $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ viene dada por

$$\| \|A\| \|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

para toda matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij} x_j| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty \end{aligned}$$

Así,

$$\| \|A\| \|x\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Veamos ahora la otra desigualdad: podemos suponer que $A \neq 0$ y supongamos además que la fila $A_{k*} \neq 0$. Definamos el vector $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ por

$$z_i = \begin{cases} \overline{a_{ki}} / |a_{ki}| & \text{si } a_{ki} \neq 0 \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Es claro que $\|z\|_\infty = 1$, $a_{kj} z_j = |a_{kj}|$ para todo $j = 1, \dots, n$, y

$$\begin{aligned} \| \|A\| \|z\|_\infty &= \max_{\|z\|_\infty=1} \|Az\|_\infty \geq \|Az\|_\infty \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{kj} z_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| \end{aligned}$$

para todo $k = 1, \dots, n$. Luego

$$\| \|A\| \|z\|_\infty \geq \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{kj}|$$

Ejemplo 1.2.9. La norma matricial inducida por la norma vectorial $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ viene dada por

$$\| \|A\| \|z\|_2 = \sigma_1 := \max \left\{ \sqrt{\lambda} : \lambda \text{ es un autovalor de } A^*A \right\}$$

para todo $A \in M_n(\mathbb{C})$. Esta norma recibe el nombre de norma espectral.

Primeramente, observamos que si λ es un autovalor de A^*A , es decir, $A^*Az = \lambda z$, donde $z \neq 0$, entonces

$$\|Az\|_2^2 = (Az)^*Az = z^*A^*Az = \lambda \|z\|_2^2 \quad (1.4)$$

En particular, λ es un autovalor real no-negativo y σ_1 está bien definido. Por otra parte, teniendo en cuenta que A^*A es una matriz normal, por el Ejercicio 1.1.14 deducimos

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax)^* Ax = x^* (A^*A)x \leq \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es un autovalor de } A^*A\} \cdot \|x\|_2^2$$

En consecuencia,

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \leq \sigma_1$$

Por otro lado, supongamos que $A^*Az_0 = \sigma_1^2 z_0$, donde $z_0 \neq 0$ y $\|z_0\|_2 = 1$. Entonces por (1.4)

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \geq \|Az_0\|_2 = \sigma_1$$

Ejercicio 1.2.10. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Demuestre

1. $\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$;
2. $\|UAV\|_2 = \|A\|_2$ cuando U, V son matrices unitarias;
3. $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$.

Definición 1.2.11. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los autovalores de A . Entonces definimos el radio espectral de A , denotado por $\rho(A)$, como

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|.$$

En otras palabras, $\rho(A)$ es el radio del disco más pequeño en el plano complejo con centro en el origen, que contiene a todos los autovalores de A .

Una de las aplicaciones importantes de las normas matriciales es el estudio de las cotas del radio espectral de una matriz.

Ejercicio 1.2.12. Si A es una matriz normal, entonces $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Lema 1.2.13. Si $\|\cdot\|$ es cualquier norma matricial y $A \in M_n(\mathbb{C})$, entonces $\rho(A) \leq \|A\|$.

Demostración. Sea λ un autovalor de A para el cual $|\lambda| = \rho(A)$. Si $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$, consideramos la matriz $X \in M_n(\mathbb{C})$ que tiene en todas las columnas el autovector x . Entonces $AX = \lambda X$. Luego

$$|\lambda| \|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\| \|X\|$$

y así, $\rho(A) = |\lambda| \leq \|A\|$. □

La desigualdad anterior nos dice que $\rho(A)$ es una cota inferior del conjunto de valores posibles

$$\|A\|$$

. A continuación veremos que $\rho(A)$ es el ínfimo de este conjunto.

Proposición 1.2.14. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe una norma matricial $\|\cdot\|$ en $M_n(\mathbb{C})$ tal que*

$$\rho(A) \leq \|A\| < \rho(A) + \varepsilon$$

Demostración. Por el Teorema de Schur, existe una matriz unitaria U y una matriz triangular superior $\Delta = (d_{ij})$, donde $d_{ii} = \lambda_i$ son los autovalores de A , tal que $UAU^* = \Delta$. Consideremos la matriz diagonal $D_t = \text{diag}(t, t^2, t^3, \dots, t^n)$. Entonces

$$D_t \Delta D_t^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t^{-1}d_{12} & t^{-2}d_{13} & \cdots & t^{-n+1}d_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & t^{-1}d_{23} & \cdots & t^{-n+2}d_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & t^{-n+3}d_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t^{-1}d_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

es una matriz triangular superior. Entonces, para un $t > 0$ suficientemente grande, podemos asegurar que la suma de los valores absolutos de las entradas fuera de la diagonal de $D_t \Delta D_t^{-1}$ es menor que ε . En particular,

$$\|D_t \Delta D_t^{-1}\|_1 < \rho(A) + \varepsilon$$

para t suficientemente grande. Definamos la norma matricial $\|\cdot\|$ sobre $M_n(\mathbb{C})$ por

$$\|B\| = \|D_t U B U^* D_t^{-1}\|_1 = \left\| (U^* D_t^{-1})^{-1} B (U^* D_t^{-1}) \right\|_1$$

para todo $B \in M_n(\mathbb{C})$. Entonces para t suficientemente grande

$$\|A\| = \|D_t U (U^* \Delta U) U^* D_t^{-1}\|_1 = \|D_t \Delta D_t^{-1}\|_1 < \rho(A) + \varepsilon$$

Por el Lema 1.2.13, $\rho(A) \leq \|A\|$. □

Decimos que una sucesión de matrices $\{B_k\}_{k=1}^\infty \subseteq M_n(\mathbb{C})$ es *convergente* a la matriz $B \in M_n(\mathbb{C})$ en el caso en que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_{ij}^{(k)} = b_{ij}$$

para todo par $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, siendo

$$B_k = \left(b_{ij}^{(k)} \right) \quad \text{y} \quad B = (b_{ij}).$$

Si esto sucede, escribiremos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = B$$

Ejercicio 1.2.15. Sea $\{B_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ una sucesión de matrices. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = B$;
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|B_k - B\| = 0$ para alguna norma vectorial $\|\cdot\|$ sobre $M_n(\mathbb{C})$;
3. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|B_k - B\| = 0$ para toda norma vectorial $\|\cdot\|$ sobre $M_n(\mathbb{C})$.

Proposición 1.2.16. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ si, y sólo si, $\rho(A) < 1$.

Demostración. Supongamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$. Sea λ un autovalor de A tal que $|\lambda| = \rho(A)$. Existe un vector $x \neq 0$ tal que $Ax = \lambda x$ y, en consecuencia,

$$A^k x = \lambda^k x \quad \text{para todo } k.$$

Por lo tanto,

$$0 \leq |\lambda|^k \|x\|_{\infty} = \|\lambda^k x\|_{\infty} = \|A^k x\|_{\infty} \leq \|A^k\|_{\infty} \|x\|_{\infty}$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|_{\infty} = 0$ y así $\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda|^k = 0$. Es decir,

$$|\lambda| = \rho(A) < 1.$$

Por otro lado, si asumimos que el radio espectral de A es menor que 1, la Proposición 1.2.14 afirma que existe una norma matricial $\|\cdot\|$ tal que

$$\|A\| < \rho(A) + (1 - \rho(A)) = 1.$$

Por lo tanto,

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \rightarrow 0$$

cuando $k \rightarrow \infty$. En consecuencia, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$. □

Habiendo ya definido el concepto de convergencia de matrices, pasamos ahora a la convergencia de series de matrices de la manera natural: diremos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ es convergente si la sucesión de sumas parciales $S_n = \sum_{k=0}^n A^k$ es convergente.

Proposición 1.2.17. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y supongamos que $\rho(A) < 1$. Entonces $I - A$ es invertible y $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$.*

Demostración. Como $\rho(A) < 1$, entonces 1 no es un autovalor de A , es decir, $\det(I - A) \neq 0$ y, en consecuencia, $I - A$ es invertible. Veamos ahora qué forma tiene su matriz inversa.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $S_n = \sum_{k=0}^n A^k$. Entonces

$$(I - A)S_n = S_n - AS_n = I - A^{n+1}$$

Por lo tanto, $S_n = (I - A)^{-1}(I - A^{n+1})$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\rho(A) + \varepsilon < 1$. Por la Proposición 1.2.14, existe una norma matricial $\|\cdot\|$ sobre $M_n(\mathbb{C})$ tal que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon < 1$. Como

$$\begin{aligned} \|S_n - (I - A)^{-1}\| &= \|(I - A)^{-1}(I - A^{n+1}) - (I - A)^{-1}\| \\ &= \|(I - A)^{-1}[I - A^{n+1} - I]\| = \|(I - A)^{-1}[-A^{n+1}]\| \\ &\leq \|(I - A)^{-1}\| \|A\|^{n+1} \end{aligned}$$

y $\|A\| < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - (I - A)^{-1}\| = 0$. De esta forma,

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}.$$

□

Proposición 1.2.18. *Si $\|\cdot\|$ es cualquier norma matricial y $A \in M_n(\mathbb{C})$ entonces $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$.*

Demostración. Por el Lema 1.2.13 sabemos que para cualquier entero no-negativo k

$$\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq \|A^k\|$$

Luego $\rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$. Por otra parte, $\rho\left(\frac{1}{\rho(A) + \varepsilon}A\right) < 1$ para todo $\varepsilon > 0$. Por la Proposición 1.2.16,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\rho(A) + \varepsilon}A\right)^k = 0$$

lo que implica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A^k\|}{(\rho(A) + \varepsilon)^k} = 0$$

Por lo tanto, existe $K_\varepsilon > 0$ tal que $\frac{\|A^k\|}{(\rho(A)+\varepsilon)^k} < 1$ para todo $k \geq K_\varepsilon$. Así, $\|A^k\|^{\frac{1}{k}} < \rho(A) + \varepsilon$ para todo $k \geq K_\varepsilon$. Es decir

$$\rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}} < \rho(A) + \varepsilon \text{ para todo } k \geq K_\varepsilon$$

En otras palabras, dado $\varepsilon > 0$ existe $K_\varepsilon > 0$ tal que

$$\left| \|A^k\|^{\frac{1}{k}} - \rho(A) \right| = \left| \|A^k\|^{\frac{1}{k}} - \rho(A) \right| < \varepsilon$$

si $k \geq K_\varepsilon$. Se sigue de aquí que $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$. \square

Definición 1.2.19. Dadas las matrices $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, decimos que A es no-negativa, denotado por $A \geq 0$, si $[A]_{ij} \geq 0$ para todo i, j . Decimos que A es positiva, denotado por $A > 0$, si $[A]_{ij} > 0$ para todo i, j . Escribimos $A \geq B$ si $A - B \geq 0$ y $A > B$ si $A - B > 0$.

Las definiciones invertidas \leq y $<$ son similares. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ entonces $|A|$ denota la matriz tal que

$$[|A|]_{ij} = \left| [A]_{ij} \right|$$

para todo i, j . Claramente, $|A|$ es una matriz no-negativa.

Ejercicio 1.2.20. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Demuestre:

1. $|AB| \leq |A| |B|$;
2. $|A^k| \leq |A|^k$ para todo entero no-negativo k ;
3. Si $0 \leq A \leq B$ entonces $0 \leq A^k \leq B^k$ para todo entero no-negativo k ;
4. Si $|A| \leq |B|$ entonces $\|A\|_2 \leq \|B\|_2$;
5. $\|A\|_2 = \||A|\|_2$;
6. Si $x \in \mathbb{C}^n$ entonces $|Ax| \leq |A| |x|$.

Proposición 1.2.21. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ y supongamos que $|A| \leq B$. Entonces $\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B)$.

Demostración. Usando el Ejercicio 1.2.20 tenemos para todo entero no-negativo k

$$|A^k| \leq |A|^k \leq B^k$$

Por lo tanto

$$\|A^k\|_2 = \||A^k|\|_2 \leq \||A|^k\|_2 \leq \|B^k\|_2$$

Luego

$$\|A^k\|_2^{\frac{1}{k}} \leq \left\| |A|^k \right\|_2^{\frac{1}{k}} \leq \|B^k\|_2^{\frac{1}{k}}$$

y así,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|_2^{\frac{1}{k}} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| |A|^k \right\|_2^{\frac{1}{k}} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|B^k\|_2^{\frac{1}{k}}$$

El resultado sigue de la Proposición 1.2.18. \square

Corolario 1.2.22. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tales que $0 \leq A \leq B$. Entonces $\rho(A) \leq \rho(B)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de la Proposición 1.2.21. \square

Usemos estos resultados para obtener cotas para el radio espectral de una matriz.

Teorema 1.2.23. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y supongamos que $A \geq 0$. Entonces

$$\min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n [A]_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n [A]_{ij} \quad (1.5)$$

y

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n [A]_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n [A]_{ij} \quad (1.6)$$

Demostración. Vamos a demostrar (1.5). Sea

$$t = \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n [A]_{ij}.$$

Si $t = 0$, entonces $t = 0 \leq \rho(A)$. Supongamos ahora que $t > 0$. Como $\sum_{k=1}^n [A]_{ik} \geq t > 0$ para todo i , podemos definir la matriz B por

$$[B]_{ij} = t [A]_{ij} \left(\sum_{k=1}^n [A]_{ik} \right)^{-1}.$$

Además, $t \left(\sum_{k=1}^n [A]_{ik} \right)^{-1} \leq 1$ implica que $[B]_{ij} \leq [A]_{ij}$ para todo i, j , en consecuencia, $0 \leq B \leq A$. Se deduce del Corolario 1.2.22 que $\rho(B) \leq \rho(A)$. Veamos ahora que $\rho(B) = t$. Primero observamos que para cada i

$$\sum_{j=1}^n [B]_{ij} = \sum_{j=1}^n t [A]_{ij} \left(\sum_{k=1}^n [A]_{ik} \right)^{-1} = t$$

Luego por el Lema 1.2.13

$$\rho(B) \leq \|B\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |B|_{ij} = t$$

Por otra parte, si $u = (1, \dots, 1)^\top$ entonces $Bu = tu$ y, por lo tanto, $t \leq \rho(B)$. Esto demuestra que

$$t = \rho(B) \leq \rho(A).$$

La otra desigualdad es consecuencia directa del Lema 1.2.13, teniendo en cuenta que

$$\rho(A) \leq \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n [A]_{ij}$$

Aplicando (1.5) a la matriz A^\top se obtiene (1.6). □

1.3. Matrices positivas

El hecho más importante sobre los autovalores de una matriz no-negativa está contenido en el célebre Teorema de Perron-Frobenius. En 1907, Oskar Perron [32] publicó su ahora clásico artículo sobre las llamadas *fracciones continuadas de Jacobi* como su trabajo de *Habilitationsschrift*. Seis meses después, Perron publicó un artículo titulado "Hacia la Teoría de Matrices" [33] que podríamos afirmar despertó el interés en lo que hoy en día se llama la Teoría Matricial de Perron-Frobenius. Allí, Perron demuestra que los resultados obtenidos en [32] son ciertos en el contexto de matrices positivas, pero, interesantemente, lamenta que los métodos usados en sus demostraciones usan argumentos vía límites, a pesar de ser resultados puramente algebraicos. G. Frobenius leyó este último artículo y, siendo él mismo un experto en la teoría de matrices, decidió aceptar el reto de probar los resultados de Perron usando los "métodos algebraicos usuales". En 1908 y 1909, Frobenius publica un par de artículos ([12, 13]) en los que, no sólo supera el reto propuesto por Perron, sino que abre las puertas a la llamada Teoría No-Negativa de Matrices. Frobenius descubre que si x es un autovector no-negativo de una matriz positiva, entonces su autovalor asociado es el radio espectral y, por lo tanto, $x > 0$ (que, en estas notas, llamamos Teorema 1.3.7) y postula el siguiente problema: Dada una matriz no-negativa A , determine los autovalores de A con autovectores asociados no-negativos. Frobenius resuelve este problema y mucho más en su célebre artículo de 1912 [14], en donde, esencialmente, extiende la teoría de Perron al contexto de matrices no-negativas.

Antes de proseguir con los resultados de esta sección, queremos detenernos un momento a destacar que la Teoría de Perron-Frobenius es un ejemplo importante de una rama muy relevante en muchas áreas de la *ciencia aplicada*. Sus

aplicaciones van desde la teoría de Cadenas de Markov en probabilidades hasta los algoritmos de búsqueda usados por Google. Sin embargo, la motivación de la teoría tuvo sus orígenes en problemas puramente teóricos.

Comenzamos esta sección recordando primeramente la forma canónica de Jordan. Para cada $A \in M_n(\mathbb{C})$ con autovalores diferentes $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, existe una matriz invertible $S \in M_n(\mathbb{C})$ tal que

$$SAS^{-1} = J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

donde para cada j

$$J(\lambda_j) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_j) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_j) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{t_j}(\lambda_j) \end{pmatrix}$$

siendo $t_j = \text{mg}_A(\lambda_j)$, la multiplicidad geométrica de λ_j en A , y $J_*(\lambda_j)$ los bloques de Jordan definidos como

$$J_*(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

El número de bloques de Jordan $i \times i$ en $J(\lambda_j)$ viene dado por

$$v_i(\lambda_j) = r_{i-1}(\lambda_j) - 2r_i(\lambda_j) + r_{i+1}(\lambda_j)$$

donde $r_i(\lambda_j) = \text{rango}((A - \lambda_j I)^i)$. El índice de λ_j , denotado por $\text{index}(\lambda_j)$ es el tamaño del bloque de Jordan más grande en $J(\lambda_j)$. La suma de los tamaños de los bloques de Jordan de $J(\lambda_j)$ es la multiplicidad algebraica de λ_j en A , que denotamos por $\text{ma}_A(\lambda_j)$.

La matrix J es llamada la *forma canónica de Jordan* de A . La estructura de esta forma es única en el sentido de que el número y tamaño de bloques de Jordan en cada $J(\lambda_j)$ está determinada por A . Además, dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ son similares si, y sólo si, A, B tienen la misma estructura de Jordan.

Definición 1.3.1. Decimos que una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ es positiva, denotado por $A > 0$, si $a_{ij} > 0$ para todo i, j .

Vamos a deducir el primer resultado importante sobre matrices positivas.

Teorema 1.3.2. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $A > 0$. Entonces $\rho(A) > 0$, $\rho(A)$ es un autovalor de A y existe un vector $z > 0$ tal que $Az = \rho(A)z$.*

Demostración. Si $\rho(A) = 0$ entonces todos los autovalores de A son iguales a cero y, en consecuencia, el polinomio característico de A es $\phi(x) = x^n$. En particular, A es nilpotente, lo que nos lleva a una contradicción ya que $A > 0$. Así $\rho(A) > 0$.

Sea λ un autovalor de A tal que $|\lambda| = \rho(A)$ y supongamos que $Ax = \lambda x$. Entonces

$$\rho(A)|x| = |\lambda x| = |Ax| \leq A|x|$$

Sea $w = A|x| - \rho(A)|x| \geq 0$ y supongamos que $w \neq 0$. Entonces $Aw > 0$ y como $A|x| > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$Aw > \varepsilon A|x|$$

o bien

$$\frac{A}{\varepsilon + \rho(A)} A|x| > A|x|$$

Pero entonces para todo k

$$\left(\frac{A}{\varepsilon + \rho(A)}\right)^k A|x| > A|x|$$

y como $\rho\left(\frac{A}{\varepsilon + \rho(A)}\right) = \frac{\rho(A)}{\varepsilon + \rho(A)} < 1$ se deduce que

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\varepsilon + \rho(A)}\right)^k A|x| \geq A|x|$$

Esta contradicción surge al suponer que $w \neq 0$. Así, $A|x| = \rho(A)|x|$. Además, $0 < A|x| = \rho(A)|x|$ implica que $|x| > 0$. \square

Una consecuencia de la demostración del Teorema anterior es que $\rho(A)$ es el único autovalor sobre el círculo espectral de A .

Teorema 1.3.3. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $A > 0$. Si $Ax = \lambda x$ y $|\lambda| = \rho(A)$ entonces $\lambda = \rho(A)$.*

Demostración. Supongamos que $Ax = \lambda x$ y $|\lambda| = \rho(A)$. Entonces por la demostración del Teorema 1.3.2 tenemos que $A|x| = \rho(A)|x|$, donde $|x| > 0$. Esto es, $0 < \rho(A)|x| = A|x|$. Así

$$0 < \rho(A)|x_k| = \sum_j a_{kj} |x_j|$$

Pero también

$$\rho(A) |x_k| = |\rho(A) x_k| = \left| \sum_j a_{kj} x_j \right|$$

Es decir, para cada k tenemos que

$$\left| \sum_j a_{kj} x_j \right| = \sum_j a_{kj} |x_j| = \sum_j |a_{kj} x_j|$$

La igualdad en la desigualdad triangular ocurre si, y sólo si, existen $\alpha_j > 0$ tal que $a_{kj} x_j = \alpha_j (a_{k1} x_1)$ o equivalentemente, $x_j = p_j x_1$ donde $p_j = \frac{\alpha_j a_{k1}}{a_{kj}} > 0$. De esta manera, $x = x_1 p$ donde $p = (1, p_2, \dots, p_n)^\top > 0$. Luego, como $Ax = \lambda x$ entonces por lo anterior, $\lambda p = Ap = |Ap| = |\lambda p| = |\lambda| p = \rho(A) p$. Esto demuestra que $\lambda = \rho(A)$ y por lo tanto, $\rho(A)$ es el único autovalor sobre el círculo espectral. \square

El radio espectral $\rho(A)$ de una matriz positiva A no sólo es un autovalor de A ; es siempre un autovalor simple, en el sentido de que su multiplicidad algebraica es igual a 1 (y, por supuesto, también lo es su multiplicidad geométrica). Como veremos más adelante, esto es un hecho notable con consecuencias importantes dentro y fuera de la teoría de matrices (por ejemplo, dentro de la teoría de probabilidades, implica la existencia y unicidad de distribuciones estacionarias en ciertas cadenas de Markov). Veamos su demostración a continuación.

Teorema 1.3.4. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $A > 0$. Entonces la multiplicidad algebraica de $\rho(A)$ es igual a 1.*

Demostración. Como $\rho(A) > 0$ consideremos $B = \frac{1}{\rho(A)} A$ de manera que $B > 0$ y $\rho(B) = 1$. Claramente, $\text{ma}_A(\rho(A)) = \text{ma}_B(1)$, luego basta demostrar que $\text{ma}_B(1) = 1$. Primero probaremos que $\text{index}_B(1) = 1$. De lo contrario, si $\text{index}_B(1) = m > 1$ entonces existe un bloque $m \times m$ de Jordan $J_*(1)$ en la forma de Jordan $J_B = P^{-1} B P$:

$$J_*(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

y, por lo tanto, para todo k

$$J_*^k(1) = \begin{bmatrix} 1 & \binom{k}{1} & & \binom{k}{m-1} \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \binom{k}{1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\|J_*^k(1)\|_\infty \rightarrow \infty \text{ cuando } k \rightarrow \infty$$

y, por lo tanto,

$$\|J_B^k\|_\infty \rightarrow \infty \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Pero

$$\|J_B^k\|_\infty = \|P^{-1}B^kP\|_\infty \leq \|P^{-1}\|_\infty \|B^k\|_\infty \|P\|_\infty$$

implica que

$$\|B^k\|_\infty \geq \frac{\|J_B^k\|_\infty}{\|P^{-1}\|_\infty \|P\|_\infty} \rightarrow \infty.$$

Sea $B^k = (b_{ij}^{(k)})$ e i_k tal que $\|B^k\|_\infty = \sum_j b_{i_k j}^{(k)}$. Por el Teorema 1.3.2, existe un vector $p > 0$ tal que $Bp = p$. Así

$$\begin{aligned} \|p\|_\infty &\geq p_{i_k} = \sum_j b_{i_k j}^{(k)} p_j \geq \sum_j b_{i_k j}^{(k)} \left(\min_i p_i \right) \\ &= \|B^k\|_\infty \left(\min_i p_i \right) \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Esto es imposible porque p es un vector constante. Esto prueba que $\text{index}_B(1) = 1$ y, en consecuencia, $\text{ma}_B(1) = \text{mg}_B(1)$.

Ahora supongamos que $\text{mg}_B(1) > 1$, entonces existen vectores $x, y \in \ker(I - B)$ linealmente independientes. Como $y \neq 0$, supongamos que $y_i \neq 0$ y definamos $z = x - \frac{x_i}{y_i}y$. Entonces $z \in \ker(I - B)$ y por la independencia lineal de x e y , $z \neq 0$. Como $Bz = z$ se sigue de la demostración del Teorema 1.3.2 que $B|z| = |z|$ y $|z| > 0$. Sin embargo, $z_i = x_i - \frac{x_i}{y_i}y_i = 0$, una contradicción. Esto demuestra que

$$\text{ma}_A(\rho(A)) = \text{ma}_B(1) = \text{mg}_B(1) = 1$$

□

Corolario 1.3.5. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $A > 0$. Entonces existe un vector único $p > 0$, $\|p\|_1 = 1$ y $Ap = \rho(A)p$.*

Demostración. Como hemos visto en el Teorema 1.3.4, $\ker(\rho(A)I - A)$ tiene dimensión 1, generado por un vector positivo $z > 0$. Definamos $p = \frac{z}{\|z\|_1}$. Entonces es claro que $p > 0$, $Ap = \rho(A)p$ y $\|p\|_1 = 1$. Más aún, si existe q con estas propiedades, entonces $q = \alpha z$, para algún $\alpha \in \mathbb{C}$ y, en consecuencia,

$$q_i = \alpha z_i = \alpha p_i \|z\|_1$$

para todo i , implicando

$$1 = \sum_i q_i = \sum_i \alpha p_i \|z\|_1 = \alpha \|z\|_1 \sum_i p_i = \alpha \|z\|_1$$

Esto es, $\alpha = \frac{1}{\|z\|_1}$ y así $q = \alpha z = p$. □

Definición 1.3.6. El único autovector normalizado del Corolario 1.3.5 recibe el nombre de vector de Perron de A ; $\rho(A)$ se llama la raíz de Perron de A .

