XXIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA–VENEZUELA 2010

ULTRAFILTROS SOBRE $\mathbb{N}$ Y SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

Salvador García Ferreira

MÉRIDA, VENEZUELA, 5 AL 10 DE SEPTIEMBRE DE 2010

XXIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

Ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$ y Sistemas Dinámicos Discretos

Salvador García Ferreira

Instituto de Matemáticas, Unidad Morelia
Universidad Nacional Autónoma de México

sgarcia@matmor.unam.mx

MÉRIDA, VENEZUELA, 5 AL 10 DE SEPTIEMBRE DE 2010

XXIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana. La XXIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Facultad de Ciencias y Departamento de Matemáticas) y la Asociación Metemática Venezolana.

2000 Mathematics Subject Classification: 54G20, 54D80, 22A99.

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Ultrafiltros sobre ℕ y Sistemas Dinámicos Discretos
Salvador García Ferreira

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas
Preprensa e impresión: Editorial Texto
Depósito legal If66020105102084
ISBN 978-980-261-123-2
Caracas, Venezuela
2010

A MIS HIJOS ANDANI E ITZEL

A MI ESPOSA MARTHA

A MI MADRE

Prefacio

Podemos decir de manera general y resumida que el objetivo principal de los sistemas dinámicos es el estudio de ciertos fenómenos que cambian con el tiempo. Los usos de los sistemas dinámicos se remontan a trabajos de I. Newton en Mecánica Celeste, y de Henri Poincaré en Ecuaciones Diferenciales. Hara unos 40 años que su estudio se convirtio en una de las principales ramas de la Matemática. Actualmente los sistemas dinámicos tienen muchas aplicaciones en diversas áreas como la Astronomía, Biología, Economía, Física, Ingeniería, Matemáticas etc.. En internet el lector puede encontrar un sin fin de aplicaciones de los sitemas dinámicos. En este libro de texto, aplicaremos algunos resultados sobre sistemas dinámicos discretos para obtener resultados sobre la combinatoría de los números naturales y a la inversa.

Podemos decir vagamente que un sistema dinámico consiste de un espacio de faces abstracto y una regla dinámica que describe el recorrido a lo largo del tiempo de todos los puntos del espacio de faces. Un sistema dinámico se dice discreto si el tiempo se mide con los números enteros o naturales. Para medir el tiempo también es posible usar los números reales. Si el tiempo es medido en forma continua, al sistema dinámico se le llama continuo o flujo. Matemáticamente un *sistema dinámico* consiste de una terna (G, X, π) en donde G es un semigrupo topológico Hausdorff con identidad, X es un espacio topológico (Tychonoff) y $\pi : G \times X \to X$ es una función que satisface las siguientes condiciones:

1. $\pi(e, x) = x$ para todo $x \in X$;

2. si $g_0, g_1 \in G$, entonces $\pi(g_0, \pi(g_1, x)) = \pi(g_0 g_1, x)$ para todo $x \in X$; y

3. π es continua[1].

Los elementos de G son los parámetros que miden el tiempo, y la función $g \mapsto \pi(g, x) : G \to X$ es el movimiento que describe el punto x. Los sistemas dinámicos que estudiaremos se definen de la siguiente forma:

Un *sistema dinámico discreto* es una pareja (X, f) en donde X es un espacio topológico y una función continua $f : X \to X$. A X se le conoce como el espacio de fases del sistema dinámico (X, f). Para ser visto un sistema dinámico discreto como una terna se define $\pi : \mathbb{N} \times X \to X$ como $\pi(n, x) = f^n(x)$, para todo $(n, x) \in \mathbb{N} \times X$, y equipamos a $\mathbb{N}$ con la topología discreta. Por brevedad, por un sistema dinámico nos referiremos a un sistema dinámico discreto.

A lo largo de la historía de los ultrafiltros sobre los números se han encontrados diversas aplicaiones en distintas áreas de las matemáticas. Principalmente en la Topología de Conjuntos en donde se usan para construcción de ejemplos y contraejemplos. En este libro de texto mostraremos como se pueden usar sus propiedades combinatorias para distinguir puntos importantes de un sistema dinámico y para estudiar su semigrupo de Ellis.

En un sistema dinámico discreto nos interesará saber si la órbita de un punto converge a un cierto punto, si dicha órbita forma un ciclo periódico o si su comportamiento es aleatorio. Veremos que los ultrafiltros nos ayudan a distinguir, de alguna forma, los puntos proximales entre si (Sección 2.3)y los puntos recurrentes entre si (Sección 2.8). Todo ésto lo haremos via los puntos p-límites de la órbita de un punto. La noción de punto p-límite de una sucesión dentro de un espacio topológico ha sido introducida por varios matemáticos como S. Banach, A. R. Bernstein, Z. Frolík y H. Furstenberg. En el primer capítulo deremos las nociones y las propiedades básicas de los ultrafiltros sobre los números naturales. Discutiremos ampliamente las propiedades de los puntos p-límites y las propiedades combinatorias de los ultrafiltros. Veremos como la adición de los números naturales (Sección 1.5) se puede extender a una adición de ultrafiltros sobre los números naturales. Dicha adición resulta ser muy importante cuando estudiamos el semigrupo de Ellis de un sistema

[1] A una función que cumpla con las tres condiciones también se les conoce como una G-acción continua y, en estos términos, un sistema dinámico es una acción continua de un semigrupo topológico en un espacio topológico.

dinámico (Seccón 2.10) y en el estudio de los puntos recurrentes (Sección 2.4). La adición de ultrafiltros también nos permite estudiar las iteraciones de una función $f : X \to X$ y sus iteraciones según un ultrafiltro sobre los números naturales. Algunas de las primeras aplicaciones de los sistemas dinámicos a la combinatoria finita se inician en el fabuloso libro de H. Furstenberg titulado *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory* ([Fu81]). En el se encuentran aplicaciones a la Teoría de Ramsey algunas de las cuales se presentaran en la Sección 2.6. Otras conecciones entre combinatoria finita y algunas funciones del conjunto de Cantor en si mismo son presentadas en la sección 2.8. Finalizaremos con algunos teoremas de metrización del semigrupo de Ellis de un sistema dinámico.

Doy las gracias al Comité Organizador de la *XXIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS* por invitarme a escribir este libro de texto en el cual esta basado el curso. También agradesco a mi esposa Martha Luz García Romero por la revición del texto. Al alumno de doctorado Cristian Rojas Milla por sus valiosas discusiones que tuvimos sobre diversos temas de sistemas dinámicos.

Contenido

Capítulo 1

Nociones básicas

Nuestros espacios topológicos serán siempre Hausdorff y completamente regulares (Tychonoff).

Comenzamos con notación básica que se usará a través de este libro.

$\mathbb{Z}$ denotará al conjunto de números enteros, $\mathbb{N}$ a los números naturales. La familia de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ será denotado por FIN y $FIN^* = FIN \setminus \{\emptyset\}$.

1. Si X es un conjunto no vacío, entonces $\mathcal{P}(X)$ denotará al conjunto de todos los subconjuntos de X. Para determinar ciertos subconjuntos de X ponemos $[X]^\omega = \{A \subseteq X : A \text{ es infinito y numerable }\}$ y $[X]^{<\omega} = \{A \subseteq X : A \text{ es finito }\}$.

2. La diferencia simétrica de dos subconjuntos $A, B \subseteq X$ es el conjunto $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

3. Si X es un conjunto y $A \subseteq X$, entonces $\chi_A : X \to \{0,1\}$ denota la función característica de A. El conjunto de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ puede ser identificado con el conjunto de todas las funciones características de subconjuntos de $\mathbb{N}$. Como bien se sabe $\{0,1\}^\omega$ es un grupo topológico con la operación $\chi_A + \chi_B = \chi_{A \Delta B}$, para cada $A, B \subseteq \mathbb{N}$.

4. Dado $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, definimos $\mathcal{B}^+ = \{A \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B}(B \subseteq A)\}$.

5. Convenimos que cuando digamos que $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión infinita* en $\mathbb{N}$ entenderemos que el conjunto $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ es infinito. Para una sucesión infinita $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$, definimos $FS((n_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \{\sum_{k\in F} n_k : F \in FIN\}$. Si $A \in \mathbb{N}^\omega$, entonces $FS(A) = FS((a_k)_{k\in\mathbb{N}})$ en donde $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ es la enumeración creciente de A.

6. Dados $A \subseteq \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos $-n + A = \{m \in \mathbb{N} : n + m \in A\}$ y $A + n = \{a + n : a \in A\}$.

Para un espacio topológico X tenemos la siguiente notación:

1. Si $x \in X$, entonces $\mathcal{N}(x)$ denotará a la familia de vecindades de x.

2. La cerradura de $A \subseteq X$ en X será denotada por $cl_X(A)$ (o simplemente por $cl(A)$).

3. Para el interior de $A \subseteq X$ en X se usará el símbolo $int_X(A)$ (o simplemente $int(A)$).

4. Si (X, d) es un espacio métrico, la *bola de radio* ϵ y centro $x \in X$ será denotada por $B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$. La topología en X inducida por d es denotada por τ_d.

5. Si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces su extensión de Stone será denotada por $\hat{f} : \beta(X) \to \beta(Y)$.

Dados dos conjunto no vacíos X y Y, la familia de funciones de X en Y es denotada por Y^X. Si X y Y son espacios compactos, entonces $C(X, Y)$ denotará el conjunto de todas las funciones continuas de X en Y. $C_\pi(X, Y)$ denotará a $C(X, Y)$ equipado con la *topología de la convergencia puntual* (es decir, como subespacio del espacio producto Y^X). Si (X, d_X) y (Y, d_Y) son espacios métricos compactos, entonces $C_u(X, Y)$ denotará a $C_u(X, Y)$ equipado con la *métrica supremo* $d_u(f, g) = \sup\{d_Y(f(x), g(x)) : x \in X\}$, para todo $f, g \in C(X, Y)$.

Para un conjunto no vacío X, la *diagonal* de $X \times X$ será denotada por $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$.

Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos no vacíos.

1. Para cada $i \in I$, la proyección en la j-ésima coordenada será denotada por $\pi_i : \prod_{j\in I} X_j \to X_i$. En otros términos, $\pi_i(x) = x(i)$, para todo $x \in \prod_{j\in I} X_j$ y para todo índice $i \in I$.

2. Si $i \in I$ y $V \subseteq X_i$, entonces definimos $[i, V] = \{z \in \prod_{i\in I} X_i : z(i) \in V\}$. Si $V = \{x\}$, escribimos simplemente $[i, x]$ en lugar de $[i, \{x\}]$.

En caso de que los $X_i's$ sean espacios toplógicos y $V \subseteq X_i$ sea un abierto el conjunto $[i, V]$ es un abierto sub-básico del producto $\prod_{i\in I} X_i$.

La cardinalidad 2^ω de los números reales será donotada por $\mathfrak{c}$.

Para cada $1 < m \in \mathbb{N}$ y para cada $i < m$, sea

$$P_i^m = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv i \text{ mod}(m)\ \},$$

la clase de equivalencia de i modulo m. Sabemos que $\{P_i^m : i < m\}$ es una partición de $\mathbb{N}$, para todo $1 < m \in \mathbb{N}$.

1.1 Filtros y ultrafiltros

Definición 1.1.1. *Sea X un conjunto no vacío. Un familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X se llama filtro. si se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\emptyset \notin \mathcal{F} \neq \emptyset$.

2. *Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.*

3. *Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B \in \mathcal{P}(X)$, entonces $B \in \mathcal{F}$.*

El ejemplo más simple de un filtro es $\{X\}$. Si X es un conjunto infinito hay filtros mucho más interesantes como el llamado *filtro de Fréchet* de X que se define como $\mathcal{F}_r = \{F \in \mathcal{P}(X) : |X \setminus F| < \omega\}$. Otros ejemplos de filtros son $\mathcal{F}_A = \{F \in \mathcal{P}(X) : A \subseteq F\}$, en donde $\emptyset \neq A \subseteq X$. Cuando $A = \{x\}$ usaremos la notación $\mathcal{F}_x$ y en algunos casos se identificará a este filtro con el punto x, sobre todo cuando nuestro conjunto sean los números naturales.

Veamos como podemos generar filtros sobre un conjunto infinito X.

Definición 1.1.2. *Sea $\mathcal{B}$ una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de X.*

1. *Decimos que $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de intersección finita si la intersección de una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$ es no vacía.*

2. *Decimos que $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de intersección infinita si la intersección de una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$ es infinita.*

3. *La familia $\mathcal{B}$ es una base de filtro si para cada $A, B \in \mathcal{B}$ podemos encontrar $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.*

Teorema 1.1.1. *Sean X un conjunto y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Si $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de intersección finita, entonces $\{\bigcap_{B \in F} B : F \in [\mathcal{B}]^{<\omega}\}$ es una base de filtro.*

Teorema 1.1.2. *Sean X un conjunto y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Si $\mathcal{B}$ es una base de filtro, entonces $\mathcal{B}^+$ es un filtro.*

Dada una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ con la propiedad de intersección finita, el símbolo $\langle \mathcal{B} \rangle$ denotará al filtro

$$\{F \subseteq X : \exists B_0, ..., B_k \in \mathcal{B}(\bigcap_{i \leq k} B_i \subseteq F)\},$$

al cual se le llamará el *filtro generado por $\mathcal{B}$*.

Definición 1.1.3. *Sea X un conjunto infinito. Un filtro $\mathcal{F}$ en X se llama fijo si $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$. A los filtros que no son fijos se les llama libres.*

Si X es un conjunto infinito y $\emptyset \neq A \subseteq X$, $\mathcal{F}_A$ es trivialmente un filtro fijo y $\mathcal{F}_r$ es un ejemplo de un filtro libre. La pruebas de las siguientes dos proposiciones son evidentes.

Proposition 1.1.1. *Sea X un conjunto infinito. Un filtro $\mathcal{F}$ en X es fijo si y solo si existe $\emptyset \neq A \subseteq X$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_A$.*

Proposition 1.1.2. *Sea X un conjunto infinito. Un filtro $\mathcal{F}$ en X es libre si y solo si $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}$.*

Prueba: Solamente probaremos la necesidad de la proposición. Supongamos que $\cap\mathcal{F} = \emptyset$ y que $\mathcal{F}_r \nsubseteq \mathcal{F}$. Supongamos que $A \in FIN$ satisface $\mathbb{N} \setminus A \notin \mathcal{F}$. Enumeremos A como $\{a_0, ..., a_k\}$. Ya que $\mathcal{F}$ es libre, entonces para cada $i \leq k$ podemos encontrar $F_i \in \mathcal{F}$ tal que $a_i \notin F_i$. Pongamos $F = \bigcap_{i \leq k} F_i$. Entonces, tenemos que $F \in \mathcal{F}$ y $F \cap A = \emptyset$. Por lo cual, se sigue que $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$ pues $F \subseteq \mathbb{N} \setminus A$, pero ésto es una contradicción. Así que debe cumplir la contención $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}$. $\Box$

Definición 1.1.4. *Sea X un conjunto infinito. Un filtro $\mathcal{F}$ en X se llama ultrafiltro si no está contenido propiamente en otro filtro.*

Cada punto $x \in X$ de un conjunto infinito nos determina un único ultrafiltro $\mathcal{F}_x$. Se sabe que los ultrafiltros libres existen solo con la ayuda del Lema de Zorn:

Teorema 1.1.3. *Todo filtro está contenido en un ultrafiltro.*

Prueba: Sean X un conjunto infinito y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Consideremos el conjunto

$$P = \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ es un filtro y } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}.$$

Dados $\mathcal{G}, \mathcal{D} \in P$, decimos que $\mathcal{G} \leq \mathcal{D}$ si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}$. Se puede ver fácilmente que $\leq$ es un orden parcial en P. Si $C \subseteq P$ es una cadena, entonces $\cup C$ es un filtro que resulta también estar en P y, por definición, es una cota superior de la cadena C. Así, por el Lema de Zorn, el conjunto P tiene un elemento maximal $\mathcal{U}$. Es evidente que $\mathcal{U}$ resulta ser el ultrafiltro deseado. $\square$

El Teorema 1.1.3 nos da un método para obtener ultrafiltros con ciertas propiedades anticipadas. Por ejemplo, dados dos subconjuntos infinitos ajenos no vacíos arbitrarios $A, B \in [\mathbb{N}]^\omega$ siempre podemos encontrar un ultrafiltro $\mathcal{F}$ que contenga a A y no a B. Para ésto, basta tomar el ultrafiltro $\mathcal{F}_k$ en donde $k \in A$ es fijo. Pero si queremos un ultrafiltro libre con las mismas condiciones, tenemos que considerar el filtro $\{F \setminus \{n\} : F \in [\mathbb{N}]^\omega, A \subseteq F \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$. Por otro lado, si $\mathcal{C} \subseteq [\mathbb{N}]^\omega$ tiene la propiedad de intersección finita, según el Teorema 1.1.3, podemos encontrar un ultrafiltro $\mathcal{F}$ que contenga a la familia $\mathcal{C}$: Considerando el filtro $\{F \subseteq \mathbb{N} : \exists C_0, ..., C_k \in \mathcal{C}(\bigcap_{i \leq k} C_i \subseteq F)\}$.

Corollary 1.1.1. *Toda familia de subconjuntos no vacíos con la propiedad de intersección finita de un conjunto infinito está contenida en un ultrafiltro.*

En el siguiente teorema enlistamos varias propiedades que caracterizan a los ultrafiltros (ver [CN74] y [HS98]).

Teorema 1.1.4. *Sea X un conjunto infinito. Las siguientes condiciones son equivalentes para un filtro $\mathcal{F}$ en X:*

1. *$\mathcal{F}$ es un ultrafiltro.*

2. *Para todo $A \in \mathcal{P}(X)$, o bien $A \in \mathcal{P}(X)$ o $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

3. *Para cada $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{F}$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap F = \emptyset$.*

4. *Si $A \in \mathcal{P}(X)$ y $A \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{F}$.*

5. *$\mathcal{F}$ está contenido en un único ultrafiltro.*

Una consecuencia importante del teorema anterior es que si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro fijo sobre un conjutno infinito X, entonces es posible encontrar un punto $x \in X$ tal que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$.

Ejercicio 1.1.1. *Probar el Teorema 1.1.4.*

1.2 La compactación de los números naturales con la topología discreta

Los ultrafiltros que usaremos en este libro serán solo aquellos que se definen sobre los números naturales. Denotemos por $\beta(\mathbb{N})$ al conjunto de todos los ultrafiltros sobre los números naturales. Cada número natural n se identifica con el ultrafiltro $\mathcal{F}_n = \{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\}$. De este modo se puede considerar $\mathbb{N}$ como un subconjunto de $\beta(\mathbb{N})$. Pongamos $\mathbb{N}^* = \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$. En este contexto, $\mathbb{N}$ son los ultrafiltros fijos sobre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^*$ son los ultrafiltros libres sobre $\mathbb{N}$. Para ver que hay suficientes ultrafiltros libres sobre $\mathbb{N}$ necesitamos la siguiente noción.

Definición 1.2.1. *Una familia $\{A_\xi^i : \xi < \kappa$ y $i \in \{0,1\}\}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ se llama independiente si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$A_\xi^0 \cap A_\xi^1 = \emptyset$, para cada $\xi < \kappa$, y*

2. *para todo $F \in [\kappa]^{<\omega}$ y cada función $\delta : F \to \{0,1\}$, la intersección $\bigcap_{\xi \in F} A_\xi^{\delta(i)}$ es no vacía.*

Lema 1.2.1. *Existe una familia independiente de tamaño $\mathfrak{c}$.*

Prueba[P. Simon]: Consideremos el conjunto numerable $N = [\mathbb{N}]^{<\omega} \times [[\mathbb{N}]^{<\omega}]^{<\omega}$. Para cada $X \subseteq \mathbb{N}$, definimos

$$A_X = \{(A, \mathcal{A}) : A \cap X \in \mathcal{A}\},$$

$A_X^0 = A_X$ y $A_X^1 = N \setminus A_X$. Claramente, A_X^i es un conjunto infinito para cada $i \in \{0,1\}$. Para ver que $\{A_X^i : X \subseteq \mathbb{N} \text{ y } i \in \{0,1\}\}$ es una familia independiente fijamos $X_1, ..., X_k, Y_1, ..., Y_l$ subconjuntos de $\mathbb{N}$ todos distintos entre si. Para cada $(i,j) \in k \times l$ seleccionamos, $x_{i,j} \in X_i \setminus Y_j$ o $x_{i,j} \in Y_j \setminus X_i$. Definimos $B = \{x_{i,j} : (i,j) \in k \times l\}$ y $\mathcal{B} = \{B \cap X_i : i \leq k\}$. Por la manera que se seleccionaron los puntos $x_{i,j}$'s, podemos ver que $X_i \cap B \neq Y_j \cap B$ para cualquier pareja $(i,j) \in k \times l$. De aquí obtenemos que $(B, \mathcal{B}) \in (\bigcap_{i \leq k} A_{X_i}^0) \cap (\bigcap_{j \leq l} A_{Y_j}^1)$. Por lo tanto, $\{A_X^i : X \subseteq \mathbb{N} \text{ y } i \in \{0,1\}\}$ es una familia independiente de cardinalidad $\mathfrak{c}$. $\square$

Teorema 1.2.1. *Hay $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros libres sobre $\mathbb{N}$.*

Prueba: Por el Lema 1.2.1, sabemos que existe una familia independiente $\{A_\mu^i : i \in \{0,1\} \text{ y } \mu < \mathfrak{c}\}$. Si $f : \mathfrak{c} \to \{0,1\}$ es cualquier función, tenemos que la familia $\{A_\mu^{f(\mu)} : \mu < \mathfrak{c}\}$ tiene la propiedad de intersección finita y por ello, según el Corolario 1.1.1, está contenida en un ultrafiltro libre que denotaremos por p_f. Es inmediato ver que si $f, g \in \{0,1\}^{\mathfrak{c}}$ son funciones distintas, entonces $p_f \neq p_g$. $\square$

El resultado anterior también nos garantiza que $|\mathbb{N}^*| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Ahora equiparemos a $\beta(\mathbb{N})$ con una topología de tal manera que contenga a $\mathbb{N}$ como un subconjunto discreto. Para ésto introduciremos los que serán los abiertos básicos:

Si $A \subseteq \mathbb{N}$, entonces definimos $\hat{A} = \{p \in \beta(\mathbb{N}) : A \in p\}$ y $A^* = \hat{A} \setminus A$. Recopilemos algunas propiedades importantes de estos subconjuntos de $\beta(\mathbb{N})$ en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.2. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$.*

1. *Si $A \subseteq B$, entonces $\hat{A} \subseteq \hat{B}$.*
2. $\hat{A} \cup \hat{B} = \widehat{A \cup B}$.
3. $\hat{A} \cap \hat{B} = \widehat{A \cap B}$.

4. $\widehat{\mathbb{N} \setminus A} = \beta(\mathbb{N}) \setminus \hat{A}$.

Ejercicio 1.2.1. *Probar el Teorema 1.2.2.*

Del Teorema 1.2.2 obtenemos que $\{\hat{A} : A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ es una base para una topología τ en $\beta(\mathbb{N})$. Enlistamos a continuación las propiedades de esta topología (el lector puede encontrar las puebas detalladas en [CN74], [HS98] y de manera más general en [W74]).

Teorema 1.2.3. 1. *$\beta(\mathbb{N})$ es un espacio Hausdorff compacto.*

2. *$\mathbb{N}$ es un conjunto denso discreto $\beta(\mathbb{N})$.*

3. *Toda función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se puede extender a una función continua $\hat{f} : \beta(\mathbb{N}) \to \beta(\mathbb{N})$.*

4. *$\hat{A}$ es un subconjunto abierto-cerrado de $\beta(\mathbb{N})$, para cada $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.*

5. *$cl_{\beta(\mathbb{N})}(A) = \hat{A}$, para todo $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.*

Del Teorema 1.2.3 obtenemos que $\beta(\mathbb{N})$ es la compactación de Stone-Čech de los números naturales $\mathbb{N}$ con la topología discreta cuyo residuo es $\mathbb{N}^*$. Para éste último conjunto visto como subespacio de $\beta(\mathbb{N})$ tenemos los siguientes.

Teorema 1.2.4. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$.*

1. *$A^* \cup B^* = (A \cup B)^*$.*

2. *$A^* \cap B^* = (A \cap B)^*$.*

3. *$(\mathbb{N} \setminus A)^* = \mathbb{N}^* \setminus A^*$.*

4. *$A^* \subseteq B^*$ si y solo si $A \subseteq^* B$ (es decir, $A \setminus B$ es finito).*

5. *$A^* = B^*$ si y solo si $A \subseteq^* B$ y $B \subseteq^* A$.*

6. *$A^* = \emptyset$ si y solo si A es finito.*

Teorema 1.2.5. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$.*

1. *$\{A^* : A \in [\mathbb{N}]^\omega\}$ es una base de abiertos-cerrados de $\mathbb{N}^*$.*

2. *A^* es un subconjunto abierto-cerrado de $\mathbb{N}^*$, para todo $A \in [\mathbb{N}]^\omega$.*

3. $cl_{\mathbb{N}^*}(A) = A^*$*, para cualquier* $A \in [\mathbb{N}]^\omega$*.*

Ejercicio 1.2.2. *Probar los Teoremas 1.2.4 y 1.2.5.*

Lema 1.2.2. *Si* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [\mathbb{N}]^\omega$ *tiene la propiedad de intersección infinita, entonces existe* $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ *tal que* $A \subseteq^* A_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Prueba: Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $B_n = \bigcap_{k \leq n} A_k$. De la suposición vemos que $B_n \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $B_{n+1} \subseteq B_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos un punto $a_n \in B_n$ y definimos $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Claramente se obtiene que $A \setminus A_n \subseteq \{a_0, ..., a_{n-1}\}$. Lo cual significa que $A \subseteq^* A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

La siguiente noción nos proporcionará ciertos ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$ que tienen propiedades dinámicas muy interesantes.

Definición 1.2.2. *Sea* X *un espacio topológico. Decimos que* $x \in X$ *es un* P*-punto si para cada familia numerable* $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ *de vecindades de del punto* x *existe* $V \in \mathcal{N}(x)$ *tal que* $V \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$*.*

W. Rudin [R56] introdujó la noción de P-punto para demostrar que $\mathbb{N}^*$ no es homogéneo. El probó que la Hipótesis del Continuo implica que existen P-puntos en $\mathbb{N}^*$ (hay hipótesis más débiles que garantizan la existencia de los P-puntos). Por lo contrario, S. Shelah construyó un modelo de ZFC en el cual $\mathbb{N}^*$ no tiene P-puntos (para una descripción del modelo ver [Mi] y [W82]). En seguida daremos la construcción de P-puntos de W. Rudin, pero antes caracterizaremos los P-puntos usando combinatoria infinita.