Teorema 1.3.7. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $A > 0$. Si $Ax = \lambda x$, donde $x \geq 0$ y $x \neq 0$, entonces $\lambda = \rho(A)$ y x es un múltiplo positivo del vector de Perron de A .

Demostración. Supongamos que $Ax = \lambda x$ donde $x \geq 0$ y $x \neq 0$. Sea $q > 0$ el vector de Perron de A^\top , es decir,

$$A^\top q = \rho(A^\top) q = \rho(A) q$$

Esto implica que

$$q^\top A = \rho(A) q^\top$$

y así

$$\rho(A) q^\top x = q^\top Ax = \lambda q^\top x$$

Como $q^\top x > 0$ concluimos que $\rho(A) = \lambda$. En particular, $x \in \ker(\rho(A)I - A)$ que está generado por el vector de Perron de A . □

Una fórmula para el radio espectral viene dada por la fórmula de Collatz-Wielandt, descubierta por el matemático alemán Collatz en 1942, y luego desarrollada por el matemático alemán Wielandt en el año 1950.

Teorema 1.3.8. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $A > 0$. Entonces

$$\rho(A) = \max_{x \in \mathcal{N}} f(x),$$

donde $\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{C}^n / x \geq 0 \text{ y } x \neq 0\}$ y

$$f(x) = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} \frac{[Ax]_i}{x_i}$$

Demostración. Sea $x \in \mathcal{N}$. Entonces para todo i tal que $x_i \neq 0$ tenemos que

$$f(x) x_i \leq [Ax]_i$$

y, en consecuencia,

$$f(x) x \leq Ax.$$

Sean p y q los vectores de Perron de A y A^\top , respectivamente. Entonces tenemos $Ap = \rho(A)p$ y $A^\top q = \rho(A)q$. Esta última ecuación equivale a

$$q^\top A = \rho(A)q^\top.$$

Puesto que $q^\top x > 0$, la relación $f(x)x \leq Ax$ implica $f(x)q^\top x \leq q^\top Ax = \rho(A)q^\top x$, de donde concluimos que $f(x) \leq \rho(A)$. En otras palabras, $f(x) \leq \rho(A)$ para todo $x \in \mathcal{N}$. Como $f(p) = \rho(A)$ y $p \in \mathcal{N}$ se sigue que

$$\rho(A) = \max_{x \in \mathcal{N}} f(x).$$

□

1.4. Matrices no-negativas

Muchos resultados de la teoría de Perron sobre las matrices positivas son válidos en el contexto de matrices no-negativas. Como veremos en esta sección, el radio espectral de una matriz no-negativa sigue siendo un autovalor de la matriz, aunque quizá no sea el único autovalor con este módulo. Además, el radio espectral no siempre tendrá asociado un autovector positivo, aunque podremos encontrar uno no-negativo. Veremos en esta sección que los conceptos de irreducibilidad de una matriz y matrices primitivas hacen que la teoría de matrices positivas se extienda al ámbito de matrices no-negativas de forma natural.

Definición 1.4.1. Una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se dice que es no-negativa si $A \geq 0$.

Tenemos versiones de los Teoremas 1.3.2 y 1.3.8 para matrices no-negativas, como podemos ver en el siguiente resultado.

Teorema 1.4.2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $A \geq 0$. Entonces $\rho(A)$ es un autovalor de A (posiblemente 0), y existe un vector $z \geq 0$ tal que $Az = \rho(A)z$. Además,

$$\rho(A) = \max_{x \in \mathcal{N}} f(x),$$

donde $f(x) = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} \frac{[Ax]_i}{x_i}$ y $\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{C}^n / x \geq 0 \text{ y } x \neq 0\}$.

Demostración. Consideremos la sucesión de matrices $A_k = A + \frac{1}{k}J$, donde J es la matriz de unos. Sean ρ_k y p_k la raíz y el vector de Perron, respectivamente, para cada A_k . Observamos que $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ es una sucesión acotada en la esfera unitaria de \mathbb{R}^n . Por el teorema de Bolzano-Weistrass, esta sucesión tiene una subsucesión convergente $\{p_{k_i}\}_{i=1}^\infty$, digamos $p_{k_i} \rightarrow z$ cuando $i \rightarrow \infty$, donde $z \geq 0$ y $z \neq 0$ porque $p_{k_i} > 0$ y $\|p_{k_i}\|_1 = 1$. Como

$$A_1 > A_2 > \cdots > A_k > \cdots > A,$$

se deduce de la Proposición 1.2.21

$$\rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq \rho_k \geq \cdots \geq \rho(A)$$

Por lo tanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \rho^* \geq \rho(A)$. Pero $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$ implica $\lim_{i \rightarrow \infty} A_{k_i} = A$ y esto a su vez implica que

$$Az = \lim_{i \rightarrow \infty} A_{k_i} p_{k_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho_{k_i} p_{k_i} = \rho^* z$$

En particular, $\rho^* \leq \rho(A)$ y, por lo tanto, $\rho^* = \rho(A)$. Es decir, $Az = \rho(A)z$, donde $z \geq 0$ y $z \neq 0$.

Para demostrar la fórmula de Collatz-Wielandt, sea q_k el vector de Perron de A^\top , de tal manera que $q_k^\top A_k = \rho_k q_k^\top$ para todo k . Para cada $x \in \mathcal{N}$ tenemos que $f(x)x \leq Ax \leq A_k x$. Luego

$$f(x)q_k^\top x \leq q_k^\top A_k x = \rho_k q_k^\top x$$

y como $q_k^\top x > 0$ deducimos que $f(x) \leq \rho_k$ para todo k . En consecuencia, $f(x) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \rho(A)$ lo que implica que $\max_{x \in \mathcal{N}} f(x) \leq \rho(A)$. Por otra parte, $z \in \mathcal{N}$ y $f(z) = \rho(A)$. Así $\rho(A) = \max_{x \in \mathcal{N}} f(x)$. \square

Sin condiciones adicionales, el Teorema 1.4.2 es la mejor generalización de la Teoría de Perron para matrices no-negativas.

Ejemplo 1.4.3. *La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es no-negativa y el polinomio característico de A es $\phi_A(x) = x^2$, por lo tanto, $\rho(A) = 0$ y $\text{ma}_A(0) = 2$. Además, si $x = (x_1, x_2)^\top$ y $Ax = 0x$ entonces necesariamente $x_2 = 0$. Es decir, no existe $x > 0$ tal que $Ax = 0x$.

Ejemplo 1.4.4. *La matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es no-negativa. En este caso $\phi_B(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. En consecuencia, los autovalores de B son $\{-1, 1\}$, ambos sobre el círculo espectral.

Sin embargo, es posible generalizar la teoría de Perron para matrices no-negativas *irreducibles*.

Definición 1.4.5. Una matriz A es reducible si existe una matriz de permutación P tal que $P^\top AP = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$, donde X y Z son matrices cuadradas. De lo contrario, A es irreducible.

Ejercicio 1.4.6. Demuestre que una matriz irreducible no tiene una fila de ceros ni una columna de ceros.

A continuación caracterizamos las matrices irreducibles en términos del grafo dirigido asociado.

Definición 1.4.7. Dada la matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$, el grafo dirigido $\Gamma(A)$ tiene vértices $\{1, \dots, n\}$, de tal manera que existe un arco dirigido $i \rightarrow j$ si, y sólo si, $[A]_{ij} \neq 0$. Decimos que $\Gamma(A)$ es fuertemente conexo si para cada par de vértices i y j , existe una secuencia de arcos dirigidos desde i hasta j .

Ejercicio 1.4.8. Si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ y $A = PBP^\top$, donde P es una matriz de permutación, demuestre que $\Gamma(A)$ es fuertemente conexo si, y sólo si, $\Gamma(B)$ es fuertemente conexo.

Ejercicio 1.4.9. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Existe una secuencia de m arcos desde el vértice i hasta el vértice j en $\Gamma(A)$ si, y sólo si, $[[A]^m]_{ij} \neq 0$.

Proposición 1.4.10. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. A es irreducible;
2. $\Gamma(A)$ es fuertemente conexo;
3. $(I + |A|)^{n-1} > 0$.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$ Supongamos que $\Gamma(A)$ no es fuertemente conexo. Entonces existen un par de vértices i, j de $\Gamma(A)$ tal que no hay ninguna secuencia de arcos dirigidos desde i hasta j . Sea $W_1 = \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ los vértices de $\Gamma(A)$ tales que no existe una secuencia de arcos hasta j , y $W_2 = \{k_{r+1}, \dots, k_n\}$ el complemento de W_1 en $\{1, \dots, n\}$. Sea $m = n - r$ y π la permutación de $\{1, \dots, n\}$ definida por

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m & m+1 & m+2 & \cdots & n \\ k_{r+1} & k_{r+2} & \cdots & k_n & k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix}$$

Sea P la matriz permutación determinada por π :

$$P = \begin{pmatrix} e_{\pi_1}^\top \\ e_{\pi_2}^\top \\ \vdots \\ e_{\pi_n}^\top \end{pmatrix}$$

donde e_i es el vector columna canónico. Entonces

$$[PAP^\top]_{ij} = \left[\begin{pmatrix} e_{\pi_1}^\top \\ e_{\pi_2}^\top \\ \vdots \\ e_{\pi_n}^\top \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} e_{\pi_1} & e_{\pi_2} & \cdots & e_{\pi_n} \end{pmatrix} \right]_{ij} = [A]_{\pi_i \pi_j}$$

Por otra parte, es claro que no existe arco dirigido desde un vértice de W_1 a otro en W_2 . Por lo tanto, $[PAP^\top]_{ij} = [A]_{\pi_i \pi_j} = 0$ para todo $i = m + 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$. Luego

$$PAP^\top = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

donde X es una matriz $m \times m$ y Y es una matriz $r \times r$. Así, A es reducible.

2 \Rightarrow 1 Supongamos que A es reducible. Entonces existe una matriz de permutación P tal que $P^\top A P = B = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix}$, donde X tiene tamaño $m \times m$ y Z tiene tamaño $(n - m) \times (n - m)$. Entonces para todo $i = m + 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$ tenemos que $[B]_{ij} = 0$, lo que implica que no existen arcos dirigidos desde el conjunto de vértices $V_1 = \{m + 1, \dots, n\}$ hasta el conjunto de vértices $V_2 = \{1, \dots, m\}$ de $\Gamma(B)$. En particular, no es posible construir una secuencia de arcos dirigidos desde ningún vértice de V_1 hasta ningún vértice de V_2 . En consecuencia, $\Gamma(B)$ no es fuertemente conexo y, por el Ejercicio 1.4.8, $\Gamma(A)$ no es fuertemente conexo.

2 \Leftrightarrow 3 Observamos que

$$(I + |A|)^{n-1} = I + (n - 1)|A| + \binom{n-1}{2}|A|^2 + \cdots + \binom{n-1}{n-2}|A|^{n-1}$$

Luego $(I + |A|)^{n-1} > 0$ si, y sólo si, para cada i, j tal que $i \neq j$, por lo menos una de las potencias

$$|A|, |A|^2, \dots, |A|^{n-1}$$

tiene la entrada i, j positiva. Esto equivale, por el Ejercicio 1.4.9, a que para cada i, j tal que $i \neq j$, existe una secuencia de arcos dirigidos desde i hasta j . Es decir, equivale a que $\Gamma(A)$ es fuertemente conexo. \square

Ejercicio 1.4.11. *Determine si la matriz A es irreducible:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a extender la teoría de Perron a matrices no-negativas irreducibles. Primero dos lemas técnicos.

Lema 1.4.12. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Entonces*

$$\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_n + 1$$

son autovalores de $I + A$ y

$$\rho(I + A) \leq 1 + \rho(A).$$

Si $A \geq 0$ entonces $\rho(I + A) = 1 + \rho(A)$.

Demostración. Sean $\phi_A(z)$ y $\phi_{I+A}(z)$ los polinomios característicos de A y $I + A$, respectivamente. Entonces

$$\phi_{I+A}(z + 1) = \det[(z + 1)I - (A + I)] = \det[zI - A] = \phi_A(z)$$

Por lo tanto $\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_n + 1$ son los autovalores de $I + A$. En consecuencia,

$$\rho(I + A) = \max_i |\lambda_i + 1| \leq \max_i |\lambda_i| + 1 = 1 + \rho(A).$$

Si $A \geq 0$ entonces por el Teorema 1.4.2, $\rho(A)$ es un autovalor de A , y por lo tanto, $1 + \rho(A)$ es un autovalor de $I + A$. Pero entonces $\rho(I + A) \geq 1 + \rho(A)$ y así, $\rho(I + A) = 1 + \rho(A)$. \square

Lema 1.4.13. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Si $A \geq 0$ y $A^k > 0$ para algún $k \geq 1$, entonces $\text{ma}_A(\rho(A)) = 1$.*

Demostración. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A entonces $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ son los autovalores de A^k . Como $A \geq 0$, $\rho(A)$ es un autovalor de A , y así $\rho(A)^k$ es un autovalor de A^k tal que $\text{ma}_{A^k}(\rho(A)^k) = \text{ma}_A(\rho(A))$. Pero $\rho(A)^k = \rho(A^k)$ y $A^k > 0$, entonces por el Teorema 1.3.4, $\text{ma}_A(\rho(A)) = 1$. \square

Teorema 1.4.14. *(Perron-Frobenius) Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Si $A \geq 0$ e irreducible entonces:*

1. $\rho(A)$ es un autovalor positivo de A y existe un vector $z > 0$ tal que $Az = \rho(A)z$;

2. $ma_A(\rho(A)) = 1$;
3. Existe un único vector (el vector de Perron) definido por $Ap = \rho(A)p$, $p > 0$ y $\|p\|_1 = 1$;
4. Si $Ax = \lambda x$, donde $x \geq 0$ y $x \neq 0$, entonces $\lambda = \rho(A)$ y x es un múltiplo positivo de p .
5. $\rho(A) = \max_{x \in \mathcal{N}} f(x)$, donde $f(x) = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} \frac{[Ax]_i}{x_i}$ y $\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{C}^n / x \geq 0 \text{ y } x \neq 0\}$.

Demostración. Por el Teorema 1.4.2, $\rho(A)$ es un autovalor de A y existe un vector $z \geq 0$ tal que $Az = \rho(A)z$. Además, $\rho(A) = \max_{x \in \mathcal{N}} f(x)$, donde $f(x) = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} \frac{[Ax]_i}{x_i}$. Luego, como $u = \frac{1}{n}(1, \dots, 1)^\top \in \mathcal{N}$, deducimos que

$$\rho(A) \geq \min_{1 \leq i \leq n} \frac{[Au]_i}{u_i} = \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n [A]_{ij}$$

Ahora, por el Ejercicio 1.4.6, A no tiene filas ni columnas igual a 0, por lo tanto, $\sum_{j=1}^n [A]_{ij} > 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. En consecuencia, $\rho(A) > 0$. Por otra parte, como $Az = \rho(A)z$ entonces

$$(I + A)^{n-1} z = (1 + \rho(A))^{n-1} z$$

Pero $z \geq 0$ y, por la Proposición 1.4.10, $(I + A)^{n-1} > 0$. Luego $(1 + \rho(A))^{n-1} z > 0$ lo que implica que $z > 0$. De esta manera, las partes 1. y 5. del Teorema quedan demostradas.

Para ver la parte 2., del Lema 1.4.13 concluimos que $ma_{I+A}(1 + \rho(A)) = 1$, ya que $I + A \geq 0$ y $(I + A)^{n-1} > 0$. Luego del Lema 1.4.12 deducimos que $ma_A(\rho(A)) = ma_{I+A}(1 + \rho(A)) = 1$. Las partes 3. y 4. se obtienen igual que en la demostración del Corolario 1.3.5 y el Teorema 1.3.7. \square

Concluimos esta sección con una aplicación interesante del Teorema de Perron-Frobenius, que nos permite obtener una cota inferior de la norma espectral de una matriz.

Ejercicio 1.4.15. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz no-negativa y supongamos que λ es un autovalor de A con autovector asociado $u > 0$. Entonces $\lambda = \rho(A)$.

Ejercicio 1.4.16. Si a_1, \dots, a_n son números reales entonces

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$$

La igualdad ocurre si, y sólo si, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Proposición 1.4.17. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Entonces

$$\|A\|_2 \geq \frac{1}{n} \left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| \quad (1.7)$$

Más aún, si A es no-negativa entonces, la relación (1.7) es una igualdad si, y sólo si, la suma de cada una de las filas y la suma de cada una de las columnas de A es constante.

Demostración. Sea $e = (1, \dots, 1)^\top$. Deducimos de los Ejercicios 1.2.10 y 1.4.16 que

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \geq \frac{\|Ae\|_2}{\|e\|_2} \\ &= \sqrt{\frac{\left(\sum_j a_{1j}\right)^2 + \left(\sum_j a_{2j}\right)^2 + \cdots + \left(\sum_j a_{nj}\right)^2}{n}} \\ &\geq \frac{\left|\sum_j a_{1j} + \sum_j a_{2j} + \cdots + \sum_j a_{nj}\right|}{n} = \frac{1}{n} \left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| \end{aligned} \quad (1.8)$$

Esto demuestra la primera parte. Ahora supongamos que A es no-negativa. Si (1.8) es una igualdad entonces deducimos de la desigualdad (1.8) que

$$\left(\sum_j a_{1j} + \sum_j a_{2j} + \cdots + \sum_j a_{nj}\right)^2 = n \left[\left(\sum_j a_{1j}\right)^2 + \left(\sum_j a_{2j}\right)^2 + \cdots + \left(\sum_j a_{nj}\right)^2 \right]$$

Luego, usando otra vez el Ejercicio 1.4.16 obtenemos que

$$\sum_j a_{1j} = \sum_j a_{2j} = \cdots = \sum_j a_{nj}$$

En otras palabras, la suma de cada una de las filas de A es constante. Finalmente, por el Ejercicio 1.2.10, $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$ y así, la suma de cada una de las columnas de A es constante.

Recíprocamente, supongamos que la suma de cada una de las filas y la suma de cada una de las columnas de A es constante. Es decir, $Ae = ke$ y $A^\top e = ke$, para algún $k \in \mathbb{R}$. Entonces $A^\top Ae = k^2 e$. Como $A^\top A \geq 0$ y $e > 0$, deducimos del Ejercicio 1.4.15 que $\rho(A^\top A) = k^2$. Es decir,

$$\|A\|_2 = \max \left\{ \sqrt{\lambda} : \lambda \text{ autovalor de } A^\top A \right\} = k$$

Finalmente, observamos que

$$k = \frac{1}{n} (nk) = \frac{1}{n} \sum_{i,j} a_{ij}$$

□

1.5. Matrices primitivas

Observamos que el Teorema 1.3.3 fue el único que no se generalizó a matrices no-negativas irreducibles. De hecho, no es cierto en general. Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es no-negativa e irreducible y, sin embargo, los autovalores -1 y 1 están sobre el círculo espectral.

Definición 1.5.1. Una matriz no-negativa e irreducible $A \in M_n(\mathbb{C})$ es primitiva si $\rho(A)$ es el único autovalor sobre el círculo espectral.

Ejemplo 1.5.2. Es claro que toda matriz positiva es primitiva. La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ es un ejemplo de matriz primitiva pero no es positiva.

Veamos a continuación la importancia de las matrices primitivas.

Teorema 1.5.3. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$. Si A es primitiva entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^k = \frac{pq^\top}{q^\top p}$, donde p y q son los respectivos vectores de Perron de A y A^\top .

Demostración. Sean p y q los vectores de Perron de A y A^\top . Llamemos $u = p$ y $v = \frac{q}{q^\top p}$. Entonces u y v son autovectores de A y A^\top , respectivamente, asociados a ρ tales que

$$v^\top u = \frac{q^\top}{q^\top p} p = 1$$

Como $\text{ma}_A(\rho) = 1$ y ρ es único sobre el círculo espectral, existe una matriz invertible P tal que $PAP^{-1} = J = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ es la forma de Jordan de A , donde $\rho(Z) < \rho$. Por lo tanto

$$P(\rho^{-1}A)^k P^{-1} = (\rho^{-1}J)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\rho^{-1}Z)^k \end{pmatrix}$$

y en consecuencia, $\lim_{k \rightarrow \infty} (\rho^{-1}J)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1 e_1^\top$. Concluimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\rho^{-1}A)^k = P^{-1} e_1 e_1^\top P$$

Por otra parte, $Je_1 = \rho e_1$, de donde obtenemos

$$A(P^{-1}e_1) = P^{-1}(PAP^{-1})e_1 = P^{-1}Je_1 = P^{-1}\rho e_1 = \rho(P^{-1}e_1)$$

Es decir, $P^{-1}e_1$ es un autovector asociado a ρ . Como $\text{mg}_A(\rho) = 1$, entonces $u = \alpha P^{-1}e_1$, $\alpha \neq 0$.

Similarmente, $J^\top e_1 = \rho e_1$ de manera que

$$A^\top(P^\top e_1) = P^\top\left((P^\top)^{-1}A^\top P^\top\right)e_1 = P^\top J^\top e_1 = P^\top \rho e_1 = \rho P^\top e_1$$

Esto es, existe $\beta \neq 0$ tal que $v = \beta P^\top e_1$. Como $v^\top u = 1$ se sigue

$$1 = \beta e_1^\top P \alpha P^{-1} e_1 = \beta \alpha$$

Finalmente, $\lim_{k \rightarrow \infty} (\rho^{-1}A)^k = P^{-1}e_1 e_1^\top P = \frac{1}{\alpha} u \frac{1}{\beta} v^\top = uv^\top = \frac{pq}{q^\top p}$, como queríamos demostrar. \square

La siguiente caracterización de primitividad resulta útil.

Proposición 1.5.4. *Una matriz $A \geq 0$ en $M_n(\mathbb{C})$ es primitiva si, y sólo si, $A^m > 0$ para algún $m > 0$.*

Demostración. Supongamos que $A^m > 0$ para algún $m > 0$. En primer lugar A es irreducible. De lo contrario existe una matriz de permutación P tal que

$$A^m = P \begin{pmatrix} X^m & * \\ 0 & Y^m \end{pmatrix} P^\top$$

y así algunas entradas de la matriz A^m son cero.

Supongamos que A tiene $\{\lambda_1, \dots, \lambda_h\}$ autovalores sobre el círculo espectral. Entonces

$$\rho(A) = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_h| > |\lambda_{h+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Luego $|\lambda_k|^m = [\rho(A)]^m = \rho(A^m)$ para cada $1 \leq k \leq h$. Es decir, cada autovalor λ_k^m de A^m pertenece al círculo espectral de A^m . Por el Teorema 1.3.3, $\lambda_1^m = \dots = \lambda_h^m = \rho(A^m)$. Luego $h = \text{ma}_{A^m}(\rho(A^m)) = 1$.

Recíprocamente, si A es primitiva entonces por el Teorema 1.5.3, $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^k = \frac{pq}{q^\top p} > 0$. Entonces existe $K > 0$ tal que $\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^K > 0$ y, por lo tanto, $A^K > 0$. \square

Capítulo 2

Teoría espectral de digrafos

2.1. Digrafos

A partir de ahora estudiaremos el espectro de las llamadas $\{0, 1\}$ -matrices, es decir, matrices en $M_n(\mathbb{C})$ cuyas entradas son 0 o 1. Tenemos a nuestra disposición toda la teoría de matrices no-negativas desarrollada en el capítulo anterior, incluyendo la Teoría de Perron-Frobenius. Como veremos a lo largo de este capítulo, estudiar el espectro de las $\{0, 1\}$ -matrices es equivalente a estudiar el espectro de los digrafos.

Definición 2.1.1. *Un grafo dirigido (o digrafo, para abreviar) D consiste en un conjunto finito $V = V(D)$ de elementos llamados vértices y un conjunto $E = E(D)$ de pares ordenados de vértices diferentes llamados arcos. Si $e = (u, v)$ es un arco entonces decimos que u es el vértice inicial de e y v es el vértice terminal de e ; u y v son los vértices extremos del arco e .*

Usualmente representamos un digrafo por un diagrama.

Ejemplo 2.1.2. *El digrafo D con vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y arcos*

$$E = \{(1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 3), (5, 3)\}$$

se representa en la Figura 2.1

Para abreviar escribimos $e = uv$ para denotar el arco $e = (u, v)$ del digrafo D . La Definición 2.1.1 de digrafo permite que existan arcos con los mismos extremos, por ejemplo uv y vu , donde u y v son vértices diferentes de D . Pero no permite que existan arcos paralelos, es decir, pares de arcos que tengan el mismo vértice inicial y terminal (también llamados arcos múltiples). Tampoco permite lazos, i.e. arcos de la forma uu , donde u es un vértice de D .

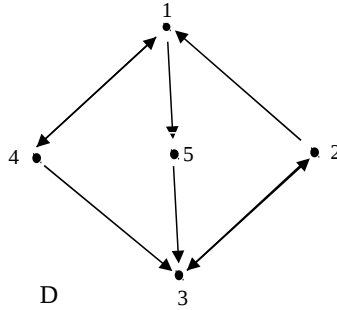


Figura 2.1: Representación de un digrafo

Definición 2.1.3. El grado de entrada de un vértice v del digrafo D , denotado por $id(v)$, es el número de arcos de D de la forma uv . El grado de salida del vértice v , denotado por $od(v)$, es el número de arcos de D de la forma vw .

Proposición 2.1.4. Sea D un digrafo con a arcos. Entonces

$$\sum_{v \in V(D)} id(v) = \sum_{v \in V(D)} od(v) = a$$

Demostración. Claramente el número de arcos de D es igual al número de vértices iniciales (o vértices terminales) del digrafo D . \square

Con frecuencia estudiamos digrafos que están contenidos en digrafos más grandes.