Lema 1.2.3. $p \in \mathbb{N}^*$ *es un* P*-punto si y solo si para cada partición* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *de* $\mathbb{N}$ *se cumple que o bien existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $A_n \in p$*, o existe* $A \in p$ *tal que* $A \cap A_n$ *es finito para toda* $n \in \mathbb{N}$*.*

Prueba: Necesidad: Supongamos que $p \in \mathbb{N}^*$ es un P-punto. Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una partición de $\mathbb{N}$. Supongamos que $A_n \notin p$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $B_n = \mathbb{N} \setminus A_n \in p$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por suposición, existe $A \in p$ tal que $A \subseteq^* B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $A \cap A_n$ es finito para toda $n \in \mathbb{N}$.

Suficiencia: Supongamos que $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq p$. Sin perder generalidad supongamos que $B_0 = \mathbb{N}$ y $B_{n+1} \subseteq B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pongamos $A_n = B_n \setminus (\bigcup_{i<n} B_i)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que

$\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una partición de $\mathbb{N}$ con $A_n \notin p$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, existe $A \in p$ tal que $A \cap A_n$ es finito para toda $n \in \mathbb{N}$. De aquí podemos deducir que $A^* \subseteq B_n^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, p es un P-punto de $\mathbb{N}^*$. $\square$

Para la prueba del siguiente teorema necesitamos lo siguiente: si $s : \nu \to \{0,1\}$ es una función y $i \leq 1$, entonces la *concatenación* de s con i es la función $s^\frown i = s \cup \{(\nu, i)\}$.

Teorema 1.2.6. **[CH]** *Existen* $2^{\mathfrak{c}}$ *P-puntos en* $\mathbb{N}^*$

Prueba: Supongamos que se cumple la Hipótesis del Continuo: $\mathfrak{c} = \omega_1$. Enumeramos $[\mathbb{N}]^\omega$ por $\{A_s : s \in \bigcup_{\nu<\omega_1}\{0,1\}^\nu\}$. Primero fijamos dos conjuntos infinitos disjuntos $B_{(0,0)}$ y $B_{(0,1)}$ de $A_\emptyset$. Supongamos que para el número ordinal $\theta < \omega_1$ el conjunto B_s ha sido definido para cada $s \in \bigcup_{\nu<\theta}\{0,1\}^\nu$ de tal forma que:

1. $B_{s^\frown 0} \cap B_{s^\frown 1} = \emptyset$, para todo $s \in \bigcup_{\nu<\theta}\{0,1\}^\nu$,
2. $B_{s^\frown i} \subseteq^* B_s$, para todo $s \in \bigcup_{\nu<\theta}\{0,1\}^\nu$ y para cada $i \leq 1$;
3. $B_{s^\frown 0} \cup B_{s^\frown 1} \subseteq^* A_s$ ó $(B_{s^\frown 0} \cup B_{s^\frown 1}) \cap A_s = \emptyset$, para cada $s \in \bigcup_{\nu<\theta}\{0,1\}^\nu$; y
4. para cada $\nu < \theta$ y para cada función $s : \nu \to \{0,1\}$ se cumple que $\bigcap_{\mu<\nu} B_{s|_\mu}$ es infinito.

Basta considerar el caso cuando θ es límite. Fijemos una función $s : \theta \to \{0,1\}$. Claramente la familia $\{B_{s|_\nu} : \nu < \theta\}$ tiene la propiedad de intersección infinita. De aquí y por el Lema 1.2.2, existe $B \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $B^* \subseteq \bigcap_{\nu<\theta} B^*_{s|_\nu}$. Si $B \cap A_\theta$ es infinito, entonces tomamos $B_{s^\frown 0}, B_{s^\frown 1} \in [B \cap A_\theta]^\omega$ disjuntos. Si $B \cap A_\theta$ es finito, entonces elegimos dos subconjuntos disjuntos $B_{s^\frown 0}, B_{s^\frown 1} \in [B \setminus A_\theta]^\omega$. Ahora para cada función $g : \omega_1 \to \{0,1\}$, en virtud del Corolario 1.1.1, podemos escoger $p_g \in \mathbb{N}^*$ tal que $\{B_{g|_\nu} : \nu < \omega_1\} \subseteq p_g$. De la primer propiedad observamos que $p_g \neq p_h$ siempre que las funciones $g, h : \omega_1 \to \{0,1\}$ sean distintas. Sea $g : \omega_1 \to \{0,1\}$ una función arbitraria. Del tercer inciso obtenemos que $\{B^*_{g|_\nu} : \nu < \omega_1\}$ es una base de p_g. Por ésto y el inciso 2, concluimos que p_h es un P-punto. $\square$

1.3 Puntos $\mathcal{F}$-límites de sucesiones

La familia de todos los filtros libres sobre $\mathbb{N}$ será denotada por $F(\mathbb{N})$.

Definición 1.3.1. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F} \in F(\mathbb{N})$. Decimos que un punto $x \in X$ es punto $\mathcal{F}$-límite de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X (en símbolos, $x = \mathcal{F} - \lim_{n\to\infty} x_n$) Si para cada vecindad V of x, se cumple que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in \mathcal{F}$.*

La noción de punto $\mathcal{F}$-límite ha sido considerada por muchos matemáticos en diferentes contextos y formas generales. Por ejemplo, H. Furstenberg [Fu81, p. 179] los consideró en algunas aplicaciones a los Sistemas Dinámicos en el caso general cuando $\mathcal{F}$ es simplemente una familia con la propiedad de la intersección finita (ver también el libro [A97]). El caso cuando $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro fué estudiado por R. A. Bernstein [B70] en el contexto de Análisis no Estándar. Z. Frolík [F67] usó los puntos p-límites para producir ultrafiltros en $\beta(\mathbb{N})$ mediante una operación que llamó suma de ultrafiltros.

Para un filtro arbitrario $\mathcal{F} \in F(\mathbb{N})$ no es dificíl ver que $x = \mathcal{F} - \lim_{n\to\infty} x_n$ si y solo si $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$ para todo ultrafilro $p \in \beta(\mathbb{N})$ que contenga a $\mathcal{F}$. De este modo el estudio de los puntos $\mathcal{F}$-límite se puede reducir a considerar solo el caso cuando $\mathcal{F}$ sea un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$. Es por ésto que en este libro nos centraremos en los puntos p-límite cuando p sea un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$.

En los espacios topológicos Hausdorff los puntos p-límites son únicos cuando existen. Para una sucesión convergente $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ se cumple que $x_n \to x$ si y solo si $x = \mathcal{F}_r - \lim_{n\to\infty} x_n$.

Teorema 1.3.1. *Sea X un espacio topológico. Un punto $x \in X$ es un punto de adherencia del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ si y solo si existe $p \in \beta(\mathbb{N})$ tal que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Prueba: Es directo de la definición que todo punto p-límite es un punto de adherencia de la sucesión en cuestión. Para probar la necesidad supongamos que x punto de adherencia de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Es evidente que la familia $\{\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} : V \in \mathcal{N}(x)\}$ tiene la propiedad de intersección finita. De acuerdo con el Corolario 1.1.1 dicha familia está contenida en un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ que denotaremos por p. Se sigue inmediatamente que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$. $\square$

Para puntos de acumulación se tiene lo siguiente:

Teorema 1.3.2. *Sea X un espacio topológico. Un punto $x \in X$ es un punto de acumulación de un conjunto infinito numerable $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ si y solo si existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Ejercicio 1.3.1. *Probar el Teorema 1.3.2.*

En los espacios topológicos discretos no existen los puntos p-límites de sucesiones no trivales. A continuación probaremos que en los espacios compactos siempre existen.

Teorema 1.3.3. *Toda sucesión en un espacio compacto X tiene un punto p-límite en X, para todo $p \in \mathbb{N}^*$.*

Prueba: Sean X un espacio compacto y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Consideremos la familia $\{cl_X(\{x_n : n \in A\}) : A \in p\}$ de subconjuntos compactos de X. Es claro que esta familia tiene la propieda de intersección finita y por ser X compacto se cumple que $\bigcap_{A\in p} cl(\{x_n :\in A\}) \neq \emptyset$. Tomemos un punto x en esta intersección. Probaremos que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$. Ciertamente, sean $V \in \mathcal{N}(x)$ y $B = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$. Como $x \in cl_X(\{x_n : n \in A\})$, debemos tener que $B \cap A \neq \emptyset$, para cada $A \in p$. Según el Teorema 1.1.4, obtenemos que $B \in p$. Por tanto, $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$. $\square$

Una caracterización de la convergencia se puede establecer de la siguiente forma usando puntos p-límites:

Teorema 1.3.4. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión es un espacio topológico X. Entonces, $x_n \to x$ si y solo si existe un conjunto denso $D \subseteq \mathbb{N}^*$ tal que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$, para todo $p \in D$.*

Prueba: Necesidad. Si $x_n \to x$, tenemos entonces que $x = \mathcal{F}_r - \lim_{n\to\infty} x_n$. Lo cual implica directamente que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$, para todo $p \in \mathbb{N}^*$.

Suficiencia. Supongamos que existe un subconjunto denso $D \subseteq \mathbb{N}^*$ tal que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$, para todo $p \in D$. Supongamos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a x. Entonces, existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin V\}$ es infinito. Por nuestra suposición, sabemos que podemos encontrar $p \in \hat{A} \cap D$ tal que $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$, lo cual es imposible. $\square$

Tal y como acabamos de ver si $x_n \to x$, entonces $x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$, para todo $p \in \mathbb{N}^*$. Pero la condición "$x = p - \lim_{n\to\infty} x_n$ para algún $p \in \mathbb{N}^*$" por si sola no garantiza que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a x. Por ejemplo, consideremos la sucesión $(\{n\})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\beta(\mathbb{N})$. Para cada $p \in \mathbb{N}^*$, p es el punto p-límite de la sucesión $(\{n\})_{n\in\mathbb{N}}$, pero esta sucesión no converge a ningún punto de $\beta(\mathbb{N})$.

Dado cualquier ultrafiltro $p \in \mathbb{N}^*$, una manera muy práctica ya sea para encontrar el punto p-límite o demostrar que un punto es el punto p-límite de una sucesión $(x_n)_{n\in N}$ es tomar $A \in p$ adecuadamente y considerar solamente la sucesión $(x_n)_{n\in A}$. Efectivamente, $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in p$ si y solo si $\{n \in A : x_n \in V\} \in p$, para toda vecindad V del punto x. Este procedimiento lo indicaremos, cuando sea necesario, como $x = p - \lim_{n\in A} x_n$.

Los puntos p-límites son una herramienta muy importante en la construcción de ciertos espacios topológicos numerablemente compactos como contraejemplos. El libro de Furstenberg [Fu81] contiene muchas aplicaciones de puntos p-límites a los sitemas dinámicos. Algunas de las cuales serán estudiadas en el siguiente capítulo.

Teorema 1.3.5. *Sea $p \in \mathbb{N}^*$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X y $x = p - lim_{n\to\infty} x_n$, entonces $f(x) = p - lim_{n\to\infty} f(x_n)$ para toda función continua $f : X \to Y$.*

Prueba: Sea $V \in \mathcal{N}(f(x))$. Como $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}(x)$, tenemos que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in f^{-1}(V)\} \in p$. De aquí, se sigue que $\{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \in V\} \in p$. Por tanto, $f(x) = p - lim_{n\to\infty} f(x_n)$. $\square$

El comportamiento de los puntos p-límites en productos es equivalente al que tienen los puntos p-límites de las proyecciones:

Teorema 1.3.6. *Sean $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\prod_{i\in I} X_i$ y $p \in \mathbb{N}^*$. Entonces, $x = p - lim_{n\to\infty} x_n$ si y solo si $x(i) = p - lim_{n\to\infty} x_n(i)$, para todo $i \in I$.*

Prueba: La necesidad se sigue inmediatamente del Teorema 1.3.5 por ser las proyecciones continuas. Supongamos que $x(i) = p - lim_{n\to\infty} x_n(i)$, para todo $i \in I$. Sea $\{i_0, ..., i_l\} \subseteq I$ y, para cada $j \leq l$, sea V_{i_j} un subconjunto abierto de X_{i_j} que contenga al punto $x(i_j)$. Consideremos el abierto básico del producto $V = \bigcap_{j\leq}[i_j, V_{i_j}]$ que es una vecindad de x. Por hipótesis, para cada $j \leq l$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n(i_j) \in V_{i_j}\}$ yace en el ultrafiltro p. Por lo cual se cumple la relación

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} = \bigcap_{j\leq l}\{n \in \mathbb{N} : x_n(i_j) \in V_{i_j}\} \in p$$

Por tanto, $x = p - lim_{n\to\infty} x_n$. $\square$

Para finalizar esta sección veremos como se describe la extensión de Stone de una función de $\mathbb{N}$ en cualquier espacio compacto.

Teorema 1.3.7. *Sean X un espacio compacto y $f : \mathbb{N} \to X$ una función. Entonces, $\hat{f}(p) = p - lim_{n\to\infty} f(n)$, para todo $p \in \beta(\mathbb{N})$.*

Prueba: Como $p = p - lim_{n\to\infty} n$, el resultado se obtiene como una aplicación directa del Teorema 1.3.5. $\square$

1.4 Puntos p-límites en espacios métricos

Si en un espacio métrico X se tiene que $x = p\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$, entonces podemos hallar una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión original $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \to x$. Pero en lo general no se cumple la convergencia $x_n \not\to x$: Por ejemplo, si $p \in \mathbb{N}$ y $A \in p$ satisface que $B = \mathbb{N} \setminus A \in [\mathbb{N}]^\omega$, entonces la sucesión $(\chi_A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente y $B = \{n \in \mathbb{N} : \chi_A(n) = 0\} \notin p$. En relación a ésto tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.4.1. *Sean X un espacio topológico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente. Si $p \in \mathbb{N}^*$ y existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in p$ y $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$, entonces se cumple que $x = p\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$.*

Prueba: Sea $V \in \mathcal{N}(x)$. Por hipótesis, sabemos que $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq^* \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$. Por consiguiente, $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in p$. Por lo tanto, $x = p\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$. $\square$

La siguiente caracterización de los P-puntos de $\mathbb{N}^*$, dentro del contexto de espacios métricos, aparece en el artículo **[GS07]**. Pero antes de enunciarla probaremos un lema.

Lema 1.4.2. *Sean $p \in \mathbb{N}^*$ y $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una partición de $\mathbb{N}$ en subconjuntos infinitos tales que $A_n \notin p$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\sigma : \mathbb{N} \to$*

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *una biyección tal que* $\sigma[A_n] = \{n\} \times \mathbb{N}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Si para cada* $k \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $x_k = \frac{1}{n} + \frac{1}{a_n+m}$, *en donde* $\sigma(k) = (n, m)$ *y* $n \leq a_n \in \mathbb{N}$, *entonces* $0 = p\text{-}\lim_{k\to\infty} x_k$.

Prueba: Sea $\epsilon > 0$ y supongamos que $A = \{k \in \mathbb{N} : x_k > \epsilon\} \in p$. Ya que $A_n \notin p$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : A \cap A_n \neq \emptyset\}$ es infinito. Por lo cual, podemos encontrar $n > \frac{2}{\epsilon}$ de modo que $A \cap A_n \neq \emptyset$. Fijemos $k \in A \cap A_n$. Tenemos que $\sigma(k) = (n, m)$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y por consiguiente $x_k = \frac{1}{n} + \frac{1}{a_n+m} < \frac{2}{n} < \epsilon$, pero ésto es una contradicción. $\square$

Teorema 1.4.1. *Para un ultrafiltro* $p \in \mathbb{N}^*$, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *p es un P-punto de* $\mathbb{N}^*$.
2. *Dado un espacio métrico* X, *para cada sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* X *y cada* $x \in X$, *se tiene que* $x = p\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$ *si y solo si existe una subsucesión* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in p$ *y* $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.
3. *Para cada sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números reales y para cada* $x \in \mathbb{R}$, *se cumple que* $x = p\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$ *si y solo si existe una subsucesión* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in p$ *y* $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Prueba: $1 \Rightarrow 2$. Probaremos primero la necesidad. Para cada $n \in \mathbb{N}$, ponemos $A_n = \{i \in \mathbb{N} : x_i \in B(x, \frac{1}{n})\}$. Por hipótesis, $A_n \in p$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ser p un P-punto, es posible hallar $A \in p$ de tal modo que $A \subseteq^* A_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Si $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ es la enumeración creciente de A, entonces $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ resulta ser la sucesión buscada. La suficiencia se sigue inmediatamente del Lema 1.4.1.

$2 \Rightarrow 3$. Esta implicación es trivial.

$3 \Rightarrow 1$. Supongamos que p no es un P-punto de $\mathbb{N}^*$. En base al Lema 1.2.3, existe una partición $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$ tal que $A_n \notin p$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y para cada elemento $A \in p$ encontramos $n \in \mathbb{N}$ para el cual la intersección $A \cap A_n$ es infinita. Fijemos una biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de tal forma que $\sigma[A_n] = \{n\} \times \mathbb{N}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $x_k = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+m}$ si se cumple la igualdad $\sigma(k) = (n, m)$. De acuerdo con el Lema 1.4.2, tenemos que $0 = p\text{-}\lim_{k\to\infty} x_k$. Por suposición, es posible hallar una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que satisfaga $B = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in p$ y $0 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Elejimos $l \in \mathbb{N}$ tal que $B \cap A_l$ sea infinito. Como consecuencia de ésto, la sucesión $(x_n)_{n\in B\cap A_l}$ converge a $\frac{1}{l}$ y como una subsucesión de $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ debe converger a 0, obtenemos una contradición. □

En el artículo [GS07] también se caracterizan de manera análoga los ultrafiltros selectivos de $\beta(\mathbb{N})$.

Para concluir con esta sección daremos una propiedad topológica muy importante de los P-puntos.

Teorema 1.4.2. *Si $f : X \to Y$ es continua, Y es un espacio métrico y $x \in X$ es un P-punto, entonces f es constante en una vecindad de x.*

Prueba: Para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos $V_n \in \mathcal{N}(x)$ de tal manera que $d(f(x), f(y)) < \frac{1}{n+1}$, para todo $y \in V_n$. Por ser x un P-punto, existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que $V \subseteq V_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Es evidente que si $y \in V$, entonces $d(f(x), f(y)) = 0$. Es decir, f es constante en V. □

1.5 Suma de ultrafiltros

En esta sección veremos como extender la operación aditiva de los números narturales a la compactación de Stone- Čech $\beta(\mathbb{N})$ de $\mathbb{N}$ usando puntos p-límites :

Para $p \in \beta(\mathbb{N})$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$p + n = p - \lim_{m\to\infty} m + n.$$

Ahora si $p, q \in \beta(\mathbb{N})$, entonces definimos

$$p + q = q - \lim_{n\to\infty} p + n.$$

Combinatoriamente tenemos

$$p + q = \{A \subseteq \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : m + n \in A\} \in p\} \in q\}.$$

Teorema 1.5.1. *Para esta adición de ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$ se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *$+$ es una operación asociativa en $\beta(\mathbb{N})$.*

2. *Esta operación de $\beta(\mathbb{N})$ extiende a la adición original de $\mathbb{N}$.*

Prueba: Solo probaremos la asociatividad de $+$. Sean $p, q, r \in \beta(\mathbb{N})$. Entonces,

$$A \in p + (q + r) \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : A \in p + n\} \in q + r$$

$$\Leftrightarrow \{m \in \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : A \in p + n\} \in q + m\} \in r.$$

Pongamos $B = \{m \in \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : A \in p + n\} \in q + m\}$. Por otro lado, tenemos que

$$A \in (p + q) + r \Leftrightarrow \{m \in \mathbb{N} : A \in (p + q) + m\} \in r$$

$$\Leftrightarrow \{m \in \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : n + m \in A\} \in p + q\} \in r.$$

Sea $B' = \{m \in \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : n + m \in A\} \in p + q\}$. Entonces,

$$m \in B \Rightarrow \{n \in \mathbb{N} : A \in p + n\} \in q + m$$

$$\Rightarrow \{i \in \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : A \in p + n + m + i\} \in q,$$

y

$$m \in B' \Rightarrow \{n \in \mathbb{N} : n + m \in A\} \in p + q$$

$$\Rightarrow \{i \in \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : n + m \in A\} \in p + i\}\} \in q$$

$$\Rightarrow \{i \in \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : n + m \in A\} \in p + i\}\} \in q.$$

Pero como

$$\{i \in \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : A \in p+n+m+i\} = \{i \in \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : n+m \in A\} \in p+i\}\},$$

concluimos que $B = B'$. Esto demuestra la asociatividad de $+$. $\square$

Vale la pena remarcar que la igualdad se cumple $p + n = n + p$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $p \in \mathbb{N}^*$.

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos $\rho_n : \beta(\mathbb{N}) \to \beta(\mathbb{N})$ por $\rho_n(p) = p + n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo ultrafiltro $p \in \beta(\mathbb{N})$. Del Teorema 1.3.5 podemos ver que ρ_n es la extensión de Stone de la función $\rho_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $\rho_n(m) = m + n$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Por otro lado, la función $\lambda_p : \beta(\mathbb{N}) \to \beta(\mathbb{N})$ está dada por $\lambda_p(q) = p + q$, para todo $q \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 1.5.2. *La función $\lambda_p : \beta(\mathbb{N}) \to \beta(\mathbb{N})$ es continua, para todo $p \in \mathbb{N}^*$. Por otra parte, la función $\rho_n : \beta(\mathbb{N}) \to \beta(\mathbb{N})$ determina un homeomorfismo de $\mathbb{N}^*$ en si mismo, para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Prueba: Sean $p, q \in \mathbb{N}^*$ y supongamos que $\lambda_p(q) = p + q \in \hat{A}$, para algún $A \subseteq \mathbb{N}$. De la definición se deduce que $B = \{n \in \mathbb{N} : p + n \in \hat{A}\} \in q$. Si $r \in \hat{B}$, entonces $\{n \in \mathbb{N} : p + n \in \hat{A}\} \in r$. Por consiguiente, $\lambda_p(r) = p + r \in \hat{A}$. Con ésto probamos que λ_p es continua para todo $p \in \beta(\mathbb{N})$. Para la segunda parte, tomemos $n \in \mathbb{N}$. Como $\rho_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es inyectiva y $\rho_n[\mathbb{N}] = \mathbb{N} \setminus n$, se sigue que la restricción $\rho_n|_{\mathbb{N}^*} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ es un homeomorfismo. □

En fácil ver que $\rho_n^{-1}(A) = -n + A$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $A \subseteq \mathbb{N}$. En estos términos, si $p \in \mathbb{N}^*$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \in p + n$ si y solo si $-n + A \in p$. De aquí podemos reedefinir la adición de dos ultrafiltros:

$$p + q = \{A \subseteq \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : -n + A \in p\} \in q\}.$$

El siguiente resultado sobre la existencia de idempotentes es de R. Ellis [E69] y en el caso de semigrupos topológicos aparece en [Nu52], [Wa53] y [Wa55].

Teorema 1.5.3. *Sea X un espacio compacto. Si $+ : X \times X \to X$ es una operación asociativa y continua por la derecha*[1]*, entonces existe $p \in X$ tal que $p + p = p$.*

Prueba: Consideremos el conjunto

$$\mathcal{C} = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset, A \text{ es cerrrado y } A + A \subseteq A\},$$

el cual es no vacío pues $X \in \mathcal{C}$. Ordenando $\mathcal{C}$ por inclusión inversa y aplicando el Lema de Zorn, obtenemos un elemento minimal A de $\mathcal{C}$. Elegimos $p \in A$. Claramente $p + A$ es compacto y por ello es también cerrado, y además

$$(p + A) + (p + A) \subseteq p + A + A + A \subseteq p + A.$$

Lo cual nos dice que $p + A \in \mathcal{C}$ y por consiguiente $p + A = A$. Tomemos $q \in A$ que cumpla $p + q = p$. El conjunto $C = \{y \in A : p + y = p\}$ es no vacío y cerrado. Si $x, y \in C$, entonces $p + (x + y) = p + x + y = p + y = p$.

[1] Un función $f : X \times X \to X$ se dice que es *continua por la derecha* si para cada $x \in X$ que fijemos la función $y \to x + y$ es continua

Esto nos garantiza que $C \in \mathcal{C}$ y por tanto $A = C$. De aquí concluimos que $p + p = p$. □

De la asociatividad de $+$, del Teorema 1.5.2 y del Teorema 1.5.3 obtenemos la existencia de idempotentes en $\beta(\mathbb{N})$:

Corollary 1.5.1. *Existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $p + p = p$.*

Enseguida daremos una propiedad combinatoria de los ultrafiltros idempotentes de $\beta(\mathbb{N})$.

Omitimos la prueba del siguiente lema auxiliar que es muy evidente.

Lema 1.5.1. *Sean $\{A_i : i \leq k\} \subseteq [\mathbb{N}]^\omega$ y $\{n_i : i \leq k\} \subseteq \mathbb{N}$. Si*

1. $n_i \in -n_{i-1} + A_{i-1}$, *y*
2. $A_i \subseteq -n_{i-1} + A_{i-1}$,

para todo $1 \leq i \leq k$, entonces $n_0 + ... + n_k \in A_0$.