Definición 2.1.5. Sea D un digrafo. Decimos que H es un subdigrafo de D si H es un digrafo que satisface $V(H) \subseteq V(D)$, $E(H) \subseteq E(D)$ y todo arco en $E(H)$ tiene sus vértices extremos en $V(H)$. Si $V(H) = V(D)$ decimos que H es un subdigrafo generador. Si todo arco de $A(D)$ que tiene vértices extremos en $V(H)$ está en $A(H)$, decimos que H es un subdigrafo inducido de D .

Un ejemplo particular de subdigrafos se obtiene cuando eliminamos un vértice o un arco de un digrafo. Si D es un digrafo y $v \in V$, entonces denotamos por $D - v$ al digrafo que tiene como conjunto de vértices a $V - \{v\}$, y como conjunto de arcos a $E - \{e \in E : v \text{ es un vértice extremo de } e\}$. Similarmente, si e es un arco de D , denotamos por $D - e$ al digrafo que tiene conjunto de vértices V y conjunto de arcos $E - \{e\}$. Observamos que $D - e$ es un ejemplo de un subdigrafo generador mientras que $D - v$ es un subdigrafo inducido.

Ejercicio 2.1.6. Supongamos que D es un digrafo con n vértices.

1. Todo subdigrafo inducido de un digrafo D se obtiene eliminando vértices de D .
2. Todo subdigrafo generador de un digrafo D se obtiene eliminando arcos de D .

Es posible que dos digrafos tengan la misma estructura, pero difieran sólo, o bien en el etiquetamiento de los vértices y arcos o en la manera en que han sido dibujados. Para precisar esta idea introducimos el concepto de isomorfismo de digrafos.

Definición 2.1.7. *El digrafo D_1 es isomorfo al digrafo D_2 , si existe una función biyectiva $\gamma : V(D_1) \rightarrow V(D_2)$, llamada isomorfismo, que satisfice*

$$uv \in E(D_1) \text{ si, y sólo si, } \gamma(u)\gamma(v) \in E(D_2),$$

para todo $u, v \in V(D_1)$.

Ejercicio 2.1.8. *La relación “isomorfo a” es una relación de equivalencia sobre los digrafos.*

Cuando el digrafo D_1 es isomorfo al digrafo D_2 , decimos que D_1 y D_2 son isomorfos y escribimos $D_1 = D_2$.

Definición 2.1.9. *Un camino de u_0 a u_l en un digrafo D es una sucesión de vértices $u_0u_1 \cdots u_l$, de tal manera que $u_{t-1}u_t \in E$ para todo $t = 1, \dots, l$. El camino es cerrado si $u_0 = u_l$. En caso contrario, el camino es abierto y u_0, u_l son los extremos del camino; u_0 el extremo inicial y u_l el extremo terminal. La longitud del camino es l . Si todos los vértices u_0, u_1, \dots, u_l son diferentes decimos que el camino $u_0u_1 \cdots u_l$ es una trayectoria.*

El camino cerrado $u_0u_1 \cdots u_lu_0$ es un ciclo si los vértices u_0, \dots, u_l son todos diferentes. Un digrafo es acíclico si no tiene ciclos.

Ejercicio 2.1.10. *Todo camino $u_0u_1 \cdots u_l$ contiene una trayectoria de u_0 a u_l .*

Las siguientes son dos nociones que se desprenden del concepto de longitud de un camino.

Definición 2.1.11. *Sea D un digrafo y $u, v \in V$. La distancia entre u y v se define como la longitud del camino más corto que existe entre u y v , siempre que exista un camino de u a v ; de no ser así, la distancia entre u y v será infinita. Por otro lado, el diámetro de D se define como el valor máximo de las distancias entre los vértices del digrafo.*

Observemos que la noción introducida arriba de distancia entre dos vértices de un digrafo no es una métrica en el sentido usual, pues no es simétrica. Por ejemplo, en el digrafo de la Figura 2.1, la distancia del vértice 1 al vértice 5 es igual a 1, pero la distancia del vértice 5 al vértice 1 es igual a 3. El nombre proviene del concepto de distancia entre los vértices de un grafo G , que sí representa una métrica en el conjunto de los vértices de G .

La noción de conectividad es de principal importancia en la teoría de grafos. Existen varias formas de extender este concepto fundamental al estudio de digrafos. A continuación, presentamos la extensión más natural, en el sentido que traduce muchas propiedades de grafos conexos al contexto de digrafos:

Definición 2.1.12. *Un digrafo D es fuertemente conexo si dados dos vértices diferentes u y v , existe un camino de u a v . Una componente fuerte de D es un subdigrafo maximal con respecto a la propiedad de ser fuertemente conexo.*

En otras palabras, un subdigrafo F es una componente fuerte de D si F es fuertemente conexo y no está contenido propiamente en un subdigrafo fuertemente conexo de D . Como un vértice es fuertemente conexo, se deduce que cada vértice pertenece a una componente fuerte y, por lo tanto, las componentes fuertes forman una partición de los vértices de D .

A diferencia de los grafos, en los digrafos tenemos varias nociones de conectividad.

Definición 2.1.13. *Un semi-camino de u_0 a u_l en un digrafo D es una sucesión de vértices $u_0u_1 \cdots u_l$, de tal manera que $u_{t-1}u_t$ o u_tu_{t-1} pertenece a E , para todo $t = 1, \dots, l$. Decimos que el digrafo D es débilmente conexo si para cada par de vértices diferentes u y v , existe un semi-camino de u a v .*

Claramente, todo digrafo fuertemente conexo es débilmente conexo.

Proposición 2.1.14. *Sea D un digrafo débilmente conexo. Entonces D es fuertemente conexo si, y sólo si, todo arco de D pertenece a un ciclo.*

Demostración. Sea $wv \in E$. Como D es fuertemente conexo existe un camino de v a u . Por el Ejercicio 2.1.10, este camino contiene una trayectoria $v = u_0 \cdots u_l = u$. Luego $u_0 \cdots u_l v$ es un ciclo que contiene a wv .

Recíprocamente, sean w y z vértices diferentes de D . Como D es débilmente conexo, existe un semi-camino $w = w_0w_1 \cdots w_l = z$, de tal manera que $w_{t-1}w_t$ o w_tw_{t-1} pertenece a E , para todo $t = 1, \dots, l$. Como w_tw_{t-1} pertenece a un ciclo entonces existe un camino de w_{t-1} a w_t para todo $t = 1, \dots, l$ y, por lo tanto, un camino de w a z . Esto demuestra que D es fuertemente conexo. \square

Vamos ahora a presentar algunos tipos de digrafos que aparecen con frecuencia. Comenzamos con el ciclo dirigido y el camino dirigido.

Definición 2.1.15. El ciclo dirigido de n vértices C_n , tiene vértices $V(C_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y arcos

$$E(C_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}.$$

El camino dirigido de n vértices P_n tiene vértices $V(P_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y arcos

$$E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$$

Recordemos que un grafo G consiste en un conjunto V de vértices y un conjunto E de pares *no ordenados* de vértices diferentes, llamados aristas. Veamos que los grafos se pueden identificar con la clase de los digrafos simétricos.

Definición 2.1.16. Un digrafo D es simétrico si cada vez que $uv \in E$ entonces $vu \in E$. Un digrafo D es asimétrico si $uv \in E$ implica que $vu \notin E$.

Sea G un grafo y G^* el digrafo simétrico asociado, obtenido a partir de G al reemplazar cada arista uv de G por un par simétrico de arcos uv y vu . La función $G \rightsquigarrow G^*$ establece una correspondencia biyectiva entre los grafos y los digrafos simétricos. De esta manera, podemos identificar los digrafos simétricos con los grafos.

Ejercicio 2.1.17. Sea D un digrafo. El grafo subyacente al digrafo D , denotado por $U(D)$, tiene como conjunto de vértices al mismo conjunto de vértices de D , y uv es una arista de $U(D)$ si, y sólo si, uv o vu es un arco de D . Demuestre que $U(G^*) = G$ para todo grafo G y $(U(D))^* = D$ para todo digrafo simétrico D .

Ejercicio 2.1.18. El digrafo D es débilmente conexo si, y sólo si, $U(D)$ es conexo.

Otra clase de digrafos importantes son los digrafos completos.

Definición 2.1.19. Un digrafo D es completo si para todo par de vértices diferentes $u, v \in V$ se tiene que $uv \in E$ o $vu \in E$. El digrafo completo simétrico tiene ambos arcos uv y vu , para cada par de vértices diferentes $u, v \in V$. Se denota por K_n cuando tiene n vértices. Un digrafo completo asimétrico se llama un torneo.

Observamos que todo vértice del digrafo completo simétrico K_n tiene grado de entrada y grado de salida igual a $n - 1$. Similarmente, el ciclo dirigido C_n satisface con la propiedad de que todo vértice tiene igual grado de entrada que de salida, en este caso igual a 1. Más generalmente, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1.20. Un digrafo D es r -regular si $id(v) = od(v) = r$ para todo $v \in V$.

Ejercicio 2.1.21. Si D es r -regular y tiene n vértices entonces D tiene nr arcos. Más aún, el número de caminos de longitud k en D es exactamente nr^k .

Otra clase de digrafos que son de nuestro interés son los digrafos bipartitos.

Definición 2.1.22. Un digrafo es bipartito si existe una partición de su conjunto de vértices en dos conjuntos U y V , de tal manera que cada arco tenga su vértice inicial en U y vértice terminal en V , o viceversa.

Tenemos una interesante caracterización de los digrafos bipartitos en términos de sus ciclos.

Proposición 2.1.23. Un digrafo bipartito no tiene ciclos de orden impar. Si el digrafo es fuertemente conexo, el recíproco también es cierto.

Demostración. Supongamos que U y V es una partición del conjunto de vértices y $v_1v_2 \cdots v_l v_1$ un ciclo de D de longitud l . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $v_1 \in U$. Entonces $v_i \in U$ si, y sólo si i es impar. Como $v_l v_1$ es un arco de D , $v_l \in V$ y así l es par. Recíprocamente, supongamos que D es fuertemente conexo, no tiene ciclos de orden impar y sean u, v vértices diferentes de D . Vamos a demostrar que si P es un camino de u a v y Q es un camino de v a u , entonces la longitud de P y Q tienen la misma paridad. Por el absurdo, supongamos que P y Q tienen diferente paridad, y los elegimos de forma que la suma de los vértices de ambos caminos es mínima. Observamos que si $V(P) \cap V(Q) = \{u, v\}$ entonces PQ sería un ciclo de D de orden impar, una contradicción. Así, existe un vértice $w \in V(P) \cap V(Q)$ diferente a u y a v , podemos suponer que w es el primer tal vértice cuando recorremos el camino Q de v a u . Como D no tiene ciclos de orden impar, los caminos $Q[v, w]$ y $P[w, v]$ tienen la misma paridad y, en consecuencia, los caminos $P[u, w]$ y $Q[w, u]$ tienen paridad diferente, esto contradice la minimalidad de P y Q .

En particular, deducimos que todos los caminos de u a v tienen la misma paridad. Fijemos ahora un vértice u en D y consideremos los conjuntos

$$U = \{v \text{ vértice de } D : \text{la longitud de todo camino de } u \text{ a } v \text{ es par}\}$$

y

$$V = \{v \text{ vértice de } D : \text{la longitud de todo camino de } u \text{ a } v \text{ es impar}\}$$

Entonces U y V es una partición del conjunto de vértices de D y claramente, no es posible que existan arcos entre vértices de U o entre vértices de V , porque de lo contrario tendríamos un vértice al que le llegan dos caminos desde el vértice u con diferente paridad. \square

La Proposición 2.1.23 nos permite determinar, en muchos casos interesantes, cuándo un digrafo no es bipartito; basta con encontrar un ciclo de longitud par.

Una familia importante de digrafos bipartitos son los llamados digrafos bipartitos completos.

Definición 2.1.24. *Un digrafo bipartito completo D es un digrafo bipartito con partición de sus vértices en dos conjuntos U y V , de tal manera que para cada par de vértices $u \in U$ y $v \in V$, los arcos uv y vu están en $E(D)$. Si U tiene p vértices y V tiene q vértices, entonces lo denotamos por $K_{p,q}$.*

Para finalizar esta sección introducimos tres operaciones entre digrafos relacionadas entre sí.

Definición 2.1.25. *El complemento \overline{D} de un digrafo D es el digrafo que tiene el mismo conjunto de vértices que D ; si u, v son vértices diferentes de \overline{D} , entonces $uv \in E(\overline{D})$ si, y sólo si, $uv \notin E(D)$.*

Definición 2.1.26. *Sean D_1 y D_2 digrafos tales que $V(D_1) \cap V(D_2) = \emptyset$. Definimos la suma directa $D_1 \oplus D_2$ como el digrafo que tiene conjunto de vértices $V(D_1 \oplus D_2) = V(D_1) \cup V(D_2)$ y conjunto de arcos $E(D_1 \oplus D_2) = E(D_1) \cup E(D_2)$.*

El producto completo de D_1 y D_2 , denotado por $D_1 \nabla D_2$, se obtiene a partir de $D_1 \oplus D_2$ uniendo con un par de arcos simétricos cada vértice de D_1 con cada vértice de D_2 .

Las tres operaciones anteriores se relacionan a través del siguiente resultado.

Proposición 2.1.27. *Sean D_1 y D_2 dos digrafos. Entonces*

$$\overline{D_1 \oplus D_2} = \overline{D_1} \nabla \overline{D_2}$$

Demostración. Es consecuencia de las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} uv \notin E(\overline{D_1 \oplus D_2}) &\Leftrightarrow uv \in E(D_1 \oplus D_2) \\ &uv \in E(D_1) \cup E(D_2) \\ &uv \notin E(\overline{D_1} \nabla \overline{D_2}) \end{aligned}$$

□

Otra operación que será de gran utilidad en el desarrollo posterior de estas notas es el digrafo de línea.

Definición 2.1.28. *Sea D un digrafo. El digrafo de línea de D , denotado por $\mathcal{L}(D)$, es el digrafo que tiene como conjunto de vértices a $E(D)$; existe un arco en $\mathcal{L}(D)$ de uv a wz si $v = w$. Los digrafos iterados de línea de D se definen recursivamente como $\mathcal{L}^1(D) = \mathcal{L}(D)$, y para $k \geq 2$ como $\mathcal{L}^k(D) = \mathcal{L}(\mathcal{L}^{k-1}(D))$.*

Ejercicio 2.1.29. Sea D un digrafo. Demuestre:

1. Si D es fuertemente conexo entonces $\mathcal{L}(D)$ es fuertemente conexo;
2. Si D es r -regular entonces $\mathcal{L}(D)$ es r -regular;
3. Si D tiene un camino no cerrado de longitud 2, entonces $\mathcal{L}(D)$ es un digrafo no-simétrico;
4. Si D tiene $n \geq 3$ vértices y es fuertemente conexo, entonces $\mathcal{L}^k(D)$ es un digrafo no-simétrico para todo $k \geq 1$.

2.2. Espectro de un digrafo

Uno de los problemas fundamentales de la teoría espectral de digrafos es obtener información estructural de un digrafo, a partir del estudio algebraico de las matrices asociadas. En este trabajo estudiaremos el caso de la matriz de adyacencia.

Definición 2.2.1. Sea D un digrafo con conjunto de vértices v_1, \dots, v_n . La matriz de adyacencia de D es la matriz $n \times n$ definida por

$$A = A(D) = (a_{ij}),$$

donde $a_{ij} = 1$ si existe un arco de v_i a v_j , y $a_{ij} = 0$ en caso contrario.

Ejercicio 2.2.2. Un etiquetamiento diferente de los vértices de D nos proporciona una matriz de adyacencia de la forma PAP^T para alguna matriz de permutación P .

Como consecuencia del Ejercicio 2.2.2, podemos definir sin ambigüedad el espectro de un digrafo D .

Definición 2.2.3. El polinomio característico de un digrafo D , denotado por ϕ_D , es el polinomio característico de la matriz de adyacencia A de D . Es decir,

$$\phi_D(z) = \det(zI - A)$$

El espectro del digrafo D es el espectro de la matriz de adyacencia A de D . Usualmente lo denotamos por $\sigma(D)$. Es decir

$$\sigma(D) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son los autovalores de A .

A veces usamos la notación

$$\sigma(D) = \left\{ \lambda_1^{(m_1)}, \lambda_2^{(m_2)}, \dots, \lambda_k^{(m_k)} \right\}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son los diferentes autovalores de D con multiplicidades m_1, \dots, m_k , respectivamente.

Los resultados que presentamos a continuación son ejemplos ilustrativos de la conexión que existe entre el espectro de un digrafo y sus propiedades estructurales.

Proposición 2.2.4. *Sea A la matriz de adyacencia asociada a un digrafo D . Si $A^k = (a_{i,j}^{(k)})$ es la matriz que se obtiene al elevar A a la potencia $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces $a_{i,j}^{(k)}$ es igual al número de caminos de longitud k que existen entre el vértice i y el vértice j .*

Demostración. Procedemos por inducción sobre k . Por la definición de matriz de adyacencia, el resultado es claro si $k = 1$. Supongamos entonces que el resultado es cierto para $k \geq 1$. Como $A^{k+1} = A^k A$ tenemos que

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{l=1}^n a_{il}^{(k)} a_{lj} = \sum_{l: lj \in E} a_{il}^{(k)}$$

Por hipótesis inductiva, $a_{il}^{(k)}$ es el número de caminos de longitud k entre i y l , por lo tanto, $\sum_{l: lj \in E} a_{il}^{(k)}$ es el número de caminos de longitud $k+1$ entre i y j . □

En particular, si A es la matriz de adyacencia de D , entonces $a_{ii}^{(k)}$ es igual al número de caminos cerrados de longitud k que contienen al vértice i . Por lo tanto, la traza de A^k es el número de caminos cerrados de longitud k de D . Denotaremos por c_k a este número, es decir, $c_k := \text{tr}(A^k)$.

Proposición 2.2.5. *Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de la matriz de adyacencia A asociada a un digrafo D , entonces*

$$c_k = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k$$

En particular,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 0$$

Demostración. Por el Teorema de Schur (Teorema 1.2) A es semejante a una matriz triangular T que tiene a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sobre la diagonal. En consecuencia,

$$c_k = \text{tr}(A^k) = \text{tr}(T^k) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k$$

□

A continuación presentaremos un teorema clásico de mucha importancia, conocido como el Teorema de Coeficientes de Sachs (Teorema 2.2.6). Establece una interesante correspondencia entre la estructura cíclica de un digrafo y los coeficientes de su polinomio característico. Fue demostrado independientemente por Sachs, Milić y Spialter, entre otros (para una breve historia sobre el número de veces que este teorema ha sido descubierto, es interesante leer [8, p. 36]).

Para ello, usaremos el bien conocido teorema de la teoría de matrices, que expresa los coeficientes del polinomio característico en términos de los determinantes de las submatrices principales: si el polinomio característico de $A \in M_n(\mathbb{C})$ es

$$\phi(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n$$

entonces, para todo $1 \leq k \leq n$, se tiene que

$$a_k = (-1)^k \sum_{B \in \mathcal{A}_k} \det(B) \quad (2.1)$$

donde \mathcal{A}_k es el conjunto de todas las submatrices principales de tamaño k de la matriz A .

Observamos que cuando A es la matriz de adyacencia de un digrafo D , entonces claramente existe una correspondencia biyectiva entre las submatrices principales de tamaño k de A y el conjunto de subdigrafos inducidos de orden k de D .

Recordamos que un *digrafo lineal* es un digrafo 1-regular, es decir, es una suma directa de ciclos.

Teorema 2.2.6. (*Teorema de coeficientes de Sachs*) Sea D un digrafo con polinomio característico

$$\phi_D(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

Entonces, para todo $1 \leq k \leq n$,

$$a_k = \sum_{L \in \mathcal{L}_k} (-1)^{\text{comp}(L)}$$

donde \mathcal{L}_k es el conjunto de todos los subdigrafos lineales de D con exactamente k vértices y $\text{comp}(L)$ es el número de componentes de L .

Demostración. Sea A la matriz de adyacencia de D . Vamos a comenzar demostrando el resultado para $k = n$. En este caso

$$\begin{aligned} a_n &= \phi_D(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) \\ &= (-1)^n \sum_{\sigma \in S_n} \text{signo}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= (-1)^n \sum_{\sigma \in \Sigma} \text{signo}(\sigma) \end{aligned}$$

donde $\Sigma = \{\sigma \in S_n : a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = 1\}$. Veamos que podemos relacionar biyectivamente a Σ y \mathcal{L}_n : para ello, si $\sigma \in \Sigma$ entonces $a_{i,\sigma(i)} = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$, o equivalentemente, $v_i v_{\sigma(i)}$ es un arco de D para todo $i = 1, \dots, n$. Por otra parte, cada ciclo de la descomposición única en ciclos disjuntos de σ es de la forma

$$(i, \sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^{m-1}(i))$$

donde m es el menor entero positivo tal que $\sigma^m(i) = i$. Se deduce entonces que

$$v_i v_{\sigma(i)} v_{\sigma^2(i)} \cdots v_{\sigma^{m-1}(i)}, v_i$$

es un ciclo de D de longitud m . De esta manera, a σ le corresponde una suma directa de ciclos disjuntos del digrafo D , esto es, un subdigrafo lineal $L \in \mathcal{L}_n$. La correspondencia $\sigma \rightsquigarrow L$ establece una inyección de Σ en \mathcal{L}_n . Veamos ahora que esta función es sobreyectiva. Si $L \in \mathcal{L}_n$ entonces L es suma directa de ciclos disjuntos de D . Si

$$v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_s} v_{i_1}$$

es uno de los ciclos de L entonces consideramos el ciclo de S_n

$$\xi = (i_1, i_2, \dots, i_{s-1}, i_s)$$

Sea σ el producto de los ciclos disjuntos ξ derivados de los ciclos de L . Entonces es claro que $\sigma \rightsquigarrow L$ y así existe una función biyectiva $\Sigma \longrightarrow \mathcal{L}_n$. En esta correspondencia, si $\sigma \rightsquigarrow L$ entonces

$$(-1)^n \text{signo}(\sigma) = (-1)^{n+p(L)}$$

donde $p(L)$ denota el número de ciclos de longitud par en L . Esto es porque

$$\sigma \text{ es par} \Leftrightarrow p(L) \text{ es par}$$

Por otra parte, es fácil ver que

$$n + p(L) \equiv \text{comp}(L) \pmod{2}$$

Así

$$a_n = (-1)^n \sum_{\sigma \in \Sigma} \text{signo}(\sigma) = (-1)^n \sum_{L \in \mathcal{L}_n} (-1)^{n+p(L)} = \sum_{L \in \mathcal{L}_n} (-1)^{\text{comp}(L)}$$

El caso general $1 \leq k < n$ es, paradójicamente, una consecuencia de este caso particular. Veamos por qué: sabemos que

$$a_k = \sum_{B \in \mathcal{A}_k} (-1)^k \det(B)$$

Ahora bien, cada $B \in \mathcal{A}_k$ es la matriz de adyacencia de un subdigrafo D_B de D obtenido al remover $n - k$ vértices de D y los arcos incidentes a ellos. De esta forma, el caso anterior demuestra que, para todo $B \in \mathcal{A}_k$,

$$(-1)^k \det(B) = \sum_{L \in \mathcal{L}_k(D_B)} (-1)^{\text{comp}(L)}$$

donde $\mathcal{L}_k(D_B)$ es el conjunto de subdigrafos lineales de D_B con k vértices. Finalmente,

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{B \in \mathcal{A}_k} (-1)^k \det(B) \\ &= \sum_{B \in \mathcal{A}_k} \sum_{L \in \mathcal{L}_k(B)} (-1)^{\text{comp}(L)} \\ &= \sum_{L \in \mathcal{L}_k} (-1)^{\text{comp}(L)} \end{aligned}$$

con lo cual concluimos la demostración. □

Ahora vamos a calcular el polinomio característico de un digrafo que se obtiene a través de la suma directa de otros digrafos.

Proposición 2.2.7. *Sean D_1 y D_2 dos digrafos. Entonces*

$$\phi_{D_1 \oplus D_2} = \phi_{D_1} \cdot \phi_{D_2}$$

Demostración. Supongamos que A_1 y A_2 son matrices de adyacencia de D_1 y D_2 , respectivamente. Podemos etiquetar los vértices de $D_1 \oplus D_2$ de manera que su matriz de adyacencia tenga la forma en bloques

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned}\phi_{D_1 \oplus D_2} &= \det(zI - A) = \begin{vmatrix} zI - A_1 & 0 \\ 0 & zI - A_2 \end{vmatrix} \\ &= \det(zI - A_1) \det(zI - A_2) = \phi_{D_1} \cdot \phi_{D_2}\end{aligned}$$

□

En particular, si D es un digrafo con componentes fuertes D_1, \dots, D_s , entonces es claro que

$$\phi_D = \phi_{D_1} \cdot \phi_{D_2} \cdots \phi_{D_s}$$

Otra operación (unaria) importante para el desarrollo posterior de este trabajo es el digrafo de línea. De hecho, veremos que los polinomios característicos de un digrafo y su digrafo de línea están estrechamente ligados. Antes necesitamos introducir el concepto de matriz de incidencia de un digrafo.