Teorema 1.5.4. *Si $p \in \mathbb{N}^*$ es un idempotente, entonces para cada $A \in p$ existe una sucesión infinita $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ tal que $FS((n_k)_{k\in\mathbb{N}}) \subseteq A$.*

Prueba: Supongamos que $p + p = p$ y sea $A \in p$. Pongamos $A_0 = A$ y $B_0 = \{n \in \mathbb{N} : -n + A_0 \in p\}$. Elegimos $n_0 \in A_0 \cap B_0$ y definimos $A_1 = A_0 \cap (-n_0 + A_0)$ el cual es un elemento de p. De manera inductiva, para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos $A_i = A_{i-1} \cap (-n_{i-1} + A_{i-1})$, $B_i = \{n \in \mathbb{N} : -n + A_i \in p\}$ y $n_i \in A_i \cap B_i$ (este punto existe por que $A_i, B_i \in p$). Nuestra sucesión infinita es $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Efectivamente, si $F \in FIN$, el Lema 1.5.1 nos garantiza que $\sum_{i\in F} n_i \in A_{\min\{F\}}$. □

Teorema 1.5.5. [Sumas Finitas] *Sea $1 \leq l \in \mathbb{N}$. Si $\mathbb{N} = \bigcup_{1\leq i\leq l} A_i$, entonces existen $1 \leq j \leq l$ y una sucesión infinita $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ tal que $FS((n_k)_{k\in\mathbb{N}}) \subseteq A_j$.*

Prueba: Por el Teorema de Ellis 1.5.3 existe un ultrafiltro idempotente $p \in \mathbb{N}^*$, y como $\mathbb{N}^* = \bigcup_{1\leq i\leq l} A_i^*$, existe $1 \leq j \leq l$ tal que $p \in A_j^*$. La conclusión se sigue del Teorema 1.5.4. □

Una generalización del Teorema de las Sumas Finitas de Hindman se encuentra en el libro [HS98, Cor. 5.9].

Como la adición de los números naturales es conmutativa, uno puede esperar que también la adición en $\beta(\mathbb{N})$ sea conmutativa, lo cual es completamente falso como lo mostraremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5.1. *Existen* $p, q \in \mathbb{N}^*$ *tales que* $p + q \neq q + p$.

Prueba: Como en el artículo de K. Kunen [Ku78], decimos que $x \in X$ es un P-*punto débil* si x no es punto de acumulación de un subconjunto numerable de X. En este trabajo, K. Kunen demostro que existen $\mathfrak{c}$ P-puntos débiles en $\mathbb{N}^*$ no equivalentes[2]entre si. Tomemos solamente dos de estos P-puntos débiles p y q. Claramente $p + n$ y $q + n$ también son P-puntos débiles, para toda $n \in \mathbb{N}$. Del Lema 8.2 de [C77] sabemos que

$$cl_{\mathbb{N}^*}(\{p + n : n \in \mathbb{N}\}) \cap cl_{\mathbb{N}^*}(\{q + n : n \in \mathbb{N}\}) = \emptyset.$$

Como $p + q = q - \lim_{n\to\infty} p + n \in cl_{\mathbb{N}^*}(\{p + n : n \in \mathbb{N}\})$ y $q + p = p - \lim_{n\to\infty} q + n \in cl_{\mathbb{N}^*}(\{q + n : n \in \mathbb{N}\})$, se sigue que $p + q \neq q + p$.

Veamos una construcción de tales puntos que no usa más que combinatoria finita:

Sean $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$ distintos. Inductivamente, supongamos que hemos definido $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ para cada $i \leq n \in \mathbb{N}$ de tal manera que $a_0 < a_1 < .... < a_n$, $b_0 < b_1 < .... < b_n$ y

$$\{a_k + i : i \leq k \leq n\} \cap \{b_k + i : i \leq k \leq n\} = \emptyset.$$

Elegimos $a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbb{N}$ de tal forma que

$$a_n + i < a_{n+1} \text{ y } b_n + i < b_{n+1} < b_{n+1} + n < a_{n+1},$$

para toda $i \leq n$. Definimos $A = \{a_n + i : i \leq n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{b_n + i : i \leq n \in \mathbb{N}\}$. Claramente, $A \cap B = \emptyset$. Para $n, m \in \mathbb{N}$, afirmamos que $(-n + A) \cap (-m + A)$ es infinito. En efecto si $l \in \mathbb{N}$ y $l \geq \max\{n, m\}$, entonces $a_l + n, a_l + m \in A$, lo cual significa que $a_l \in (-n + A) \cap (-m + A)$. Así, la familia $\{-n + A : n \in \mathbb{N}\}$ tiene la propiedad de intersección finita, y de la misma manera se prueba que $\{-n + B : n \in \mathbb{N}\}$ tiene la propiedad de intersección finita. Tomemos $p, q \in \mathbb{N}^*$ que satisfagan $\{-n + A : n \in \mathbb{N}\} \subseteq p$ y $\{-n + B : n \in \mathbb{N}\} \subseteq q$. Entonces, se cumple que $p + n \in A^*$ y $q + n \in B^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como una consecuencia de ésto obtenemos que

$$p + q \in cl_{\mathbb{N}^*}(\{p + n : n \in \mathbb{N}\}) \subseteq A^*$$

[2]Decimos que $p, q \in \mathbb{N}^*$ son *equivalentes* si existe una biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f[p] = q$.

y

$$q + p \in cl_{\mathbb{N}^*}(\{q + n : n \in \mathbb{N}\}) \subseteq B^*$$

Por tanto, $p + q \neq q + p$. □

Ahora probaremos que $p + n \neq p + m$ siempre que $n < m \in \mathbb{N}$, para todo $p \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 1.5.6. *Sean $p \in \mathbb{N}^*$ y $n, m \in \mathbb{N}$. Si $p + n = p + m$, entonces $n = m$.*

Prueba: Supongamos que

$$p + n = p - \lim_{k\to\infty} k + n = p - \lim_{k\to\infty} k + m = p + m = q.$$

Entonces, para cada $A \in q$ se cumple que

$$(*) \qquad \{k \in \mathbb{N} : k + n \in A\} \cap \{k \in \mathbb{N} : k + m \in A\} \in p.$$

Fijemos $l \in \mathbb{N}$ y seleccionemos $j < l$ tal que $P_j^l \in q$. La propiedad $(*)$ asegura la existencia de un número natural $s \in \mathbb{N}$ tal que $s + n, s + m \in P_j^l$. De donde se obtiene que $n \equiv m$ mod(l). Pero ésto solo es posible cuando $n = m$. □

Teorema 1.5.7. *Sean $p \in \mathbb{N}^*$ y $n, m \in \mathbb{N}$. Si $m < n$, entonces*

$$-m + (p + n) = p + (n - m).$$

Prueba:

$$-m + (p + n) = -m + (p - \lim_{k\to\infty} k + n) = p - \lim_{k\to\infty} -m + (k + n)$$

$$= p - \lim_{k\to\infty} k + (n - m) = p + (n - m). \ \square$$

En este libro los ideales derechos de $\beta(\mathbb{N})$ serán fundamentales y es por eso que dirigiremos nuestra antención a ellos:

Definición 1.5.1. *Decimos que $I \subseteq \beta(\mathbb{N})$ es un ideal derecho de $\beta(\mathbb{N})$ si $I \neq \emptyset$ y $I + \beta(N) \subseteq I$. Un ideal derecho I de $\beta(\mathbb{N})$ se llama minimal si no contiene propiamente a ningún otro ideal derecho de $\beta(\mathbb{N})$.*

Si $p \in \beta(\mathbb{N})$, entonces $p + \beta(\mathbb{N})$ es un ejemplo de un ideal derecho de $\beta(N)$.

A continuacion enlistamos propiedades básicas de los ideales derechos que el lector puede verificar sin ningún problema:

Teorema 1.5.8. *1. La intersección de ideales derechos es un ideal si su intersección es no vacía*

2. *Si I es un ideal derecho de $\beta(\mathbb{N})$ y $p \in \beta(\mathbb{N})$, entonces $p + I$ es un ideal derecho de $\beta(\mathbb{N})$.*

3. *Para cada $p \in \beta(\mathbb{N})$, existe un ideal derecho minimal[3] de $\beta(\mathbb{N})$ que contiene a p.*

4. *Un ideal derecho I de $\beta(\mathbb{N})$ es minimal si y solo si $p + \beta(N) = I$ para todo $p \in I$.*

5. *Si I es un ideal derecho de $\beta(\mathbb{N})$, entonces $cl_{\beta(\mathbb{N})}(I)$ es también un ideal derecho de $\beta(\mathbb{N})$.*

6. *Todo ideal derecho minimal de $\beta(N)$ es cerrado.*

El libro de N. Hindman y D. Strauss [HS98] contiene varios resultados importantes sobre el semigrupo $(\beta(\mathbb{N}), +)$.

Finalizamos esta sección con una aplicación topológica.

Teorema 1.5.9. *Sean X un espacio topológico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $p, q \in \mathbb{N}^*$. Entonces, se cumple la identidad*

$$(p + q) - lim_{k\to\infty} x_k = q - lim_{m\to\infty}(p - lim_{n\to\infty} x_{m+n}).$$

Prueba: Pongamos $x = (p + q) - lim_{k\to\infty} x_k$ y $y = q - lim_{m\to\infty}(p - lim_{n\to\infty} x_{m+n})$. Supongamos que existen abiertos $V \in \mathcal{N}(x)$ y $U \in \mathcal{N}(y)$ tales que $V \cap U = \emptyset$. Entonces, $A = \{k \in \mathbb{N} : x_k \in V\} \in p + q = q - lim_{m\to\infty} p + m$. Por otro lado sabemos que $B = \{m \in \mathbb{N} : p + m \in A^*\} \in q$ y $C = \{m \in \mathbb{N} : p - lim_{n\to\infty} x_{m+n} \in U\} \in q$. Fijemos $m \in B \cap C$. Tenemos entonces que $p + m \in A^*$ y $E = \{n \in \mathbb{N} : x_{m+n} \in U\} \in p$. Como $p + m = p - lim_{n\to\infty} m + n$, se debe cumplir que $F = \{n \in \mathbb{N} : m + n \in A\} \in p$. Ahora tomemos $n \in E \cap F$. Se sigue que $m + n \in A$ y por ello $x_{m+n} \in V \cap U$, lo cual es imposible. Por tanto, $x = y$. □

[3] A dicho ideal se le conoce como el *ideal derecho principal generado* por p

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos Discretos

Sea X un conjunto no vacío y $f : X \to X$ una función. La n-*iterada* de f es la función $f^n : X \to X$ que resulta de componer consigo misma n-veces la función f. Si $n = 0$, f^0 denotará a la función identidad. La *órbita* de un punto $x \in X$ es el conjunto $\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. De manera más general, la *órbita* de $A \subseteq X$ es el conjunto $\mathcal{O}_f(A) = \{f^n(x) : x \in A \text{ y } n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_f(x)$. En el caso en que $f : X \to X$ sea una función biyectiva consideraremos todas las n-iterada de f para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ entendiendo que f^n es la composición de la función inversa f^{-1} consigo mismo n-veces. En este caso la órbita de $x \in X$ resulta ser el conjunto $\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$.

Enlistamos la notación y algunos conceptos básicos que usaremos en este capítulo:

1. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $A + n = \{a + n : a \in A\}$ y $-n + A = \{k \in \mathbb{N} : k + n \in A\}$.

2. Para un número entero $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{N} = \{nk : k \in \mathbb{N}\}$.

3. Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ se llama *grueso* si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a \in A$ tal que $a + i \in A$ para toda $i < n$.

4. Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ se dice que es *sintético* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N} = \bigcup_{i \leq n}(-i + A)$.

5. Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ se dice que es *sintético por tramos* si y solo si existe $l \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos hallar $a_0, ..., a_n \in A$ de tal forma que $0 < a_{j+1} - a_j \leq l$ para todo $j < n$.

6. $A \subseteq \mathbb{N}$ se llama *IP-conjunto* si existe una sucesión infinita $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números naturales positivos tal que $FS(\{n_k : k \in \mathbb{N}\}) \subseteq A$.

En cuanto a equicontinuidad recordemos lo siguiente:

1. Una familia de funciones $\mathcal{F}$ entre espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y) se llama *equicontinua* en un punto $x \in X$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in X$ y $d_X(x, y) < \delta$, entonces $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$, para todo $f \in \mathcal{F}$. La familia $\mathcal{F}$ diremos que es *equicontinua* si es equicontinua en todo punto de X.

2. La familia $\mathcal{F}$ se llamará *uniformemente equicontinua* si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $d_X(x, y) < \delta$, entonces $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

3. Supongamos que X es un espacio métrico compacto y $\mathcal{F} \subseteq X^X$. Usando el Lema de Cubiertas de Lebesgue y la compacidad es fácil ver que $\mathcal{F}$ es equicontinua si y solo si es uniformemente equicontinua (Ejercicio E.1).

Sea (X, d) un espacio métrico. La *distancia entre dos subconjuntos* $A, B \subseteq X$ se define como

$$d(A, B) = \min\{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Si $A = \{a\}$, entonces simplemente escribimos $d(a, B)$ en lugar de $d(\{a\}, B)$. El *diámetro* de $A \subseteq X$, es el número $\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

2.1 p-iteraciones

Definición 2.1.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Para $p \in \mathbb{N}^*$, la p-iterada de la función f es la función $f^p : X \to X$ definida por $f^p(x) = p\text{-}\lim_{n\to\infty} f^n(x)$, para todo $x \in X$.*

Como X es un espacio compacto, la función f^p está bien definida en todo punto de X, para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$. El siguiente resultado que establece la principal relación entre estas p-iteradas aparece en [Bl93].

Teorema 2.1.1. *En cualquier sistema dinámico (X, f) se cumple la relación*

$$f^p \circ f^q = f^{q+p},$$

para todo $p, q \in \beta(\mathbb{N})$.

Prueba: Sea (X, f) un sistema dinámico y $p, q \in \beta(\mathbb{N})$. Para $x \in X$, por el Teorema 1.5.9, tenemos que

$$f^{q+p}(x) = (q+p) - lim_{k\to\infty} f^k(x) = p - lim_{m\to\infty}(q - lim_{n\to\infty} f^{m+n}(x)).$$

Por otra parte, en base al Teorema 1.3.5, sabemos que

$$f^p \circ f^q(x) = f^p(f^q(x)) = f^p(q - lim_{n\to\infty} f^n(x))$$

$$= p - lim_{m\to\infty}(f^m(q - lim_{n\to\infty} f^n(x))$$

$$= p - lim_{m\to\infty}(q - lim_{n\to\infty} f^{m+n}(x)).$$

Esto prueba que $f^p \circ f^q = f^{q+p}$, para todo $p, q \in \beta(\mathbb{N})$. □

Para cada $n \in \mathbb{N}$, las n-iteradas de una función son continuas por ser composición de funciones continuas, pero la p-iterada f^p de una función continua $f : X \to X$ puede no ser continua en general. Para ésto veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.1. *Consideremos una sucesión convergente $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ y definimos $f : X \to X$ como:*

$$f(x) = \begin{cases} x & si \ \ x \in \{0, 1\} \\ \frac{1}{n} & si \ \ x = \frac{1}{n+1} \ y \ 1 \leq n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Para $p \in \mathbb{N}^*$ y $x > 0$, se tiene que $f^p(x) = 1$ y por otro lado se cumple que $f^p(0) = 0$. Así obtenemos que f^p es discontinua en 0, para todo $p \in \mathbb{N}^*$.

Ejemplo 2.1.2. *Como en el ejemplo anterior* $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ *es una sucesión convergente con su punto de acumulacón. Definimos* $f : X \to X$ *como:*

$$f(x) = \begin{cases} x & si \;\; x = 0 \\ \frac{1}{n+1} & si \;\; x = \frac{1}{n} \;\; y \; 1 \leq n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

De la definición vemos que para $p \in \mathbb{N}^*$ *y* $x \in X$, $f^p(x) = 0$. *Por lo cual obtenenos que* f^p *es continua en* 0, *para todo* $p \in \mathbb{N}^*$.

Para un ejemplo conexo y compacto tenemos el siguiente tomado del artículo [GS07]:

Ejemplo 2.1.3. *Sea* $X = [0, 1]$. *Definimos* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *como:*

$$f(x) = \begin{cases} x & si \;\; x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{(n+1)(n+2)x-(2n+1)}{n(n+1)} & si \;\; x \in [\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}] \;\; y \; 1 \leq n \in \mathbb{N} \\ 1 & si \;\; x = 1. \end{cases}$$

Es fácil ver que f *es un homeomorfismo entre los intervalos cerrados* $[\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}]$ *y* $[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}]$, *para todo* $1 \leq n \in \mathbb{N}$. *Por lo cual, tenemos que* $f^p[[0, 1)] = [0, \frac{1}{2}]$ *y* $f^p(1) = 1$, *para cada* $p \in \mathbb{N}^*$. *Por tanto, la función* f^p *es discontinua en* 1, *para todo* $p \in \mathbb{N}^*$.

Enunciamos en seguida una caracterización muy útil de la continuidad de una p-iterada en el caso cuando X sea un espacio métrico compacto (en este caso, la métrica de X será denotada por d). Pero antes probaremos dos lemas.

Lema 2.1.1. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico con* X *espacio métrico compacto y* $p \in \mathbb{N}^*$. *Si* $x, y \in X$, $\epsilon > 0$ *y* $d(f^p(x), f^p(y)) < \frac{\epsilon}{3}$, *entonces*

$$\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in p.$$

Prueba: De la definición de f^p vemos que

$$A = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^p(x)) < \frac{\epsilon}{3}\} \cap \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(y), f^p(y)) < \frac{\epsilon}{3}\} \in p.$$

En consecuencia,

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq d(f^n(x), f^p(x)) + d(f^p(x), f^p(y)) + d(f^p(y), f^n(y))$$

$$\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

para todo $n \in A$. Por tanto, $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in p$. □

Lema 2.1.2. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X espacio métrico compacto y $p \in \mathbb{N}^*$. Si $x, y \in X$, $\epsilon > 0$ y*

$$\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{\epsilon}{3}\} \in p,$$

entonces $d(f^p(x), f^p(y)) < \epsilon$.

Prueba: Por suposición, $A = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{\epsilon}{3}\} \in p$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(f^p(x), f^p(y)) &\leq d(f^p(x), f^n(x)) + d(f^n(x), f^n(y)) + d(f^n(y), f^p(y)) \\ &\leq d(f^p(x), f^n(x)) + \frac{\epsilon}{3} + d(f^n(y), f^p(y)), \end{aligned}$$

para todo $n \in A$. Es posible encontrar un número natural $n \in A$ de tal forma que se cumplan las desigualdades $d(f^p(x), f^n(x)) < \frac{\epsilon}{3}$, $d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{\epsilon}{3}$ y $d(f^n(y), f^p(y)) < \frac{\epsilon}{3}$. Por tanto,

$$d(f^p(x), f^p(y)) < \epsilon. \quad \square$$

Teorema 2.1.2. **[GS07]** *Sean (X, f) un sistema dinámico con X espacio métrico compacto y $p \in \mathbb{N}^*$. Para un punto $x \in X$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *f^p es continua en x.*
2. *Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in X$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in p$.*

Prueba: $1 \Rightarrow 2$. Sea $\epsilon > 0$. Elegimos $\delta > 0$ de tal forma que si $y \in X$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^p(x), f^p(y)) < \frac{\epsilon}{3}$. Según el Lema 2.1.1,

$$\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in p.$$

$2 \Rightarrow 1$. Sea $\epsilon > 0$. Seleccionamos $\delta > 0$ de tal forma que si $y \in X$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{\epsilon}{3}\} \in p$. Del Lema 2.1.2 obtenemos que si $y \in X$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^p(x), f^p(y)) < \epsilon$. Por tanto, f^p es continua en x. □

Veamos a continuación una condición que garantiza la existencia de un ultrafiltro $p \in \mathbb{N}^*$ para el cual la p-iterada sea continua en un punto del espacio topológico.

Teorema 2.1.3. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Entonces, f^p es continua para algún $p \in \mathbb{N}^*$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y_0, ..., y_n \in B(x, \delta)$, entonces el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : \forall i \leq n(d(f^k(x), f^k(y_i)) < \epsilon)\}$ es infinito.*

Prueba: La necesidad se obtiene directamente del Teorema 2.1.2.

Suficiencia: Para cada $m \in \mathbb{N}$ elegimos $\delta_m > 0$ de tal manera que si $y_0, ..., y_n \in B(x, \delta)$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^k(x), f^k(y_i)) < \frac{1}{m+1}$, para toda $i \leq n$. Para cada $y \in X$ con $d(x, y) < \delta_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, definimos $A_y = \{k \in \mathbb{N} : d(f^k(x), f^k(y)) < \frac{1}{m+1}\}$. Probaremos que la familia $\mathcal{A} = \{A_y : \exists m \in \mathbb{N}(d(x, y) < \delta_m)\}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ tiene la propiedad de intersección infinita. En efecto, supongamos que $y_0, ..., y_l \in X$ son tales que para cada $i \leq l$ se cumple la desigualdad $d(x, y_i) < \delta_{m_i}$ para algún $m_i \in \mathbb{N}$. Sea $\delta = \max\{\delta_{m_0}, ..., \delta_{m_l}\}$. Como $d(x, y_i) < \delta$ para cada $i \leq l$, la intersección $\bigcap_{i \leq l} A_{y_i}$ es infinita. Tomemos $p \in \mathbb{N}^*$ que contenga a $\mathcal{A}$. Sea $\epsilon > 0$. Fijamos $m \in \mathbb{N}$ que satisfaga $\frac{1}{m+1} < \epsilon$. Si $d(x, y) < \delta_m$, entonces $A_y \in p$ y ésto implica que $\{k \in \mathbb{N} : d(f^k(x), f^k(y)) < \epsilon\} \in p$. Según el Teorema 2.1.2, la función f^p es continua en x. $\square$

Teorema 2.1.4. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X espacio métrico compacto numerable y $p \in \mathbb{N}^*$. Si f^p es continua en $x \in X$, entonces existe $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que f^q es continua en x para todo $q \in \hat{A}$. Si p es un P-punto, entonces el conjunto A se puede elegir dentro de p.*

Prueba: Supongamos que X es un espacio métrico compacto numerable. Por el Teorema 2.1.2, sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\delta_n > 0$ tal que si $y \in X$ y $d(x, y) < \delta_n$ se tiene que

$$A_{n,y} = \{k \in \mathbb{N} : d(f^k(x), f^k(y)) < \frac{1}{n+1}\} \in p.$$

El Lema 1.2.2 nos garantiza la existencia de un subconjunto $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $A \subseteq^* A_{n,y}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $y \in X$ con $d(x, y) < \delta_n$. Fijemos $q \in A^*$ y $\epsilon > 0$. Tomemos $m \in \mathbb{N}$ que cumpla $\frac{1}{m+1} < \epsilon$. Supongamos que $y \in X$ satisface la desigualdad $d(x, y) < \delta_m$. Entonces,

$$A_{m,y} = \{k \in \mathbb{N} : d(f^k(x), f^k(y)) < \frac{1}{m+1}\} \in p.$$

Como $A \subseteq^* A_m$ y $A \in q$, se sigue que $A_{m,y} \in q$. Lo cual implica que $\{k \in \mathbb{N} : d(f^k(x), f^k(y)) < \epsilon\} \in q$. Por tanto, el teorema anterior nos asegura que f^q es continua en x. Es claro que si p es un P-punto, entonces A puede ser tomado dentro de p. $\square$

Veamos a continuación algunas consecuencias de tipo uniforme cuando suponemos la continuidad de una p-iterada en todo el espacio:

Teorema 2.1.5. **[GS07]** *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $p \in \mathbb{N}^*$. Entonces, f^p es continua si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $d(x, y) < \delta$, entonces se cumple que $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in p$.*

Prueba: La suficiencia se obtiene directamente del Teorema 2.1.2. Así que solo probaremos la necesidad. Supongamos que f^p es una función continua. Por ser X compacto, f^p es uniformemente continua. Así, dada $\epsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^p(x), f^p(y)) < \frac{\epsilon}{3}$. Fijemos $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$. Sabemos que

$$A = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^p(x)) < \frac{\epsilon}{3}\} \cap \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(y), f^p(y)) < \frac{\epsilon}{3}\} \in p.$$

Si $n \in A$, entonces

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^n(y)) &\leq d(f^n(x), f^p(x)) + d(f^p(x), f^p(y)) + d(f^p(y), f^n(y)) \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por consiguiente, concluimos que $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in p$. $\square$

A continuación veremos el comportamiento de la discontinuidad de una p-iterada en un punto del espacio.

Teorema 2.1.6. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $p \in \mathbb{N}^*$. Si f^p no es continua en $x \in X$, entonces existe $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que f^q no es continua en x para cualquier $q \in A^*$. En particular, si p es un P-punto, entonces A se puede elegir dentro de p.*

Prueba: En virtud del Teorema 2.1.2 podemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ con la propiedad de que $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$ y $A_n = \{n \in \mathbb{N} : d(f^k(x), f^k(x_n)) \geq \epsilon\} \in p$. Por el Teorema 1.2.2 podemos escojer $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $A \subseteq^* A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijamos $q \in A^*$. Como $x_n \to x$ y $A_n \in q$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 2.1.2, hallamos que f^q no puede ser contiua en x. $\square$

Corollary 2.1.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Si $\{p \in \mathbb{N}^* : f^p \text{ es continua en } x\}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{N}^*$, entonces f^p es continua en x para todo $p \in \mathbb{N}^*$.*

Una propiedad adicional de la continuidad de una p-iterada es la siguiente.

Teorema 2.1.7. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Supongamos que f^p es continua en $x \in X$, para algún $p \in \mathbb{N}^*$. Entonces, para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X que converja a x existe $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ y una subsucesión $(x_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $q \in A^*$ se cumple que $f^q(x_{n_l}) \to f^q(x)$. Particularmente, si p es un P-punto, entonces A puede ser un elemento de p.*

Prueba: Supongamos que f^p es continua en x. Según el Teorema 2.1.2, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $\{k \in \mathbb{N} : d(f^k(x), f^k(y)) < \epsilon\} \in p$. Con la ayuda de ésto, para cada $l \in \mathbb{N}$ podemos hallar $n_l \in \mathbb{N}$ tal que $A_l = \{k \in \mathbb{N} : d(f^k(x), f^k(x_{n_l})) < \frac{1}{l+1}\} \in p$. Tomemos $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $A \subseteq^* A_l$ para cada $l \in \mathbb{N}$, este conjunto existe por el Teorema 1.2.2. Sean $q \in A^*$ y $\epsilon > 0$. Fijemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m+1} < \frac{\epsilon}{3}$ y $l \in \mathbb{N}$ con $m \leq l$. Es posible encontrar $k \in A$ que satisfaga las desigualdades

$$
\begin{aligned}
& d(f^q(x), f^q(x_{n_l})) \\
&\leq d(f^q(x), f^k(x)) + d(f^k(x), f^k(x_{n_l})) + d(f^k(x_{n_l}), f^q(x_{n_l})) \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{l+1} + \frac{\epsilon}{3} \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{m+1} + \frac{\epsilon}{3} \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

Así probamos que $f^q(x_{n_l}) \to f^q(x)$. $\square$

Para ver una de las propiedades topológicas del conjunto de ultrafiltros $p \in \mathbb{N}^*$ para los cuales la p-iterada es continua en un punto determinado del espacio necesitamos la noción de G_δ-cerradura de un subconjunto de un espacio topológico:

Dado un espacio topológico X y $A \subseteq X$, definimos

$$G_\delta - cl_X(A) = \{x \in X : \text{ si } G \text{ es un conjunto } G_\delta \text{ de } X \text{ y } x \in G,$$

$$\text{entonces } G \cap A \neq \emptyset\}.$$

Nuestro resultado buscado es una consecuencia inmediata del siguiente lema.