Definición 2.2.8. *Sea D un digrafo con n vértices y l arcos. La matriz de incidencia arco-vértice de D , es la matriz B de tamaño $l \times n$ cuyo elemento b_{rs} viene dado por*

$$b_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = q, \text{ donde } r = pq \in E \\ 0 & \text{si } s \neq q, \text{ donde } r = pq \in E \end{cases}$$

La matriz de incidencia vértice-arco de D , es la matriz C de tamaño $n \times l$ cuyo elemento c_{sr} está dado por

$$c_{sr} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = p, \text{ donde } r = pq \in E \\ 0 & \text{si } s \neq p, \text{ donde } r = pq \in E \end{cases}$$

Ejemplo 2.2.9. *Si D es el digrafo que aparece en la Figura 2.2 entonces las matrices de incidencia B y C vienen dadas por*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lema 2.2.10. *Sea D un digrafo con n vértices y l arcos. Sean B y C las matrices de incidencia arco-vértice y vértice-arco de D , respectivamente. Entonces*

$$BC = A(\mathcal{L}(D)) \text{ y } CB = A(D)$$

Demostración. Supongamos que $i = pq$ y $j = uv$ son arcos de D . Entonces el elemento ij de $A(\mathcal{L}(D))$ es 1 si $q = u$ y 0 si $q \neq u$. El elemento ij de la matriz BC viene dado por $\sum_{k=1}^n b_{ik}c_{kj}$ y, por la Definición 2.2.8, si $q = u$ entonces

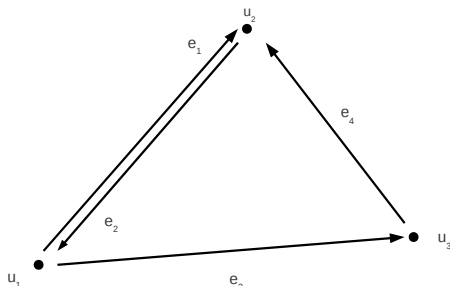


Figura 2.2: Digrafo asociado a las matrices B y C

$\sum_{k=1}^n b_{ik}c_{kj} = b_{iq}c_{qj} = 1$ y si $q \neq u$ entonces $\sum_{k=1}^n b_{ik}c_{kj} = 0$. Esto demuestra que $BC = A(\mathcal{L}(D))$. Análogamente se demuestra que $CB = A(D)$. \square

Ejercicio 2.2.11. Complete la demostración del Lema 2.2.10.

Lema 2.2.12. Sea B una matriz de tamaño $l \times n$ y C una matriz de tamaño $n \times l$, donde $l \geq n$. Entonces

$$\phi_{BC}(z) = z^{l-n} \phi_{CB}(z)$$

Demostración. Consideremos las siguientes identidades de matrices por bloques:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} BC & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} BC & BCB \\ C & CB \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & CB \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como la matriz $\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$ es invertible, entonces

$$\begin{pmatrix} BC & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & CB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1}$$

y, en consecuencia, $\begin{pmatrix} BC & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & CB \end{pmatrix}$ son matrices semejantes. Esto

implica que

$$\begin{aligned} z^n \det(zI_l - BC) &= \begin{vmatrix} zI_l - BC & 0 \\ -C & zI_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} zI_l & 0 \\ -C & zI_n - CB \end{vmatrix} \\ &= z^l \det(zI_n - CB) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\phi_{BC}(z) = z^{l-n} \phi_{CB}(z)$$

□

Recordemos que el digrafo de línea $\mathcal{L}(D)$ de un digrafo D es el digrafo cuyos vértices son los arcos e_1, \dots, e_m de D , y existe un arco de e_i a e_j si, y sólo si, el vértice terminal de e_i es igual al vértice inicial de e_j . Ahora estamos en condiciones de relacionar los polinomios característicos de un digrafo y su digrafo de línea.

Teorema 2.2.13. *Sea D un digrafo con n vértices y l arcos. Entonces*

$$\phi_{\mathcal{L}(D)}(z) = z^{l-n} \phi_D(z)$$

Demostración. Sean B y C las matrices de incidencia arco-vértice y vértice-arco de D , respectivamente. Entonces por el Lema 2.2.10 sabemos que

$$BC = A(\mathcal{L}(D)) \text{ y } CB = A(D).$$

Por el Lema 2.2.12, si $l \geq n$ entonces

$$\phi_{\mathcal{L}(D)}(z) = \phi_{BC}(z) = z^{l-n} \phi_{CB}(z) = z^{l-n} \phi_D(z)$$

y si $n \geq l$,

$$\phi_D(z) = \phi_{CB}(z) = z^{n-l} \phi_{BC}(z) = z^{n-l} \phi_{\mathcal{L}(D)}(z)$$

En consecuencia, $\phi_{\mathcal{L}(D)}(z) = z^{l-n} \phi_D(z)$. □

Vamos a denotar por N_k al número total de caminos de longitud k en el digrafo D . Por la Proposición 2.2.4, si A es la matriz de adyacencia de D , N_k es la suma de todos los elementos que aparecen en la matriz A^k . Luego, si denotamos por $\text{sum}(M)$ a la suma de todas las entradas de la matriz M , entonces tenemos que $N_k = \text{sum}(A^k)$.

En el siguiente resultado expresaremos la función generatriz de la sucesión $\{N_k\}_{k \geq 0}$ en términos de los polinomios característicos del digrafo D y de su complemento \overline{D} .

Teorema 2.2.14. *Sea D un digrafo y $H_D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k t^k$ la función generatriz de la sucesión $\{N_k\}_{k \geq 0}$ de caminos de longitud k de D . Entonces*

$$H_D(t) = \frac{1}{t} \left[(-1)^n \frac{\phi_{\bar{D}}\left(-\frac{t+1}{t}\right)}{\phi_D\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 \right].$$

Demostración. Sea A la matriz de adyacencia del digrafo D . Por la Proposición 2.2.4, $N_k = \text{sum}(A^k)$. Por la Proposición 1.2.17, si $|t| < \frac{1}{\rho(A)}$ entonces $I - tA$ es invertible y

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k t^k = (I - tA)^{-1} = \frac{\text{Adj}(I - tA)}{\det(I - tA)}$$

Sea \bar{A} la matriz de adyacencia de \bar{D} , el complemento de D , y J la matriz con todos sus elementos igual a 1. Teniendo en cuenta el Ejercicio 2.2.15 y el hecho de que $\bar{A} = J - I - A$ obtenemos

$$\text{sum}[\text{Adj}(I - tA)] = \frac{1}{t} [\det((t+1)I + t\bar{A}) - \det(I - tA)]$$

Luego

$$\begin{aligned} H_D(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} N_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \text{sum}(A^k) t^k = \text{sum} \left[\sum_{k=0}^{\infty} A^k t^k \right] \\ &= \text{sum} \left(\frac{\text{Adj}(I - tA)}{\det(I - tA)} \right) = \frac{\text{sum}(\text{Adj}(I - tA))}{\det(I - tA)} \\ &= \frac{1}{t} \left[\frac{\det((t+1)I + t\bar{A}) - \det(I - tA)}{\det(I - tA)} \right] = \\ &= \frac{1}{t} \left[(-1)^n \frac{\det\left(-\frac{t+1}{t}I - \bar{A}\right)}{\det\left(\frac{1}{t}I - A\right)} - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{t} \left[(-1)^n \frac{\phi_{\bar{D}}\left(-\frac{t+1}{t}\right)}{\phi_D\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 \right] \end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.2.15. *Si $J \in M_n$ es la matriz que tiene todos los elementos iguales a 1, demuestre que para toda $M \in M_n$ y cada número real x , $\det(M + xJ) = \det(M) + x \cdot \text{sum}(\text{Adj}(M))$.*

Ahora presentamos una expresión para el polinomio característico del producto completo $D_1 \nabla D_2$, en términos de los polinomios característicos de D_1, D_2 y sus complementos.

Teorema 2.2.16. Sean D_1 y D_2 digrafos con n_1 y n_2 vértices, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}\phi_{D_1 \nabla D_2}(z) &= (-1)^{n_2} \phi_{D_1}(z) \phi_{\overline{D_2}}(-z-1) + \\ &\quad (-1)^{n_1} \phi_{D_2}(z) \phi_{\overline{D_1}}(-z-1) - \\ &\quad (-1)^{n_1+n_2} \phi_{\overline{D_1}}(-z-1) \phi_{\overline{D_2}}(-z-1)\end{aligned}$$

Demostación. Por el Teorema 2.2.14, la Proposición 2.1.27 y la Proposición 2.2.7 tenemos que

$$\begin{aligned}H_{D_1 \oplus D_2}(t) &= \frac{1}{t} \left[(-1)^{n_1+n_2} \frac{\phi_{\overline{D_1 \oplus D_2}}\left(-\frac{t+1}{t}\right)}{\phi_{D_1 \oplus D_2}\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 \right] = \\ &\quad \frac{1}{t} \left[(-1)^{n_1+n_2} \frac{\phi_{\overline{D_1 \nabla D_2}}\left(-\frac{t+1}{t}\right)}{\phi_{D_1}\left(\frac{1}{t}\right) \phi_{D_2}\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 \right] \quad (2.2)\end{aligned}$$

De nuevo por el Teorema 2.2.14 y teniendo en cuenta que

$$H_{D_1 \oplus D_2}(t) = H_{D_1}(t) + H_{D_2}(t)$$

se deduce que

$$H_{D_1 \oplus D_2}(t) = \frac{1}{t} \left[(-1)^{n_1} \frac{\phi_{\overline{D_1}}\left(-\frac{t+1}{t}\right)}{\phi_{D_1}\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 \right] + \frac{1}{t} \left[(-1)^{n_2} \frac{\phi_{\overline{D_2}}\left(-\frac{t+1}{t}\right)}{\phi_{D_2}\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 \right]$$

Igualando esta última relación con la relación (2.2), sustituyendo $-\frac{t+1}{t} = z$, sustituyendo D_i por $\overline{D_i}$ y $\overline{D_i}$ por D_i , queda demostrado el Teorema. \square

2.3. Espectro de algunos digrafos especiales

En esta sección vamos a estudiar las propiedades espectrales de algunos digrafos especiales. Comenzamos con el ciclo dirigido C_n , que tiene matriz de adyacencia

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces el polinomio característico de C_n es $\phi_{C_n} = x^n - 1$ y, en consecuencia, los autovalores de W son

$$1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$$

donde $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Los ciclos dirigidos son un caso especial de los llamados digrafos circulantes.

Una matriz compleja S de tamaño $n \times n$ se llama circulante si tiene la forma siguiente:

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_n \\ s_n & s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{n-1} \\ s_{n-1} & s_n & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-2} \\ s_{n-2} & s_{n-1} & s_n & s_1 & \cdots & s_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & \cdots & s_1 \end{pmatrix}$$

En otras palabras, la fila i de S se obtiene a partir de la primera realizando una rotación cíclica de i posiciones. Es claro que una matriz circulante queda completamente determinada por su primera fila (s_1, \dots, s_n) .

Proposición 2.3.1. *Los autovalores de una matriz circulante S con primera fila (s_1, \dots, s_n) vienen dado por*

$$z_k = \sum_{j=1}^n s_j w^{(j-1)k}$$

donde $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ y $k = 0, \dots, n-1$.

Demostración. No es difícil ver que $S = \sum_{j=1}^n s_j W^{j-1}$, donde W es la matriz de adyacencia de C_n que tiene autovalores

$$1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$$

donde $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Como $S = p(W)$, donde p es el polinomio $p(z) = s_1 + s_2 z + \dots + s_n z^{n-1}$, se deduce que los autovalores de S son

$$z_k = p(w^k) = s_1 + s_2 w^k + s_3 w^{2k} + \dots + s_n w^{(n-1)k}$$

para $k = 0, \dots, n-1$, como queríamos demostrar. □

Proposición 2.3.2. *El espectro del digrafo completo simétrico K_n es*

$$\sigma(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$$

Demostración. K_n es un digrafo circulante con primera fila $(0, 1, 1, \dots, 1)$. Así, por la Proposición 2.3.1, los autovalores de K_n son

$$z_k = w^k + w^{2k} + \dots + w^{(n-1)k}$$

donde $k = 0, \dots, n-1$. Como

$$1 + w^k + w^{2k} + \dots + w^{(n-1)k} = 0$$

para todo $k = 1, \dots, n-1$, obtenemos que -1 es un autovalor de multiplicidad $n-1$. Finalmente, $z_0 = 1 + 1 + \dots + 1 = n-1$ tiene multiplicidad 1. \square

Observamos que en los digrafos circulantes el grado interior y exterior de todos los vértices coincide. Más generalmente, recordemos que un digrafo se dice que es r -regular, si el grado interior y exterior de todos los vértices es igual a r . Por ejemplo, el ciclo dirigido C_n es un digrafo 1-regular mientras que el digrafo completo K_n es un digrafo $(n-1)$ -regular.

Proposición 2.3.3. *Si D es un digrafo r -regular entonces:*

1. r es un autovalor de D con autovector correspondiente $e = (1, \dots, 1)^\top$;
2. $|\lambda| \leq r$ para todo autovalor λ de D .
3. Si D es fuertemente conexo entonces r es un autovalor simple de D .

Demostración. 1. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de adyacencia de D . Como D es r -regular, la suma de los elementos de cada fila de A es igual a r . Luego,

$$Ae = \left(\sum_j a_{1j}, \sum_j a_{2j}, \dots, \sum_j a_{nj} \right)^\top = (r, r, \dots, r)^\top = re$$

2. Supongamos que $Az = \lambda z$, donde $z \neq 0$. Sea z_j la componente de z de máxima longitud. Entonces

$$\begin{aligned} |\lambda| |z_j| &= |\lambda z_j| = \left| \sum_p a_{jp} z_p \right| \leq \sum_p a_{jp} |z_p| \leq \left(\sum_p a_{jp} \right) |z_j| \\ &= r |z_j| \end{aligned}$$

Como $|z_j| \neq 0$ concluimos que $|\lambda| \leq r$.

3. Las dos primeras partes de la proposición demuestran que r es el radio espectral de D . Como D es fuertemente conexo entonces la matriz de adyacencia de D es irreducible y así, por el Teorema de Perron-Frobenius, r es un autovalor simple de D . \square

Existe una relación estrecha entre el espectro de un digrafo regular D y el espectro de su complemento \overline{D} .

Teorema 2.3.4. *Sea D un digrafo r -regular con n vértices. Entonces*

$$\phi_{\overline{D}}(z) = (-1)^n \frac{z - n + r + 1}{z + r + 1} \phi_D(-z - 1)$$

En particular, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de D , entonces los autovalores de \overline{D} son $n - r - 1$ y $-\lambda_1 - 1, \dots, -\lambda_n - 1$.

Demostración. Como D es un digrafo r -regular con n vértices, entonces $N_k = nr^k$. Luego, si $|t| < \frac{1}{r}$

$$H_D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} nr^k t^k = \frac{n}{1 - rt}$$

Por la Proposición 2.3.3, si A es la matriz de adyacencia de D entonces $r = \rho(A)$. Por lo tanto, si $|t| < \frac{1}{r}$ se deduce del Teorema 2.2.14 que

$$\frac{n}{1 - rt} = \frac{1}{t} \left[(-1)^n \frac{\phi_{\overline{D}}\left(-\frac{t+1}{t}\right)}{\phi_D\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 \right]$$

Sustituyendo $-\frac{t+1}{t} = z$ en esta última expresión obtenemos el resultado.

La segunda parte es consecuencia inmediata de la primera. □

La expresión para el producto completo de digrafos regulares dada en el Teorema 2.2.16 toma una forma mucho más simple.

Corolario 2.3.5. *Sea D_1 un digrafo r_1 -regular con n_1 vértices y D_2 un digrafo r_2 -regular con n_2 vértices. Entonces*

$$(x - r_1)(x - r_2) \phi_{D_1 \nabla D_2}(z) = \phi_{D_1}(z) \phi_{D_2}(z) [(z - r_1)(z - r_2) - n_1 n_2].$$

Demostración. Esto es consecuencia inmediata del Teorema 2.2.16 y el Teorema 2.3.4. □

Ejemplos importantes de digrafos regulares son los digrafos fuertemente regulares. Un digrafo D es fuertemente regular con parámetros (n, k, t, λ, μ) si satisface las siguientes condiciones:

1. D tiene n vértices;
2. D es k -regular;
3. Cada vértice es extremo de t arcos simétricos;
4. Para cada par de vértices diferentes u y v , el número de caminos de longitud 2 desde u hasta v es λ si hay un arco desde u hasta v , y es μ si no hay un arco desde u hasta v .

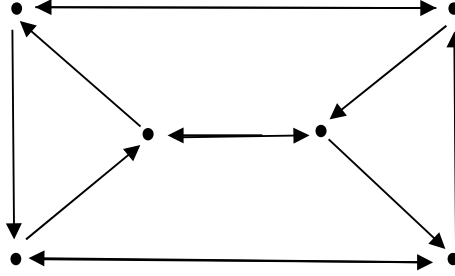


Figura 2.3: Digrafo fuertemente regular

La Figura 2.3 muestra un ejemplo de un digrafo fuertemente regular con parámetros $(6, 2, 1, 0, 1)$.

Proposición 2.3.6. *Sea A la matriz de adyacencia de un digrafo D . Entonces D es fuertemente regular con parámetros (n, k, t, λ, μ) si, y sólo si, A satisface*

$$AJ = JA = kJ \text{ y } A^2 = tI + \lambda A + \mu(J - I - A) \quad (2.3)$$

donde I_n es la matriz identidad y J es la matriz que tiene todos sus elementos igual a 1.

Demostración. Supongamos que D es fuertemente regular con parámetros (n, k, t, λ, μ) . Como D es k -regular entonces la suma de los elementos de cada fila y cada columna de A es igual a k , y esto equivale a que $AJ = JA = kJ$. Por otra parte, sean v_i, v_j vértices de D . Teniendo en cuenta la Proposición 2.2.4, tenemos los siguientes casos: (a) $i \neq j$ y existe un arco de v_i a v_j :

$$\begin{aligned} tI_{ij} + \lambda A_{ij} + \mu(J_{ij} - I_{ij} - A_{ij}) &= t0 + \lambda 1 + \mu(1 - 0 - 1) = \\ &= \lambda = (A^2)_{ij} \end{aligned}$$

(b) $i \neq j$ y no existe un arco de v_i a v_j :

$$\begin{aligned} tI_{ij} + \lambda A_{ij} + \mu(J_{ij} - I_{ij} - A_{ij}) &= t0 + \lambda 0 + \mu(1 - 0 - 0) = \\ &= \mu = (A^2)_{ij} \end{aligned}$$

(c) $i = j$:

$$\begin{aligned} tI_{ii} + \lambda A_{ii} + \mu(J_{ii} - I_{ii} - A_{ii}) &= t1 + \lambda 0 + \mu(1 - 1 - 0) = \\ &= t = (A^2)_{ii} \end{aligned}$$

Así,

$$A^2 = tI + \lambda A + \mu(J - I - A)$$

Recíprocamente, supongamos que A satisface (2.3). Como mencionamos antes, la condición $AJ = JA = kJ$ implica que la suma de todos los elementos de las filas y las columnas de A es igual a k , y esto equivale a que D es un digrafo k -regular. Ahora, el número de arcos simétricos incidentes al vértice v_i viene dado por $(A^2)_{ii}$. Luego para cada $i = 1, \dots, n$

$$(A^2)_{ii} = tI_{ii} + \lambda A_{ii} + \mu(J_{ii} - I_{ii} - A_{ii}) = t$$

Además si $i \neq j$, el número de caminos de longitud 2 de v_i a v_j viene dado por $(A^2)_{ij}$. Si existe un arco de v_i a v_j entonces

$$\begin{aligned} (A^2)_{ij} &= tI_{ij} + \lambda A_{ij} + \mu(J_{ij} - I_{ij} - A_{ij}) \\ &= t0 + \lambda 1 + \mu(1 - 0 - 1) = \lambda \end{aligned}$$

Si no existe un arco de v_i a v_j entonces

$$\begin{aligned} (A^2)_{ij} &= tI_{ij} + \lambda A_{ij} + \mu(J_{ij} - I_{ij} - A_{ij}) \\ &= t0 + \lambda 0 + \mu(1 - 0 - 0) = \mu \end{aligned}$$

Así, D es un digrafo fuertemente regular con parámetros (n, k, t, λ, μ) . □

Recordemos que si D es un digrafo entonces el complemento \overline{D} de D es el digrafo que tiene el mismo conjunto de vértices que D , y además, uv es un arco de \overline{D} si, y sólo si, uv no es un arco de D .

Proposición 2.3.7. *Si D es un digrafo fuertemente regular con parámetros (n, k, t, λ, μ) entonces \overline{D} es un digrafo fuertemente regular con parámetros $(n, k', t', \lambda', \mu')$, donde*

$$\begin{aligned} k' &= (n - 2k) + (k - 1) \\ t' &= (n - 2k) + (t - 1) \\ \lambda' &= (n - 2k) + (\mu - 2) \\ \mu' &= (n - 2k) + \lambda \end{aligned}$$

Demostración. Sea A la matriz de adyacencia de D . Entonces A satisface las condiciones dadas en (2.3). Si \bar{A} es la matriz de adyacencia de \bar{D} entonces

$$\bar{A} = J - I - A$$

Es fácil verificar que

$$\bar{A}J = J\bar{A} = (n - k - 1)J$$

y

$$(\bar{A})^2 = t'I + \lambda'\bar{A} + \mu'(J - I - \bar{A})$$

El resultado se deduce ahora aplicando la Proposición 2.3.6. \square

Vamos a caracterizar aquellos digrafos fuertemente regulares que tienen el parámetro $\mu = 0$.

Proposición 2.3.8. *Sea D un digrafo fuertemente regular con parámetros (n, k, t, λ, μ) . Entonces $\mu = 0$ si, y sólo si, D es suma directa de $\frac{n}{k+1}$ copias del grafo completo K_{k+1} .*

Demostración. Es claro que si D es suma directa de copias de grafo completos entonces $\mu = 0$. Recíprocamente, supongamos que $\mu = 0$. Sea A la matriz de adyacencia de D . Como D es k -regular, sabemos por la Proposición 2.3.3 que k es un autovalor de A con autovector asociado $e = (1, \dots, 1)^\top$. Por la Proposición 2.3.6,

$$A^2 = tI + \lambda A$$

y, en consecuencia, $k(k - \lambda) = t$. Como $k - \lambda > 0$ entonces $t \geq k$, y así $t = k$ y $\lambda = k - 1$. En particular, D es un grafo. Sean u y v vértices en una componente conexa de D . Entonces existe un camino $uw_1 \cdots v$. Como u y w_1 son adyacentes, existen $k - 1$ vértices comunes a u y w_1 . Si $w_1 \neq v$ entonces el grado de w_1 sería $k + 1$, una contradicción. Por lo tanto, cualquiera dos vértices en una componente conexa de D son adyacentes, es decir, cada componente conexa de D es K_{k+1} . \square

Pasamos ahora a calcular el espectro de un digrafo fuertemente regular. Asumimos desde ahora en adelante que $\mu > 0$.

Proposición 2.3.9. *Un digrafo fuertemente regular D con parámetros (n, k, t, λ, μ) tiene autovalores k ,*

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \left[(\lambda - \mu) + \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(t - \mu)} \right]$$

y

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \left[(\lambda - \mu) - \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(t - \mu)} \right]$$

El autovalor k tiene multiplicidad 1 y los autovalores θ_1 y θ_2 son números racionales de multiplicidad

$$m_1 = -\frac{k + (n-1)\theta_2}{\theta_1 - \theta_2} \text{ y } m_2 = \frac{k + (n-1)\theta_1}{\theta_1 - \theta_2}$$

respectivamente. Si $t > 0$ y D no es completo entonces los autovalores θ_1 y θ_2 son números enteros.

Demostración. Sea A la matriz de adyacencia de D . Como $\mu > 0$ entonces A es irreducible y así, por la Proposición 2.3.3, k es un autovalor de D con multiplicidad 1 y autovector asociado $e = (1, \dots, 1)^\top$, es decir, $Ae = ke$. Sustituyendo en la relación 2.3, obtenemos la relación

$$k^2 + (\mu - \lambda)k + (\mu - t) = \mu n \quad (2.4)$$

Por otra parte, supongamos que θ es un autovalor de D distinto a k , con autovector asociado v . Entonces v y k son ortogonales y, en consecuencia, $Jv = 0$. Sustituyendo de nuevo en (2.3), teniendo en cuenta que $Av = \theta v$ y $Jv = 0$ obtenemos la relación

$$\theta^2 + (\mu - \lambda)\theta + (\mu - t) = 0$$

concluyendo así que los otros dos autovalores de D son

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \left[(\lambda - \mu) + \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(t - \mu)} \right] \quad (2.5)$$

y

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \left[(\lambda - \mu) - \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(t - \mu)} \right] \quad (2.6)$$

Supongamos ahora que m_1 y m_2 son las multiplicidades de θ_1 y θ_2 , respectivamente. Entonces por la Proposición 2.2.5 tenemos que

$$k + m_1\theta_1 + m_2\theta_2 = 0 \quad (2.7)$$

y además, $m_1 + m_2 = n - 1$. Ahora sustituyendo (2.5) y (2.6) en (2.7) deducimos

$$0 = 2k + (\lambda - \mu)(n - 1) + (m_1 - m_2) \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(t - \mu)}$$

En particular, $\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(t - \mu)} \in \mathbb{Q}$ y así, θ_1 y θ_2 son números racionales.

Supongamos que $(\lambda - \mu)^2 + 4(t - \mu) \neq d^2$, donde d es un entero positivo. Entonces

$$0 = 2k + (\lambda - \mu)(n - 1)$$

luego,

$$k = \frac{1}{2} (n-1)(\mu - \lambda) \leq n-1$$

Surgen dos casos: (a) $\mu - \lambda = 2$ y entonces $k = n-1$, esto implica que D es completo. (b) $\mu - \lambda = 1$ y entonces $n = 2k+1$. Por la relación (2.4)

$$k(k+1-2\mu) = t$$

Como $t \leq k$ entonces $t = 0$. Esto demuestra que si $t > 0$ y D no es completo entonces $(\lambda - \mu)^2 + 4(t - \mu) = d^2$ para algún entero positivo d , y así θ_1 y θ_2 son números enteros.