Lema 2.1.3. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Si f^p no es continua en X, entonces existe un G_δ-conjunto G de $\mathbb{N}^*$ tal que $p \in G$ y f^q no es continua en x para cualquier $q \in G$.*

Prueba: Como f^q no es continua en x, del Teorema 2.1.2 podemos encontrar un número real $\epsilon > 0$ y una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en X tales que $d(x, x_k) < \frac{1}{k+1}$ y $A_k = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(x_k)) \geq \epsilon\} \in p$. Pongamos $G = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k^*$. Claramente $p \in G$. Supongamos que f^q es continua en x para algún $q \in G$. El Teorema 2.1.2 nos garantiza la existencia de un número real $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces

$$\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in q.$$

Elegimos $l \in \mathbb{N}$ que satisfaga $d(x, x_l) < \delta$. Entonces, como $A_l \in q$, podemos tomar $m \in A_l$ tal que $d(f^m(x), f^m(x_l)) < \epsilon$, pero obviamente ésto es una contradicción. Por tanto, f^q no es continua en x para toda $q \in G$. □

Teorema 2.1.8. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Si $C = \{p \in \mathbb{N}^* : f^p \text{ es continua en } x\}$, entonces $C = G_\delta - cl_{\mathbb{N}^*}(C)$.*

Ahora estudiaremos las propiedades que se obtienen al suponer la continuidad de varias p-iteradas en un mismo punto. Pero antes probaremos un lema.

Lema 2.1.4. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto, $x, y \in X$ y $p \in \mathbb{N}^*$. Si $d(f^p(x), f^p(y)) < \frac{\epsilon}{3}$ para alguna $\epsilon > 0$, entonces $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in p$.*

Prueba: De la definición sabemos que $A = \{n \in \mathbb{N} : d(f^p(x), f^n(x)) < \frac{\epsilon}{3}\} \in p$ y $B = \{n \in \mathbb{N} : d(f^p(y), f^n(y)) < \frac{\epsilon}{3}\} \in p$. Por consiguiente, $A \cap B \in p$ y si $n \in A \cap B$, entonces se cumple que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq d(f^n(x), f^p(x)) + d(f^p(x), f^p(y)) + d(f^p(y), f^n(y)) <$$

$$\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \qquad \square$$

Teorema 2.1.9. **[GS07]** *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Sea $\{p_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \beta(\mathbb{N})$ y supongamos que la familia $\{f^{p_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua en x. Entonces, f^q es continua en x, para todo $q \in cl_{\mathbb{N}^*}(\{p_n : n \in \mathbb{N}\})$.*

Prueba: Sea $q \in cl_{\mathbb{N}^*}(\{p_n : n \in \mathbb{N}\})$. Del Teorema 1.3.2 obtenemos que $q = p - \lim_{n\to\infty} p_n$ para algún $p \in \mathbb{N}^*$. Si f^q no es continua en x, por el Teorema 2.1.2, existe $\epsilon > 0$ y una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en X que converje a x tales que $A_k = \{m \in \mathbb{N} : d(f^m(x), f^m(x_k)) \geq \epsilon\} \in q$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Lo cual implica que $B_k = \{n \in \mathbb{N} : A_k \in p_n\} \in p$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por suposición, existe $\delta > 0$ tal que si $y \in X$ y $d(x, y) < \delta$, se tiene entonces que $d(f^{p_n}(x), f^{p_n}(y)) < \frac{\epsilon}{3}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Elegimos $l \in \mathbb{N}$ de tal modo que $d(x, x_k) < \delta$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ con $l \leq k$. Fijamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $l \leq k$. Sabemos que $d(f^{p_n}(x), f^{p_n}(x_k)) < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 2.1.4, conseguimos que

$$C_n = \{m \in \mathbb{N} : d(f^m(x), f^m(x_k)) < \epsilon\} \in p_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijemos ahora $n \in B_k$. De aquí se sigue que $A_k \cap C_n \in p_n$, pero ésto es imposible. $\square$

Es claro que si f^p es continua en un punto $x \in X$, entonces f^{p+n} es continua en x para todo $n \in \mathbb{N}$ pues $f^{p+n} = f^p \circ f^n$. Veamos una condición que nos asegura la continuidad de f^{p+q}.

Corollary 2.1.2. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $p \in \mathbb{N}^*$. Si la familia de funciones $\{f^{p+n} : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua en $x \in X$, entonces f^{p+q} es continua en x, para todo $q \in \beta(\mathbb{N})$.*

Prueba: Let $p \in \mathbb{N}^*$. Sabemos, por el Teorema 1.5.2, que la función $\lambda_p : \beta(\mathbb{N}) \to \beta(\mathbb{N})$ es continua. De donde se obtiene que $\lambda_p[cl_{\beta(\mathbb{N})}\mathbb{N}] =$

$\{p+q : q \in \beta(\mathbb{N})\} = cl_{\beta(\mathbb{N})}(\lambda_p[\mathbb{N}])$. Así el Teorema 2.1.9 nos garantiza que f^{p+q} es continua en x, para cada $q \in \beta(\mathbb{N})$. $\Box$

Veamos que ocurre en el caso compacto métrico numerable.

Teorema 2.1.10. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto numerable y $p \in \mathbb{N}^*$. Si f^p es continua, entonces existe $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que f^{q+p} es continua para todo $q \in A^*$.*

Prueba: Supongamos que f^p es continua. Sean $\epsilon > 0$ y $x \in X$. Por ser f^p uniformemente continua, podemos encontrar $\delta_0 > 0$ tal que si $y, z \in X$ y $d(y, z) < \delta_0$, entonces se cumple que $d(f^p(y), f^p(z)) < \frac{\epsilon}{3}$. Para cada $y \in X$, definimos $B_y = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \delta_0\}$. Por otra parte como consecuencia del Teorema 2.1.5 podemos encontrar $\delta_1 > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $d(x, y) < \delta_1$, entonces $B_y \in p$. Fijemos $x \in X$. Tomemos, en base al Teorema 1.2.2, $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $A \subseteq^* B_y$ para todo $y \in X$ con $d(x, y) < \delta_1$. Fijemos $q \in A^*$. De la definición y de los Teoremas 1.3.5 y 2.1.1 obtenemos que

$$f^{q+p}(y) = f^p(f^q(y)) = f^p(q - \lim_{n\to\infty} f^n(y)) = q - \lim_{n\to\infty} f^p(f^n(y)),$$

para todo $y \in X$. Por lo cual, $A_y = \{n \in \mathbb{N} : d(f^{q+p}(y), f^{p+n}(y)) < \frac{\epsilon}{3}\} \in q$, para cada $y \in X$. Supongamos ahora que $y \in X$ satisface la desigualdad $d(x, y) < \delta_1$. Pues bien si $n \in A_y \cap A_x \cap B_y$, entonces

$$d(f^{q+p}(x), f^{q+p}(y))$$

$$\leq d(f^{q+p}(x), f^{p+n}(x)) + d(f^{p+n}(x), f^{p+n}(y)) + d(f^{p+n}(y), f^{q+p}(y))$$

$$\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Por tanto, f^{q+p} es continua en x. $\Box$

El siguiente teorema nos da una condición evidente para la continuidad de una $(p+q)$-iterada en un punto.

Teorema 2.1.11. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Para $p, q \in \mathbb{N}^*$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f^{p+q} es continua en x.*

2. *Para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in Y$ y $d(x, y) < \delta$, entonces existe $B \in q$ tal que $\{m \in \mathbb{N} : d(f^{n+m}(x), f^{n+m}(y)) < \epsilon\} \in p$ para todo $n \in B$.*

Prueba: 1 $\Rightarrow$ 2. Sea $\epsilon > 0$. Como consecuencia del Teorema 2.1.2 sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $y \in X$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $\{k \in \mathbb{N} : d(f^k(x), f^k(y)) < \epsilon\} \in p + q$. Fijemos $y \in X$ con $d(x, y) < \delta$. Tenemos entonces que,

$$B = \{n \in \mathbb{N} : \{k \in \mathbb{N} : d(f^k(x), f^k(y)) < \epsilon\} \in p + n\}$$

$$= \{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : d(f^{n+m}(x), f^{n+m}(y)) < \epsilon\} \in p\} \in q.$$

2 $\Rightarrow$ 1. Probaremos que se cumple el segundo inciso del Teorema 2.1.2. En efecto, dada $\epsilon < 0$ seleccionamos $\delta > 0$ acorde a nuestra suposición. Supongamos que $y \in X$ satisface la condición $d(x, y) < \delta$. Tomemos $B \in q$ de tal manera que $\{m \in \mathbb{N} : d(f^{n+m}(x), f^{n+m}(y)) < \epsilon\} \in p$ para todo $n \in B$. De aquí se sigue que

$$\{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : d(f^{n+m}(x), f^{n+m}(y)) < \epsilon\} \in p\}$$

$$= \{n \in \mathbb{N} : \{k \in \mathbb{N} : d(f^k(x), f^k(y)) < \epsilon\} \in p + n\} \in q.$$

Lo cual significa que

$$\{k \in \mathbb{N} : d(f^k(x), f^k(y)) < \epsilon\} \in p + q. \quad \square$$

Corollary 2.1.3. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto, $x \in X$ y $p, q \in \mathbb{N}^*$. Supongamos que para todo $\epsilon > 0$ existen $\delta > 0$ y $A \in q$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $\{k \in \mathbb{N} : d(f^{n+k}(x), f^{n+k}(y)) < \epsilon\} \in p$ para todo $n \in A$. Entonces, f^{p+q} es continua en $x \in X$*

Teorema 2.1.12. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Supongamos que existe $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $\mathbb{N} = \bigcup_{i \leq k}(A + i)$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Si f^p es continua en x para todo $p \in A^*$, entonces f^q es continua en x para todo $q \in \mathbb{N}^*$.*

Prueba: Fijemos $q \in \mathbb{N}^*$. De nuestra hipótesis podemos encontrar $i \leq k$ tal que $q \in (A + i)^*$. Consideremos la función $\rho_i : \beta(\mathbb{N}) \to \beta(\mathbb{N})$ que es continua y su restricción $\rho_i|_{\mathbb{N}^*} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ es un homeomorfismo, todo ésto es cierto según el Teorema 1.5.2. Como $\rho_i[A^*] = (A+i)^*$, es posible hallar $p \in A^*$ tal que $\rho_i(p) = p+i = q$. Puesto que f^p es continua en x se sigue que $f^q = f^{p+i} = f^i \circ f^p$ es también continua en x. $\square$

Corollary 2.1.4. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Si el complemento de $A \subseteq \mathbb{N}$ no es grueso y f^p es continua en x para todo $p \in A^*$, entonces f^q es continua en x para todo $q \in \mathbb{N}^*$.*

Prueba: Enumeremos A de manera creciente como $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ya que $\mathbb{N} \setminus A$ no es grueso, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_{i+1} - a_i \leq k$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Sea $b \in \mathbb{N} \setminus A$. Elegimos $j \in \mathbb{N}$ de tal modo que $a_j \leq b < a_{j+1}$. Entonces, podemos hallar $i \leq k$ tal que $a_j + i = b$. Con ésto demostramos que $\mathbb{N} = \bigcup_{i \leq k}(A+i)$. Del Teorema 2.1.12 concluimos que f^q es continua en x para todo $q \in \mathbb{N}^*$. $\square$

El siguiente corolario también se sigue dierectamente del Teorema 2.1.12.

Corollary 2.1.5. [GS07] *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Sea $1 < k \in \mathbb{N}$. Para cada $i < k$, definimos $A_i = \{n \in \mathbb{N} : n \cong i \ \mathrm{mod(k)}\ \}$. Si existe $j < k$ tal que f^q es continua en x para todo $q \in A_j^*$, entonces f^p es continua en x para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$.*

Teorema 2.1.13. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Supongamos que existe un subconjunto sintético A de $\mathbb{N}$ tal que f^p es continua en x para todo $p \in A^*$. Entonces, f^q es continua en x para todo $q \in \mathbb{N}^*$.*

Prueba: Por hipótesis, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N} = \bigcup_{i \leq k}(-i + A)$. Sabemos que $\rho_i^{-1}(A) = -i + A$, para cada $i \leq k$. Fijemos $q \in \mathbb{N}^*$. Entonces existe $i \leq k$ tal que $q \in \widehat{-i + A}$. De aquí podemos encontrar $p \in A^*$ tal que $\rho_i(p) = p + i = q$. Ya que, por suposición, f^p es continua en x, se sigue que $f^q = f^{p+i} = f^p \circ f^i$ es continua en x. $\square$

Teorema 2.1.14. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Supongamos que existe $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que f^p es continua en x para todo $p \in A^*$. Si para $B \in [\mathbb{N}]^\omega$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que* *para cada $b \in B$ podemos encontrar $a \in A$ y $i \leq k$ tales que $a + i = b$, entonces f^q es continua en X para todo $q \in B^*$.*

Prueba: Sea $q \in B^*$. Para cada $i \leq k$, definimos $B_i = \{b \in B : \exists a \in A(a + i = b)\}$. Por suposición sabemos que $B = \bigcup_{i \leq k} B_i$. En consecuencia, existe $i \leq k$ tal que $q \in B_i^*$. Pero como $B_i \subseteq A + i = \rho_i[A]$, entonces $q \in B_i^* \subseteq \rho_i[A^*]$. De donde obtenemos que $q = p + i$ para algún $p \in A^*$. Por tanto, $f^q = f^{p+i} = f^p \circ f^i$ es continua en x. $\square$

Dado un sistema dinámico (X, f) donde X es un espacio métrico compacto y $x \in X$, si existe $a \in \mathbb{N}$ tal que f^p es continua en x para todo $p \in \{an : n \in \mathbb{N}\}^*$, entonces f^p es continua en x, para todo $p \in \mathbb{N}^*$.

Para ver el comportamiendo de las p-iteradas de una función definida sobre una sucesión convergente con su punto de convergencia necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.1.5. **[GS07]** *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$ un punto fijo de f. Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existen $x_k, y_k \in X$ tal que $d(x, x_k) < \frac{1}{k+1}$, $\mathcal{O}_f(y_k) \cap B(x, \epsilon) = \emptyset$ y $\mathcal{O}_f(y_k) \cap \mathcal{O}_f(x_k) \neq \emptyset$. Entonces, f^p es discontinua en x para cada $p \in \mathbb{N}^*$.*

Prueba: Fijemos $k \in \mathbb{N}$. Sabemos que $f^l(x_k) = f^m(y_k)$, para algunos números enteros $l, m \in \mathbb{N}$. De donde se obtiene que $f^{l+a}(x_k) = f^{m+a}(y_k) \in \mathcal{O}_f(y_k)$, para todo $a \in \mathbb{N}$. Por lo cual, $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x_k), x) \geq \epsilon\}$ es un subconjunto cofinito de $\mathbb{N}$ y por ello

$$\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x_k), f^n(x)) \geq \epsilon\} = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x_k), x) \geq \epsilon\} \in p,$$

para cada $p \in \mathbb{N}^*$. Por tanto, la función f^p es discontinua en x, para todo $p \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Teorema 2.1.15. **[GS07]** *Consideremos el sistema dinámico (X, f) en donde X es una sucesión convergente con su punto de convergencia y $f : X \to X$ es una función continua. Entonces, las funciones f^p's son todas continuas o bien son todas discontinuas.*

Prueba: Sea x el punto de convergencia de $X \setminus \{x\} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Primero supongamos que $f(x) \neq x$. De esta suposición se sigue que $A = \{y \in X : f(y) = f(x)\}$ es cofinito. Si $y \in A$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $f^n(y) = f^n(x)$. De aquí deducimos que $f^p(y) = f^p(x)$ para todo $y \in A$ y todo $p \in \mathbb{N}^*$. Por consiguiente, f^p es continua, para cada $p \in \mathbb{N}^*$. Supongamos ahora que $f(x) = x$. Sean $\epsilon > 0$ y $X \setminus B(x, \epsilon) = \{x_0, ..., x_m\}$. Pongamos $F = \{i \leq m : \mathcal{O}_f(x_i) \text{ es finito}\}$ y $I = m \setminus F$. Observemos que $x \notin \mathcal{O}_f(x_i)$ para todo $i \in F$. Supongamos que las condiciones del lema anterior no se cumplen. Entonces, es posible hallar $\delta > 0$ de tal modo que $B(x, \delta) \cap \mathcal{O}_f(x_i) = \emptyset$, para todo $i \in F$, y si $d(x, y) < \delta$, entonces $\mathcal{O}_f(y) \cap \mathcal{O}_f(z) = \emptyset$ siempre que $\mathcal{O}_f(z) \cap B(x, \epsilon) = \emptyset$. Tomemos $y \in X$ tal que $0 < d(x, y) < \delta$. Si $\mathcal{O}_f(y) \cap \mathcal{O}_f(x_i) \neq \emptyset$ para algún $i \in I$, se tiene entonces que $\lim_{n\to\infty} f^n(y) = x$ y por lo cual se cumple que $\{n \in \mathbb{N} : d(x, f^n(y)) < \epsilon\} \in p$ para todo $p \in \mathbb{N}^*$. Supongamos que el conjunto $\mathcal{O}_f(y)$ no intersecta a $\mathcal{O}_f(x_i)$, para cualquier $i \leq m$. Por ello debemos tener que $\mathcal{O}_f(y) \subseteq B(x, \epsilon)$. Así, $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : d(x, f^n(y)) < \epsilon\} \in p$ para todo $p \in \mathbb{N}^*$. Por lo tanto, $f^p : X \to X$ es continua, para todo $p \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Enunciamos en el siguiente teorema otras condiciones que nos garantizan la continuidad o la discontinuidad de todas las p-iteradas.

Teorema 2.1.16. [GS07] *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y sea $x \in X$ un punto fijo de f. Supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{O}_f(y)| \leq m$, para todo $y \in X$. Entonces, todas las p-iteradas son continuas en x o bien son todas discontinuas en x.*

Prueba: Supongamos que f^p es continua en x y que f^q es discontinua en x, para algunos ultrafiltros $p, q \in \mathbb{N}^*$. Entonces, podemos encontrar $\epsilon > 0$ y una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x tal que $\{n \in \mathbb{N} : d(x, f^n(x_k)) \geq \epsilon\} \in q$, para todo $k \in \mathbb{N}$. De la continudad de la función f^p y del Teorema 2.1.2 existe $\delta > 0$ con $\delta < \epsilon$ y tal que si $y \in X$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $\{n \in \mathbb{N} : d(x, f^n(y)) < \epsilon\} \in p$. Tomemos $M \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_k) < \delta$ para todo $M \leq k \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq M$ existe $0 < m_k \leq m$ tal que $d(x, f^{m_k+1}(x_k)) \geq \epsilon$ y m_k es el mínimo entero positivo con esta propiedad. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que existe $l \leq m$ para el cual $m_k = l$, para cada $k \in \mathbb{N} \setminus M$. Ya que f es continua en x, es posible encontrar $0 < \delta_l < \delta_{l-1} < .... < \delta_0 < \epsilon$ de tal manera que si $d(x, y) < \delta_i$, se cumple entonces que $d(x, f(y)) < \delta_{i-1}$, para cada $0 \leq i < l$, y si $d(x, y) < \delta_0$, entonces $d(x, f(x)) < \epsilon$. Elegimos $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que $M < N$ y $d(x, x_k) < \delta_l$, para todo $N \leq k \in \mathbb{N}$. De donde se sigue que

$d(x, f^l(x_k)) < \delta_0$, para cada $N \leq k \in \mathbb{N}$. Pero ésto es imposible por que $d(x, f^{l+1}(x_k)) \geq \epsilon$, para todo $N \leq k \in \mathbb{N}$. $\square$

Definición 2.1.2. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cada $x \in X$, la función $f_x := p \mapsto f^p(x) : \beta(\mathbb{N}) \to X$ denotará la extensión de Stone de la función continua $n \mapsto f^n(x) : \mathbb{N} \to X$.*

En particular, tenemos que la función $f_x : \beta(\mathbb{N}) \to X$ es continua para todo $x \in X$. De aquí deducimos que $f_x[\beta(\mathbb{N})] = cl_X(\mathcal{O}_f(x)) = \{f^p(x) : p \in \beta(\mathbb{N})\}$, para todo $x \in X$.

Teorema 2.1.17. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Si $q =p\text{-}\lim_{n\to\infty} p_n$, entonces $f^q(x) = p - \lim_{n\to\infty} f^{p_n}(x)$, para todo $x \in X$.*

Prueba: De acuerdo con el Teorema 1.3.5 obtenemos que $f^q(x) = f_x(q) = p - \lim_{n\to\infty} f_x(p_n) = p - \lim_{n\to\infty} f^{p_n}(x)$, para todo $x \in X$. $\square$

Teorema 2.1.18. [GS07] *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $p \in \mathbb{N}^*$. Supongamos que existen $A \in p$ y $x \in X$ tales que*

1. *$f^s(x) = f^t(x)$ para todo $s, t \in A^*$; y*
2. *f^p es continua en x.*

Si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, entonces podemos encontrar $B \in [A]^\omega$ tal que $f^q(x) = \lim_{n\to\infty} f^q(x_n)$ para todo $q \in B^*$.

Prueba: Como f^p es continua en x, del Teorema 2.1.2 tenemos que para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $K_i \in \mathbb{N}$ tal que $B_{k,i} = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(x_k)) < \frac{1}{i+1}\} \in p$, para todo $k \geq K_i$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos $C_i = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^p(x)) < \frac{1}{i+1}\}$. Sabemos que $C_i \in p$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Elegimos $B \in [A]^\omega$ de tal manera que $B \subseteq^* B_{k,i} \cap C_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq K_i$. Sean $q \in B^*$ y $\epsilon > 0$. Tomamos $j \in \mathbb{N}$ que satisfaga $\frac{1}{j+1} < \frac{\epsilon}{3}$ y fijemos $k \geq K_j$. Tenemos que $D = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x_k), f^q(x_k)) < \frac{1}{j+1}\} \in q$. Si $h \in D \cap B_{k,j} \cap C_j$, se sigue entonces que

$$d(f^q(x_k), f^q(x)) = d(f^q(x_k), f^p(x)) \leq$$

$$d(f^q(x_k), f^h(x_k)) + d(f^h(x_k), f^h(x)) + d(f^h(x), f^p(x)) <$$

$$\frac{1}{j+1} + \frac{1}{j+1} + \frac{1}{j+1} < \epsilon. \quad \square$$

Veamos una propiedad más de las funciones f_x's: En el Teorema 2.2.4 se da una propiedad interesante de estas funciones alrededor de un P-punto de $\mathbb{N}^*$.

Teorema 2.1.19. [GS07] *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Entonces, para cada $p \in \mathbb{N}^*$ existe $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $f^p(x) = f^q(x)$ para todo $q \in A^*$.*

Prueba: Sabemos que $f_x(p) \in cl_X(\mathcal{O}_f(x))$. Como primer caso, supongamos que $f_x(p)$ no es punto de acumulación de $\mathcal{O}_f(x)$. Entonces, $f_x(p) = f^p(x) = f^n(x)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y podemos encontrar $\epsilon > 0$ de tal forma que $B(f^n(x), \epsilon) \cap \mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x)\}$. Como f_x es continua, existe $A \in p$ tal que $f_x(q) \in B(f^n(x), \epsilon)$ para cualquier $q \in A^*$. Es decir, $f_x(p) = f_x(q) = f^n(x)$ para todo $q \in A^*$. Supongamos ahora que existe una sucesión no trivial $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ para la cual $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = f_x(p)$ y supongamos además que $f^{n_i}(x) \neq f^{n_j}(x)$ para enteros distintos $i, j \in \mathbb{N}$. Sea $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ y tomemos $q \in A^*$. Del aquí deducimos la igualdad $f^p(x) = f^q(x)$. $\square$

Con una pequeña modificación de la prueba del teorema anterior podemos establecer el siguiente resultado:

Teorema 2.1.20. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Entonces, para cada $A \in [\mathbb{N}]^\omega$, existe $B \in [A]^\omega$ tal que $f^p(x) = f^q(x)$, para cualquier par $p, q \in B^*$.*

Probaremos a continuación que la propiedad enunciada en el Teorema 2.1.19 se puede realizar para una cantidad numerable de puntos de X, pero solo encontraremos $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros son dicha propiedad sin saber si ellos forman un abierto básico de $\mathbb{N}^*$. Para nuestro propósito necesitaremos algunos lemas preliminares.