Finalmente, de las relaciones

$$\begin{aligned} k + m_1\theta_1 + m_2\theta_2 &= 0 \\ m_1 + m_2 &= n-1 \end{aligned}$$

deducimos fácilmente que $m_1 = -\frac{k+\theta_2(n-1)}{\theta_1-\theta_2}$ y $m_2 = \frac{k+\theta_1(n-1)}{\theta_1-\theta_2}$. \square

Así, sabemos que los digrafos fuertemente regulares tienen tres autovalores. El recíproco es cierto para digrafos simétricos regulares.

Proposición 2.3.10. *Un grafo regular conexo D con tres autovalores diferentes es fuertemente regular.*

Demostración. Supongamos que D tiene n vértices y regularidad k . Sea A la matriz de adyacencia de D . Como D es un grafo entonces A es simétrica y el polinomio minimal de A tiene la forma

$$q(x) = (x-k)(x-\theta_1)(x-\theta_2)$$

donde k es la regularidad de D . Llamemos $p(x) = (x-\theta_1)(x-\theta_2)$. Entonces $(A-kI)p(A) = 0$ y así, cada columna de $p(A)$ pertenece al núcleo de $A-kI_n$. Como D es conexo y regular entonces el núcleo de $A-kI_n$ está generado por $e = (1, \dots, 1)^\top$. Luego cada columna de $p(A)$ tiene todos sus elementos iguales y, al ser $p(A)$ una matriz simétrica, $p(A) = rJ$ para algún número real r . Es decir,

$$A^2 - (\theta_1 + \theta_2)A + \theta_1\theta_2I = rJ$$

Ahora, como A tiene tres autovalores diferentes, D no es completo. Sean v_i y v_j ($i \neq j$) vértices no adyacentes de D . Entonces las posiciones i, j de las matrices A, I_n y J son respectivamente 0, 0 y 1. Luego

$$(A^2)_{ij} = r$$

es decir, el número de caminos de longitud 2 entre dos vértices no adyacentes es r . Supongamos ahora que v_i y v_j ($i \neq j$) son vértices adyacentes. En este caso la posición i, j de A, I_n y J son 1, 0 y 1 respectivamente. Luego

$$(A^2)_{ij} = (\theta_1 + \theta_2) + r$$

Por otra parte, la posición i, i de A, I_n y J son 0, 1 y 1. Luego

$$(A^2)_{ii} = r - \theta_1\theta_2 = k$$

lo que implica que $r = k + \theta_1\theta_2$. En consecuencia, D es un digrafo fuertemente regular con parámetros $(n, k, k, \theta_1 + \theta_2 + k + \theta_1\theta_2, k + \theta_1\theta_2)$. \square

Ahora pasamos a estudiar el polinomio característico de los digrafos bipartitos.

Proposición 2.3.11. *Si D es un digrafo bipartito entonces su polinomio característico tiene la forma*

$$\Phi_D(z) = z^n + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_k z^{n-2k} \quad (2.8)$$

donde los b_k son enteros para todo $k = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Si D es fuertemente conexo entonces el recíproco también es cierto.

Demostración. Si D es un digrafo bipartito entonces, por la Proposición 2.1.23, D no tiene ciclos de orden impar. Esto implica que $\mathcal{L}_k = \emptyset$ cuando k es impar, porque si L es un subdigrafo lineal de orden k , entonces L es suma directa de ciclos L_1, \dots, L_r de D de longitudes l_1, \dots, l_r , respectivamente, tales que $\sum_{i=1}^r l_i = k$. Si k es impar, entonces algún ciclo L_i tiene orden impar, una contradicción. Por el Teorema 2.2.6, si

$$\Phi_D(z) = z^n + \sum_{k=1}^n a_k z^{n-k}$$

el coeficiente a_k de $\phi_D(z)$ viene dado por

$$a_k = \sum_{L \in \mathcal{L}_k} (-1)^{c(L)}$$

y así, $a_k = 0$ para todo k impar.

Recíprocamente, sea D un digrafo fuertemente conexo con polinomio característico (2.8). Supongamos que D tiene un ciclo de longitud impar, y sea g

la menor longitud de un ciclo impar de D . Entonces \mathcal{L}_g consiste en todos los g -ciclos de D y, en consecuencia, el coeficiente que acompaña a z^{n-g} en el polinomio característico de D es

$$a_g = \sum_{L \in \mathcal{L}_g} (-1)^{c(L)} = -\{\# \text{ de } g\text{-ciclos de } D\} \neq 0$$

Esto es una contradicción. Por lo tanto, D no tiene ciclos de orden impar y, por la Proposición 2.1.23, D es un digrafo bipartito. \square

Como consecuencia de este resultado podemos caracterizar los digrafos bipartitos como aquellos que tienen el espectro simétrico con respecto al origen, es decir, λ es un autovalor si, y sólo si, $-\lambda$ es un autovalor.

Proposición 2.3.12. *El espectro de un digrafo bipartito es simétrico con respecto al origen. Si D es fuertemente conexo, el recíproco también es cierto.*

Demostración. Si D es un digrafo bipartito entonces por la Proposición 2.3.11, el polinomio característico de D tiene la forma

$$\phi_D(z) = z^p Q(z^2)$$

donde Q es un polinomio mónico con coeficientes enteros y $p = 0$ o 1 , dependiendo si el número de vértices es par o impar. En cualquier caso, es claro que λ es una raíz de $\phi_D(z)$ si, y sólo si, $-\lambda$ es una raíz de $\phi_D(z)$.

Recíprocamente, supongamos que D es un digrafo fuertemente conexo con espectro simétrico con respecto al origen. Entonces

$$\phi_D(z) = z^r (z^2 - \lambda_1^2) \cdots (z^2 - \lambda_s^2)$$

donde r, s son enteros no negativos. De aquí se sigue fácilmente que $\phi_D(z)$ tiene la forma dada en (2.8), y por la Proposición 2.3.11, concluimos que D es un digrafo bipartito. \square

Recordemos que $K_{p,q}$ es el digrafo bipartito completo.

Proposición 2.3.13. *El espectro de $K_{p,q}$ es*

$$\sigma(K_{p,q}) = \left(\begin{array}{ccc} \sqrt{pq} & 0 & -\sqrt{pq} \\ 1 & p+q-2 & 1 \end{array} \right)$$

Demostración. Podemos ordenar los vértices de $K_{p,q}$ de manera que la matriz de adyacencia sea

$$A = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{p \times p} & J \\ J^\top & \mathbf{0}_{q \times q} \end{array} \right)$$

donde J es la matriz $p \times q$ con todos sus elementos igual a 1, $\mathbf{0}_{p \times p}$ es la matriz nula de tamaño $p \times p$ y $\mathbf{0}_{q \times q}$ es la matriz nula de tamaño $q \times q$. Observamos que el rango de A es igual a 2, por lo tanto, la multiplicidad geométrica (igual a la multiplicidad algebraica porque A es simétrica) del autovalor 0 es igual a

$$\dim \text{Ker}(A) = p + q - 2$$

Es decir,

$$\phi_D(z) = z^{p+q-2}(z^2 + c)$$

y ahora por el Teorema 2.2.6, $c = -\{\#\text{ de arcos simétricos de } K_{p,q}\} = -pq$. Así concluimos que

$$\phi_D(z) = z^{p+q-2}(z - \sqrt{pq})(z + \sqrt{pq})$$

□

2.4. Cotas para el radio espectral de un digrafo

El radio espectral de un digrafo D , denotado por $\rho = \rho(D)$, es el radio espectral de la matriz de adyacencia de D , es decir,

$$\rho = \rho(D) = \max \{|z| : z \text{ es un autovalor de } D\}$$

donde $|z|$ es el módulo del número complejo z .

En esta sección presentamos algunas cotas para ρ . Para empezar, interpretemos el Teorema 1.2.23 cuando A es la matriz de adyacencia de un digrafo D .

Teorema 2.4.1. *Sea D un digrafo con conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$. Entonces*

$$\min_{1 \leq i \leq n} \{od(v_i)\} \leq \rho(D) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{od(v_i)\}$$

y

$$\min_{1 \leq j \leq n} \{id(v_j)\} \leq \rho(D) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \{id(v_j)\}.$$

Demostración. Para cada $i = 1, \dots, n$

$$od(v_i) = \sum_{j=1}^n [A]_{ij}$$

y para cada $j = 1, \dots, n$

$$id(v_j) = \sum_{i=1}^n [A]_{ij}$$

El resultado se obtiene ahora aplicando el Teorema 1.2.23. □

Collatz and Sinogowitz [5] demostraron que si G es un grafo con n vértices y m aristas entonces el radio espectral de G satisface $\rho(G) \geq \frac{2m}{n}$. Más aún, la igualdad se verifica si, y sólo si, G es un grafo $\frac{2m}{n}$ -regular. A continuación presentaremos una generalización de este resultado.

Teorema 2.4.2. *Sea D un digrafo normal con n vértices y a arcos. Si ρ es el radio espectral de D entonces $\rho \geq \frac{a}{n}$. Además, $\rho = \frac{a}{n}$ si, y sólo si, D es un digrafo $\frac{a}{n}$ -regular.*

Demostración. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de adyacencia del digrafo D . Por la Proposición 1.4.17,

$$\|A\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{n^2}} \left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| = \frac{a}{n} \quad (2.9)$$

y como A es normal, se sigue del Ejercicio 1.2.12 que

$$\rho = \|A\|_2 \geq \frac{a}{n}$$

Para ver la segunda parte, si D es un digrafo $\frac{a}{n}$ -regular entonces por la Proposición 2.3.3, $\rho = \frac{a}{n}$. Recíprocamente, si $\rho = \frac{a}{n}$ entonces de la desigualdad (2.9),

$$\rho = \frac{a}{n} = \|A\|_2 = \frac{1}{n} \left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| \quad (2.10)$$

y como A es no-negativa, por la Proposición 1.4.17, la suma de las filas y las columnas son iguales a k . Pero entonces de la relación (2.10),

$$\rho = \frac{1}{n} \left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| = \frac{1}{n} nk = k$$

y así D es un digrafo $\frac{a}{n}$ -regular. \square

Ejercicio 2.4.3. *Obtenga como caso particular del Teorema 2.4.2 el Teorema de Collatz y Sinogowitz.*

El Teorema 2.4.2 no es cierto para digrafos en general.

Ejemplo 2.4.4. *El digrafo fuertemente conexo D_1 en la Figura 2.4 tiene 9 arcos y 4 vértices. El radio espectral de D_1 es $\rho(D_1) \approx 2,2340 < \frac{9}{4} = 2,25$.*

Ejercicio 2.4.5. *Demuestre que si D es un digrafo con n vértices y c_2 caminos cerrados de longitud 2 entonces, $\rho(D) \geq \frac{c_2}{n}$.*

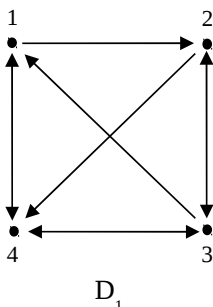


Figura 2.4: El digrafo D_1 satisface $\rho(D_1) < \frac{a}{n}$.

2.5. Digrafos con pocos autovalores

Vamos a estudiar en esta sección aquellos digrafos que tienen a lo sumo tres autovalores. Primero observamos que si D es acíclico entonces el polinomio característico de D es $\phi_D(z) = z^n$ y, en consecuencia, D tiene un sólo autovalor (el cero). El recíproco también es cierto.

Proposición 2.5.1. *Un digrafo D tiene un sólo autovalor si, y sólo si, D es acíclico.*

Demostración. Supongamos que D tiene un sólo autovalor λ . Por la Proposición 2.2.5, $\lambda = 0$ y así, $\phi_D(z) = z^n$. Si D tiene un ciclo, sea g la longitud más pequeña entre todos los ciclos de D . Entonces el conjunto de subdigrafos lineales de D con g vértices está formado por ciclos de D de longitud g . En consecuencia, el coeficiente a_g del polinomio característico de D viene dado por el Teorema 2.2.6,

$$a_g = \sum_{L \in \mathcal{L}_g} (-1)^{\text{comp}(L)}$$

es exactamente el $-$ {número de ciclos de longitud g de D }, claramente diferente de cero. Esto implica que D es acíclico. \square

Ejercicio 2.5.2. *Demuestre que un grafo G tiene un sólo autovalor si, y sólo si, G es el grafo discreto.*

¿Qué ocurre si D tiene exactamente dos autovalores diferentes? Si D es un digrafo fuertemente conexo con n vértices, entonces el Teorema de Perron-Frobenius 1.4.14 nos garantiza que el radio espectral ρ es un autovalor positivo

simple. Esto implica que el otro autovalor, β , de D tiene multiplicidad algebraica igual a $n - 1$. Como la suma de los autovalores es igual a cero, deducimos que $\beta = -\rho/(n - 1)$.

Teorema 2.5.3. *Sea D un digrafo fuertemente conexo con n vértices. Si D tiene sólo dos autovalores diferentes, entonces D es el digrafo completo simétrico con n vértices K_n .*

Demostración. El caso $n = 2$ es trivial, así supongamos que $n \geq 3$. Claramente, el radio espectral ρ de D satisface

$$\rho \leq \rho(K_n) = n - 1$$

Demostremos que $\rho = n - 1$. Supongamos por el absurdo que $\rho < n - 1$. Entonces existe un entero suficientemente grande $k > 0$ tal que

$$\left(\frac{\rho}{n-1}\right)^k < \frac{1}{n-1}$$

Esto implica que $\rho^k < (n-1)^{k-1}$. Por otra parte, se desprende de la Proposición 2.2.5 que

$$\rho^k ((n-1)^{k-1} + (-1)^k) = c_k (n-1)^{k-1}$$

Luego $(n-1)^{k-1}$ divide a $\rho^k ((n-1)^{k-1} + (-1)^k)$. Como $(n-1)^{k-1} + (-1)^k$ y $(n-1)^{k-1}$ son enteros consecutivos, $(n-1)^{k-1}$ divide a ρ^k y así $(n-1)^{k-1} \leq \rho^k$, lo que es contradictorio.

Por lo tanto, si un digrafo fuertemente conexo con n vértices tiene sólo dos autovalores distintos, entonces su espectro es igual a

$$\sigma(D) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

En consecuencia, el polinomio característico de D está dado por

$$\phi_D(z) = (z - (n-1))(z + 1)^{n-1}$$

El coeficiente de z^{n-2} es igual a $-\frac{n(n-1)}{2}$ pero también tiene que ser igual a $-\frac{c_2}{2}$. Así, $c_2 = n(n+1)$ y, en consecuencia, $D = K_n$. \square

Recordemos que si D es un digrafo con polinomio característico $\phi_D(z)$ y si e es un arco de D que no es parte de un ciclo, entonces el Teorema 2.2.6 implica que el polinomio característico de $D_1 = D - \{e\}$ es también $\phi_D(z)$. Podemos continuar este proceso eliminando todos aquellos arcos de D que no pertenecen a ciclos hasta obtener un digrafo \hat{D} en que todo arco, si existen, es parte de un ciclo y $\phi_D(z) = \phi_{\hat{D}}(z)$. El digrafo resultante \hat{D} es la suma directa de D_1, \dots, D_s , las componentes fuertes de D , y

$$\phi_D(z) = \phi_{\hat{D}}(z) = \phi_{D_1}(z) \cdot \phi_{D_2}(z) \cdots \phi_{D_s}(z) \quad (2.12)$$

Corolario 2.5.4. *D tiene n vértices y exactamente dos autovalores diferentes, si, y sólo si, módulo arcos que no pertenecen a ciclos,*

$$D = \underbrace{K_r \oplus K_r \oplus \dots \oplus K_r}_{\frac{n}{r} - \text{copias}}$$

donde r es un divisor de n .

Demostración. Si D tiene exactamente dos autovalores diferentes entonces por el Proposición 2.2.5, ambos son diferentes de cero. Manteniendo la notación anterior, deducimos de (3.1.7) que cada D_i tiene exactamente dos autovalores diferentes y del Teorema 2.5.3, que $D_i = K_r$ para todo $i = 1, \dots, s$. En otras palabras,

$$\widehat{D} = \underbrace{K_r \oplus K_r \oplus \dots \oplus K_r}_{s - \text{copias}}$$

y $n = rs$. □

En particular, si D es un digrafo con p vértices, p un número primo, y exactamente dos autovalores diferentes, entonces $D = K_p$.

Ejercicio 2.5.5. *Demuestre que un grafo G con n vértices tiene exactamente dos autovalores si, y sólo si,*

$$G = \underbrace{K_r \oplus K_r \oplus \dots \oplus K_r}_{\frac{n}{r} - \text{copias}}$$

donde r es un divisor de n .

Vamos ahora a examinar los digrafos con exactamente tres autovalores. Denotamos por Ω al conjunto de todos los digrafos fuertemente conexos con exactamente 3 autovalores diferentes. Como podemos ver en la Proposición 2.3.9, ejemplos de digrafos en Ω son los digrafos fuertemente regulares, que son digrafos reales en el sentido que todos sus autovalores son números reales (de hecho, sus autovalores son números enteros). Otra clase de digrafos reales son los digrafos bipartitos en Ω . Recordamos que un digrafo es bipartito si el conjunto de vértices se puede partir en dos conjuntos U y V de tal manera que todo arco tiene vértice inicial en U y vértice terminal en V , o viceversa.

Proposición 2.5.6. *Supongamos que $D \in \Omega$ tiene $n \geq 3$ vértices y k arcos simétricos. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. D es un digrafo bipartito;
2. $\sigma(D) = \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 & -\sqrt{k} \\ 1 & n-2 & 1 \end{pmatrix}$;

$$3. \phi_D(z) = z^n - kz^{n-2}.$$

Más aún, $k \geq 2$.

Demostración. 1. \Rightarrow 2. Deducimos del Teorema de Perron-Frobenius 1.4.14 que el radio espectral ρ de D es positivo y tiene multiplicidad 1. Como D es bipartito, por la Proposición 2.3.12, su espectro es simétrico con respecto al origen. Luego, $-\rho$ es también un autovalor de multiplicidad 1 y así el otro autovalor tiene que ser cero, con multiplicidad $n - 2$. Por otra parte, de la Proposición 2.2.5,

$$c_2 = \rho^2 + \rho^2$$

y ahora usamos el hecho de que $k = \frac{c_2}{2}$.

2. \Rightarrow 3. Es trivial. 3. \Rightarrow 1. Es consecuencia directa de la Proposición 2.3.11.

Finalmente, supongamos que $k = 1$. Observamos primero que D no tiene ciclos de orden impar porque es bipartito (Proposición 2.1.23). Más aún, por el Teorema 2.2.6, D no tiene ciclos de orden par (excepto el arco simétrico), porque no tiene pares de arcos simétrico independientes. Por lo tanto, D tiene un único ciclo (de longitud 2) y como es fuertemente conexo, tiene que ser K_2 , una contradicción ya que $n \geq 3$. \square

Recordemos que el diámetro de un digrafo D viene dado por

$$\text{diam}(D) = \text{máx} \{d(u, v) : u \text{ y } v \text{ recorriendo los vértices de } D\}$$

Proposición 2.5.7. *Si $D \in \Omega$ es bipartito entonces $\text{diam}(D) \leq m - 1$, donde m es el grado del polinomio minimal de la matriz de adyacencia de D .*

Demostración. Por la Proposición 2.5.6, $\phi_D(z) = z^n - kz^{n-2}$ donde k es el número de arcos simétricos. Entonces el polinomio minimal tiene la forma $\mu_D(z) = z^m - kz^{m-2}$, donde $m \geq 3$. En particular,

$$A^m = kA^{m-2} \tag{2.13}$$

Supongamos que existen vértices u, v de D tales que la distancia entre ellos es $s \geq m$. Entonces por la Proposición 2.2.4, el elemento $a_{uv}^{(s)}$ de la matriz potencia A^s es diferente de cero y $a_{uv}^{(k)} = 0$ para todo $1 \leq k \leq s - 1$. Luego por la relación (2.13) y el hecho de que $s - m \geq 0$, deducimos que $A^s = kA^{s-2}$. Esto es una contradicción porque $a_{uv}^{(s)} \neq 0$ y $a_{uv}^{(s-2)} = 0$. \square

Ejercicio 2.5.8. *Un grafo bipartito G con n vértices tiene tres autovalores si, y sólo si, G es suma directa de K_{r_i, s_i} ($r_i s_i = m$ para todo i) y $n - \sum (r_i + s_i)$ vértices aislados.*

Vamos a ver ahora ejemplos de digrafos no-simétricos fuertemente conexos con tres autovalores.

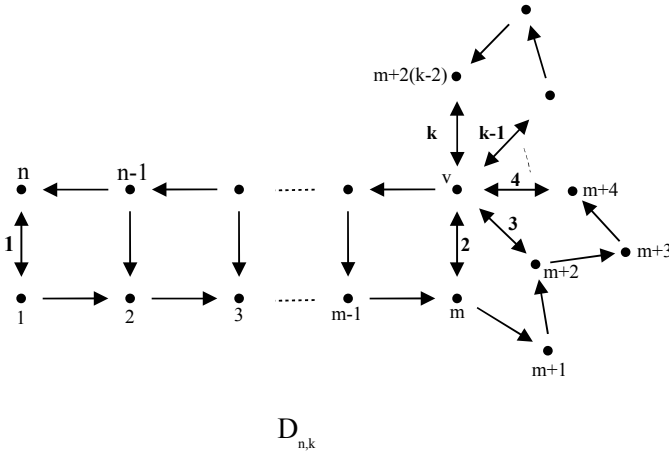


Figura 2.5: $D_{n,k}$

Ejemplo 2.5.9. Sea $k \geq 2$ un entero y n un entero par tal que $n \geq 2k$. Entonces existe $D_{n,k} \in \Omega$ bipartito y no-simétrico, con n vértices y k arcos simétricos. De hecho, consideremos el digrafo que mostramos en la Figura 2.5

Etiquetamos en negritas los arcos simétricos **1, 2, ..., k - 1, k**. Como todo arco de $D_{n,k}$ pertenece a un ciclo, entonces $D_{n,k}$ es fuertemente conexo (Proposición 2.1.14). Por otra parte, es claro que $n = 2m + 2k - 4$. En la tabla podemos ver la estructura cíclica de $D_{n,k}$.

2	4	6	...	$2m$	$2m + 2$	$2m + 4$...	$2m + 2j$...	n
k	k - 1	k - 1	...	k - 1	k - 2	k - 3	...	k - j - 1	...	1

Existen k ciclos de longitud 2, $k - 1$ ciclos de longitud $2t$ para $2 \leq t \leq m$, y $k - j - 1$ ciclos de longitud $2m + 2j$ para $1 \leq j \leq \frac{n-2m}{2}$. Observemos que todo ciclo de $D_{n,k}$ contiene el vértice v , excepto por el ciclo de longitud 2 indicado por **1** en la figura. Para un entero $r \geq 2$, sea \mathcal{L}_{2r}^* el conjunto de elementos de \mathcal{L}_{2r} que no son ciclos y \mathcal{C}_{2r} el conjunto de ciclos de longitud $2r$. Entonces todo elemento de \mathcal{L}_{2r}^* es una suma directa de **1** y un ciclo de longitud $2r - 2$ que no contiene un vértice terminal de **1**. No es difícil ver que $|\mathcal{L}_{2r}^*| = |\mathcal{C}_{2r}|$. En consecuencia, para $r \geq 2$ el coeficiente a_{2r} del polinomio característico de $D_{n,k}$ es

$$a_{2r} = \sum_{l \in \mathcal{L}_{2r}} (-1)^{c(L)} = \sum_{l \in \mathcal{L}_{2r}^*} (-1)^{c(L)} + \sum_{l \in \mathcal{C}_{2r}} (-1)^{c(L)}$$

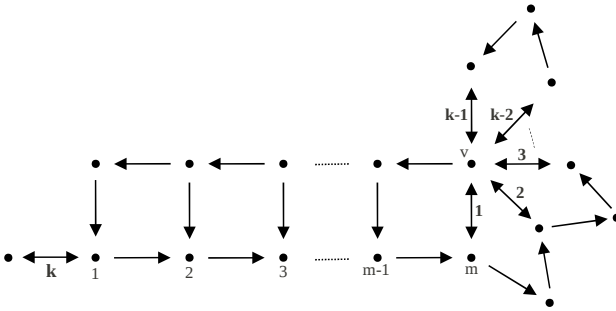


Figura 2.6: Caso impar

Como todo elemento de \mathcal{L}_{2r}^* tiene dos componentes y todo elemento de \mathcal{C}_{2r} tiene una componente, deducimos que $a_{2r} = |\mathcal{L}_{2r}^*| - |\mathcal{C}_{2r}| = 0$. Por lo tanto, $\phi_D(z) = z^n - \frac{c_2}{2}z^{n-2}$ y así termina la demostración.

Ejemplo 2.5.10. El Ejemplo 2.5.9 lo podemos modificar para incluir el caso n impar. En este caso consideramos el digrafo que aparece en la Figura 2.6:

En el caso de grafos bipartitos con 3 autovalores, la matriz de adyacencia es diagonalizable y, en consecuencia, el polinomio minimal tiene grado 3. Por lo tanto, el diámetro es estrictamente menor que 3, lo que obliga al grafo a ser una suma directa de grafos bipartitos completos (ver Ejercicio 2.5.8). Cuando trabajamos con digrafos no-simétricos, el polinomio minimal puede tener grado muy alto. Un digrafo D es no-derogatorio si $\mu_D = \phi_D$, donde μ_D denota el polinomio minimal de D . Demostraremos a continuación que los digrafos bipartitos no-simétricos $\{D_{n,k}\} \subseteq \Omega$ introducidos en los Ejemplos 2.5.9 y 2.5.10, son digrafos no-derogatorios.

Proposición 2.5.11. $D_{n,k}$ es no-derogatorio para todo n y k .