Lema 2.1.6. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe una partición $\{A_i : i \leq n\}$ de $\mathbb{N}$ tal que si $p, q \in \hat{A}_i$ para alguna $i \leq n$, entonces $d(f^p(x), f^q(x)) < \epsilon$.*

Prueba: Sea $\epsilon > 0$. Por ser $f_x : \beta(\mathbb{N}) \to X$ continua, para cada $p \in \beta(\mathbb{N})$ existe $A_p \in p$ tal que $d(f_x(p), f_x(q)) = d(f^p(x), f^q(x)) < \frac{\epsilon}{2}$, para toda $q \in \hat{A}_p$. Por ser $\beta(\mathbb{N})$ compacto, entonces existen $p_0, p_1, ..., p_n \in$

$\beta(\mathbb{N})$ tal que $\beta(\mathbb{N}) = \bigcup_{i\leq n} \hat{A_{p_i}}$. Definimos $A_0 = A_{p_0}$ y $A_i = A_{p_i} \setminus (\bigcup_{j<i} A_{p_j})$ para cada $1 \leq i \leq n$. Claramente, $\{A_i : i \leq n\}$ es una partición de $\mathbb{N}$. Si $p, q \in \hat{A}_i$ para alguna $i \leq n$, entonces $\hat{A}_i \subseteq \hat{A_{p_i}}$ y por lo cual

$$d(f^p(x), f^q(x)) \leq d(f^p(x), f^{p_i}(x)) + d(f^{p_i}(x), f^q(x)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \ \square$$

Lema 2.1.7. *Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [\mathbb{N}]^\omega$ tiene la propiedad de intersección finita, entonces $|\{p \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}(A_n \in p)\}| = 2^{\mathfrak{c}}$.*

Prueba: Como una consecuencia del Lema del Refinamiento Disjunto [CN74, Lemma 7.5]) podemos encontrar una familia $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [\mathbb{N}]^\omega$ de subconjuntos ajenos entre si tal que $B_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Lema 1.2.1, podemos elegir una familia independiente $\{B^i_{n,\xi} : \xi < \kappa \text{ y } i \in \{0, 1\}\}$ de subconjuntos infinitos de B_n. Para cada $f \in (2^{\mathfrak{c}})^{\mathbb{N}}$, la familia $\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^{f(n)(\xi)}_{n,\xi} : \xi < \mathfrak{c}\}$ tiene la propiedad de intersección finita, y por ello podemos elegir $p_f \in \mathbb{N}^*$ que contenga a esta familia. Es claro que si $f, g \in (2^{\mathfrak{c}})^{\mathbb{N}}$ son distintos, entonces $p_f \neq p_g$ y $A_n \in p_f$ por que $B^{f(n)(\xi)}_{n,\xi} \subseteq A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\xi < \mathfrak{c}$. $\square$

Teorema 2.1.21. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Para cada $Y \in [X]^\omega$ y para cada $p \in \mathbb{N}^*$ existe un subconjunto $N \subseteq \mathbb{N}^*$ de tamaño $2^{\mathfrak{c}}$ tal que $f^p(x) = f^q(x)$ para todo $q \in N$ y para todo $x \in Y$.*

Prueba: Sean $x \in X$ y $p \in \mathbb{N}^*$. Basandonos en el Lema 2.1.6, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos hallar una partición finita $\{A_{x,n,i} : i \leq k_{x,n}\}$ de $\mathbb{N}$ con la propiedad de que si $r, s \in \widehat{A_{x,n,i}}$ para alguna $i \leq k_{x,n}$, entonces $d(f^r(x), f^s(x)) < \frac{1}{n+1}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in Y$, seleccionamos $\gamma_p(x, n) \leq k_{x,n}$ de tal forma que $p \in \widehat{A_{x,n,\gamma_p(x,n)}}$. Gracias al Lema 2.1.7 se puede encontrar un subconjunto $N \subseteq \mathbb{N}^*$ de cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$ que satisfaga $A_{x,n,\gamma_p(x,n)} \in q$, para cada $n \in \mathbb{N}$, para cada $x \in Y$ y para cada $q \in N$. De aquí y por definición, para cada $q \in N$ se cumple la desigualdad $d(f^p(x), f^q(x)) < \frac{1}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para toda $x \in Y$. De donde obtenemos que $f^p(x) = f^q(x)$ para todo $q \in N$ y para toda $x \in Y$. $\square$

Corollary 2.1.6. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico con* X *un espacio métrico compacto. Supongamos que la función* $f^p : X \to X$ *es continua para todo* $p \in \mathbb{N}^*$. *Entonces para cada* $p \in \mathbb{N}^*$ *existe un subconjunto* $N \subseteq \mathbb{N}^*$ *de tamaño* $2^{\mathfrak{c}}$ *tal que* $f^p = f^q$ *para todo* $q \in N$.

Prueba: Como X es compacto y métrico, X contiene un subconjunto denso numerable D. Obtenemos el resultado deseado aplicando el teorema anterior para D y p. $\square$

Teorema 2.1.22. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico con* X *un espacio métrico compacto numerable. Para cada* $p \in \mathbb{N}^*$ *existe un subconjunto* $N \subseteq \mathbb{N}^*$ *de tamaño* $2^{\mathfrak{c}}$ *tal que* $f^p = f^q$ *para todo* $q \in N$.

Prueba: Sea $p \in \mathbb{N}^*$. Procederemos como en la prueba del teorema anterior. Según el Lema 2.1.7, para todo $x \in X$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ existe una partición $\{A_{x,n,i} : i \leq k_n\}$ de $\mathbb{N}$ tal que si $r, s \in \widehat{A_{x,n,i}}$ para alguna $i \leq k_n$, entonces $d(f^r(x), f^s(x)) < \frac{1}{n+1}$. Dados $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, tomamos $\gamma_p(x, n) \leq k_n$ con la propiedad $A_{x,n,\gamma_p(x,n)} \in p$. Como X es numerable, el Lema 2.1.7 nos da un subconjunto $N \subseteq \mathbb{N}^*$ de cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$ cuyo elementos satisfacen que $A_{x,n,\gamma_p(n)} \in q$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $q \in N$. De manera evidente podemos ver que se cumple la identidad $f^p(x) = f^q(x)$ para todo $q \in X$ y para todo $x \in X$. $\square$

2.2 p-iteraciones cuando p es un P-punto

Ya en algúnos resultados de la sección anterior hemos visto consecuencias cuando suponemos que p es un P-punto de $\mathbb{N}^*$. En esta sección, estudiaremos de manera más directa las p-iteradas de sistema dinámico cuando p es un P-punto. Concentraremos nuestra atención en el caso cuando X es un espacio métrico compacto numerable.

En el Teorema 2.1.4 vimos que si (X, f) es un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto numerable, y f^p es continua en $x \in X$ para un P-punto p de $\mathbb{N}^*$, entonces existe $A \in p$ tal que f^q es continua en x, para todo $q \in A^*$.

Teorema 2.2.1. *Sea* (X, f) *un sitema dinámico con* X *un espacio métrico compacto numerable. Si* f^p *es continua en* $x \in X$ *para algún* P*-punto* $p \in \mathbb{N}^*$, *entonces para cada* $\epsilon > 0$ *es posible encontrar* $\delta > 0$

y $A \in p$ de tal forma que si $y \in X$ satisface que $d(x,y) < \delta$, entonces $d(f^p(y), f^n(y)) < \epsilon$, para todo $n \in A$ excepto para una cantidad finita.

Prueba: Sabemos que $f^p(x) = p-\lim_{n\to\infty} f^n(x)$. Por ser X un espacio métrico y p un P-punto, en base al Teorema 1.1.4 existe una sucesión creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números naturales tal que $f^p(x) = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x)$ y $B = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in p$. Sea $\epsilon > 0$. En base al Teorema 2.1.2, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $C_y = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{\epsilon}{3}\} \in p$ y $d(f^p(x), f^p(y)) < \frac{\epsilon}{3}$, siempre que $d(x,y) < \delta$. Tomemos $A \in p$ tal que $A \subseteq^* C_y \cap B$ para cada $y \in X$ con $d(x,y) < \delta$. Fijemos $y \in X$ tal que $d(x,y) < \delta$ y también fijemos $m \in \mathbb{N}$ de tal manera que $A \setminus \{0, 1, ..., m\} \subseteq C_y$ y $d(f^n(x), f^p(x)) < \frac{\epsilon}{3}$, para cada $n \in A \setminus \{0, 1, ..., m\}$. Si $n \in A \setminus \{0, 1, ..., m\}$, entonces tenemos que

$$d(f^p(y), f^n(y)) < d(f^p(y), f^p(x)) + d(f^p(x), f^n(x)) + d(f^n(x), f^n(y))$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

como se deseaba. □

Teorema 2.2.2. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto numerable. Supongamos que f^p es continua en $x \in X$ para un P-punto p de $\mathbb{N}^*$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existen $\delta > 0$ y $A \in p$ de tal manera que si $y \in X$ cumple la desigualdad $d(x,y) < \delta$, entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$ para todo $n \in A$ con la excepción de una cantidad finita.*

Prueba: De acuerdo con el Teorema 2.2.1, es posible encontrar $\delta > 0$ y $B \in p$ tal que si $y \in X$ y $d(x,y) < \delta$, entonces $d(f^p(x), f^p(y)) < \frac{\epsilon}{3}$ y $d(f^p(y), f^n(y)) < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $n \in B$ excepto una cantidad finita. Sea $A = \{n \in B : d(f^p(x), f^n(x)) < \frac{\epsilon}{3}\}$. Fijemos $y \in X$ tal que $d(x,y) < \delta$. Por hipótesis, existe $m \in \mathbb{N}$ que satisface $d(f^p(y), f^n(y)) < \frac{\epsilon}{3}$, para todo $n \in A \setminus m$. Por consiguiente, si $n \in A \setminus m$, entonces se cumplen las desigualdades

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq d(f^n(x), f^p(x)) + d(f^p(x), f^p(y)) + d(f^p(y), f^n(y))$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \quad \square$$

El siguiente resultado es una aplicación directa del Teorema 2.1.4.

Teorema 2.2.3. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto numerable. Si $p \in \mathbb{N}^*$ es un P-punto y f^p es continua en todo X, entonces existe $A \in p$ tal que f^q es continua en X, para todo $q \in A^*$.*

Prueba: Del Teorema 2.1.4 tenemos que para cada $x \in X$ existe $A_x \in p$ tal que f^q es continua en x, para todo $q \in A_x^*$. Seleccionamos $A \in p$ de tal forma que $A \subseteq^* A_x$, para cualquier $x \in X$. Claramente f^q es continua en X, para todo $q \in A^*$. □

Probaremos a continuación que toda función $f_x : \beta(\mathbb{N}) \to X$ es localmente constante en todo P-punto de $\mathbb{N}^*$: Esta propiedad es válida para toda función con valores dentro de un espacio métrico.

Teorema 2.2.4. [GS07] *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Si $p \in \mathbb{N}^*$ es un P-punto, entonces existe $A \in p$ tal que $f_x(p) = f_x(q)$, para todo $q \in A^*$.*

Prueba: Fijemos un punto $x \in X$. Ya que f_x es una función continua, para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $A_k \in p$ que cumpla la condición

$$d(f_x(p), f_x(q)) < \frac{1}{k+1},$$

para cualquier ultrafiltro $q \in A_k^*$. Como p es un P-punto existe $A \in p$ tal que $A \subseteq^* A_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, si $q \in A^*$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $q \in A_k^*$ y por ello $d(f_x(p), f_x(q)) < \frac{1}{k+1}$. Por tanto, $f_x(p) = f_x(q)$, para todo $q \in A^*$. □

Corollary 2.2.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto numerable. Si $p \in \mathbb{N}^*$ es un P-punto, entonces existe $A \in p$ tal que $f^p = f^q$, para todo $q \in A^*$.*

Prueba: Supongamos que $p \in \mathbb{N}^*$ es un P-punto. Para cada $x \in X$, por el lema anterior, podemos encontrar $A_x \in p$ tal que $f^p(x) = f^q(x)$, para todo $q \in A_x^*$. Fijamos $A \in p$ que satisfaga $A \subseteq^* A_x$ para todo $x \in X$. Trivialmente, se cumple que $f^p = f^q$ para todo $q \in A^*$. □

2.3 Proximidad

Empecemos esta sección enunciando la noción de proximidad entre dos puntos de un sitema dinámico.

Definición 2.3.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico. Decimos que dos puntos $x, y \in X$ son proximales si para cada $\epsilon > 0$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x)), f^n(y)) < \epsilon\}$ es infinito.*

La siguiente caracterización de proximidad es evidente.

Teorema 2.3.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico. Dos puntos $x, y \in X$ son proximales si y solo si existe una sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ tal que $d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)) \to 0$.*

La siguiente propiedad de dos puntos proximales aparece en el libro de H. Furstenberg [Fu81, Lemma 8.1].

Teorema 2.3.2. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x, y \in X$. Si x y y son proximales, entonces para cada $\epsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x)), f^n(y)) < \epsilon\}$ es grueso.*

Prueba: Sean $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Por ser la iteradas de f uniformemente continuas, es posible hallar $\delta > 0$ de tal manera que si $v, u \in X$ y $d(v, u) < \delta$, entonces $d(f^i(v), f^i(u)) < \epsilon$ para toda $i \leq n$. Supongamos que $\delta < \epsilon$. Pongamos $A = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x)), f^n(y)) < \epsilon\}$. Por ser x y y proximales, existe $a \in \mathbb{N}$ tal $d(f^a(x), f^a(y)) < \delta$. Entonces, $d(f^i(f^a(x)), f^i(f^a(y))) < \epsilon$, para cada $i \leq n$. Es decir, $a + i \in A$, para toda $i < n$. $\square$

La noción de proximidad se puede definir de una manera muy elegante usando ultrafiltros.

Teorema 2.3.3. **[Bl93]** *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Para $x, y \in X$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *x y y son proximales.*
2. *Existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^p(x) = f^p(y)$.*

Prueba: $1 \Rightarrow 2$. Por el Teorema 2.3.1, existe una sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ tal que $d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)) \to 0$. Pongamos $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$. Fijemos $p \in A^*$ y $\epsilon > 0$. Entonces, por un lado sabemos que

$$\{m \in \mathbb{N} : d(f^p(x), f^m(x)) < \frac{\epsilon}{3}\} \cap \{m \in \mathbb{N} : d(f^p(y), f^m(y)) < \frac{\epsilon}{3}\} \in p$$

y por otro lado existe un número natural $l \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)) < \frac{\epsilon}{3}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ con $l \leq k$. Tomemos $i \in \mathbb{N}$ de modo que $l \leq i$ y $d(f^p(x), f^{n_i}(x)) < \frac{\epsilon}{3}$ y $d(f^p(y), f^{n_i}(y)) < \frac{\epsilon}{3}$. De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} d(f^p(x), f^p(y)) &\leq d(f^p(x), f^{n_i}(x)) + d(f^{n_i}(x), f^{n_i}(y)) + d(f^{n_i}(y), f^p(y)) \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Ya que el número ϵ fue tomado arbitrariamente, concluimos que $f^p(x) = f^p(y)$.

$2 \Rightarrow 1$. Supongamos que existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^p(x) = f^p(y)$. Sea $\epsilon > 0$. De la definición vemos que

$$A = \{n \in \mathbb{N} : d(f^p(x), f^n(x)) < \frac{\epsilon}{2}\} \cap \{n \in \mathbb{N} : d(f^p(y), f^n(y)) < \frac{\epsilon}{2}\} \in p.$$

Si $n \in A$, se tienen entonces que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq d(f^n(x), f^p(x)) + d(f^p(y), f^n(y)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por tanto, x y y son proximales. $\square$

Del Corolario 1.5.1, del Teorema 2.1.1 y de la caracterización anterior podemos encontrar fácilmente pares de puntos proximales:

Corollary 2.3.1. *En cualquier sistema dinámico (X, f) con X un espacio métrico y para cualquier punto $x \in X$, los puntos $f^p(x)$ y x son proximales para cualquier idempotente ultrafiltro $p \in \mathbb{N}^*$.*

La equivalencia del Teorema 2.3.3 aparece de manera más general en [AF94].

Todo lo anterior motiva la consideración de la siguiente noción que fué introducida en [GS07].

Definición 2.3.2. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $p \in \mathbb{N}^*$. Dos puntos $x, y \in X$ se llaman p-proximales si $f^p(x) = f^p(y)$.*

Lo que realmente se estableció en la prueba del Teorema 2.3.3 es la siguiente caracterización (repetiremos los pasos importantes para conveniencia del lector):

Teorema 2.3.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto Para dos puntos cualesquiera $x, y \in X$ y $p \in \mathbb{N}^*$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *x y y son p-proximales.*

2. *Para cada $\epsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in p$.*

Prueba: $1 \Rightarrow 2$. Supongamos que $f^p(x) = f^p(y)$. Dada $\epsilon > 0$, por definición, se cumple la contención

$$\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^p(x)) < \frac{\epsilon}{2}\} \cap \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(y), f^p(y)) < \frac{\epsilon}{2}\} \in p.$$

De donde concluimos que $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in p$.

$2 \Rightarrow 1$. Sea $\epsilon > 0$. Por suposición sabemos que $A = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{\epsilon}{3}\} \in p$. Tomemos $m \in A \cap \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^p(x)) < \frac{\epsilon}{3}\} \cap \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(y), f^p(y)) < \frac{\epsilon}{3}\}$, esta intersección es no vacía por ser un elemento de p. Entonces, se cumplen las desigualdades

$$\begin{aligned} d(f^p(x), f^p(y)) &\leq d(f^p(x), f^m(x)) + d(f^m(x), f^m(y)) + d(f^m(y), f^p(y)) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, $f^p(x) = f^p(y)$. $\square$

El resultado siguiente es un corolario de Teorema 2.1.1.

Corollary 2.3.2. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto.*

1. *Si $p \in \mathbb{N}^*$ es un idempotente, entonces x es p-proximal a $f^p(x)$, para todo $x \in X$.*

2. *Si $x, y \in X$ son p-proximales para algún $p \in \mathbb{N}^*$, entonces x y y son $(p+q)$-proximales para todo $q \in \beta(\mathbb{N})$.*

De la definición y el Teorema 2.2.4 se obtiene el siguiente resultado.

Corollary 2.3.3. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $p \in \mathbb{N}^*$. Si $x, y \in X$ son p-proximales y p es un P-punto, entonces existe $A \in p$ tal que x y y son q-proximales para todo $q \in A^*$.*

Teorema 2.3.5. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Dos puntos $x, y \in X$ son p-proximales, para todo $p \in \mathbb{N}^*$, si y solo si*

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Prueba: Necesidad. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) \neq 0$. Entonces, existe $\epsilon > 0$ para el cual el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon\}$ es infinito. Fijemos $p \in B^*$. Por otra parte, el Teorema 2.3.4 nos asegura que $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in p$, lo cual es una contradicción.

Suficiencia. Dado $\epsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\}$ es cofinito y por consiguiente $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in p$ para todo $p \in \mathbb{N}^*$. La conclusión se sigue del Teorema 2.3.4. □

Teorema 2.3.6. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Para cada par de puntos proximales $x, y \in X$,*

$$I_{x,y} = \{p \in \mathbb{N}^* : \ x \ y \ y \ son \ p - proximales \ \}$$

es un ideal derecho cerrado del semigrupo $(\mathbb{N}^*, +)$ tal que

1. *$int_{\mathbb{N}^*}(I_{x,y})$ es denso en $I_{x,y}$, y*
2. *$I_{x,y} \cap I_{y,z} \subseteq I_{x,z}$.*

Además si los puntos x y y son p-proximales para algún P-punto p de $\mathbb{N}^*$, entonces el punto p está en el interior de dicho ideal.

Prueba: El Teorema 2.3.3 nos garantiza que el conjunto en cuestión es precisamente el conjunto

$$\{p \in \mathbb{N}^* : f_x(p) = f_y(p)\} = I_{x,y},$$

el cual es cerrado por ser f_x y f_y funciones continuas. El Corolario 2.3.2 afirma que $I_{x,y}$ es un ideal derecho de $(\mathbb{N}^*, +)$. Supongamos que x y y son p-proximales para algún $p \in \mathbb{N}$ y fijemos $B \in p$. Por el Teorema 2.3.4, para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $A_k = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{1}{k+1}\} \cap B \in p$. En base al Teorema 1.2.2, seleccionamos $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ de tal forma que $A \subseteq^* A_k \cap B$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Sea $q \in A^*$. Tenemos entonces que $A_k \in q$, para toda $k \in \mathbb{N}$, y $q \in B^*$. Esto implica, por el Teorema

2.3.4, que x y y son q-proximales. Por tanto, $A^* \subseteq I_{x,y}$. El segundo inciso es evidente. La afirmación adicional se sigue directamente del corolario anterior. □

Como una aplicación inmediata del Corolario 1.5.1 y el Teorema 2.3.6 tenemos la siguiente caracterización.

Corollary 2.3.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Entonces, $x, y \in X$ son proximales si y solo si existe un idempotente $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^p(x) = f^p(y)$.*

Con el siguiente ejemplo tomado de [GS07] mostraremos que la noción de p-proximidad puede ser útil para distinguir, de alguna manera combinatoria, dos puntos proximales (en la Sección 2.5 se desribe otro ejemplo más sencillo).

Ejemplo 2.3.1. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_0 = 1$ y $a_{n+1} < a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada número $n \in \mathbb{N}$, elegimos una sucesión estrictamente creciente de números reales $(a_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ del tal forma que:*

1. *$\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = a_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y*
2. *$a_n < a_{n,m} < a_{n-1}$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$; aquí, $a_{-1} = 2$.*

Consideremos el subespacio $X = \{0\} \cup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$. Evidentemente, X es un espacio compacto y métrico. Nuestra función $f : X \to X$ la definios de la siguiente manera:

a. *$f(a_0) = 0$ y $f(0) = 0$.*

b. *$f(a_n) = a_{n-1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

c. *$f(a_{n,0}) = a_{n+1,0}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

d. *$f(a_{0,n}) = a_{n,1}$, para cada $1 \leq n \in \mathbb{N}$.*

e. *$f(a_{n-m,m+1}) = a_{n-m-1,m+2}$, para cada $m < n \in \mathbb{N}$.*

Dejamos al lector que verifique la continuidad de la función f. Consideremos los puntos $x = a_{0,0}$ y $y = a_{0,1}$. Definimos $i_0 = 1$, $j_0 = 2$, $i_1 = 3$, $j_1 = 5$ y si $2 \leq k \in \mathbb{N}$, entonces ponemos $i_k = j_{k-1} + 1$ y $j_k =$

$j_{k-1}+k+2$. Se sigue directamente de la definición que $f^{i_0}(a_{0,1}) = a_{1,1}$, $f^{j_0}(a_{0,1}) = a_{0,2}$, $f^{i_1}(a_{0,1}) = a_{2,1}$ y $f^{j_1}(a_{0,1}) = a_{0,3}$. De manera inductiva se establecen las siguientes identidades:

$$f^{i_k}(a_{0,1}) = f^{j_{k-1}+1}(a_{0,1}) = f(f^{j_{k-1}}(a_{0,1})) = f(a_{0,k+1}) = a_{k+1,1},$$

$$f^{j_k}(a_{0,1}) = f^{j_{k-1}+k+2}(a_{0,1}) = f^{k+1}(f^{i_k}(a_{0,1})) = f^{k+1}(a_{k+1,1}) = a_{0,k+2},$$

y

$$f^{i}(a_{k,1}) = a_{k-i,i+1},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y para cada $1 \leq i \leq k$. Ahora consideremos los conjuntos $A = \{i_k : k \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{j_k : k \in \mathbb{N}\}$. Para estos dos conjuntos se cumplen las siguientes propiedades:

$$\lim_{k\to\infty} |f^{i_k}(a_{0,0}) - f^{i_k}(a_{0,1})| = \lim_{k\to\infty} |a_{i_k+1,0} - a_{k+1,0}| = 0,$$

y

$$\lim_{k\to\infty} |f^{j_k}(a_{0,0}) - f^{j_k}(a_{0,1})| = \lim_{k\to\infty} |a_{j_k+1,0} - a_{0,k+1}| = 1.$$

De aquí podemos concluir que x y y son p-proximales para cualquier $p \in A^*$ y no son q-proximales para todo $q \in B^*$.

Inspirados en la caracterización de la continuidad entre espacios métricos mediante sucesiones convergentes introducimos la siguiente noción para caracterizar la continuidad de una p-iterada.

Definición 2.3.3. **[GS07]** *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico y $p \in \mathbb{N}^*$. Decimos que una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en X es p-proximal a un punto x si $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ y para cada $\epsilon > 0$ existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(x_k)) < \epsilon\} \in p$, para toda $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq l$.*

Teorema 2.3.7. **[GS07]** *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico y $p \in \mathbb{N}^*$. para un punto $x \in X$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f^p es continua en x.*

2. *Toda sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a x es p-proximal a x.*

Prueba: $1 \Rightarrow 2$. Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una secesión convergente a x. Dado $\epsilon > 0$, mediante el Teorema 2.1.2 es posible hallar $\delta > 0$ de tal forma que si $y \in X$ y $d(x,y) < \delta$, entonces $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon\} \in p$. Seleccionamos $l \in \mathbb{N}$ que satisfaga $d(x_k, x) < \delta$ para toda $k \in \mathbb{N}$ mayor que l. De donde se sigue que $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(x_k)) < \epsilon\} \in p$ para toda $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq l$.

$2 \Rightarrow 1$. Supongamos que f^p no es continua en x. El Teorema 2.1.2 nos asegura la existencia de un número real $\epsilon > 0$ de tal forma que para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $x_k \in X$ tal que $d(x, x_k) < \frac{1}{k+1}$ y $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(x_k)) < \epsilon\} \notin p$. Es claro que la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x y no puede ser p-proximal a x. $\square$

El siguiente resultado es bastante interesante cuando suponemos la p-proximidad de una sucesión para todo $p \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 2.3.8. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico. Dados $x \in X$ y una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en X convergente a x, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es p-proximal a x para todo $p \in \mathbb{N}^*$.*

2. *$f^n(x_k) \to_{n\to\infty} f^n(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Prueba: $1 \Rightarrow 2$. Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(f^n(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f^n(x)$. Por lo cual, existe $\epsilon > 0$ de tal manera que para cada $l \in \mathbb{N}$ existe $n_l \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{n_l}(x_k), f^{n_l}(x)) \geq \epsilon$ y el conjunto $\{n_l : l \in \mathbb{N}\}$ es infinito. Tomamos $p \in \mathbb{N}^*$ de manera que $\{n_l : l \in \mathbb{N}\} \in p$. Es entonces evidente que la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ no puede ser p-proximal a x.

$2 \Rightarrow 1$. Sean $p \in \mathbb{N}^*$ y $\epsilon > 0$. Sea $k \in \mathbb{N}$. Por suposición existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x_k), f^n(x)) < \epsilon\}$ para todo $l \leq k \in \mathbb{N}$. Por ser este conjunto cofinito, se cumple que $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x_k), f^n(x)) < \epsilon\} \in p$, para todo $p \in \mathbb{N}^*$. Por tanto, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es p-proximal a x, para todo $p \in \mathbb{N}^*$. $\square$

2.4 Recurrencia

Para iniciar esta sección recordemos la definición de recurrencia.

Definición 2.4.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Decimos que $x \in X$ es recurrente si para cada $V \in \mathcal{N}(x)$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\}$ es infinito.*

Veamos como se pueden usar los ultrafiltros para determinar los puntos recurrentes tal y como aparece en [Bl93].