Demostración. Demostraremos el resultado cuando n es par, el caso impar es similar. Consideremos el digrafo $D_{n,k}$ con el etiquetamiento de los vértices como aparece en la Figure 2.5. Como el polinomio minimal μ de D tiene la forma

$\mu(z) = z^m - kz^{m-2}$, para algún $3 \leq m \leq n$, es suficiente con demostrar que

$$A^{n-1} \neq kA^{n-3} \quad (2.14)$$

donde A es la matriz de adyacencia de D . Sean α y β las $(n, n-1)$ -entradas de A^{n-1} y A^{n-3} , respectivamente. Demostraremos que $\alpha \geq k\beta + 1$ lo que implicará (2.14). Recordemos que α (respectivamente, β) representan el número de caminos de longitud $n-1$ (respectivamente, $n-3$) de D que van del vértice n hasta el vértice $n-1$. Sea π el camino de longitud $n-3$ desde n hasta $n-1$. Observamos que el camino π tiene que atravesar el vértice v por lo menos una vez. La primera vez que pase por v , insertamos en π el camino de longitud 2

$$v, m+2i, v$$

para cada $i = 0, \dots, k-2$, obteniendo $k-1$ diferentes caminos π_1, \dots, π_{k-1} de longitud $n-1$ desde n hasta $n-1$. Un camino más π_k de longitud $n-1$ desde n hasta $n-1$ podemos obtener a partir de π insertando el camino de longitud 2

$$n, 1, n$$

en el vértice inicial n de π . Observamos que, en cada uno de estos k caminos, existe un vértice que es atravesado por lo menos dos veces. Como el camino $\gamma = (n, 1, 2, \dots, n-2, n-1)$ que pasa a través cada vértice de D exactamente una vez tiene longitud $n-1$, tiene que ser diferente de todos los π_1, \dots, π_k , y, en consecuencia, $\alpha \geq k\beta + 1$, lo que termina la demostración. \square

A diferencia de los grafos bipartitos, no parece fácil encontrar un teorema de estructura para los digrafos bipartitos en Ω . Construiremos a continuación una nueva familia $\{E_n\}$ de digrafos bipartitos en Ω donde $k = 2$, con estructura diferente a $\{D_{n,2}\}$.

Ejemplo 2.5.12. *Para cada $n \geq 9$ consideremos el digrafo E_n que parece en la Figura 2.7.*

Entonces E_n es un digrafo bipartito no-simétrico en Ω con n vértices y $k = 2$. Lo demostraremos para n par, cuando n es impar la demostración es similar. Primero observamos que todo ciclo de E_n , diferente a los arcos simétricos, pasan a través del vértice etiquetado en la Figura 2.7 como $n-2$. En consecuencia, ninguno de estos ciclos son independientes. Por lo tanto, podemos describir los subdigrafos lineales dirigidos de E_n como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n &= \emptyset \\ \mathcal{L}_{n-2} &= \{C_{n-2}, C_{n-4} \oplus C_2, C_{n-4} \oplus C_2, C_{n-6} \oplus C_2 \oplus C_2\} \end{aligned}$$

Para cada $j = 2, \dots, \frac{n-8}{2}$

$$\mathcal{L}_{n-2j} = \left\{ \begin{array}{l} C_{n-2j}, C_{n-2j}, C_{n-2j-2} \oplus C_2, C_{n-2j-2} \oplus C_2, C_{n-2j-2} \oplus C_2, \\ C_{n-2j-4} \oplus C_2 \oplus C_2 \end{array} \right\}$$

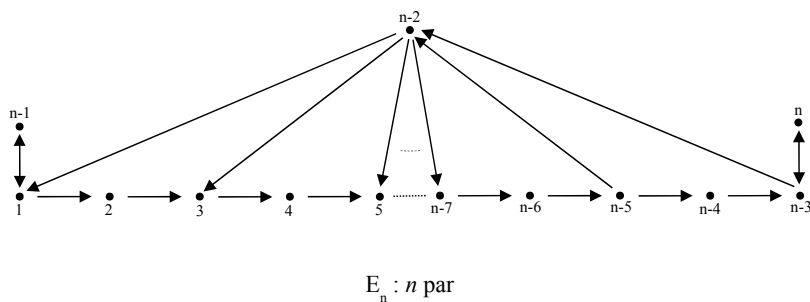


Figura 2.7: Digrafo no-simétrico con 3 autovalores

y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6 &= \{C_6, C_6, C_4 \oplus C_2, C_4 \oplus C_2\} \\ \mathcal{L}_4 &= \{C_4, C_2 \oplus C_2\} \\ \mathcal{L}_2 &= \{C_2, C_2\} \end{aligned}$$

Deducimos del Teorema de los coeficientes de Sachs, que $\phi_{E_n} = z^n - 2z^{n-2}$.

Dos digrafos D_1 y D_2 son coespectrales si son no-isomórficos y $\phi_{D_1} = \phi_{D_2}$.

Ejemplo 2.5.13. *Los digraphs $D_{n,2}$ y E_n son coespectrales para todo $n \geq 9$. De hecho, el polinomio característico de $D_{n,2}$ es $\phi_{D_{n,2}}(z) = z^n - 2z^{n-2}$, determinado por los subdigrafos lineales dirigidos $D_{n,2}$: $\mathcal{L}_2 = \{C_2, C_2\}$ y para cada $j = 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$*

$$\mathcal{L}_{2j} = \{C_{2j}, C_{2j-2} \oplus C_2\}$$

Claramente $D_{n,2} \not\cong E_n$.

Existe una conexión interesante entre digrafos bipartitos en Ω y sus correspondientes digrafos de línea. En el Teorema 2.2.13 demostramos que el polinomio característico $\phi_D(z)$ de un digrafo D con m arcos y n vértices y el polinomio característico $\phi_{\mathcal{L}(D)}(z)$ del correspondiente digrafo de línea están relacionados por la fórmula

$$\phi_{\mathcal{L}(D)}(z) = z^{m-n} \phi_D(z). \quad (2.15)$$

Los digrafos de línea iterados de D se definen recursivamente como $\mathcal{L}^0(D) = D$ y $\mathcal{L}^q(D) = \mathcal{L}(\mathcal{L}^{q-1}(D))$, para un entero $q \geq 1$.

Corolario 2.5.14. *Sea $D \in \Omega$ un digrafo bipartito con k arcos simétricos y $n \geq 3$ vértices. Entonces $\{\mathcal{L}^q(D)\}_{q \in \mathbb{N}}$ es una familia infinita de digrafos no-simétricos bipartitos en Ω con k arcos simétricos.*

Demostración. Esto es consecuencia inmediata de (2.15), Proposición 2.5.6 y Ejercicio 2.1.29. \square

Hasta ahora sólo hemos considerado digrafos reales, pero números complejos pueden aparecer en el espectro de digrafos que pertenecen a Ω . Por ejemplo, el ciclo C_3 tiene espectro

$$\sigma(C_3) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.5.15. *Sea D un digrafo no-real en Ω con n vértices. Entonces n es impar y el espectro viene dado por*

$$\sigma(D) = \begin{pmatrix} -(n-1)R & R+Si & R-Si \\ 1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n-1}{2} \end{pmatrix}$$

donde R es la (única) raíz negativa del polinomio

$$Q(z) = (n^3 - n)z^3 - 3c_2z + c_3$$

$$y S = \sqrt{\frac{n(n-1)R^2 - c_2}{n-1}}.$$

Demostración. Por el Teorema 1.4.14 y el teorema de las raíces conjugadas, el espectro de D tiene la forma

$$\sigma(D) = \begin{pmatrix} \rho & R+Si & R-Si \\ 1 & m & m \end{pmatrix}$$

donde ρ es un número real positivo y $n = 2m + 1$ es impar. Como la suma de los autovalores es igual a cero, deducimos que

$$\rho = -2mR = -(n-1)R \quad (2.16)$$

Por otra parte, las ecuaciones de los momentos espectrales para D son

$$\begin{aligned} c_p &= (-1)^p (n-1)^p R^p + \frac{(n-1)}{2} [(R+Si)^p + (R-Si)^p] \\ &= (-1)^p (n-1)^p R^p + (n-1) \operatorname{Re} [(R+Si)^p] \end{aligned} \quad (2.17)$$

para todo $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. En particular, cuando $p = 2$,

$$c_2 = (n-1)^2 R^2 + (n-1)(R^2 - S^2)$$

lo que implica

$$S^2 = \frac{n(n-1)R^2 - c_2}{n-1} \quad (2.18)$$

Para $p = 3$ obtenemos de (2.17) que

$$c_3 = -(n-1)^3 R^3 + (n-1)(R^3 - 3RS^2) \quad (2.19)$$

Después de sustituir en (2.19) la expresión de S^2 dada en (2.18) obtenemos la ecuación

$$(n^3 - n)R^3 - 3c_2R + c_3 = 0$$

Así, R es una raíz de $Q(z)$, que es negativa por (2.16). Demostramos a continuación que R es la única raíz negativa de $Q(z)$. Usando cálculo elemental deducimos que $Q(z)$ es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, -t)$ y estrictamente decreciente en el intervalo $(-t, 0)$, donde $t = \sqrt{\frac{c_2}{(n^3-n)}}$. Por otra parte, sabemos por (2.18) que

$$R^2 \geq \frac{c_2}{n(n-1)} \quad (2.20)$$

Luego,

$$|R| \geq \sqrt{\frac{c_2}{n(n-1)}} > t$$

En consecuencia, $Q(z) > Q(R) = 0$ para todo $z \in (R, -t)$ y $0 \leq c_3 = Q(0) < Q(z)$ para todo $z \in [-t, 0)$. \square

Corolario 2.5.16. *Todo digrafo no-real en Ω contiene un 3-ciclo.*

Demostración. Si $D \in \Omega$ es un digrafo no-real sin 3-ciclos entonces $c_3 = 0$. Luego $R = -\sqrt{\frac{3c_2}{n^3-n}}$ es la única raíz negativa de $Q(z) = (n^3 - n)z^3 - 3c_2z$. Deducimos de (2.20) en la demostración del Teorema 2.5.15 y el hecho de que $n \geq 3$

$$c_2 \leq n(n-1)R^2 = \frac{3c_2}{(n+1)} < c_2,$$

una contradicción. \square

Podemos obtener más información sobre la estructura del digrafo a partir del polinomio $Q(z)$ del Teorema 2.5.15.

Corolario 2.5.17. *Sea D un digrafo no-real en Ω con n vértices y $Q(z)$ definido como en el Teorema 2.5.15. Entonces $Q(z)$ tiene tres raíces reales si, y sólo si, $c_3 < 2\sqrt{\frac{c_2^3}{n^3-n}}$.*

Demostración. Manteniendo la notación del Teorema 2.5.15, los valores extremos locales de $Q(z)$ se alcanzan en $t = \pm\sqrt{\frac{c_2}{n^3-n}}$. Como Q tiene una única raíz negativa $R \leq -t$, entonces claramente $Q(z)$ tiene tres raíces reales si, y sólo si, $Q(t) = c_3 - 2\sqrt{\frac{c_2^3}{n^3-n}} < 0$. \square

Capítulo 3

Energía de un digrafo

3.1. Energía de un digrafo

La energía de un grafo G se define como

$$E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de G y $|\lambda_i|$ denota el valor absoluto de λ_i .

En este capítulo, presentaremos una generalización de este concepto a digrafos y estudiaremos sus propiedades. El siguiente ejercicio demuestra que, en principio, hay varias formas de realizar esta extensión.

Ejercicio 3.1.1. *Sea G un grafo con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Demuestre que la energía $E(G)$ también se puede expresar por medio de las siguientes expresiones:*

1. $E_+(G) = 2 \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j$.
2. $E_c(G) = \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j - \sum_{\lambda_j < 0} \lambda_j$.
3. $E_{\text{re}}(G) = \text{Re} \left(\sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j - \sum_{\lambda_j < 0} \lambda_j \right) = \sum_{j=1}^n |\text{Re}(\lambda_j)|$.
4. $E_a(G) = \sum_{j=1}^n |(\lambda_j)|$.

Consideremos entonces la siguiente definición:

Definición 3.1.2. Sea D un digrafo con n vértices y autovalores z_1, \dots, z_n . La energía de D la definimos como

$$e(D) = \sum_{i=1}^n |\operatorname{Re}(z_i)|$$

donde $\operatorname{Re}(z_i)$ denota la parte real de z_i .

Como veremos más adelante, la Definición 3.1.2 preserva, entre otras propiedades, la llamada fórmula integral de Coulson, que es uno de los resultados fundamentales de la teoría.

Ejemplo 3.1.3. Si G es un grafo y G^* su digrafo simétrico asociado, entonces es claro que $A(G) = A(G^*)$ y, por lo tanto, $E(G) = e(G^*)$. De esta forma, la Definición 3.1.2 generaliza el concepto de energía de un grafo a digrafos.

Por la Proposición 2.5.1, si D es un digrafo acíclico con n vértices, entonces 0 es el único autovalor con multiplicidad n , y así $e(D) = 0$. El recíproco también es cierto, como podemos ver en nuestro siguiente resultado.

Proposición 3.1.4. Un digrafo D es acíclico si, y sólo si, $e(D) = 0$.

Demostración. Sean z_1, \dots, z_n los autovalores de D y supongamos que $e(D) = 0$. Entonces $\operatorname{Re}(z_i) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. En particular, por el Teorema 1.4.14, el radio espectral ρ es un número real no-negativo y así $\rho = 0$. Además, $|z_i| \leq \rho = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, implica que todos los autovalores son iguales a cero. En consecuencia, por la Proposición 2.5.1, D es acíclico. \square

Ejercicio 3.1.5. Sea C_n el ciclo de n vértices. Demuestre que

$$e(C_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \left| \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right|$$

Ejercicio 3.1.6. Sea D un digrafo con n vértices y único ciclo C_r de longitud r , donde $2 \leq r \leq n$. Demuestre que

$$e(D) = \sum_{k=0}^{r-1} \left| \cos\left(\frac{2k\pi}{r}\right) \right|$$

Recordamos que un digrafo D es fuertemente conexo si para cada par de vértices u, v , existe un camino desde u hasta v . Las componentes fuertes de un digrafo son los subdigrafos fuertemente conexos maximales.

Proposición 3.1.7. Sea D un digrafo y S_1, \dots, S_k sus componentes fuertes. Entonces

$$e(D) = \sum_{i=1}^k e(S_i)$$

Demostración. Si S_1, \dots, S_k son las componentes fuertes de D entonces por el Ejercicio 2.2.7,

$$\phi_D(z) = \phi_{S_1}(z) \cdot \phi_{S_2}(z) \cdots \phi_{S_k}(z)$$

El resultado se sigue de la definición de la energía de un digrafo. \square

Ahora vamos a obtener una representación integral de la energía, que justifica nuestra elección para la definición de energía de un digrafo. El Teorema 3.1.8, que mostramos a continuación, es una generalización de la célebre fórmula integral de Coulson para grafos [6]: si G es un grafo con n vértices, entonces

$$E(G) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(n - \frac{ix\phi'_G(ix)}{\phi_G(ix)} \right) dx$$

La fórmula integral de Coulson nos permite expresar la energía en términos del polinomio característico del grafo.

Sea D un digrafo con n vértices y autovalores z_1, \dots, z_n . Si A es la matriz de adyacencia de D entonces por la Proposición 2.2.5,

$$\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n z_k = 0$$

lo que implica

$$\sum_{k=1}^n \text{Re}(z_k) = 0 = \sum_{k=1}^n \text{Im}(z_k)$$

y, en consecuencia,

$$e(D) = 2 \sum_{+} \text{Re}(z_k)$$

donde \sum_{+} indica la suma sobre todos los autovalores que tienen parte real positiva.

Teorema 3.1.8. (*Representación integral de la energía*) Sea D un digrafo con n vértices. Entonces

$$e(D) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(n - \frac{ix\phi'_D(ix)}{\phi_D(ix)} \right) dx \tag{3.1}$$

Demostración. Sean w_1, \dots, w_p los autovalores diferentes de D con multiplicidades μ_1, \dots, μ_p , respectivamente. Entonces $\phi_D(z) = \prod_{j=1}^p (z - w_j)^{\mu_j}$ y así

$$\frac{\phi'_D(z)}{\phi_D(z)} = \sum_{j=1}^p \frac{\mu_j}{z - w_j}$$

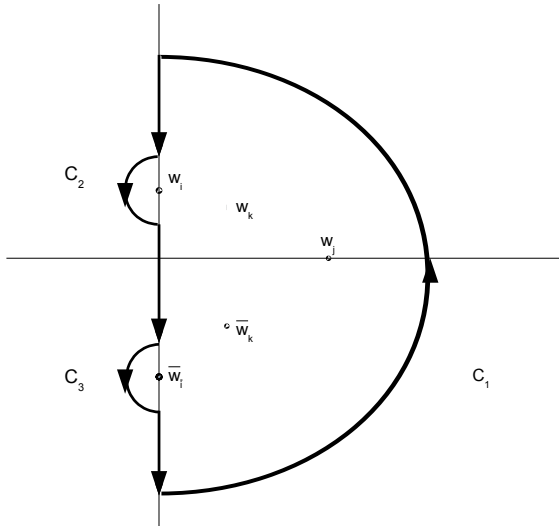


Figura 3.1: Contorno usado en la demostración del Teorema 3.1.8

es una función analítica con singularidades en w_1, \dots, w_p . Sabemos que si w_k es un autovalor, entonces el conjugado $\overline{w_k}$ también lo es. Además, éstos pueden aparecer sobre el eje imaginario. Por otro lado, si $w_k = 0$ para algún k , podemos factorizar el polinomio característico como $\phi_D(z) = z^m \psi(z)$. De esta forma, $e(\phi_D(z)) = e(\psi(z))$ y, por lo tanto, supondremos en lo que sigue que ninguno de los autovalores de $\phi_D(z)$ es nulo.

Consideramos entonces el contorno Γ , que aparece en la Figura 3.1. La curva Γ contiene en su interior a todos los autovalores que poseen parte real positiva y no contiene al resto de los autovalores. Como podemos ver, Γ consiste de semicírculos orientados en dirección contraria a las agujas del reloj C_1, C_2 y C_3 , con radios r, ε y ε' , respectivamente, y tres segmentos de línea. Como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy aplicada a la función

$$f(z) := z \frac{\phi'_D(z)}{\phi_D(z)} = \sum_{j=1}^p \frac{z \mu_j}{z - w_j}$$

deducimos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{+} \mu_j w_j = \sum_{+} z_j = \sum_{+} \operatorname{Re}(z_j) = \frac{1}{2} e(D) \quad (3.2)$$

Evaluando esta integral a lo largo de cada una de las curvas que conforman

a Γ , y observando que si w_j es un autovalor con parte real nula, se tiene

$$\lim_{z \rightarrow w_j} (z - w_j)(f(z) - n) = \mu_j w_j$$

entonces

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{C_2} f(z) dz + \lim_{\varepsilon' \downarrow 0} \int_{C_3} f(z) dz = 0.$$

Además,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} [f(z) - n] dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [n - f(iy)] dy \quad (3.3)$$

porque el hecho de que

$$\begin{aligned} z(f(z) - n) &= z \left(\sum_{j=1}^n \frac{z_j}{z - z_j} \right) \\ &\rightarrow \sum_{j=1}^n z_j = 0 \end{aligned}$$

cuando $|z| \rightarrow \infty$ implica que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_1} [f(z) - n] dz = 0$$

Combinando (3.2) y (3.3) obtenemos el resultado deseado. En caso de haber más autovalores sobre el eje imaginario, procedemos de forma similar. \square

Observación 3.1.9. *Es fácil ver que la representación integral de la energía de digrafos también es válida para multi-digrafos en general.*

La siguiente proposición ilustra una variante de la representación integral de la energía que acabamos de mostrar.

Proposición 3.1.10. *Si D es un digrafo con n vértices entonces*

$$e(D) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \log \left| x^n \phi_D \left(\frac{i}{x} \right) \right|$$

Demostración. Consideremos la función $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\gamma(t) := t^n \phi_D(i/t).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \sum_{k=0}^n i^{n-k} a_k t^k \\ &= i^n \sum_{k=0}^n a_k (-it)^k \\ &=: i^n \phi^*(t) \end{aligned}$$

y, como los coeficientes $\{a_k\}$ son reales, tenemos que $\phi^*(-t) = \overline{\phi^*(t)}$. Sea \log una rama del logaritmo definida sobre $\gamma(\mathbb{R})$ tal que $\log(\gamma(0)) = \frac{n\pi}{2}i$ y consideremos la función $v(t) = \log(\gamma(t))$. De la regla de derivación de cualquier rama del logaritmo natural se tiene que

$$dv = \left(\frac{n}{t} - \frac{\phi'_D(i/t) i}{\phi_D(i/t) t^2} \right) dt \quad (3.4)$$

Recordemos que la energía de un digrafo se puede calcular mediante la integral 3.1, la cual podemos escribir como

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \left(n - \frac{ix\phi'_D(ix)}{\phi_D(ix)} \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \left(n - \frac{ix\phi'_D(ix)}{\phi_D(ix)} \right) dx + \int_0^{+\infty} \left(n - \frac{ix\phi'_D(ix)}{\phi_D(ix)} \right) dx \end{aligned} \quad (3.5)$$

Haciendo el cambio de variable $x = 1/t$ en cada una de las integrales (3.5), obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \left(n - \frac{ix\phi'_D(ix)}{\phi_D(ix)} \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \left(n - \frac{1}{t} \frac{\phi'_D(i/t)}{\phi_D(i/t)} \right) \frac{i}{t^2} dt + \int_0^{\infty} \left(n - \frac{1}{t} \frac{\phi'_D(i/t)}{\phi_D(i/t)} \right) \frac{i}{t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \left(\frac{n}{t} - \frac{i}{t^2} \frac{\phi'_D(i/t)}{\phi_D(i/t)} \right) \frac{1}{t} dt + \int_0^{\infty} \left(\frac{n}{t} - \frac{i}{t^2} \frac{\phi'_D(i/t)}{\phi_D(i/t)} \right) \frac{1}{t} dt \end{aligned} \quad (3.6)$$

Integrando por partes cada una de las integrales (3.6) y usando (3.4), encontramos otra forma de escribir la energía, a saber,

$$e(D) = \int_{-\infty}^{\infty} (\log(\gamma(t)) - \log(\gamma(0))) \frac{1}{t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (v(t) - v(0)) \frac{1}{t^2} dt \quad (3.7)$$

Usando la aproximación de Taylor de primer orden de la función \log y recordando que $a_0 = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} v(t) &= \log(\gamma(t)) \\ &= \log([\gamma(t) - 1] + 1) \\ &= (\gamma(t) - 1) + O(t^2) \\ &= (-a_1 t i^{n-1} + O(t^2)) + O(t^2) = -a_1 t i^{n-1} + O(t^2) \end{aligned}$$

y, por lo tanto, la integral (3.7) es convergente. Integrando nuevamente por partes esta integral obtenemos la expresión buscada. \square

La fórmula derivada de la representación integral 3.1.8 es particularmente interesante para estudiar el comportamiento de la energía sobre algunas clases de digrafos. Denotemos por $\mathcal{D}_{n,h}$ el conjunto de digrafos con n vértices que tienen sólo ciclos de longitud h .

Proposición 3.1.11. *Si $D \in \mathcal{D}_{n,h}$ entonces*

$$\phi_D(x) = x^n + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor} (-1)^k b_k x^{n-kh}$$

donde $b_k \geq 0$ para todo $k = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{h} \rfloor$.

Demostración. Por el Teorema 2.2.6, el coeficiente que acompaña a x^{n-kh} es

$$a_k = \sum_{L \in \mathcal{L}_{kh}} (-1)^{\text{comp}(L)}$$

Como todo ciclo de D tiene longitud h ,

$$L \in \mathcal{L}_{kh} \iff L \text{ es suma directa de } k \text{ ciclos de longitud } h$$

Entonces $a_k = (-1)^k b_k$, donde $b_k \geq 0$ es el número de subdigrafos lineales de D formados por k ciclos de longitud h . Más aún, es claro que $a_j = 0$ cuando j no es un múltiplo de h , porque en este caso, $\mathcal{L}_{jh} = \emptyset$. \square

Ahora podemos definir un cuasi-orden sobre $\mathcal{D}_{n,h}$ de la siguiente manera: si $D, D' \in \mathcal{D}_{n,h}$ tienen polinomios característicos

$$\phi_D(x) = x^n + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor} (-1)^k b_k x^{n-kh}$$

y

$$\phi_{D'}(x) = x^n + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor} (-1)^k b'_k x^{n-kh}$$

donde $b_k, b'_k \in \mathbb{N}$ para todo $k = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{h} \rfloor$, entonces definimos

$$D \preceq D' \iff b_k \leq b'_k$$

para todo $k = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{h} \rfloor$. En el caso de que $D \preceq D'$ y para algún k se tenga que $b_k < b'_k$, entonces escribiremos $D \prec D'$.

Ejercicio 3.1.12. Demuestre que la relación \preceq definida sobre $\mathcal{D}_{n,h}$ es un cuasi-orden, pero no es un orden parcial (porque \preceq no es antisimétrica: $D_1 \preceq D_2$ y $D_2 \preceq D_1$ no implican $D_1 = D_2$).

Teorema 3.1.13. Sea h un entero de la forma $h = 4l - 2$, donde $l \geq 1$. Entonces la energía es creciente con respecto al cuasi-orden definido sobre $\mathcal{D}_{n,h}$. En otras palabras, si $D, D' \in \mathcal{D}_{n,h}$ y $D \prec D'$ entonces $e(D) < e(D')$.

Demostración. Sea $D \in \mathcal{D}_{n,h}$. Por la Proposición 3.1.11,

$$\phi_D(x) = x^n + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor} (-1)^k b_k x^{n-kh}$$

Evaluando esta expresión en $\frac{i}{x}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
 \phi_D \left(\frac{i}{x} \right) &= \frac{i^n}{x^n} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor} (-1)^k b_k \frac{i^{n-kh}}{x^{n-kh}} \\
 &= \frac{i^n}{x^n} \left(1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor} (-1)^k b_k x^{kh} i^{-k(4l-2)} \right) \\
 &= \frac{i^n}{x^n} \left(1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor} (-1)^k b_k x^{kh} (-1)^{-k} \right) \\
 &= \frac{i^n}{x^n} \left(1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor} b_k x^{kh} \right)
 \end{aligned}$$

Se deduce de la Proposición 3.1.10 que

$$\begin{aligned}
 e(D) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \log \left| x^n \phi_D \left(\frac{i}{x} \right) \right| \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \log \left| x^n \frac{i^n}{x^n} \left(1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor} b_k x^{kh} \right) \right| \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \log \left| i^n \left(1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor} b_k x^{kh} \right) \right|
 \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$e(D) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \log \left| 1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor} b_k x^{kh} \right| \frac{dx}{x^2}$$

Esta expresión claramente implica que la energía es creciente con respecto al cuasi-orden definido sobre $\mathcal{D}_{n,h}$. \square

Ejercicio 3.1.14. Sea G un grafo y $h \geq 2$ un entero. Construya una familia de digrafos de la siguiente forma: a cada arista uv de G le corresponde una camino dirigido de longitud r de u a v y un camino dirigido de longitud s de v a u , de tal manera que $r + s = h$. Denote por $\mathcal{D}_h(G)$ al conjunto de digrafos obtenidos a partir de G de esta forma.

1. Si T es un árbol, entonces $\mathcal{D}_h(T) \subseteq \mathcal{D}_{h,p}$, donde $p = (n-1)(h-2) + n$;
2. Si T es un árbol y $\phi_T(x) = x^n + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k b_k x^{n-2k}$, entonces para todo $D \in \mathcal{D}_h(T)$

$$\phi_D(x) = x^p + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{p}{h} \rfloor} (-1)^k b_k x^{p-kh}$$

En particular, todos los digrafos en $\mathcal{D}_h(T)$ son coespectrales.

3. Sea \mathcal{T} una familia de árboles con n vértices. Supongamos que $L \preceq T \preceq M$ para todo $T \in \mathcal{T}$. Sea $X \in \mathcal{D}_h(L)$ y $Y \in \mathcal{D}_h(T)$. Entonces $X \preceq Z \preceq Y$ para todo $Z \in \mathcal{D}_h(\mathcal{T}) = \{\mathcal{D}_h(T) : T \in \mathcal{T}\}$.

3.2. Cotas para la energía de un digrafo

La célebre desigualdad de McClelland [27] establece que $E(G) \leq \sqrt{2mn}$ para todo grafo G con n vértices y m aristas. Vamos a comenzar esta sección generalizando este resultado para digrafos, pero primero necesitamos un resultado previo.

Lema 3.2.1. *Sea D un digrafo con n vértices y a arcos. Si z_1, \dots, z_n son los autovalores de D entonces*

1. $\sum_{k=1}^n (\operatorname{Re}(z_k))^2 - \sum_{k=1}^n (\operatorname{Im}(z_k))^2 = c_2$;
2. $\sum_{k=1}^n (\operatorname{Re}(z_k))^2 + \sum_{k=1}^n (\operatorname{Im}(z_k))^2 \leq a$.

Demostración. La parte 1 es consecuencia de la relación

$$c_2 = \sum_{k=1}^n z_k^2 = \sum_{k=1}^n (\operatorname{Re}(z_k))^2 - \sum_{k=1}^n (\operatorname{Im}(z_k))^2 + 2i \sum_{k=1}^n (\operatorname{Re}(z_k)) (\operatorname{Im}(z_k))$$

Por el Teorema 1.2, la matriz de adyacencia A de D es unitariamente equivalente a una matriz triangular superior $T = (t_{jk})$ tal que $t_{kk} = z_k$ para todo $k = 1, \dots, n$. Por lo tanto,

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk}^2 = \sum_{j,k=1}^n |t_{jk}|^2.$$

Como A es una $(0,1)$ -matriz, se deduce que

$$\begin{aligned} a &= \sum_{j,k=1}^n a_{jk} = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}^2 = \sum_{j,k=1}^n |t_{jk}|^2 \geq \sum_{k=1}^n |t_{kk}|^2 = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (\operatorname{Re}(z_k))^2 + \sum_{k=1}^n (\operatorname{Im}(z_k))^2 \end{aligned}$$

con lo cual probamos el resultado. \square

Teorema 3.2.2. *Sea D un digrafo con n vértices y a arcos. Entonces*

$$e(D) \leq \sqrt{\frac{1}{2}n(a + c_2)}$$

La igualdad se satisface si, y sólo si, D es suma directa de $\frac{n}{2}$ copias de K_2 , módulo arcos que no pertenecen a ciclos.

Demostración. Por el Lema 3.2.1, se obtiene que

$$\sum_{k=1}^n (\text{Im}(z_k))^2 \leq \frac{1}{2}(a - c_2),$$

donde z_1, \dots, z_n son los autovalores de D . Sea $X = (|\text{Re}(z_1)|, \dots, |\text{Re}(z_n)|)$ y $Y = (1, \dots, 1)$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el Lema 3.2.1 deducimos que

$$\begin{aligned} e(D) &= \sum_{k=1}^n |\text{Re}(z_k)| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n (\text{Re}(z_k))^2} = \sqrt{n} \sqrt{c_2 + \sum_{k=1}^n (\text{Im}(z_k))^2} \\ &\leq \sqrt{n} \sqrt{c_2 + \frac{1}{2}(a - c_2)} = \sqrt{\frac{1}{2}n(a + c_2)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para ver la segunda parte, claramente $\bigoplus_{k=1}^{\frac{n}{2}} K_2$ tiene n vértices, n arcos y n caminos cerrados de longitud 2. En consecuencia,

$$\sqrt{\frac{1}{2}n(n + n)} = n = e\left(\bigoplus_{k=1}^{\frac{n}{2}} K_2\right).$$

Recíprocamente, supongamos que $e(D) = \sqrt{\frac{1}{2}n(a + c_2)}$. Esta condición implica que D no tiene vértices aislados; de lo contrario, si D^* es el digrafo que se obtiene a partir de D eliminando los vértices aislados, entonces

$$\sqrt{\frac{1}{2}n(a + c_2)} = e(D) = e(D^*) \leq \sqrt{\frac{1}{2}n^*(a + c_2)},$$

donde $n^* \leq n$ es el número de vértices del digrafo D^* . La desigualdad anterior implica $n \leq n^*$ y así $n = n^*$ y, por lo tanto, D no tiene vértices aislados.

Por otro lado, por la desigualdad 3.8,

$$\sum_{k=1}^n |\text{Re}(z_k)| = \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n (\text{Re}(z_k))^2},$$

lo que implica que $|\operatorname{Re}(z_k)| = r \in \mathbb{R}$, para todo $k = 1, \dots, n$. Como el radio espectral ρ de la matriz de adyacencia es un autovalor, deducimos que $|\operatorname{Re}(z_k)| = \rho$, para todo $k = 1, \dots, n$. En consecuencia,

$$\rho = |\operatorname{Re}(z_k)| \leq |z_k| \leq \rho$$

y así $|\operatorname{Re}(z_k)| = |z_k| = \rho$ para todo $k = 1, \dots, n$. En particular, todos los autovalores de D son números reales con valor absoluto ρ . Por el Corolario 2.5.4, D es suma directa de $\frac{n}{r}$ copias de K_r , para algún divisor r de n , módulo arcos que no pertenecen a ciclos. En particular, $\rho = r - 1$ y $e(D) = \frac{2n\rho}{\rho+1}$. Por otra parte, como ρ y $-\rho$ son los únicos autovalores de D ,

$$n\rho = e(D) = \frac{2n\rho}{\rho+1}$$

lo que implica que $\rho = 1$ y así, $r = 2$. Es decir, D es una suma directa de $\frac{n}{2}$ copias de K_2 , módulo arcos que no pertenecen a ciclos. \square

Ejercicio 3.2.3. (*Desigualdad de McClelland*) Demuestre que si G es un grafo con n vértices y m aristas, entonces

$$E(G) \leq \sqrt{2mn}$$

La igualdad se satisface si, y sólo si, G es suma directa de copias de K_2 .

Nuestro próximo resultado establece un cota superior para la energía en término del número de arcos y mostraremos además que es alcanzada por algunos digrafos. Cuando un digrafo con n vértices es fuertemente conexo entonces $d^+(v_i) \geq 1$ (y $d^-(v_i) \geq 1$) para todo $i = 1, \dots, n$. En consecuencia, $a \geq n$ porque $a = \sum_{k=1}^n d^+(v_i) \geq n$ (Ver Proposición 2.1.4).

Teorema 3.2.4. Si D es un digrafo con a arcos, entonces $e(D) \leq a$. La igualdad se satisface si, y sólo si, D es suma directa de $\frac{a}{2}$ copias de K_2 , más posiblemente algunos vértices aislados.

Demostración. Supongamos que D es fuertemente conexo con n vértices. Entonces $a \geq n$. También sabemos que $c_2 \leq a$. Entonces por el Teorema 3.2.2,

$$e(D) \leq \sqrt{\frac{1}{2}n(a+c_2)} \leq \sqrt{na} \leq \sqrt{a^2} = a \quad (3.9)$$

En el caso general, sean D_1, \dots, D_s las componentes fuertemente conexas de D . Si n_i y a_i denotan el número de vértices y arcos de D_i , respectivamente, para $i = 1, \dots, s$, entonces $\sum_{i=1}^s n_i = n$ y $\sum_{i=1}^s a_i \leq a$. Por la Proposición 3.1.7,

$$e(D) = \sum_{i=1}^s e(D_i) \leq \sum_{i=1}^s a_i \leq a \quad (3.10)$$

Para ver la segunda parte, es claro que si D es una suma directa de $\frac{a}{2}$ copias de K_2 , más posiblemente algunos vértices aislados, entonces $e(D) = a$. Recíprocamente, si D es fuertemente conexo y $e(D) = a$ entonces por (3.9), $na = a^2$ lo que implica que $a = 0$ o $a = n$. Si $a = 0$ entonces D es un vértice. De lo contrario, $a = n$ y de nuevo por (3.9),

$$\frac{1}{2}n(a + c_2) = na$$

y, por lo tanto, $c_2 = a = n$. Es fácil ver que un digrafo fuertemente conexo que satisface esta condición es K_2 . En la situación general, por la desigualdad (3.10),

$$\sum_{i=1}^s e(D_i) = \sum_{i=1}^s a_i = a$$

Como $e(D_i) \leq a_i$ para todo i , concluimos que $e(D_i) = a_i$ para todo i . Pero entonces D_i es K_2 o D_i es un vértice, y esto termina la demostración. \square

Ahora presentaremos una cota inferior para la energía, que depende del número de caminos cerrados de longitud 2. Una matriz A es nilpotente si $A^q = 0$ para algún entero positivo q . Claramente, una matriz compleja A es nilpotente si, y sólo si, todos sus autovalores son cero.

Teorema 3.2.5. *Sea A una matriz compleja $n \times n$ con autovalores z_1, \dots, z_n . Entonces*

$$\left(\sum_{i=1}^n |\operatorname{Re}(z_i)| \right)^2 \geq 2\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(A^2)) - (\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(A)))^2 \quad (3.11)$$

La igualdad se satisface si, y sólo si, A es nilpotente o se tiene que todos los autovalores z_1, \dots, z_n son números reales, sólo dos son diferentes de cero y tienen signos opuestos.

Demostración. Tenemos que

$$(\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(A)))^2 = \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(z_i) \right)^2 + 2 \sum_{i < j} (\operatorname{Re}(z_i)) (\operatorname{Re}(z_j))$$

Luego, por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n |\operatorname{Re}(z_i)| \right)^2 &= \sum_{i=1}^n (\operatorname{Re}(z_i))^2 + 2 \sum_{i < j} |\operatorname{Re}(z_i)| |\operatorname{Re}(z_j)| \\ &\geq \sum_{i=1}^n (\operatorname{Re}(z_i))^2 + 2 \left| \sum_{i < j} \operatorname{Re}(z_i) \operatorname{Re}(z_j) \right| \\ &\geq 2 \sum_{i=1}^n (\operatorname{Re}(z_i))^2 - (\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(A)))^2 \end{aligned}$$

Ahora, dado que

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(A^2)) = \sum_{i=1}^n (\operatorname{Re}(z_i))^2 - \sum_{i=1}^n (\operatorname{Im}(z_i))^2 \leq \sum_{i=1}^n (\operatorname{Re}(z_i))^2$$

obtenemos (3.11).

Supongamos que A no es nilpotente y que la igualdad se satisface en (3.11). Entonces $\sum_{i=1}^n (\operatorname{Im}z_i)^2 = 0$, luego todos los z_i son números reales. También sabemos que

$$\sum_{i<j} |\operatorname{Re}z_i| |\operatorname{Re}z_j| = \left| \sum_{i<j} \operatorname{Re}z_i \operatorname{Re}z_j \right|$$

Esto es posible sólo cuando todos los productos $\operatorname{Re}z_i \operatorname{Re}z_j$ tienen el mismo signo, i.e., todos los z_i tienen el mismo signo, o sólo dos de ellos son diferentes de cero y tienen signos opuestos. Como

$$2 \left| \sum_{i<j} \operatorname{Re}z_i \operatorname{Re}z_j \right| = \sum_{i=1}^n (\operatorname{Re}z_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}z_i \right)^2$$

implica que $\sum_{i<j} \operatorname{Re}z_i \operatorname{Re}z_j < 0$, concluimos que dos autovalores son diferentes de cero y tienen signos opuestos. \square

Corolario 3.2.6. *Si D es un digrafo con c_2 caminos cerrados de longitud 2 entonces*

$$e(D) \geq \sqrt{2c_2} \quad (3.12)$$

Además, $e(D) = \sqrt{2c_2}$ si, y sólo si, D es acíclico o

$$\sigma(D) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{c_2}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{c_2}{2}} \\ 1 & n-2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

donde n es el número de vértices que D tiene.

Demostración. Si A es la matriz de adyacencia de D entonces $\operatorname{Re} \operatorname{tr}(A) = 0$ y $\operatorname{Re} \operatorname{tr}(A^2) = c_2$. Luego (3.11) implica (3.3.9). Si $e(D) = \sqrt{2c_2}$ entonces por el Teorema 3.14, o bien A es nilpotente (i.e. D es acíclico) o D tiene el espectro de la forma

$$\sigma(D) = \begin{pmatrix} -z_1 & 0 & z_1 \\ 1 & n-2 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $z_1 \neq 0$ es un número real. Por lo tanto el polinomio característico $\phi_D(z)$ de D es

$$\phi_D(z) = (z - z_1)(z + z_1)z^{n-2} = z^n - z_1^2 z^{n-2}$$

Deducimos del Teorema 2.2.6 $z_1 = \sqrt{\frac{c_2}{2}}$. Esto termina la demostración. \square

Ejercicio 3.2.7. Sea G un grafo con m aristas. Demuestre que $2\sqrt{m} \leq E(G)$. Además, la igualdad se satisface si, y sólo si, G es un grafo completo bipartito.

Ejercicio 3.2.8. Demuestre que entre todos los digrafos que tienen c_2 caminos cerrados, los construidos en los Ejemplos 2.5.9 y 2.5.10 tienen energía mínima.

3.3. Energía de digrafos normales

Un digrafo D es normal si su matriz de adyacencia es una matriz normal. El siguiente ejercicio caracteriza los digrafos normales en términos de su estructura. Necesitamos primeramente la noción de vértices sucesores y predecesores comunes de un par de vértices dados: sean u y v vértices de D , decimos que un vértice w es un *sucesor* (resp. *predecesor*) común de u y v si uw y vw (resp. wu y wv) son arcos de D . Denotamos por $\text{suc}(u, v)$ y $\text{prc}(u, v)$ al número de sucesores y predecesores comunes de u y v , respectivamente.

Ejercicio 3.3.1. Verifique que D es un digrafo normal si, y sólo si, $\text{suc}(u, v) = \text{prc}(u, v)$ para todo par de vértices u y v de D .

El espectro de los digrafos normales fue estudiado por primera vez por A. Torgašev [38]. En nuestro próximo resultado damos una caracterización de los digrafos normales en términos de sus autovalores.

Lema 3.3.2. Sea D un digrafo con n vértices, a arcos, c_2 caminos cerrados de longitud 2 y autovalores z_1, \dots, z_n . Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. D es un digrafo normal;
2. $\sum_{k=1}^n |z_k|^2 = a$;
3. $\sum_{k=1}^n [\text{Re}(z_k)]^2 = \frac{a+c_2}{2}$;
4. $\sum_{k=1}^n [\text{Im}(z_k)]^2 = \frac{a-c_2}{2}$.

Demostración. 1. \Leftrightarrow 2. Esto es consecuencia de la Proposición 1.1.13 porque

$$a = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} = \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2 \text{ dado que } A = (a_{i,j}) \text{ es una } (0, 1)\text{-matriz.}$$

3. \Leftrightarrow 4. Esto es una consecuencia directa del Lema 3.2.1.

3. \Rightarrow 2. Si $\sum_{k=1}^n [\text{Re}(z_k)]^2 = \frac{a+c_2}{2}$ entonces $\sum_{k=1}^n [\text{Im}(z_k)]^2 = \frac{a-c_2}{2}$ y así

$$\sum_{k=1}^n |z_k|^2 = \sum_{k=1}^n [\text{Re}(z_k)]^2 + \sum_{k=1}^n [\text{Im}(z_k)]^2 = a$$

2. \Rightarrow 3. Supongamos que $\sum_{k=1}^n [\operatorname{Re}(z_k)]^2 \neq \frac{a+c_2}{2}$. Entonces,

$$\sum_{k=1}^n [\operatorname{Re}(z_k)]^2 < \frac{a+c_2}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^n [\operatorname{Im}(z_k)]^2 \leq \frac{a-c_2}{2}$$

por el Lema 3.2.1. Luego,

$$\sum_{k=1}^n |z_k|^2 = \sum_{k=1}^n [\operatorname{Re}(z_k)]^2 + \sum_{k=1}^n [\operatorname{Im}(z_k)]^2 < a$$

□

Si D es un digrafo con n vértices, a arcos y c_2 caminos cerrados de longitud 2, entonces por el Teorema 3.2.2

$$e(D) \leq \sqrt{\frac{1}{2}n(a+c_2)} := M$$

donde la igualdad se satisface si, y sólo si, D es una suma directa de $\frac{n}{2}$ copias de K_2 . A M la llamamos la cota generalizada de McClelland para la energía de digrafos. Nuestro principal objetivo en esta sección es mejorar esta cota para los digrafos normales, con una cota del tipo Koolen-Moulton [25].

Si D tiene a arcos y n vértices, sabemos por la Proposición 2.1.4 que $a = \sum_{i=1}^n d_i^+ = \sum_{i=1}^n d_i^-$, donde d_i^+ y d_i^- denotan el grado exterior e interior, respectivamente, del vértice v_i de D . Cuando D es fuertemente conexo, i.e., para cada par de vértices u y v de D existe un camino dirigido desde u hasta v , entonces $d_i^+ \geq 1$ para todo i y, en consecuencia, $a = \sum_{i=1}^n d_i^+ \geq n$.

Teorema 3.3.3. *Sea D un digrafo normal fuertemente conexo con n vértices, a arcos y c_2 caminos cerrados de longitud 2. Entonces*

$$e(D) \leq \frac{a}{n} + \sqrt{(n-1) \left[\frac{a+c_2}{2} - \left(\frac{a}{n} \right)^2 \right]} \quad (3.14)$$

Más aún, la igualdad se satisface si, y sólo si, D es un digrafo $\frac{a}{n}$ -regular tal que los valores absolutos de todas las partes reales de los autovalores diferentes al radio espectral es $\sqrt{\frac{a+c_2 - \left(\frac{a}{n}\right)^2}{n-1}}$.

Demostración. Sean $\rho = z_1, z_2, \dots, z_n$ los autovalores de D . Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los vectores

$$(|\operatorname{Re}(z_2)|, \dots, |\operatorname{Re}(z_n)|) \text{ y } (1, \dots, 1)$$

obtenemos

$$\sum_{i=2}^n |\operatorname{Re}(z_i)| \leq \sqrt{(n-1) \sum_{i=2}^n [\operatorname{Re}(z_i)]^2} \quad (3.15)$$

Por el Lema 3.3.2

$$\sum_{i=1}^n [\operatorname{Re}(z_i)]^2 = \frac{a + c_2}{2} \quad (3.16)$$

y por (3.15)

$$e(D) = \rho + \sum_{i=2}^n |\operatorname{Re}(z_i)| \leq \rho + \sqrt{(n-1) \left(\frac{a + c_2}{2} - \rho^2 \right)} \quad (3.17)$$

Consideremos la función $g(x) = x + \sqrt{(n-1) \left(\frac{a+c_2}{2} - x^2 \right)}$ que está bien definida en el intervalo $\left[0, \sqrt{\frac{a+c_2}{2}}\right]$. La función g es estrictamente creciente en $\left[0, \frac{M}{n}\right]$ y estrictamente decreciente en $\left[\frac{M}{n}, \sqrt{\frac{a+c_2}{2}}\right]$. Observamos que (3.16) implica que

$$\rho^2 \leq \sum_{i=1}^n [\operatorname{Re}(z_i)]^2 = \frac{a + c_2}{2}$$

y, por lo tanto, $\rho \in \left[0, \sqrt{\frac{a+c_2}{2}}\right]$. Más aún, como $c_2 \leq a$ entonces $\frac{M}{n} \leq \sqrt{\frac{a}{n}}$ y, como D es fuertemente conexo, entonces $a \geq n$. Esto implica que

$$\frac{M}{n} \leq \sqrt{\frac{a}{n}} \leq \frac{a}{n}.$$

Así, por el Teorema 2.4.2,

$$\frac{M}{n} \leq \sqrt{\frac{a}{n}} \leq \frac{a}{n} \leq \rho \leq \sqrt{\frac{a + c_2}{2}}$$

De la desigualdad (3.17) y la propiedad creciente de g deducimos que

$$e(D) \leq g(\rho) \leq g\left(\frac{a}{n}\right) = \frac{a}{n} + \sqrt{(n-1) \left[\frac{a + c_2}{2} - \left(\frac{a}{n}\right)^2 \right]}$$

Si la igualdad se satisface en (3.14) entonces $g(\rho) = g\left(\frac{a}{n}\right)$ y, como g es estrictamente decreciente, sabemos que $\rho = \frac{a}{n}$. De nuevo por el Teorema 2.4.2, D es un digrafo $\frac{a}{n}$ -regular. Por otra parte, la desigualdad (3.15) es una igualdad y

así, $|\operatorname{Re}(z_i)| = \sqrt{\frac{\frac{a+c_2}{2} - \left(\frac{a}{n}\right)^2}{n-1}}$ para todo $i \geq 2$.

Recíprocamente, si D es un digrafo $\frac{a}{n}$ -regular entonces el radio espectral de D es $z_1 = \frac{a}{n}$ y si además $|\operatorname{Re}(z_i)| = \sqrt{\frac{\frac{a+c_2}{2} - \left(\frac{a}{n}\right)^2}{n-1}}$ para todo $i \geq 2$ entonces claramente $e(D) = g\left(\frac{a}{n}\right)$. \square

Observación 3.3.4. Con la misma notación en la demostración del Teorema 3.3.3, notamos que g tiene un máximo en $x = \frac{M}{n}$ en el intervalo $\left[0, \sqrt{\frac{a+c_2}{2}}\right]$ y $g\left(\frac{M}{n}\right) = M$. Luego

$$\frac{a}{n} + \sqrt{(n-1) \left[\frac{a+c_2}{2} - \left(\frac{a}{n}\right)^2 \right]} = g\left(\frac{a}{n}\right) \leq g\left(\frac{M}{n}\right) = M.$$

En otras palabras, la cota dada en (3.14) mejora, para digrafos normales, la cota de McClelland generalizada.

Ejemplo 3.3.5. Existen digrafos no-simétricos que satisfacen la condición de igualdad en (3.14). De hecho, consideremos el digrafo fuertemente conexo D_2 que aparece en la Figura 3.2. D_2 es un digrafo no-simétrico 2-regular con 10 arcos y 5 vértices. Sus autovalores son $\rho = 2$, $z_2 = -\frac{1}{2} + 0,3633i$, $z_3 = -\frac{1}{2} - 0,3633i$, $z_4 = -\frac{1}{2} + 1,5388i$ y $z_5 = -\frac{1}{2} - 1,5388i$. Observamos que

$$|\operatorname{Re}(z_i)| = \sqrt{\frac{\frac{10+0}{2} - \left(\frac{10}{5}\right)^2}{5-1}} = \frac{1}{2}$$

para todos los autovalores diferentes del radio espectral y

$$e(D) = \frac{10}{5} + \sqrt{(5-1) \left[\frac{10+0}{2} - \left(\frac{10}{5}\right)^2 \right]} = 4.$$

Ejercicio 3.3.6. Sea G un grafo con n vértices y m aristas. Demuestre que

$$e(D) \leq \frac{2m}{n} + \sqrt{(n-1) \left[2m - \left(\frac{2m}{n}\right)^2 \right]}$$

Más aún, la igualdad se satisface si, y sólo si, G es $\frac{n}{2}K_2$, K_n , o un grafo no-completo conexo fuertemente regular con dos autovalores no-triviales, ambos con valor absoluto $\sqrt{\frac{\left(2m - \left(\frac{2m}{n}\right)^2\right)}{n-1}}$, donde m es el número de aristas de G .