Teorema 2.4.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto. Un punto $x \in X$ es recurrente si y solo si existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^p(x) = x$.*

Prueba: Necesidad. Para cada vecindad $V \in \mathcal{N}(x)$, consideramos el conjunto $A_V = \{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\}$ el cual es infinito por suposición. Es claro que la familia $\{A_V : V \in \mathcal{N}(x)\}$ tiene la propiedad de intersección finita, y también es claro que todo ultrafiltro $p \in \mathbb{N}^*$ que contenga a esta familia satisface que $f^p(x) = x$.

Suficiencia. Supongamos que $f^p(x) = x$ para algún $p \in \mathbb{N}^*$. Como $x = p - \lim_{n\to\infty} f^n(x)$, se cumple la pertenencia $A_V \in p$. Ya que $p \in \mathbb{N}^*$, el conjuto A_V resulta ser infinito para cualquier vecindad $V \in \mathcal{N}(x)$. $\square$

El teorema anterior nos sugiere considerar la siguiente noción que fué introducida de manera my general en [Fu81] y se estudio para ultrafiltros en [GS07].

Definición 2.4.2. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto y sea $p \in \mathbb{N}^*$. Decimos que un punto $x \in X$ es p-recurrente si $f^p(x) = x$.*

Del Teorema 2.4.1 se cumple que cada punto p-recurrente es recurrente, para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$.

La siguiente caracterización de p-recurrencia se sigue directamente de la definición.

Teorema 2.4.2. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto. Para $x \in X$ y $p \in \mathbb{N}^*$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *x es p-recurrente.*
2. *Para cada $V \in \mathcal{N}(x)$, $\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\} \in p$.*

Veamos a continuación una caracterización muy interesante.

Lema 2.4.1. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto, $x \in X$ y $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$. Entonces, $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = x$ si y solo si x es p-recurrente, para todo $p \in \{n_k : k \in \mathbb{N}\}^*$.*

Prueba: Necesidad. Sea $p \in \{n_k : k \in \mathbb{N}\}^*$. Si $V \in \mathcal{N}(x)$, por hipótesis, el conjunto $A_V = \{n_k : f^{n_k}(x) \in V\}$ es cofinito y por ello $A_V \in p$ para todo $p \in \{n_k : k \in \mathbb{N}\}^*$. Aplicando el Teorema anterior, hallamos que x es p-recurrente, para todo $p \in \mathbb{N}^*$.

Suficiencia. Supongamos que $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) \neq x$. Podemos entonces encontrar $V \in \mathcal{N}(x)$ de tal forma que el conjunto $B = \{n_k \in \mathbb{N} : f^{n_k}(x) \notin V\}$ es infinito. Pero esta vecindad V testifica que x no puede ser p-recurrente para cualquier $p \in B^*$, contradiciendo nuestra suposición. Por tanto, $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = x$. $\square$

Corollary 2.4.1. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto y $x \in X$. Entonces, x es p-recurrente, para todo $p \in \mathbb{N}^*$, si y solo si $f(x) = x$.*

Prueba: Del lema anterior se sabe que $f^n(x) \to x$ y por lo cual $f^{n+1}(x) \to f(x)$. Por tanto, $f(x) = x$. $\square$

En el Ejemplo 2.8.2 exhibiremos un punto recurrente que es p-recurrente para algún $p \in \mathbb{N}^*$ y no es q-recurrente para otro $q \in \mathbb{N}^*$.

Ahora caracterizaremos los puntos periódicos de un sistema dinámico usando p-recurrencia.

Dado un sistema dinámico (X, f), recordemos que un punto $x \in X$ se llama *periódico* si existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $f^k(x) = x$. El *periódo* de un punto periódico $x \in X$ es el menor número entero positivo $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Un punto $x \in X$ se llama *eventualmente periódico* si existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $f^n(x)$ es periódico.

Teorema 2.4.3. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto. Un punto $x \in X$ es periódico si y solo si existe un subconjunto sintético A de $\mathbb{N}$ tal que x es p-recurrente para todo $p \in A^*$.*

Prueba: Necesidad. Supongamos que $f^k(x) = x$ y que k es el menor número entero positivo con esta propiedad. Definimos $A = k\mathbb{N} = \{kn : n \in \mathbb{N}\}$. Es evidente que A es sintético y $f^{kn}(x) = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De aquí se obtiene que $f^p(x) = p-\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p-\lim_{n\to\infty} f^{kn}(x) = x$, para todo $p \in A^*$. Es decir, x es p-recurrente para todo $p \in A^*$.

Suficiencia. Sea A un subconjunto infinito sintético de $\mathbb{N}$ tal que x es p-recurrente para cada $p \in A^*$. Enumeramos a A en orden creciente $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$. De acuerdo con el Lema 2.4.1, sabemos que $x = lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x)$. De la definición de sintético no es difícil ver que podemos hallar $m \in \mathbb{N}$ de tal forma que $n_{k+1}-n_k \leq m$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Seleccionamos un número entero positivo $j \leq m$ para la cual el conjunto $B = \{n_k : n_{k+1} - n_k = j\}$ es infinito. Sin perder generalidad podemos reemplazar el conjunto A por B y suponer que $n_{k+1}-n_k = j$, para todo $k \in N$. Como $f^{n_k}(x) \to x$, se cumple entonces que $f^{n_k+j}(x) \to f^j(x)$ y por tanto $f^{n_{k+1}}(x) \to f^j(x)$. Pero como $f^{n_{k+1}}(x) \to x$, hallamos que $f^j(x) = x$. Esto prueba que x es periódico. □

Teorema 2.4.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto. Si $x \in X$ es eventualmente periódico, entonces existe un subconjunto sintético A de $\mathbb{N}$ tal que $f^p(x)$ es periódico para todo $p \in A^*$.*

Prueba: Supongamos que $f^n(f^k(x)) = f^k(x)$ para ciertos números enteros $k, n \in \mathbb{N}$. Inductivemente podemos ver que $f^n(f^{km}(x)) = f^{km}(x)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. En consecuencia, si $A = k\mathbb{N}$ y $p \in A^*$, entonces

$$\begin{aligned} f^n(f^p(x)) &= f^n(p - lim_{m\to\infty} f^m(x)) = f^n(p - lim_{m\to\infty} f^{km}(x)) \\ &= p - lim_{m\to\infty} f^n(f^{km}(x)) = p - lim_{m\to\infty} f^{km}(x) \\ &= p - lim_{m\to\infty} f^m(x) = f^p(x). \end{aligned}$$

Por tanto, $f^p(x)$ es periódico para todo $p \in A^*$ y evidentemente A es sintético. □

Ejemplo 2.4.1. *Pongamos $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ una sucesión convergente con su punto límite y definimos $f : X \to X$ como*

$$f(x) = \begin{cases} x & si \;\; x = 0 \\ \frac{1}{n+1} & si \;\; x = \frac{1}{n} \; y \; 1 \leq n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Claramente este sitema dinámico tiene a 0 como único punto periódico (de hecho eventualmente periódico). Pero es evidente que $f^p(x) = 0$ para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$ y para todo $x \in X$. Con ésto queremos demostrar que el inverso del Teorema 2.4.4 no se cumple.

Este ejemplo nos sugiere la consideración de la siguiente clase de puntos de un sistema dinámico.

Definición 2.4.3. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto. Un punto $x \in X$ es eventualmente p-periódico, si existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^p(x)$ es periódico.*

Como se estableció en el Teorema 2.4.4 todo punto eventualmente peródico es eventualmente p-periódico. En el Ejemplo 2.4.1, podemos encontrar puntos eventualmente p-periódicos, para todo $p \in \mathbb{N}^*$ que no son eventualmente priódicos.

Ahora le toca el turno de caracterización a los puntos uniformemente recurrentes.

Definición 2.4.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Un punto $x \in X$ se llama uniformemente recurrente (casi-periódico) si para cada $V \in \mathcal{N}(x)$ es posible hallar $m \in \mathbb{N}$ de tal manera que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k < m$ tal que $f^{n+k}(x) \in V$.*

Se sigue directamente de la definición que $x \in X$ es uniformemente recurrente si y solo si para cada $V \in \mathcal{N}(x)$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\}$ es sintético.

Teorema 2.4.5. [Bl93] *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto. Un punto $x \in X$ es uniformemente recurrente si y solo si para cada $p \in \mathbb{N}^*$ existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^q(f^p(x)) = x$.*

Prueba: Necesidad. Sea $p \in \mathbb{N}^*$. Fijemos $V \in \mathcal{N}(x)$ y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k < m$ con $f^{n+k}(x) \in V \subseteq cl_X V$. Para cada $k < m$, definimos $A_k = \{n \in \mathbb{N} : f^{n+k}(x) \in V\}$. Como $\mathbb{N} = \bigcup_{k<m} A_k$, se obtiene que $A_j \in p$ para algún $j < m$. Observemos que $f^n(x) \in f^{-j}(cl_X V)$ para todo $n \in A_j$. De aquí se sigue que $f^p(x) = p - lim_{n\to\infty} f^n(x) \in f^{-j}(cl_X V)$. Esto implica que $f^j(f^p(x)) \in cl_X V$. Con ésto definimos $B_V = \{j \in \mathbb{N} : f^j(f^p(x)) \in cl_X V\}$ el cual se ha demostrado que es no vacío. Es fácil ver que la familia $\{B_V : V \in \mathcal{N}(x)\}$ tiene la propiedad de intersección finita. Elegimos $q \in \mathbb{N}^*$ con la condición $B_V \in q$ para toda $V \in \mathcal{N}(x)$. Finalmente se deduce $x = q - lim_{j\to\infty} f^j(f^p(x))$. Es decir, $f^q(f^p((x)) = x$.

Suficiencia. Supongamos que x no es uniformemente recurrente. De donde es posible hallar $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que el conjunto

$$A_m = \{n \in \mathbb{N} : \forall k < m(f^{n+k}(x) \notin V)\}$$

es no vacío para cualquier $m \in \mathbb{N}$. De la definición podemos deducir fácilmente que la familia $\{A_m : m \in \mathbb{N}\}$ tiene la propiedad de intersección finita. Fijemos $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $\{A_m : m \in \mathbb{N}\} \subseteq p$. Supongamos que $f^p(f^m(x)) = f^m(f^p(x)) \in V$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces, $\{n \in \mathbb{N} : f^n(f^m)(x) = f^{n+m}(x) \in V\} \in p$ pero ésto contradice el hecho de que $A_{m+1} \in p$. Por tanto, $f^m(f^p(x)) \notin V$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Ahora supongamos que existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^q(f^p(x)) = f^{p+q}(x) = q - lim_{m\to\infty} f^m(f^p(x)) \in V$. Esto implica que $\{m \in \mathbb{N} : f^m(f^p(x)) \in V\} \in q$ lo cual es imposible. □

Corollary 2.4.2. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto. Un punto $x \in X$ es uniformemente recurrente si y solo si para cada $p \in \mathbb{N}^*$ existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que x es $(p+q)$-recurrente.*

Lema 2.4.2. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto. Un punto $x \in X$ es uniformemente recurrente si y solo si para toda $V \in \mathcal{N}(x)$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\}$ es sintético.*

Prueba: Para cada $V \in \mathcal{N}(x)$, ponemos $A_V = \{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\}$

Necesidad. Sea $V \in \mathcal{N}(x)$. Por definición, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se puede encontrar $k < m$ que satisfaga $f^{n+k}(x) \in V$. De aquí se puede deducir directamente que $\mathbb{N} = \bigcup_{k<m} -k + A_V$. Por tanto, A_V es sintético.

Suficiencia. Sea $V \in \mathcal{N}(x)$. Tomemos $m \in \mathbb{N}$ de tal forma que $\mathbb{N} = \bigcup_{k<m} -k + A_V$. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $k < m$ tal que $m \in -k + A_V$ y por ello $f^{n+k}(x) \in V$. Por tanto, x es uniformemente recurrente. □

Para dar otra caracterización de los puntos uniformemente recurrentes necesitamos la siguiente clase de subconjuntos de $\mathbb{N}^*$.

Definición 2.4.5. *Un subconjunto no vacío C de $\mathbb{N}^*$ se llama sintético si el filtro $\mathcal{F}_C$[1] tiene una base que consiste de subconjuntos sintéticos de $\mathbb{N}$.*

[1]Para cada $C \subseteq \mathbb{N}^*$, definimos $\mathcal{F}_C = \{A \subseteq \mathbb{N} : C \subseteq A^*\}$ el cual resulta ser un filtro libre en $\mathbb{N}$

Finalmente llegamos a la caracterización de los puntos uniformemente recurrentes que no son periódicos. Esta caracterización tiene mucha semejanza con la caracterización de los puntos periódicos que se estableció en el Teorema 2.4.3.

Lema 2.4.3. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto y $x \in X$ un punto no periódico. Entonces, x es uniformemente recurrente si y solo si existe un subconjunto cerrado sintético C of $\mathbb{N}^*$ tal que x es p-recurrente para todo $p \in C$.*

Prueba: Sin perder generalidad podemos suponer que x no es periódico.

Necesidad. Supongamos que x es uniformemente recurrente. Claramente, $\{\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\} : V \in \mathcal{N}(x)\}$ es una base de filtro y, por el Lema 2.4.2, cada uno de sus elementos es sintético. Definimos

$$C = \bigcap \{\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\}^* : V \in \mathcal{N}(x)\}.$$

Tenemos entonces que el filtro $\mathcal{F}_C$ tiene una base de subconjuntos sintéticos de $\mathbb{N}$ y por tanto C es un subconjunto cerrado sintético de $\mathbb{N}^*$. Sea $p \in C$. Como $\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\} \in p$ para toda $V \in \mathcal{N}(x)$, en base al Teorema 2.4.2, x es p-recurrente.

Suficiencia. Sea $V \in \mathcal{N}(x)$ consideremos el conjunto $A_V = \{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\}$. De acuerdo con el Teorema 2.4.2 $A_V \in p$ para todo $p \in C$. Esto implica que $A_V \in \mathcal{F}_C$ y por consiguiente contiene un subconjunto sintético de $\mathbb{N}$. Así A_V resulta también ser sintético. Por el Lema 2.4.2, concluimos que x es uniformente recurrente. $\square$

Como una aplicación del Teorema 2.1.1 y de la definición se puede establecer el siguiente corolario.

Corollary 2.4.3. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto.*

1. *Si $p \in \mathbb{N}^*$ es un idempotente, entonces $f^p(x)$ es p-recurrente, para todo $x \in X$.*

2. *Si $x \in X$ es p-recurrente y q-recurrente para algunos $p, q \in \mathbb{N}^*$, entonces x es $(p+q)$-recurrente.*

Dado un grupo topológico compacto G y $g \in G$, definimos $l_g : G \to G$ como $l_g(x) = gx$ para todo $x \in G$. Claramente, (G, l_g) es un sistema dinámico, mejor conocido como un *sistema de Kronecker*, tal que $l_g^n = l_{g^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora fijemos $p \in \mathbb{N}^*$ y sea $g_p = p - lim_{n\to\infty} g^n$ el cual existe por el Teorema 1.3.3. Como la multiplicación de G es continua, por el Teorema 1.3.5, tenemos entonces que $g_p x = (p - lim_{n\to\infty} g^n)x = p - lim_{n\to\infty} g^n x = l_g^p(x)$. De esta manera quedan determinadas las p-iteradas de la función l_g. Sean $x \in G$ y $p \in \mathbb{N}^*$ un idempotente. De acuerdo con el Corolario 2.4.3, $l_g^p(l_g^p(x)) = g_p(g_p x) = g_p x = l_g^p(x)$. Lo cual implica que $g_p x = x$ para todo $x \in G$. Por tanto, cualquier punto $x \in G$ es p-recurrente para todo idempotente $p \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 2.4.6. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Para cada $x, \in X$,*

$$R_x = \{p \in \mathbb{N}^* : x \text{ } es \text{ } p - recurrente \text{ } \}$$

es un subsemigrupo cerrado de $(\mathbb{N}^*, +)$.

Prueba: Sea $x \in X$. Del corolario anterior se obtiene que R_x es un subsemigrupo de $(\mathbb{N}^*, +)$. Tomemos $q \in cl_{\mathbb{N}^*}(R_x)$ y supongamos que x no es q-recurrente. Entonces, existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que $B = \{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \notin V\} \in q$. Si $p \in B^* \cap R_x$, entonces $\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\} \in p$ por ser x un punto p-recurrente, pero ésto es evidentemente una contradicción. Por tanto, R_x es un subconjunto cerrado de $\mathbb{N}^*$. $\square$

Definición 2.4.6. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico. Decimos que un subconjunto cerrado $A \subseteq X$ es recurrente si para todo $x \in A$ y para todo $\epsilon > 0$ existen $y \in A$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d(f^n(y), x) < \epsilon$.*

Evidentemente se puede establecer la siguiente caracterización.

Lema 2.4.4. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico y A un subconjunto cerrado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es recurrente.*
2. *$A \subseteq cl_X(\mathcal{O}_f(A))$.*

3. $d(x, \mathcal{O}_f(A)) = 0$*, para todo* $x \in A$*.*

Para ver la utilidad de los ultrafiltros, necesitamos la siguiente generalización del punto p-límite de una sucesión de puntos.

Definición 2.4.7. **[GiSa]** *Sean* $p \in \mathbb{N}^*$ *y* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de subconjuntos no vacíos de un espacio* X*. Decimos que un punto* $x \in X$ *es un punto p-límite de la sucesión* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si para cada* $V \in \mathcal{N}(x)$*,* $\{n \in \mathbb{N} : V \cap S_n \neq \emptyset\} \in p$*. El conjunto de puntos p-límites de una sucesión* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será denotado por* $L(p, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$*.*

Del Teorema 1.3.1 y el Lema 2.4.4 se obtiene el siguiente resultado esperado:

Lema 2.4.5. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico con* X *un espacio métrico compacto y* $A \subseteq X$*. Entonces,* A *es recurrente si y solo si para cada* $x \in A$ *existe* $p \in \beta(\mathbb{N})$ *tal que* $x \in L(p, (f^n[A])_{n\in\mathbb{N}})$*.*

2.5 Conjuntos Minimales

Definición 2.5.1. *Sea* $f : X \to X$ *una función. Decimos que* $Y \subseteq X$ *es* f*-invariante (invariante) si* Y *es no vacío y* $f[Y] \subseteq Y$*.*

Claramente las órbitas de un sistema dinámico (X, f) son subconjuntos invariantes, y si $Y \subseteq X$ es invariante, entonces $cl_X(Y)$ es también invariante por ser f una función continua.

Definición 2.5.2. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico. Decimos que un subconjunto cerrado no vacío* $Y \subseteq X$ *es minimal si es invariante y ningún subconjunto cerrado propio de* Y *es invariante.*

En el caso cuando $f : X \to X$ sea un homeomorfismo, si $Y \subseteq X$ es minimal, entonces debemos tener que $f[Y] = Y$ y por tanto $f^{-1}(Y) = Y$.

Como es de esperarse el Lema de Zorn no ayuda a probar la existencia de conjuntos minimales:

Teorema 2.5.1. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico. Si* X *es compacto, entonces existe un subconjunto minimal de* X*.*

Prueba: Sea $\mathcal{I} = \{Z \subseteq X : Z$ es invariante y cerrado$\}$. Es evidente que $X \in \mathcal{I}$. Equipamos a $\mathcal{I}$ con el orden parcial de la inclusión. Supongamos que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ es linealmente ordenado. Por ser X compacto, el conjunto $Z = \cap\mathcal{I}$ es un cerrado no vacío de X y $Z \subseteq Y$ para todo $Y \in \mathcal{I}$. No es difícil ver que la intersección de subconjuntos invariantes es invariante. Por lo tanto, $Z \in \mathcal{I}$. El Lema de Zorn nos garantiza la existencia de un elemento mínimo en la familia $\mathcal{I}$ el cual resulta ser el conjunto deseado. $\Box$

Definición 2.5.3. *Un sistema dinámico (X, f) se llama minimal si X es un conjunto minimal.*

Es claro que si (X, f) es un sistema dinámico con X un espacio compacto y $Y \subseteq X$ es minimal, entonces $(Y, f|_Y)$ es un sistema dinámico minimal.

Lema 2.5.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Entonces, $Y \subseteq X$ es minimal si y solo si la órbita de cada punto de Y es densa en Y.*

Prueba: Necesidad. Supongamos que Y es minimal y fijemos $y \in Y$. Como $cl_X(\mathcal{O}_f(y))$ es invariante y cerrado, entonces se debe cumplir que $Y = cl_X(\mathcal{O}_f(y))$.

Suficiencia. Si Y no es minimal, entonces existe un cerrado invariante no vacío Z de X contenido propiamente en Y. Si $y \in Z$, entonces $cl_X(\mathcal{O}_f(y)) \subseteq Z$ y por tanto la órbita de y no puede ser densa en Y, lo cual contradice nuestra hipótesis. $\Box$

Para el caso cuando $f : X \to X$ es un homeomorfismo y $x \in X$, se tienen dos órbitas $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$. Si X es minimal, por el lema anterior, tenemos que $X = cl_X(\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\})$ y por tanto $X = cl_X(\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\})$. Con ésto queremos enfatizar que en los sitemas dinámicos minimales donde la función sea un homomorfismo basta con considerar la órbita $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$.

Teorema 2.5.2. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto y $x \in X$. Entonces, $cl_X(\mathcal{O}_f(x))$ es minimal si y solo si x es uniformemente recurrente.*

Prueba: Necesidad. Sea $p \in \mathbb{N}^*$. Por el Lema 2.5.1, $\mathcal{O}_f(f^p(x))$ es denso en $cl_X(\mathcal{O}_f(x))$ y como $x \in cl_X(\mathcal{O}_f(x))$, por el Teorema 1.3.2, existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^q(f^p(x)) = x$. Así el Teorema 2.4.5 nos asegura que x es uniformemente recurrente.

Suficiencia. Supongamos que x es uniformemente recurrente. En base al Lema 2.5.1, basta con probar que la órbita de cada punto de $cl_X(\mathcal{O}_f(x))$ es densa en $cl_X(\mathcal{O}_f(x))$. Fijemos un punto $y \in cl_X(\mathcal{O}_f(x))$. En base al Ejercicio E.6, basta con probar que $x \in cl_X(\mathcal{O}_f(y))$. Efectivamente, por el Teorema 1.3.2, podemos encontrar $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^p(x) = y$. Del Teorema 2.4.5 sabemos que existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^q(f^p((x)) = f^q(y) = q - lim_{n\to\infty} f^n(y) = x$. Como consecuencia de ésto obtenemos que $x \in cl_X(\mathcal{O}_f(y))$. □

Teorema 2.5.3. *Si (X, f) es un sistema dinámico minimal con X un espacio compacto, entonces todo punto de X es uniformemente recurrente.*

Prueba: Por el Lema 2.5.1, $cl_X(\mathcal{O}_f(x)) = X$ para todo $x \in X$. La conclusión se sigue directamente del teorema anterior. □

Del Teorema 2.5.1 y el Teorema 2.5.3 obtenemos lo siguiente:

Teorema 2.5.4. [G. D. Birkhoff] *Si (X, f) es un sistema dinámico con X un espacio compacto, entonces X contiene un punto uniformemente recurrente.*

Lema 2.5.2. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto y $x \in X$. Si $\emptyset \neq Y \subseteq cl_X(\mathcal{O}_f(x))$ es invariante y cerrado, entonces $I_Y = \{p \in \beta(\mathbb{N}) : f^p(x) \in Y\}$ es un ideal derecho cerrado de $\beta(\mathbb{N})$. Además, si Y es cerrado en X, entonces I_Y es un conjunto cerrado de $\beta(\mathbb{N})$.*

Prueba: Puesto que $f_x[\beta(\mathbb{N})] = cl_X(\mathcal{O}_f(x))$, el conjunto I_Y es no vacío. Por ser Y invariante, se cumple que $f^n(f^p(x)) \in Y$ para todo $p \in I_Y$ y para cada $n \in \mathbb{N}$. De donde se sigue que

$$f^{p+q}(x) = f^q(f^p(x)) = q - lim_{n\to\infty} f^n(f^p(x)) \in Y,$$

para todo $p \in I_Y$ y para todo $q \in \beta(\mathbb{N})$. Lo cual demuestra que I_Y es un ideal derecho de $\beta(\mathbb{N})$. Supongamos que Y es cerrado. Entonces, como la función $f_x : \beta(\mathbb{N}) \to X$ es continua, hallamos que $I_Y = f_x^{-1}(Y)$ es un subconjunto cerrado de $\beta(\mathbb{N})$. □

Teorema 2.5.5. [**Auslander-Ellis**] *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Para todo punto $x \in X$, el espacio X contiene un punto uniformemente recurrente y proximal a x.*

Prueba: Pongamos $Z = cl_X(\mathcal{O}_f(x))$. Consideremos el sistema dinámico $(Z, f|_Z)$. Por el Teorema 2.5.1, el sistema dinámico $(Z, f|_Z)$ contiene un subconjunto minimal que denotaremos por Y. Del Lema 2.5.2 sabemos que I_Y es un ideal cerrado de $\beta(\mathbb{N})$. Por el Teorema 1.5.3, existe $p \in I_Y$ tal que $p + p = p$. Del Corolario 2.3.1 tenemos que los puntos $f^p(x)$ y x son proximales. Como $f^p(x) \in Y$ y Y es minimal, según el Teorema 2.5.3, $f^p(x)$ es uniformemente recurrrente. $\square$

La prueba del Teorema 2.5.5 que acabamos de presentar es una pequeña modificación de la aportada por A. Blass [Bl93]. Su prueba original usa propiedades dinámicas del sistema $(\beta(\mathbb{N}), S)$, en donde $S : \beta(\mathbb{N}) \to \beta(\mathbb{N})$ está definida por $S(p) = 1 + p$ para todo $p \in \beta(\mathbb{N})$ (una versión en Español se puede encontrar en [Fr08]).