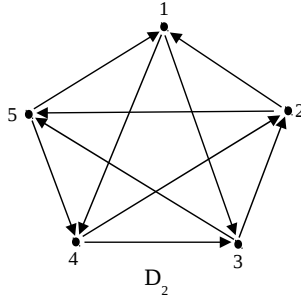


Figura 3.2: Digrafo no-simétrico que satisface la igualdad en el Teorema 3.3.3

Corolario 3.3.7. Si D es un digrafo normal fuertemente conexo con n vértices y a arcos entonces

$$e(D) \leq \frac{a}{n} + \sqrt{(n-1) \left[a - \left(\frac{a}{n} \right)^2 \right]}$$

Más aún, la igualdad se satisface si $D = G^*$, donde G es $\frac{n}{2}K_2$, K_n , o un grafo no-completo conexo fuertemente regular con dos autovalores no-triviales, ambos con valor absoluto $\sqrt{\frac{(2m - (\frac{2m}{n})^2)}{n-1}}$, donde m es el número de aristas de G .

Demostración. La primera parte es consecuencia inmediata del Teorema 3.3.3, porque $\frac{a+c_2}{2} \leq a$ implica que

$$e(D) \leq \frac{a}{n} + \sqrt{(n-1) \left[\frac{a+c_2}{2} - \left(\frac{a}{n} \right)^2 \right]} \leq \frac{a}{n} + \sqrt{(n-1) \left[a - \left(\frac{a}{n} \right)^2 \right]} \quad (3.18)$$

Si $e(D) = \frac{a}{n} + \sqrt{(n-1) \left[a - \left(\frac{a}{n} \right)^2 \right]}$ entonces por la desigualdad (3.18)

$$\frac{a}{n} + \sqrt{(n-1) \left[\frac{a+c_2}{2} - \left(\frac{a}{n} \right)^2 \right]} = \frac{a}{n} + \sqrt{(n-1) \left[a - \left(\frac{a}{n} \right)^2 \right]}$$

lo que implica que $\frac{a+c_2}{2} = a$, o equivalentemente, $a = c_2$. Por lo tanto, D es un digrafo simétrico y el resultado es consecuencia del Ejercicio 3.3.6. \square

Teorema 3.3.8. Si D es un digrafo normal fuertemente conexo con n vértices entonces $e(D) \leq \frac{n}{2} (1 + \sqrt{n})$. La igualdad se satisface si, y sólo si, $D = G^*$, donde G es un grafo fuertemente regular con parámetros $\left(n, \frac{n+\sqrt{n}}{2}, \frac{n+2\sqrt{n}}{4}, \frac{n+2\sqrt{n}}{4} \right)$.

Demostración. Sea a el número de arcos que D tiene. Por el Corolario 3.3.7

$$e(D) \leq \frac{a}{n} + \sqrt{(n-1) \left[a - \left(\frac{a}{n} \right)^2 \right]} \quad (3.19)$$

Consideremos la función $h(x) = \frac{x}{n} + \sqrt{(n-1) \left[x - \left(\frac{x}{n} \right)^2 \right]}$ definida en el intervalo $[0, n^2]$. El máximo valor de h en este intervalo es alcanzado en $x = \frac{1}{2}n(n + \sqrt{n})$ y sabemos que $0 \leq a \leq n(n-1) \leq n^2$. En consecuencia, de la desigualdad (3.19), obtenemos

$$e(D) \leq h(a) \leq h\left(\frac{1}{2}n(n + \sqrt{n})\right) = \frac{1}{2}n(1 + \sqrt{n}) \quad (3.20)$$

Si $e(D) = \frac{1}{2}n(1 + \sqrt{n})$ entonces $e(D) = h(a)$ por (3.20). Por el Corolario 3.3.7, $D = G^*$, donde G es un grafo no-completo conexo fuertemente regular con parámetros (n, k, b, c) con autovalores

$$\frac{2m}{n}, \pm \sqrt{\frac{\left(2m - \left(\frac{2m}{n}\right)^2\right)}{n-1}}$$

donde m es el número de aristas de G . Pero también de (3.20) obtenemos que $h(a) = h\left(\frac{1}{2}n(n + \sqrt{n})\right)$ y, en consecuencia, $a = \frac{1}{2}n(n + \sqrt{n})$. Como $a = 2m$ entonces $m = \frac{1}{4}n(n + \sqrt{n})$ y así G es un grafo con regularidad $k = \frac{2m}{n} = \frac{1}{2}(n + \sqrt{n})$ y autovalores

$$\frac{1}{2}(n + \sqrt{n}), \pm \frac{1}{2}\sqrt{n}$$

Por otra parte, deducimos de la Proposición 2.3.9 que $\pm \frac{1}{2}\sqrt{n}$ son raíces de la ecuación de segundo grado $x^2 + (c-b)x + (c-k)$, de donde concluimos que $b = c = \frac{n+2\sqrt{n}}{4}$. \square

Ahora vamos a presentar una cota inferior para la energía que, en el caso de digrafos normales, mejora el Corolario 3.2.6.

Teorema 3.3.9. *Si D es un digrafo normal fuertemente conexo con a arcos y c_2 caminos cerrados de longitud 2, entonces $e(D) \geq \sqrt{a+c_2}$. Más aún, $e(D) = \sqrt{a+c_2}$ si, y sólo si, $\pm \sqrt{\frac{a+c_2}{4}}$ son autovalores de D y estos son los únicos autovalores con parte real diferente de cero.*

Demostración. Sean z_1, \dots, z_n los autovalores del digrafo D . Entonces $\sum_{i=1}^n z_i = 0$ y así, en particular, $\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(z_i) = 0$. Luego

$$0 = \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(z_i) \right)^2 = \sum_{i=1}^n [\operatorname{Re}(z_i)]^2 + 2 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(z_i) \operatorname{Re}(z_j)$$

Como D es un digrafo normal se deduce de (3.16) que $\sum_{i=1}^n [\operatorname{Re}(z_i)]^2 = \frac{a+c_2}{2}$ y, en consecuencia,

$$2 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(z_i) \operatorname{Re}(z_j) = -\frac{a+c_2}{2}. \quad (3.21)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} [e(D)]^2 &= \left(\sum_{i=1}^n |\operatorname{Re}(z_i)| \right)^2 = \sum_{i=1}^n [\operatorname{Re}(z_i)]^2 + 2 \sum_{i < j} |\operatorname{Re}(z_i)| |\operatorname{Re}(z_j)| \\ &\geq \frac{a+c_2}{2} + 2 \left| \sum_{i < j} \operatorname{Re}(z_i) \operatorname{Re}(z_j) \right| = \frac{a+c_2}{2} + \frac{a+c_2}{2} \\ &= a+c_2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Así $e(D) \geq \sqrt{a+c_2}$.

Ahora supongamos que $e(D) = \sqrt{a+c_2}$. Entonces por la desigualdad (3.22),

$$\left| \sum_{i < j} \operatorname{Re}(z_i) \operatorname{Re}(z_j) \right| = \sum_{i < j} |\operatorname{Re}(z_i)| |\operatorname{Re}(z_j)|$$

lo que implica que todos los productos $\operatorname{Re}(z_i) \operatorname{Re}(z_j)$ tengan el mismo signo y por la desigualdad (3.21), deducimos que $\operatorname{Re}(z_i) \operatorname{Re}(z_j) \leq 0$ para todo $i < j$. Esto es posible sólo si dos autovalores tienen partes reales diferentes de cero y tienen signo opuesto. Uno de ellos es el radio espectral ρ , el otro tiene la forma $z = -\rho + \operatorname{Im}(z)i$. Como $|z| = \sqrt{\rho^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2} \leq \rho$ entonces $\operatorname{Im}(z) = 0$ y así los únicos dos autovalores con parte real diferente de cero son ρ y $-\rho$. Más aún, $2\rho^2 = \frac{a+c_2}{2}$ en vista de (3.16), lo que implica $\rho = \sqrt{\frac{a+c_2}{4}}$.

Recíprocamente, si $\pm \sqrt{\frac{a+c_2}{4}}$ son autovalores de D y estos son los únicos autovalores con parte real diferente de cero, entonces claramente $e(D) = \sqrt{a+c_2}$. \square

Ejercicio 3.3.10. (Caporossi et al. [4]) Demuestre que si G es un grafo con n vértices y m aristas entonces $E(G) \geq 2\sqrt{m}$. La igualdad ocurre si, y sólo si, G es un grafo completo bipartito.

Observación 3.3.11. Demostramos en el Corolario 3.2.6 que $e(D) \geq \sqrt{2c_2}$, para cualquier digrafo D con c_2 caminos cerrados de longitud 2. La cota dada en el Teorema 3.3.9 mejora esta cota en el caso de digrafos normales con a arcos y c_2 caminos cerrados de longitud 2, porque $a \geq c_2$ implica $\sqrt{a+c_2} \geq \sqrt{2c_2}$.

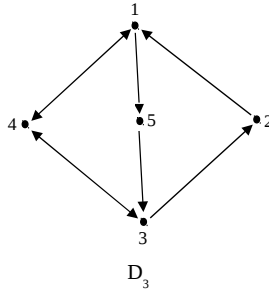


Figura 3.3: Digrafo no-simétrico que satisface la igualdad en el Teorema 3.3.9

Ejemplo 3.3.12. *Existen digrafos no-simétricos que satisfacen la condición del Teorema 3.3.9. Consideremos el digrafo fuertemente conexo D_3 que aparece en la Figura 3.3 con 8 arcos y 4 caminos cerrados de longitud 2. D_3 es un digrafo no-simétrico con autovalores $\pm\sqrt{\frac{8+4}{4}} = \pm\sqrt{3}$. Los otros autovalores son 0 y $\pm i$. Observemos que $e(D_3) = 2\sqrt{3} = \sqrt{8+4}$.*

3.4. Digrafos equienergéticos

Dentro del estudio de la energía, un tema que ha aparecido últimamente en la literatura es el de los grafos equienergéticos. Dos grafos G_1 y G_2 son *equienergéticos* si $E(G_1) = E(G_2)$. Métodos para construir pares de grafos equienergéticos son conocidos. Por ejemplo (ver [37]), si G_1 y G_2 son grafos r -regulares ($r \geq 3$) con igual número de vértices, entonces para $k \geq 2$, los grafos de línea iterados $\mathcal{L}^k(G_1)$ y $\mathcal{L}^k(G_2)$ forman un par de grafos equienergéticos no coespectrales con el mismo número de vértices y aristas.

Surge entonces de manera natural las siguientes preguntas: ¿Será posible presentar un método para construir digrafos no-simétricos, equienergéticos y no-coespectrales? Por otra parte, dado un entero n , ¿será posible construir un par de digrafos no-simétricos, equienergéticos y no-coespectrales, con n vértices? El objetivo de esta sección es abordar estos dos problemas.

Definición 3.4.1. *Dos digrafos D_1 y D_2 son equienergéticos si $e(D_1) = e(D_2)$.*

Trivialmente, dos digrafos coespectrales son equienergéticos. Por otra parte, dos digrafos acíclicos son equienergéticos porque tienen energía cero.

En lo que sigue $\{\mathcal{L}^k(D)\}_{k \geq 1}$ denota la sucesión iterada de digrafos de línea del digrafo D .

Proposición 3.4.2. *Sea D un digrafo. Entonces $e(D) = e(\mathcal{L}^k(D))$ para todo $k \geq 1$.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.13

$$\phi_{\mathcal{L}(D)}(z) = z^{l-n} \phi_D(z),$$

donde l y n son el número de vértices de $\mathcal{L}(D)$ y D , respectivamente. Entonces, D y $\mathcal{L}(D)$ tienen los mismos autovalores y las mismas multiplicidades excepto posiblemente la multiplicidad del 0, pero esta no influye sobre el valor de la energía. Por lo tanto, $e(D) = e(\mathcal{L}(D))$ y, en consecuencia, $e(D) = e(\mathcal{L}^k(D))$ para todo $k \geq 1$. \square

Ahora presentamos un método para construir familias infinitas de digrafos no simétricos, equienergéticos pero no coespectrales, partiendo de dos digrafos con estas propiedades. Además, los digrafos resultantes son fuertemente conexos, regulares y tienen el mismo número de vértices y arcos.

Teorema 3.4.3. *Sean D_1 y D_2 digrafos simétricos equienergéticos no coespectrales. Supongamos además que D_1 y D_2 son r -regulares, fuertemente conexos y tienen $n \geq 3$ vértices. Entonces para todo $k \geq 1$, $\mathcal{L}^k(D_1)$ y $\mathcal{L}^k(D_2)$ son digrafos no simétricos, equienergéticos y no coespectrales. Además, son fuertemente conexos, r -regulares y tienen el mismo número de vértices y arcos.*

Demostración. Sea $k \geq 1$. Por la Proposición 2.1.29, $\mathcal{L}^k(D_1)$ y $\mathcal{L}^k(D_2)$ son fuertemente conexos, r -regulares y son no-simétricos. Por la Proposición 2.1.21, $\mathcal{L}^k(D_1)$ y $\mathcal{L}^k(D_2)$ tienen nr^k vértices. Como los vértices de $\mathcal{L}^{k+1}(D_1)$ y $\mathcal{L}^{k+1}(D_2)$ son los arcos de $\mathcal{L}^k(D_1)$ y $\mathcal{L}^k(D_2)$, entonces $\mathcal{L}^k(D_1)$ y $\mathcal{L}^k(D_2)$ tienen nr^{k+1} arcos. Por la Proposición 3.4.2, como D_1 y D_2 son equienergéticos entonces $e(\mathcal{L}^k(D_1)) = e(\mathcal{L}^k(D_2))$. Finalmente, por el Teorema 2.2.13

$$\phi_{\mathcal{L}(D_1)}(z) = z^{nr-n} \phi_{D_1}(z) \text{ y } \phi_{\mathcal{L}(D_2)}(z) = z^{nr-n} \phi_{D_2}(z)$$

Puesto que D_1 y D_2 son no coespectrales entonces $\mathcal{L}(D_1)$ y $\mathcal{L}(D_2)$ son no-coespectrales. Un argumento recursivo demuestra que $\mathcal{L}^k(D_1)$ y $\mathcal{L}^k(D_2)$ son no-coespectrales. \square

Ejemplo 3.4.4. *Considere los grafos G_1 y G_2 en la Figura 3.4*

Los polinomios característicos de G_1 y G_2 son

$$\phi_{G_1}(x) = (x-4)(x-1)^4(x+2)^4$$

y

$$\phi_{G_2}(x) = (x-4)(x-2)(x-1)^2(x+1)^2(x+2)^3$$

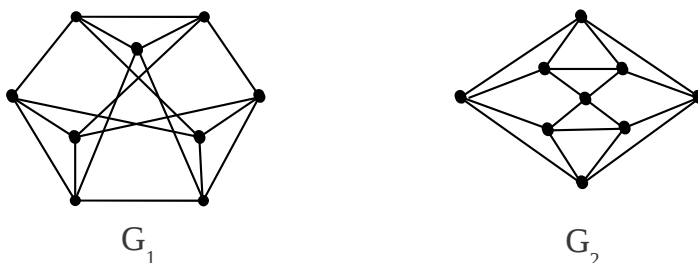


Figura 3.4: Grafos equienergéticos

Entonces G_1 y G_2 son no coespectrales y $e(G_1) = e(G_2) = 16$. Además G_1 y G_2 son conexos, tienen 9 vértices y son 4-regulares. Por lo tanto, los digrafos simétricos asociados G_1^* y G_2^* son equienergéticos, no-coespectrales, tienen 9 vértices, son fuertemente conexos y 4-regulares. Es decir, G_1^* y G_2^* satisfacen la hipótesis del Teorema 3.4.3.

Esto resuelve la primera pregunta que nos planteamos al principio de la sección. Ahora pasamos a considerar la segunda pregunta.

Proposición 3.4.5. Sean D_i digrafos r_i -regulares con n_i vértices, donde $i = 1, 2$. Entonces

$$e(D_1 \nabla D_2) = e(D_1) + e(D_2) + \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + 4(n_1 n_2 - r_1 r_2)} - (r_1 + r_2).$$

Demostración. Por el Corolario 2.3.5

$$(z - r_1)(z - r_2) \phi_{D_1 \nabla D_2}(z) = \phi_{D_1}(z) \phi_{D_2}(z) [(z - r_1)(z - r_2) - n_1 n_2].$$

Consideremos los polinomios

$$P(z) = (z - r_1)(z - r_2) \phi_{D_1 \nabla D_2}(z)$$

y

$$Q(z) = \phi_{D_1}(z) \phi_{D_2}(z) [(z - r_1)(z - r_2) - n_1 n_2]$$

Las raíces de $P(z)$ son r_1, r_2 y los autovalores de $D_1 \nabla D_2$. Entonces la suma de los valores absolutos de las partes reales de estas raíces son

$$e(D_1 \nabla D_2) + r_1 + r_2$$

Por otro lado, las raíces de $Q(z)$ son los autovalores de D_1, D_2 y

$$\frac{1}{2} \left(r_1 + r_2 \pm \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + 4(n_1 n_2 - r_1 r_2)} \right)$$

Análogamente, la suma de los valores absolutos de las partes reales de las raíces de $Q(z)$ son

$$e(D_1) + e(D_2) + \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + 4(n_1 n_2 - r_1 r_2)}$$

Puesto que $P(z) = Q(z)$ concluimos que

$$e(D_1 \nabla D_2) = e(D_1) + e(D_2) + \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + 4(n_1 n_2 - r_1 r_2)} - (r_1 + r_2).$$

□

Ejemplo 3.4.6. Sean $D_1 = \mathcal{L}(G_1^*)$ y $D_2 = \mathcal{L}(G_2^*)$, donde G_1^* y G_2^* son como en el Ejemplo 3.4.4. Po el Teorema 3.4.3, D_1 y D_2 son no simétricos, fuertemente conexos, equienergéticos, no-coespectrales, 4-regulares, con el mismo número de vértices y el mismo número de arcos. Además, como G_1^* y G_2^* tienen 9 vértices y son 4-regulares entonces por la Proposición 2.1.21, D_1 y D_2 tienen 36 vértices.

Ahora estamos en condiciones en resolver el segundo problema para valores grandes de n .

Teorema 3.4.7. Sean D_1 y D_2 los digrafos con 36 vértices del Ejemplo 3.4.6. Entonces, para todo $p \geq 0$ tenemos que los digrafos $D_1 \nabla K_p$ y $D_2 \nabla K_p$ son digrafos no-simétricos, equienergéticos y no-coespectrales. Además, son fuertemente conexos y tienen $36 + p$ vértices.

Demostración. Es claro que $D_1 \nabla K_p$ y $D_2 \nabla K_p$ son no-simétricos. Como D_1 y D_2 son no-coespectrales, 4-regulares y tienen 36 vértices, y K_p es $(p - 1)$ -regular con p vértices, el Corolario 2.3.5 nos asegura que $D_1 \nabla K_p$ y $D_2 \nabla K_p$ son no-coespectrales. Ahora, el polinomio característico de K_p es

$$\phi_{K_p}(z) = (z - p + 1)(z + 1)^{p-1}$$

Por lo tanto, $e(K_p) = 2(p - 1)$. Por otra parte, como D_1 y D_2 son 4-regulares tales que

$$e(D_1) = e(D_2) = 16$$

se deduce de la Proposición 3.4.5 que

$$e(D_1 \nabla K_p) = e(D_2 \nabla K_p) =$$

$$16 + 2(p - 1) + \sqrt{(4 + p - 1)^2 + 4(9p - 4(p - 1))} - (4 + p - 1)$$

y así $D_1 \nabla K_p$ y $D_2 \nabla K_p$ son equienergéticos. Además es claro que son fuertemente conexos y tienen $36 + p$ vértices. □

Corolario 3.4.8. *Para cada entero $n \geq 36$, existe un par de digrafos no-simétricos, equienergéticos, no-coespectrales, fuertemente conexos y con n vértices.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Teorema 3.4.7. □

Bibliografía

- [1] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press. 1993.
- [2] R. Brualdi y H. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory*, Cambridge University Press. 1991.
- [3] R. Brualdi, Spectra of digraphs, *Linear Algebra Appl.* 432 (2010), 2181-2213.
- [4] G. Caporossi, D. Cvetković, I. Gutman, P. Hansen, Variable neighborhood search for extremal graphs. 2. Finding graphs with extremal energy, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* 39 (1999) 984-996.
- [5] L. Collatz and U. Sinogowitz, Spektren endlicher Grafen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 21 (1957) 63-77.
- [6] C.A. Coulson, On the calculation of the energy in unsaturated hydrocarbon molecules, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 36 (1940) 201-203.
- [7] F.R.K. Chung, *Spectral Graph Theory*, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997.
- [8] D.M. Cvetković, M. Doob and H. Sachs, *Spectra of Graphs*, Academic Press, New York, 1980.
- [9] D. Cvetković, M. Doob, I. Gutman and A. Torĝasev, *Recent Results in the Theory of Graph Spectra*. North-Holland, Amsterdam 1988.
- [10] M. Doob, Graphs with a small number of distinct eigenvalues, *Ann. New York Acad. Sci.* 175 (1970), 104-110.
- [11] L. Elsner, C.R. Johnson, J.A. Dias Da Silva, The perron root of a weighted geometric mean of nonnegative matrices, *Linear and multilinear algebra*, 24(1), (1988) 1-13

- [12] G. Frobenius. Über Matrizen aus positiven Elementen. Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin, 471-476, 1908. Reimpreso en Abhandlungen 3, 404-409.
- [13] G. Frobenius. Über Matrizen aus positiven Elementen II. Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin, 514-518, 1909. Reimpreso en Abhandlungen 3, 410-414.
- [14] G. Frobenius. Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin, 456-477, 1912. Reimpreso en Abhandlungen 3, 546-567.
- [15] C. Godsil y G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer-Verlag New York, Inc. 2001.
- [16] E. Gudiño y J. Rada, A lower bound for the spectral radius of a digraph. *Linear Algebra and its Applications* 433 (2010), 233-240.
- [17] I. Gutman, Acyclic systems with extremal Hückel π -electron energy, *Theoret. Chim. Acta (Berlin)* 45 (1977) 79-87.
- [18] I. Gutman, The energy of a graph. *Ber. Math.-Statist. Sect. Forschungszentrum Graz* 103 (1978) 1-22.
- [19] I. Gutman and O.E. Polansky, *Mathematical Concepts in Organic Chemistry*, Springer, Berlin, 1986.
- [20] I. Gutman, Editorial, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 64 (2010) 4-6.
- [21] K. Hoffman, R. Kunze. *Álgebra Lineal*. Traducción al español de la segunda edición de *Linear Algebra* de estos autores. Prentice-Hall Internacional. 1973.
- [22] R.A. Horn, C.R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press. 1985.
- [23] E. Hückel, Quantentheoretische Beiträge zum Benzolproblem, *Z. Phys.* 70(1931), 204-286.
- [24] L. Yu. Kolotilina, Lower bounds for the Perron root of a nonnegative matrix, *Linear algebra and its applications*, 180, (1993), 133 -151.
- [25] J.H. Koolen and V. Moulton, Maximal Energy Graphs, *Adv. Appl. Math.* 26 (2001) 47-52.
- [26] W. López and J. Rada, Equienergetic digraphs. *Int. Journal of Pure and Applied Mathematics* 36 (2007), no. 3, 361-372.

- [27] B. McClelland, Properties of the latent roots of a matrix: The estimation of π -electron energies. *J. Chem. Phys.* 54 (1971), 640-643.
- [28] C.D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*. SIAM. 2000.
- [29] H. Minc, *Nonnegative matrices*, John Wiley & sons. 1988.
- [30] A. Olivieri, J. Rada y A. J. Ríos, Digraphs with few eigenvalues. Enviado a publicar.
- [31] I. Peña and J. Rada, Energy of digraphs, *Lin. Multilin. Alg.* Vol. 56, No. 5, 565-579 (2008).
- [32] O. Perron. Uber die Konvergenz der Jacobi-Kettenalgorithmen mit komplexen Elementen. *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der k. b. Akademie Grundlagen fur eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus.* *Math. Ann.*, 64,1-76,1907.
- [33] O. Perron. Zur Theorie der Matrices. *Math. Ann.*, 64, 248-263, 1907.
- [34] J. Rada, The McClelland inequality for the energy of digraphs, *Linear Algebra Appl.*, 430 (2009) 800-804.
- [35] J. Rada, Lower bounds for the energy of digraphs, *Linear Algebra Appl.*, 432 (2010) 2174-2180.
- [36] J. Rada, Bounds for the energy of normal digraphs. Aparecerá en *Linear and Multilinear Algebra*.
- [37] H. Ramane, H. Walker, S.B. Rao, B.D. Acharya, P.R. Hampiboli, S.R. Jog y I. Gutman, Spectra and energies of iterated line graphs of regular graphs. *Applied Mathematics Letters* 18 (2005), 679-682.
- [38] A. Torgašev, The spectrum of a normal digraph, *Univ. Novi Sad, Coll. of papers Fac. Sci. (Ser. Math.)* 17 (1) (1987), 187-200.

Asociación Matemática Venezolana

Presidente: Rafael Sánchez Lamonedada

Consejo Directivo Nacional

Rafael Sánchez Lamonedada

Capítulo Capital

Sergio Muñoz

Capítulo de Centro Occidente

Oswaldo Araujo

Capítulo de Los Andes

Said Kas-Danouche

Capítulo de Oriente

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela
<http://amv.ivic.gob.ve>

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Consejo Directivo

Director
Eloy Sira

Subdirector

Alberto Quintero

Representantes del Ministerio del Poder Popular para Ciencia,
Tecnología e Industrias Intermedias

Guillermo Barreto

Juan Luis Cabrera

Representante del Ministerio del Poder Popular para la
Educación Superior
Prudencio Chacón

Representantes Laborales

Jesús Acosta

María Celia Sulbarán (suplente)

Evencia Bernal (suplente)

Gerencia General

Lira Parra

Comisión Editorial

Coordinador

Eloy Sira

Horacio Biord

Erika Wagner

Rafael Gassón

Jesús Eloy Conde

Héctor Suárez

Lucía Antillano

María Teresa Curcio

Pamela Navarro



Gobierno **Bolivariano**
de Venezuela

Ministerio del Poder Popular
para **Ciencia, Tecnología e Industrias Intermedias**