Definición 2.5.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrio. Decimos que un punto $x \in X$ es distal si solamente es proximal consigo mismo. El sistema dinámico (X, f) se llama distal si cada uno de sus puntos es distal.*

En un sistema dinámico (X, f) en donde X es un espacio métrico compacto, por el Teorema 2.5.5, todo punto distal $x \in X$ es uniformemente recurrente y $f^p(x) = x$ para todo ultrafiltro idempotente $p \in \mathbb{N}^*$ (esto último lo establece el Corolario 2.3.1). Del Teorema 2.5.2 deducimos lo siguiente:

Corollary 2.5.1. *Si (X, f) es un sistema dinámico distal con X un espacio compacto, entonces X es la unión de conjuntos minimales disjuntos entre si.*

La siguiente pregunta abierta resulta ser muy interesante:

Pregunta 2.5.1. *Dado un sistema dinámico (X, f) con X un espacio compacto, ¿ es cierto que X contiene un punto p-recurrente para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$?*

Teorema 2.5.6. **[FW79]** *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto y métrico. Entonces, X es minimal si para cada $\epsilon > 0$ existen $n_0, ..., n_l \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x, y \in X$,*

$$\min\{d(f^{n_i}(x), y) : i \leq l\} < \epsilon.$$

Prueba: La suficiencia del teorema se sigue de manera inmediata del Lema 2.5.1. Solo nos queda probar la necesidad. Para ésto fijemos $\epsilon > 0$. Por ser X un espacio métrico compacto, lo podemos cubrir con una cantidad finita de subconjuntos abiertos $V_0, V_1, ...,$ y V_n tales que $\delta(V_j) < \epsilon$, para todo $j \leq n$. Usando la cacaterización de minimalidad del Ejercicio E.30, podemos encontrar $n_0, ..., n_l \in \mathbb{N}$ de tal manera que $X = \bigcup_{i \leq l} f^{-n_i}(V_j)$ para cualquier $j \leq n$. Dados $x, y \in X$ tomemos $i \leq n$ y $j \leq n$ que satisfagan $x \in f^{-n_i}(V_j)$ y $y \in V_j$. Es claro que $d(f^{n_i}(x), y) < \epsilon$. $\square$

Teorema 2.5.7. **[Fu81, Prop. 8.5]** *Sea (X, f) un sistema dinámico minimal con X un espacio métrico compacto. Si $x, y \in X$ son proximales, entonces existe un idempotente $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^p(x) = y$ y $f^p(y) = y$.*

Prueba: Supongamos que $x, y \in X$ son proximales. Sabemos, en base al Teorema 2.3.3, que existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que $z = f^q(x) = f^q(y)$. Consideremos la función $f_{x,y} : \beta(\mathbb{N}) \to X \times X$ definida por $f_{x,y}(p) = (f^p(x), f^p(y))$ para todo $p \in \beta(\mathbb{N})$. Es fácil ver que $f_{x,y}$ es continua y que su imagen $f_{x,y}[\beta(\mathbb{N})]$ es un conjunto cerrado invariante dentro del sistema dinámico $(X \times X, f \times f)$. Fijemos $w \in X$. Como $X = cl_X(\mathcal{O}_f(z))$, ésto se cumple por el Lema 2.5.1, tenemos que existe $s \in \beta(\mathbb{N})$ tal que $f^s(z) = w$. De donde se sigue que $f_{x,y}(q + s) = (f^{q+s}(x), f^{q+s}(y)) = (f^s(f^q(x)), f^s(f^q(y))) = (f^s(z), f^s(z)) = (w, w)$. Con ésto se prueba que $f_{x,y}[\beta(\mathbb{N})]$ contiene a la diagonal Δ_X de $X \times X$. Ahora definimos

$$K_{x,y} = \{p \in \beta(\mathbb{N}) : f^p(x) = y \text{ y } f^p(y) = y\}$$

Claramente $K_{x,y} = f_{x,y}^{-1}((y, y))$ y como $(y, y) \in f_{x,y}[\beta(\mathbb{N})]$, se sigue que $K_{x,y}$ es un conjunto cerrado y no vacío de $\beta(\mathbb{N})$. Tambié, $K_{x,y}$ resulta ser un subsemigrupo de $\beta(\mathbb{N})$. El Teorema 1.5.3 afirma la existencia de un ultrafiltro $p \in K_{x,y}$ tal que $p + p = p$. Por estar en el ideal $K_{x,y}$, se obtiene que $f^p(x) = y$. $\square$

Veamos algunas propiedades adicionales de los conjuntos invariantes cerrados.

Teorema 2.5.8. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico. Si $Y \subseteq X$ es un conjunto invariante y cerrado, entonces $f^p[Y] \subseteq Y$ para todo $p \in \beta(\mathbb{N})$.*

Prueba: Sean $y \in Y$ y $p \in \mathbb{N}^*$. Ya que $f^p(y) - p - \lim_{n\to\infty} f^n(y)$ y $f^n(y) \in Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 1.3.1, $f^p(y) \in cl_X(Y) = Y$. Por tanto, $f^p[Y] \subseteq Y$ para todo $p \in \beta(\mathbb{N})$. $\square$

El recíproco del Lema 2.5.2 también se cumple:

Lema 2.5.3. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto. Si I es un ideal derecho de $\beta(\mathbb{N})$, entonces $f_x[I]$ es un subconjunto invariante de $cl_X(\mathcal{O}_f(x))$, para todo $x \in X$.*

Prueba: Sea $x \in Y$ y pongamos $Y = f_x[I]$. Evidentemente, $Y \subseteq cl_X(\mathcal{O}_f(x))$. Fijemos $y \in Y$ y elegimos $p \in I$ tal que $f_x(p) = f^p(x) = y$. Si $q \in \beta(\mathbb{N})$, por el Teorema 2.1.1 y el Lema 2.5.8, vemos que $f^q(y) = f^q(f^p(x)) = f^{p+q}(x) = f_x(p+q) \in Y$ puesto que $p+q \in I$. Esto prueba que Y es invariante. $\square$

Teorema 2.5.9. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto. Si I es un ideal derecho minimal de $\beta(\mathbb{N})$, entonces $f_x[I]$ es un subconjunto minimal de $cl_X(\mathcal{O}_f(x))$, para todo $x \in X$.*

Prueba: Sea $x \in X$. Sabemos por el Teorema 1.5.8 que I es un subconjunto cerrado de $\beta(\mathbb{N})$ y por ser f_x una función continua, $f_x[I] = Y$ es un subconjunto cerrado de $cl_X(\mathcal{O}_f(x))$. Del lema anterior se sabe que Y es un subconjunto invariante de $cl_X(\mathcal{O}_f(x))$, para todo $x \in X$. Ahora bien, si $Z \subseteq Y$ es invariante, siguiendo la prueba del Lema 2.5.2 y por el Teorema 2.5.8, encontramos que $J_Z = \{p \in I : f^p(x) \in Z\}$ es un ideal derecho de $\beta(\mathbb{N})$ contenido en I. Por hipótesis, $J_Z = I$ y por consiguiente $Z = Y$. Por tanto, $f_x[I]$ es un subconjunto minimal de $cl_X(\mathcal{O}_f(x))$. $\square$

Teorema 2.5.10. *Sean (X, f) un sistema dinámico minimal con X un espacio compacto. Para cada $x \in X$ y para cada ideal derecho minimal I de $\beta(\mathbb{N})$, existe un idempotente $p \in I$ tal que $f^p(x) = x$.*

Prueba: De acuerdo con el teorema anterior y el Teorema 2.5.1, $f_x[I] = X = cl_X(\mathcal{O}_f(x))$. No es difícil ver que $J = \{p \in I : f^p(x) = x\}$ es un subsemigrupo cerrado no vacío de $\beta(\mathbb{N})$. Por el Teorema 1.5.3, existe un idempotente $p \in J$ el cual satisface que $f^p(x) = x$. □

Una reformulación del Teorema de J. Auslander y R. Ellis (Teorema 2.5.5) es la siguiente.

Teorema 2.5.11. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto. Para cada $x \in X$ y para cada ideal derecho minimal I de $\beta(\mathbb{N})$, existen $y \in cl_X(\mathcal{O}_f(x))$ y un idempotente $p \in I$ tal que $f^p(x) = y$ y y es uniformemente recurrente.*

Teorema 2.5.12. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto. Las siguientes propiedades son equivalentes para un punto $x \in X$:*

1. *x es uniformemente recurrente.*

2. *Para todo ideal derecho minimal I de $\beta(\mathbb{N})$ existe un idempotente $p \in I$ tal que $f^p(x) = x$.*

3. *Existen un ideal derecho minimal I de $\beta(\mathbb{N})$ y un idempotente $p \in I$ tal que $f^p(x) = x$.*

Prueba: $1 \Rightarrow 2$. Supongamos que x es uniformemente recurrente y sea I un ideal derecho minimal de $\beta(\mathbb{N})$. El Teorema 1.5.8 afirma que I es un subconjunto cerrado de $\beta(N)$. Definimos $R_{x,I} = \{p \in I : x \text{ } es \text{ } p - \text{recurrente }\}$. Siguiendo la prueba del Teorema 2.4.6 se puede establecer que $R_{x,I}$ es un semigrupo cerrado de $\beta(\mathbb{N})$ contenido en I. Según el Teorema 1.5.3 existe un idempotente $p \in R_{x,I}$ el cual cumple la condición $f^p(x) = x$ y $p \in I$.

$2 \Rightarrow 3$. Es trivial.

$3 \Rightarrow 1$. Sea I un ideal derecho minimal de $\beta(\mathbb{N})$ en el cual, por hipótesis, podemos hallar un idempotente $p \in I$ tal que $f^p(x) = x$. Del Teorema 2.5.9 $f_x[I]$ resulta ser un subconjunto minimal de $cl_X(\mathcal{O}_f(x))$. Por el Teorema 2.5.3, todo punto de $f_x[I]$ es uniformemente recurrente. Como $f^p(x) = x \in f_x[I]$, x es uniformemente recurrente. □

2.6 Dinámica Simbólica y Teoría de Ramsey

Sea $2 \leq r \in \mathbb{N}$. Consideremos el conjunto $\Sigma_r = r^{\mathbb{N}} = \{0, 2, ..., r-1\}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto. Equipamos a Σ_r con la topología producto tomando a r como un espacio discreto finito. Con esta topología Σ_r resulta ser un expacio métrico compacto.

Una métrica[2] $d : \Sigma_r \times \Sigma_r \to \mathbb{R}$ en Σ_r equivalente con su topología es la siguiente:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ \frac{1}{2^l} & \text{en \ donde } l = \min\{k \in \mathbb{N} : x(k) \neq y(k)\}, \end{cases}$$

para cada par de puntos $x, y \in \Sigma_r$. Clamente, para $x, y \in \Sigma_r$ se cumple que $d(x,y) < \frac{1}{2^l}$ si y solo si $x(k) = y(k)$ para todo $k \leq l$. Recordemos que un abierto subbásico de Σ_r es el conjunto $[n, \epsilon] = \{x \in \Sigma_r : x(n) = \epsilon\}$, en donde $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon \in r$.

Dado $2 \leq r \in \mathbb{N}$, diremos que $r = \{0, 1, 2, ..., r-1\}$ es nuestro alfabeto y que cada elemento de Σ_r es una *palabra infinita*. Una *palabra* w sera un elemento no vacío de la unión $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} r^n$ y la escribiremos como $w = w_0 w_1 .... w_{n-1}$ en donde $n = dom(w)$ y $w(i) = w_i$ para cada $i < n$. La *longitud de una palabra* w es su dominio $dom(w)$. Decimos que una palabra w *ocurre en una palabra infinita* $x \in \Sigma_r$ si existen $n, l \in \mathbb{N}$ tal que $w = x(n)x(x+1)...x(n+l)$. Algunas veces un punto $x \in \Sigma_r$ se escribirá como una palabra infinita $x = x(0)x(1).....x(n).....$

Si $2 \leq r \in \mathbb{N}$, la *traslación hacia la derecha* $\sigma : \Sigma_m \to \Sigma_m$ se define como $\sigma(x)(n) = x(n+1)$ para todo $x \in \Sigma_r$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Al sistema dinámico (Σ_r, σ) se le conoce como es *sistema dinámico de uno-traslación en r-símbolos*. En el Ejercicio E.38 se enlistan algunas propiedades báscias de este sitema dinámico. En el capítulo siguiente estudiaremos otras funciones del tipo uno-traslación por la derecha en el conjunto de Cantor. Dejamos al lector que pruebe el siguiente teorema.

Observemos que $\sigma^k(x)(n) = x(n+k)$ para toda $x \in \Sigma_r$ y para todo $k, n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.6.1. *Consideremos el sistema dinámico* (Σ_r, σ) *y* $x, y \in \Sigma_r$.

[2] A esta métrica se le conoce como la métrica de Baire

1. *x es periódico si y solo si existe un número natural $k \in \mathbb{N}$ tal que* $x = x(0)x(1)...x(k-1)x(0)x(1)...x(k-1).....$

2. *(Σ_r, σ) tiene solo una cantidad finita de puntos periódicos de periódo n, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

3. *x es eventualmente periódico si y solo si existen $n, k \in \mathbb{N}$ tal que* $x = x(0)x(1)...x(k-1)x(k)...x(k+n-1)x(k)....x(k+n-1).....$

4. *x es recurrente si y solo si para cada $l \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \forall k \leq l(x(k) = x(n+k))\}$ es infinito (es decir, cada palabra ocurre por segunda vez).*

5. *x es uniformemente recurrente si y solo si*

$$\forall l \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \exists i < m \forall k \leq l(x(k) = x(n+i+k)).$$

6. *x y y son proximales si y solo si para cada $l \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \forall k \leq l(x(n+k) = y(n+k))\}$ es infinito.*

Dado un punto $x \in \Sigma_r$, del teorema anterior y del Teorema 2.5.2 podemos decir que el conjunto $cl_{\Sigma_r}(\mathcal{O}_\sigma(x))$ es minimal si y solo si para cada palabra w que occure en x existe $l \in \mathbb{N}$ tal que x ocurre en cada palabra de x de longitud l.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Lema 2.4.2.

Corollary 2.6.1. *Sea $2 \leq r$. Entonces, $x \in \Sigma_r$ es uniformemente recurrente si y solo si para cada palabra $w = x(n)x(n+1)...x(n+l)$ que ocurre en x el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : w = x(k+n)x(k+n+1)...x(k+n+l)\}$ es sintético.*

Para ejemplificar el corolario anterior veamos la sucesión construida por M. Morse:

Consideremos el espacio Σ_2. La sucesión se construye inductivamente con palabras de longitud $1, 2, 2^2, ..., 2^n, ...$. En efecto, la primer palabra es 0, la segunda 01. En esta palabra reemplazamos 0 por 01 y 1 por 10 y obtenemos de este modo la palabra 0110. Continuando con la substitución 0 por 01 y 1 por 10 en cada nueva palabra que formemos hallamos que la sucesión resulta ser 011010011001011010010110..... que es un punto uniformemente recurrente de sistema dinámico (Σ_2, σ). Veamos este procedimiento de manera más general:

Sea $2 \leq r$. Definimos una *substitución* como una función $\theta : r \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} r^n$ tal que $\theta(i)$ sea una función suprayectiva para toda $i < r$. Iniciamos con la palabra $012...(r-1)$ y consideremos la substitución

$$0 \to \theta(0), 1 \to \theta(1), ..., r-1 \to \theta(r-1).$$

Formando la palabra $\theta(0)\theta(1)....\theta(r-1)$. Como en el caso anterior, en cada palabra que se obtenga substituimos cada una de sus letras por la palabra correspondiente para obtener una nueva palabra. Al final del proceso el lector puede asegurarse por si mismo que se obtiene un punto uniformemente recurrente del sistema dinámico (Σ_r, σ).

En los siguientes resultados, daremos algunas aplicaciones de las propiedades combinatorias del sistema dinámico (Σ_r, σ). Primero daremos la demostración de H. Furstenberg [Fu81] del Teorema de las Sumas Finitas de N. Hindman 1.5.5 que se basa en ciertas propiedades de los sistemas dinámicos en consideración. El lema que a continuación enunciamos nos dirá la clave de la demostración de Furstenberg.

A cada partición $\{A_i : i < r\}$ finita de $\mathbb{N}$ le asignaremos la función $\varphi : \mathbb{N} \to r = \{0, 1, ..., r-1\}$ definida como $\varphi(n) = i$ si $n \in A_i$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí en adelante φ representará una función suprayectiva de Σ_r.

Lema 2.6.1. *Sea $0 < r \in \mathbb{N}$ y sea $z \in \Sigma_r$ un punto uniformemente recurrente y proximal a $\varphi : \mathbb{N} \to r$. Supongamos que $k_0 < k_1 < ..... < k_t$ son números enteros y que $z(0) = z(s) = \varphi(s)$ para todo $s \in FS(\{k_0, ..., k_t\})$. Entonces, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k_t < k$ y $z(0) = z(s) = \varphi(s)$ para todo $s \in FS(\{k_0, ..., k_t\} \cup \{k\})$.*

Prueba: Por el Teorema 2.6.1, se cumplen las siguientes propiedades:

(i) $\forall l \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \exists i < m (z(0)z(1)....z(l) = z(n+i)z(n+i+1).....z(n+i+l))$.

(ii) Para cada $l \in \mathbb{N}$ existe una cantidad infinita de números $n \in \mathbb{N}$ tales que $z(n)z(n+1)....z(n+l) = \varphi(n)\varphi(n+1).....\varphi(n+l)$.

Para $l = \max\{s : s \in FS(\{k_0, ..., k_t\})\} + 1$, sea $m \in \mathbb{N}$ el número dado por la propiedad (i). Según la propiedad (ii), para el número $l + m$ podemos hallar $n \in \mathbb{N}$ tal que $l < n$ y $z(n)z(n+1)....z(n+l+m) = \varphi(n)\varphi(n+1).....\varphi(n+l+m)$. Por la elección de m podemos encontrar $i < m$ de tal forma que $z(0)z(1)....z(l) = z(n+i)z(n+i+1).....z(n+i+l)$. Inductivamente podemos ver que $z(0) = z(n+i) = \varphi(n+i)$ y $z(0) = z(s) = z(n+i+s) = \varphi(n+i+s)$ para todo $s \in FS(\{k_0, ..., k_t\})$. El número deseado es $k = n + i$. $\square$

Teorema 2.6.2. **[Sumas Fintas]** *Si $\{A_i : i < r\}$ es una partición finita de $\mathbb{N}$, entonces existen $j < r$ y $B \in [A_j]^\omega$ tales que $FS(B) \subseteq A_j$.*

Prueba:[Furstenberg-Weiss, [FW79]] Sea $\varphi : \mathbb{N} \to r$ la función asignada a la partición $\{A_i : i < r\}$. El Teorema 2.5.5 nos asegura la existencia de un punto uniformemente recurrente $z \in \Sigma_r$ que también es proximal a φ. Pongamos $j = z(0)$. El Lema 2.6.1 nos ayuda a encontrar un conjunto infinito $B = \{k_t : t \in \mathbb{N}\}$ tal que $j = z(0) = z(s) = \varphi(s)$ para todo $s \in FS(B)$. Es decir, $FS(B) \subseteq A_j$. $\square$

Ahora veamos otra bonita aplicación combinatoria que aparece en el libro [Fu81, Th. 1.23].

Teorema 2.6.3. *Si $\{A_i : i < r\}$ es una partición finita de $\mathbb{N}$, entonces existe $j < r$ tal que A_j es sintético por tramos.*

Prueba: Consideremos la función $\varphi : \mathbb{N} \to r$ asignada a la partición $\{A_i : i < r\}$. De acuerdo con el Teorema 2.5.5, X contiene un punto z uniformemente recurrente y proximal a φ. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y pongamos $z(k) = j$. Tenemos entonces que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : f^n(z) = z \in [k, j]\} = \{n \in \mathbb{N} : f^n(z) = z \in [k, j]\}$ es sintético. Es decir, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N} = \bigcup_{t \leq n}(-t + A)$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ de tal forma que $f^m(\varphi) \in \bigcap_{s \leq n+l}[s, z(s)]$. En otras palabras, $f^m(\varphi)(s) = \varphi(m+s) = z(s)$ para todo $s \leq n + l$. Ahora, para cada $s \leq n$ elejimos $t_s \leq l$ tal que $s + t_s \in A$. De donde se obtiene que $\varphi(m + s + t_s) = z(s + t_s) = j$, para cada $s \leq n$. Es decir, $s + t_s \in A_j$ para todo $s \leq n$. Con ésto se prueba que A_j es sintético por tramos. $\square$

Para nuestras próximas aplicaciones necesitamos otro tipo de sistemas dinámicos discretos que a continuación describimos.

Dado un número $r \in \mathbb{N}$ mayor que 1, consideraremos el espacio producto $\Delta_r = r^{\mathbb{Z}} = \{0, 1, ..., r-1\}^{\mathbb{Z}}$ y la traslación hacia la derecha

$\sigma : \Delta_r \to \Delta_r$ definida como se hizo anteriormente para Σ_r. Sabemos que los espacios Δ_r y Σ_r son homeomorfos pero la diferencia fundamental es que σ como función sobre Δ_r es un homeomorfismo y no es difícil ver que definida sobre Σ_r no es ni siquiera inyectiva. En este caso, la función $\varphi : \mathbb{Z} \to r$ asignada una partición $\{A_i : 1 \leq i < r\}$ se definirá como

$$\varphi(n) = \begin{cases} i & \text{si } \; n \in A_i \\ 0 & \text{si } \; n < 0. \end{cases}$$

Una métrica $d : \Delta_r \times \Delta_r \to \mathbb{R}$ en Δ_r que es equivalente con su topología se define como:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ \frac{1}{2^{l+1}} & \text{donde } l = \max\{k \in \mathbb{N} : x(i) = y(i) \text{ para todo } |i| < k\}, \end{cases}$$

para cada par de puntos $x, y \in \Delta_r$. Dados $x, y \in \Delta_r$, de la definición notamos que $d(x, y) < \frac{1}{2^{l+1}}$ si y solo si $x(k) = y(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ con $|k| \leq l$.

El siguiente resultado es el Teorema 1.5 de H. Furstenberg y B. Weiss [FW79] (dicho lema también aparece de modo más general en el libro [BS, Th. 2.8.3]).

Teorema 2.6.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico minimal con X un espacio compacto y f un homemomorfismo. Entonces, para cada abierto no vacío V de X y para cada $a_1, ..., a_d \in \mathbb{Z}$, en donde $1 \leq d \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\emptyset \neq V \cap f^{-ma_1}(V) \cap f^{-ma_2}(V) \cap ...... \cap f^{-ma_d}(V).$$

Prueba: Sean $\emptyset \neq V \subseteq X$ y $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Por el Ejercicio E.30, podemos encontrar números enteros $n_0, n_1, ..., n_l \in \mathbb{N}$ tales que $X = \bigcup_{i \leq l} f^{-n_i}(V)$.

Veamos primero el caso $d = 1$. Ponemos $V_0 = V$. Recursivamente, sabemos que para algún $i_k \leq l$, $f^{-n_{i_k}}(V) \cap f^{-a_1}(V_{k-1}) \neq \emptyset$. Entonces, definimos $V_k = f^{-n_{i_k}}(V) \cap f^{-a_1}(V_{k-1})$. De la construcción vemos que $f^{n_{i_k}}[V_k] \subseteq V$ y $V_k \subseteq f^{-a_1}(V_{k-1})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Claramente, es posible hallar $i \leq l$ tal que $V_t \cup V_s \subseteq f^{-n_i}(V)$ para dos números enteros $s, t \in \mathbb{N}$ con $s < t$. Pongamos $W = f^{n_i}[V_t] \subseteq V$. Tenemos entonces

$$f^{(t-s)a_1}[W] = f^{(t-s)a_1}[f^{n_i}[V_t]] = f^{((t-s)-1)a_1}[f^{n_i}[f^{a_1}[V_t]] \subseteq$$

$$f^{((t-s)-1)a_1}[f^{n_i}[V_{t-1}]] \subseteq \ldots\ldots \subseteq f^{n_i}[V_s] \subseteq V.$$

En nuestro primer caso, el número buscado es $m = t - s$. Supongamos que se cumple para $d \in \mathbb{N}$. Ponemos, $V_0 = V$. Por nuestra hipótesis inductiva, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\emptyset \neq V_0 \cap f^{-m_0(a_1-a_{d+1})}(V_0) \cap f^{-m_0(a_2-a_{d+1})}(V_0) \cap \ldots.$$

$$\ldots.. \cap f^{-m_0(a_d-a_{d+1})}(V_0).$$

Aplicando $f^{-m_0 a_{d+1}}$, obtenemos que

$$\emptyset \neq f^{-m_0 a_{d+1}}(V_0) \cap f^{-m_0 a_1}(V_0) \cap f^{-m_0 a_2}(V_0) \cap \ldots\ldots. \cap f^{-m_0 a_d}(V_0).$$

De aquí procedemos a elegir $i_1 \leq l$ de tal forma que

$$V_1 = f^{-n_{i_1}}(V_0) \cap f^{-m_0 a_{d+1}}(V_0) \cap f^{-m_0 a_1}(V_0) \cap f^{-m_0 a_2}(V_0) \cap \ldots\ldots.$$

$$\cap f^{-m_0 a_d}(V_0) \neq \emptyset.$$

Supongamos que V_k ha sido definido. Procediendo de manera análoga, Seleccionamos $i_k \leq l$ y $m_k \in \mathbb{N}$ de modo que

$$V_k = f^{-n_{i_k}}(V_0) \cap f^{-m_k a_{d+1}}(V_{k-1}) \cap f^{-m_k a_1}(V_{k-1}) \cap f^{-m_k a_2}(V_{k-1}) \cap \ldots\ldots.$$

$$\cap f^{-m_k a_d}(V_{k-1}) \neq \emptyset.$$

De esta forma para cada número entero positivo $k \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto abierto V_k. De acuerdo con su definición, estos conjuntos abiertos satisfacen las contenciones $f^{n_{i_k}}[V_k] \subseteq V$ y $f^{m_k a_j}[V_k] \subseteq V_{k-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $1 \leq j \leq d+1$. Como se hizo anteriormente fijamos $i \leq l$ de tal forma que $V_t \cup V_s \subseteq f^{-n_i}(V)$ para dos números enteros $s, t \in \mathbb{N}$ con $s < t$. Pongamos $W = f^{n_i}(V_t)$ y $m = m_t + m_{t-1} + \ldots + m_s$. Entonces, para cada $1 \leq j \leq d+1$ se cumple que

$$f^{ma_j}[W] = f^{ma_j}[f^{n_i}[V_t]] = f^{n_i}[f^{ma_j}[V_t]] = f^{n_i}[f^{(m_{t-1}+\ldots.+m_s)a_j}[f^{m_t a_j}[V_t]]]$$

$$\subseteq f^{n_i}[f^{(m_{t-1}+\ldots.+m_s)a_j}[V_{t-1}] \subseteq \ldots\ldots \subseteq f^{n_i}[V_s] \subseteq V.$$

Por otra parte, como $W \subseteq V$ concluimos que

$$\emptyset \neq V \cap f^{-ma_1}(V) \cap f^{-ma_2}(V) \cap \ldots\ldots \cap f^{-ma_d}(V). \quad \square$$

Enseguida enunciaremos y probaremos un caso muy particular del Teorema de Recurrencia Multiple de Birkhoff (ver la forma general en [Fu81, Th. 2.6]).

Teorema 2.6.5. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y f un homemomorfismo. Entonces, para cada $x \in X$ y para cada $1 \leq n \in \mathbb{N}$, existe un punto $y \in X$ proximal a x y una sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con la propiedad de que para todo $\epsilon > 0$ es posible hallar $l \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{n_k}(f^j(y)), y) < \epsilon$ para todo $1 \leq j \leq n$ y para todo $l \leq k \in \mathbb{N}$.*

Prueba: Fijemos $1 \leq n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$. En base al Teorema 2.5.1, existe un conjunto minimal Y contenido en $\mathcal{O}_f(x)$. En el Lema 2.5.2 se vió que I_Y es un ideal cerrado de $\beta(\mathbb{N})$ y el Teorema 1.5.3 nos garantiza la existencia de un ultrafiltro $p \in I_Y$ tal que $p + p = p$. El Corolario 2.3.1 nos dice que $f^p(x)$ y x son puntos proximales y $y = f^p(x) \in Y$. Consideremos este punto y. Por el Teorema 2.6.4, para cada $k \in \mathbb{N}$ existen $m_k \in \mathbb{N}$ y un punto

$$y_k \in B(y, \frac{1}{k+1}) \cap f^{-m_k}(f^{-1}(B(y, \frac{1}{k+1}))) \cap f^{-m_k}(f^{-2}(B(y, \frac{1}{k+1})))$$

$$\cap ...... \cap f^{-m_k}(f^{-n}(B(y, \frac{1}{k+1}))).$$

De aquí hallamos que $d(y_k, y) < \frac{1}{k+1}$ y $d(f^{m_k}(f^j(y_k)), y) < \frac{1}{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $1 \leq j \leq n$. Sabemos por el Lema 2.5.1 que la órbita de y es densa en Y y por ello para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $l_k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{l_k}(y) = y_k$. Definimos entonces $n_k = m_k l_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Claramente, el punto y y la sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ son las deseadas. $\square$

Corollary 2.6.2. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y f un homeomorfismo. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $m \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ tales que $d(f^{mj}(x), x) < \epsilon$ para todo $j \leq n$.*

Teorema 2.6.6. [van der Waerden] *Para cada partición finita $\{A_i : i < r\}$ de $\mathbb{N}$ existe $j > r$ tal que A_j contiene progresiones aritméticas*[3] *finitas de longitud arbitraria.*

Prueba:[Furstenberg-Weiss, [FW79]] Sea $\varphi : \mathbb{Z} \to r$ la función asignada a la partición $\{A_i : i < r\}$. Consideremos el espacio métrico

[3] Una *progresión aritmética finita* es una sucesión de números naturales de la forma $m, m+n, m+2n, m+3n, ..., m+tn$, siendo $t \geq 0$ su *longitud*

$X = cl(\{\sigma^n(\varphi)) : n \in \mathbb{Z}\})$ y la función restricción $\sigma|_X$ que seguiremos denotando por σ. Fijemos $t \in \mathbb{N}$. Del Corolario 2.6.2 hallamos $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ tales que $d(\sigma^{nj}(x), x) < \frac{1}{2}$ para todo $j \leq t$. Lo cual significa que $x(0) = x(n) = x(2n) = ... = x(nt)$. Sea $j = \varphi(n)$. Elegimos m que satisfaga $d(\sigma^m(\varphi), x) < \frac{1}{tn+1}$. De donde se sigue que $x(0) = \varphi(m) = x(n) = \varphi(m+n) = x(2n) = \varphi(m+2n) = ... = x(tn) = \varphi(m+tn)$. Por tanto, $m, m+2n, ..., m+tn \in A_j$. $\square$

Otro corolario del Teorema 2.6.5 es el siguiente.

Corollary 2.6.3. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y f un homemomorfismo. Entonces, es posible encontrar un punto $x \in X$ de tal manera que para cada $1 \leq n \in \mathbb{N}$ existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^{p+j}(x) = x$ para todo $j \leq n$.*

Prueba: Sea $x \in X$ el punto dado por el Teorema 2.6.5. Entonces, para $1 \leq n \in \mathbb{N}$ fijamos una sucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de tal forma que para cada $\epsilon > 0$ existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{n_k}(f^j(x)), x) < \epsilon$ para todo $1 \leq j \leq n$ y para todo $l \leq k \in \mathbb{N}$. Claramente el conjunto $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ es infinito. Tomemos $p \in A^*$. Dado $\epsilon > 0$ sabemos que $A + j \subseteq^* \{m \in \mathbb{N} : d(f^m(x), x) < \epsilon\}$ para cualquier $j \leq n$. Como $A + j \in p + j$, debemos tener que $\{m \in \mathbb{N} : d(f^m(x), x) < \epsilon\} \in p + j$, para todo $j \leq n$. Por tanto, $f^{p+j}(x) = x$ para todo $j \leq n$. $\square$

Recordemos la definición de un subconjunto central de $\mathbb{N}$.

Definición 2.6.1. [Fu81] *Decimos que $C \subseteq N$ es central si existen un sistema dinámico (X, f) con X un espacio compacto, un punto $x \in X$, un punto $y \in X$ uniformemente recurrente y proximal a x y $V \in \mathcal{N}(y)$ tal que $C = \{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\}$.*

La caracterización de los subconjuntos centrales de $\mathbb{N}$ que a continuación presentamos es de V. Bergelson y N. Hindman [BH90].

Lema 2.6.2. *Consideremos el sistema dinámico (Σ_2, σ). Sean $p \in \mathbb{N}^*$ y $A \in p$. Si $\sigma^p(\chi_A) = y$, entonces $A = \{n \in \mathbb{N} : \sigma^n(\chi_A) \in [0, y(0)]\}$*

Prueba: Pongamos $B = \{n \in \mathbb{N} : \sigma^n(\chi_A) \in [0, y(0)]\}$. Como $\sigma^p(\chi_A) = y$, $B \in p$. Si $m \in A \cap B$, entonces $\sigma^m(\chi_A(0)) = \chi_A(m) = 1 = y(0)$. Así que $y(0) = 1$. De aquí deducimos que

$$n \in B \Leftrightarrow \sigma^n(\chi_A)(0) = 1 \Leftrightarrow \chi_A(n) = 1 \Leftrightarrow n \in A. \ \square$$

Teorema 2.6.7. *$A \subseteq \mathbb{N}$ es central si y solo si existe un idempotente p contenido en un ideal derecho minimal de $\beta(\mathbb{N})$ tal que $A \in p$.*

Prueba: Necesidad. Sean (X, f) un sistema dinámico (X, f) con X un espacio compacto, un punto $x \in X$, un punto $y \in X$ uniformemente recurrente proximal a x y $V \in \mathcal{N}(y)$ tal que $A = \{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\}$. Del Teorema 2.5.12 existe un ideal derecho minimal I de $\beta(\mathbb{N})$ el cual contiene un idempotente $p \in I$ tal que $f^p(x) = y$.

Suficiencia. Sean $p \in \mathbb{N}^*$ un idempotente que esta contenido en un ideal minimal de $\beta(\mathbb{N})$ y $A \in p$. Consideremos el sistema dinámico (Σ_2, σ). Pongamos $y = \sigma^p(\chi_A)$. Por el Corolario 2.3.2, χ_A y y son proximales y según el Teorema 2.5.12, y es uniformemente recurrente. Además, por el Lema 2.6.7, se cumple que $A = \{n \in \mathbb{N} : \sigma^n(\chi_A) \in [0, y(0)]\}$. □

Como una aplicación directa de los Teoremas 1.5.4 y 2.6.7 se tiene la siguiente propiedad de los conjuntos centrales.

Corollary 2.6.4. [Fu81] *Todo conjunto central contiene un IP-conjunto.*

Teorema 2.6.8. [Fu81] *Si $\{A_i : i < r\}$ es una partición finita de $\mathbb{N}$, entonces existe $j < r$ tal que B_j es central.*

Prueba: Claramente, $\beta(\mathbb{N}) = \bigcup_{i<r} \hat{A}_i$. Tomemos un idempotente $p \in \mathbb{N}^*$ que pertenezca a un ideal minimal de $\beta(\mathbb{N})$ (dicho idempotente existe gracias al Teorema 1.5.3). Entonces, existe $j < r$ tal que $p \in \hat{A}_j$. Por el Teorema 2.6.7, A_j es un conjunto central. □

Una propiedad importante que se deduce de la prueba del Teorema 2.6.7 y que se usará en el siguiente resultado es que en la definición de un conjunto central, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que X es un espacio métrico compacto y que $f : X \to X$ se puede tomar como un homeomorfismo. Efectivamente, consideramos el sistema dinámico (Δ_2, σ) dentro de la prueba y obtenemos lo deseado.

Teorema 2.6.9. [Fu81] *Todo conjunto central contiene progresiones aritméticas de longitud arbitraria.*

Prueba: Sea $C \subseteq \mathbb{N}$ un conjunto central. Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ un homeomorfismo tal que determina al conjunto C. Es decir, existen $x, y \in X$ y

$V \in \mathcal{N}(y)$ tales que x y y son proximales, y es uniformemente recurrente y $V = \{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\}$. Por el Teorema 2.5.2, $cl_X(\mathcal{O}_f(y)) = Y$ es un conjunto minimal. Usando el Ejercicio E.30, podemos hallar $l \in \mathbb{N}$ tal que $Y \subseteq \bigcup_{i \leq l} f^{-i}(V)$. Sea $\epsilon > 0$ el número de Lebesgue[4] de la cubierta $\{f^{-i}(V) : i \leq l\}$ (dicho número existe por el Teorema de las Cubiertas de Lebesgue [En89, Th. 4.3.31]). Consideremos el sistema dinámico $(Y, f|_Y)$. Según el Corolario 2.6.2, dado $t \in \mathbb{N}$ existen $m \in \mathbb{N}$ y $z \in Y$ tales que $d(f^{mj}(z), z) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $j \leq t$. Ahora fijemos $i \leq l$ tal que $f^{mj}(z) \in f^{-1}(V)$, para todo $j \leq t$. Es decir, $f^{mj+i}(z) \in V$, para cada $j \leq t$. Por otra parte, puesto que x y y son proximales, $\emptyset \neq Y \cap cl_X(\mathcal{O}_f(x))$ y como Y es minimal, $Y \subseteq cl_X(\mathcal{O}_f(x))$. De aquí conseguimos que $z \in cl_X(\mathcal{O}_f(x))$. Por ésto y la continuidad de cada una de las funciones f^{mj+i} en el punto z, es posible elegir $k \in \mathbb{N}$ de tal forma que $f^{mj+i}(f^k(x)) \in V$, para todo $j \leq t$. Por tanto, $mj + (i + k) \in A$ para cada $j \leq l$. $\square$

2.7 IP-redes

El Teorema de Sumas Finitas 1.5.5 nos dice, en otros términos, que en cada partición finita de $\mathbb{N}$ uno de los sus elementos es un IP-conjunto.

Consideremos la familia FIN^* de subconjuntos finitos no vacíos de $\mathbb{N}$. Si $s, t \in FIN^*$, entonces decimos $s < t$ si $\max(s) < \min(t)$. Escribimos $s \leq t$ si se cumple que $s = t$ ó $s < t$. Dados $n \in \mathbb{N}$ y $s \in FIN^*$, si $\{n\} < s$ (respectivamente, $s < \{n\}$), entonces escribimos simplemente $n < s$ (respectivamente, $s < n$). Este órden convierte a FIN^* en un conjunto dirigido. Una red $(x_s)_{s \in FIN^*}$ en un conjunto X se llamará *IP-red*. Decimos que una IP-red $(x_s)_{s \in FIN^*}$ en un espacio topológico *converge* a x, en símbolos $x_s \to x$, si para cada $V \in \mathcal{N}(x)$ existe $t \in FIN^*$ tal que $x_s \in V$ para todo $s \in FIN^*$ con $t < s$.

Detallemos un ejemplo de una IP-red en $\mathbb{N}$: Dada una sucesión infinita $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de números naturales no negativos, para cada $s \in FIN^*$, definimos $n_s = \sum_{k \in s} n_k$. En el caso particular de la sucesión $(k)_{k \in \mathbb{N}}$, tenemos notacionalmente que $n_s = \sum_{k \in s} k$ para cada $s \in FIN^*$. Dentro

[4]El número de Lebesgue de una cubierta finita $\{V_i : i \leq l\}$ de un espacio métrico compacto X es un número real $\epsilon > 0$ tal que si $A \subseteq X$ tiene diámetro menor que ϵ, entonces $A \subseteq V_i$ para algún $i \leq l$.

de este contexto, un subconjunto A de $\mathbb{N}$ es un IP-conjunto si contiene una IP-red. Vale la pena ramarcar que $n_s + n_t = n_{s\cup t}$ toda vez que $s \cap t = \emptyset$. De aquí encontramos que las IP-redes en $\mathbb{N}$ se pueden clasificar como aquellas redes $(n_s)_{s\in FIN^*}$ que cumplen con la propiedad $n_s + n_t = n_{s\cup t}$ siempre que $s, t \in FIN^*$ sean disjuntos. Una IP-red en $\mathbb{N}$ será siempre una IP-red de este tipo que acabamos de definir.

A continuación enunciamos una versión combinatoria del Teorema de N. Hindman 1.5.5. Pero antes introduciremos varias nociones que son necesarias en la prueba.

Definición 2.7.1. *Un homomorfismo de FIN^* en si mismo es una función $h : FIN^* \to FIN^*$ tal que si $s, t \in FIN^*$ y $s \cap t = \emptyset$, entonces $h(s) \cap h(t) = \emptyset$ y $h(s) \cup h(t) = h(s \cup t)$. Un IP-conjunto de FIN^* es la imagen de un homomorfismo de FIN^*.*

Trivialmente la composición de homomorfismos es un homeomorfismo. Es fácil de verificar que un homomorfismo de FIN^* está determinado por los valores que toma en $\{k\}$ para cada número entero $k \in \mathbb{N}$. Para ser mas precisos, si para cada $k \in \mathbb{N}$ asignamos $h(\{k\}) \in FIN^*$ de tal forma que $h(\{i\}) \cap h(\{j\}) = \emptyset$ toda vez que $i, j \in \mathbb{N}$ sean distintos, entonces $h(s) = \bigcup_{k\in s} h(\{k\})$ determina un homomorfismo.

Dado $s \in FIN^*$, definimos el *soporte binario* de s como el número $sob(s) = \sum_{i\in s} 2^i$. Ciertamente, la función $sb : FIN^* \to \mathbb{N}$ es biyectiva: Claramente es inyectiva y la imagen inversa de cada número entero positivo son los términos de su expresión binaria.

Teorema 2.7.1. [Uniones Finitas] *Si $\{\mathcal{B}_i : i < r\}$ es una partición de FIN^*, entonces algún $\mathcal{B}_j$ contiene un IP-conjunto de FIN^*.*

Prueba: Para cada $i < r$, definimos $A_i = sob[\mathcal{B}_i] = \{n : \exists s \in \mathcal{B}_i(sob(s) = n)\}$. Es evidente que $\{A_i : i < r\}$ es una partición de $\mathbb{N}$. De acuerdo con el Teorema 1.5.5, existe $j < r$ para el cual A_j es un IP-conjunto. Fijemos una sucesión infinita $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $FS((n_k)_{k\in\mathbb{N}}) \subseteq A_j$. Cada elemento de $FS((n_k)_{k\in\mathbb{N}})$ lo escribiremos como $n_s = \sum_{k\in s} n_k$ en donde $s \in FIN^*$. Definimos $h_0 : FIN^* \to FIN^*$ como $h_0(s) = sob^{-1}(n_s)$ para cada $s \in FIN^*$. De la definición vemos que si $n_s \in A_j$, entonces $h_0(s) \in \mathbb{B}_j$. También, si $s, t \in FIN^*$ y $s \cap t = \emptyset$, entonces $n_s + n_t = n_{s\cup t}$ y por consiguiente $h_0(s) \cup h_0(t) = h_0(s \cup t)$. Pero puede fallar que $h_0(s) \cap h_0(t) \neq \emptyset$. Tenemos que definir otra función $h_1 : FIN^* \to FIN^*$ para resolver este problema. Para poder definirla necesitamos el siguiente hecho que no es difícil de probar:

$(*)$ Sea $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión infinita en $\mathbb{N}$. Entonces, para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $a \in FS((l_k)_{k\in\mathbb{N}})$ tal que $2^m \backslash a$.

Sea $s_0 \in \mathcal{B}_j$ arbitrario. Tomamos $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{s_0} < 2^{m_0}$. Por $(*)$, es posible hallar $s_1 \in \mathcal{B}_j$ tal que $2^{m_0}\backslash n_{s_1}$ y $s_0 \cap s_1 = \emptyset$. Claramente, $sob^{-1}(n_{s_0}) \cap sob^{-1}(n_{s_1}) = \emptyset$. Continuando de esta manera definimos una sucesión $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{B}_j$ que cumpla con la condición: $s_k \cap s_l = \emptyset = sob^{-1}(n_{s_k}) \cap sob^{-1}(n_{s_l})$ siempre que $k, l \in \mathbb{N}$ y $k \neq l$. Definimos $h_1 : FIN^* \to FIN^*$ como $h_1(\{l_0, ..., l_{k-1}\}) = \bigcup_{l<k} s_{l_i}$. De la definición es evidente que $sob^{-1}(\sum_{l\in t} n_{s_l}) = \bigcup_{l\in t} sob^{-1}(n_{s_l}) \in \mathcal{B}_j$ para todo $t \in FIN^*$. Ponemos $h = h_0 \circ h_1$. Veamos que esta función cumple las condiciones impuestas. En efecto, sean $s, t \in FIN^*$ tales que $s \cap t = \emptyset$. Entonces,

$$h(s) \cup h(t) = h_0(h_1(s)) \cup h_0(h_1(t)) = h_0(\bigcup_{l\in s} s_l) \cap h_0(\bigcup_{l\in t} s_l) =$$

$$h_0((\bigcup_{l\in s} s_l) \cup (\bigcup_{l\in t} s_l)) = h_0(\bigcup_{l\in s\cup t} s_l) = h_0(h_1(s \cup t)) = h(s \cup t), \text{ y}$$

$$h(s) \cap h(t) = h_0(h_1(s)) \cap h_0(h_1(t)) = h_0(\bigcup_{l\in s} s_l) \cap h_0(\bigcup_{l\in t} s_l)$$

$$= sob^{-1}(n_{(\bigcup_{l\in s} s_l)}) \cap sob^{-1}(n_{(\bigcup_{l\in t} s_l)}) = sob^{-1}(\sum_{l\in s} n_{s_l}) \cap sob^{-1}(\sum_{l\in t} n_{s_l})$$

$$= (\bigcup_{l\in s} sob^{-1}(n_{s_l})) \cap (\bigcup_{l\in t} sob^{-1}(n_{s_l}) = \emptyset.$$

Como $h[FIN^*] \subseteq B_j$, es conjunto B_j resulta ser un IP-conjunto. $\Box$

Veamos a continuación una generalización del Teorema de las Sumas Finitas 1.5.5 usando IP-conjuntos:

Teorema 2.7.2. *Sea $P \subseteq \mathbb{N}$ un IP-conjunto y $\{P_i : i < r\}$ una partición finita de P. Entonces, P_j es un IP-conjunto para algún $j < r$.*

Prueba: Sea $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión infinita tal que la IP-red $(n_s)_{s\in FIN^*}$ este contenida en P. Para cada $i < r$, definimos $\mathcal{B}_i = \{s \in FIN^* : n_s \in$

$P_i\}$. Es evidente que $\{\mathcal{B}_i : i < r\}$ es una partición de FIN^*. Por el Teorema de la Uniones Fintas 2.7.1, existen $j < r$ y un homomorfismo $h : FIN^* \to FIN^*$ tal que $h[FIN^*] \subseteq \mathcal{B}_j$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $m_k = n_{h(\{k\})}$. Es inmediato ver que $m_k \in P_j$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y si $s \in FIN^*$, entonces $m_s = \sum_{k\in s} m_k = \sum_{k\in s} n_{h(\{k\})} = n_{\cup_{k\in s} h(\{k\})} = n_{h(\cup_{k\in s}\{k\})} = n_{h(s)} \in P_j$. $\square$

El Teorema de las Uniones Finitas 2.7.1 también tiene su generalización en el contexto de IP-conjuntos:

Corollary 2.7.1. *Sea $P \subseteq FIN^*$ un IP-sconjunto y $\{\mathcal{B}_i : i < r\}$ una partición finita de P. Entonces, $\mathcal{B}_j$ es un IP-conjunto para algún $j < r$.*

Prueba: Sea $h : FIN^* \to FIN^*$ un homomorfismo tal que $h[FIN^*] \subseteq P$. Para cada $i < r$, definimos $\mathcal{A}_i = \{s \in FIN^* : h(s) \in \mathcal{B}_i\}$. De acuerdo con el Teorema 2.7.1 existen un homomorfismo $g : FIN^* \to FIN^*$ y $j < r$ tal que $g[FIN^*] \subseteq \mathcal{A}_j$. Como consecuencia tenemos que $h[g[FIN^*]] \subseteq \mathcal{B}_j$. Por tanto, $\mathcal{B}_j$ es un IP-conjunto. $\square$

Para finalizar esta sección deremos algunas aplicaciones de los IP-conjuntos a la topología. La notación siguiente es crucial para dicha aplicación.

Definición 2.7.2. *Sea X un conjunto. Una IP-subred de una IP-red $(x_s)_{s\in FIN^*}$ de X es una IP-red de la forma $(x_{h(s)})_{s\in FIN^*}$ en donde $h : FIN^* \to FIN^*$ es un homomorfismo.*

Lema 2.7.1. *Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{\mathcal{B}_i^n : i < r_n\}$ es una partición finita de FIN^*. Entonces, existe $\varphi \in \prod_{n\in\mathbb{N}} r_n$ y un homomorfismo $h : FIN^* \to FIN^*$ tal que si $s \in FIN^*$ y $n < s$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $h(s) \in \mathcal{B}_n^{\varphi(n)}$.*

Prueba: Por el Teorema de las Uniones Finitas 2.7.1, existen $\varphi(0) < r_0$ y un homomorfismo $h_0 : FIN^* \to FIN^*$ tal que $h_0[FIN^*] \subseteq B^0_{\varphi(0)}$. Claramente, $h_0[FIN^*]$ es un IP-conjunto y por el Corolario 2.7.1, podemos hallar un homomorfismo $h_1 : FIN^* \to FIN^*$ y $\varphi(1) < r_1$ tal que $h_1[FIN^*] \subseteq h_0[FIN^*] \cap \mathcal{B}^1_{\varphi(1)}$. De manera inductiva para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos hallar un homomorfismo $h_k : FIN^* \to FIN^*$ y $\varphi(k) < r_k$ tal que $h_k[FIN^*] \subseteq h_{k-1}[FIN^*] \cap B^k_{\varphi(k)}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Inductivamente definimos una suceción $(s_k)_{k\in N}$ en FIN^* de tal manera que $h_i(s_i) \cap$

$h_j(s_j) = \emptyset$ para distintos $i, j \in N$. Ahora definimos $h(\{k\}) = h_k(s_k)$ para cada $k \in N$. Como se menciono anteriormente, h se puede extender a un homomorfismo en FIN^* mediante la regla $h(s) = \bigcup_{k \in s} h(\{k\})$, para todo $s \in FIN^*$. Fijemos $s \in FIN^*$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n < s$. Entonces, tenemos que $h(\{k\}) = h_k(s_k) \in h_{\min(s)}[FIN^*] \subseteq h_n[FIN^*]$ para todo $k \in s$. Por lo cual, $h(s) = \bigcup_{k \in s} h(\{k\}) = \bigcup_{k \in s} h_k(s_k) \in h_n[FIN^*] \subseteq \mathcal{B}^n_{\varphi(n)}$. $\square$

Teorema 2.7.3. *Toda IP-red en un espacio métrico compacto tiene una IP-subred convergente*[5].

Prueba: Para cada $n \in \mathbb{N}$, fijamos una partición finita $\{X_i^n : i < r_n\}$ de X en subconjuntos de diámetro menor que $\frac{1}{2^n}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $i < r_n$, definimos $\mathcal{B}_i^n = \{s \in FIN^* : x_s \in X_i^n\}$. Por el Lema 2.7.1, es posible encontrar un homomorfismo $h : FIN^* \to FIN^*$ de tal forma que si $s \in FIN^*$ y $n < s$ para cierto $n \in \mathbb{N}$, entonces $h(s) \in \mathcal{B}^n_{\varphi(n)}$. En otras palabras, $x_{h(s)} \in X^n_{\varphi(n)}$ toda vez que $s \in FIN^*$ y $n < s$ para algún $n \in \mathbb{N}$. De aquí deducimos que si $s, t \in FIN^*$ y $n < s, t$, entonces $d(x_{h(s)}, x_{h(t)}) < \frac{1}{2^n}$. Por ser X compacto, la intersección

$$\bigcap_{s \in FIN^*} cl_X(\{x_{h(t)} : s < t \in FIN^*\})$$

es no vacía. Tomemos un punto z en dicha intersección. No es complicado probar que la IP-subred converge a z. $\square$

Dada una función $f : X \to X$, para cada $s = \{k_i : i < r\} \in FIN^*$ definimos $f^s = f^{k_0} \circ f^{k_1} \circ ..... \circ f^{k_{r-1}}$. Vale la pena resaltar que si $s \in FIN^*$, entonces $f^{n_s} = f^{\sum_{k \in s} k} = f^s$ (recordamos que $n_s = \sum_{k \in s} k$). De esta forma cada función $f : X \to X$ determina una IP-red $(f^s)_{s \in FIN^*}$ en X^X. Veremos en los resultados siguientes la manera en que esta IP-red juega un papel muy importante en los sistemas dinámicos.

Mediante la p-convergencia se puede caracterizar la convergencia de la IP-red $(f^{h(s)}(x))_{s \in FIN^*}$:

Para cada $s \in FIN^*$ y para cada homomorfismo $h : FIN^* \to FIN^*$, definimos $FS(h, s) = \{n_{h(t)} = \sum_{k \in h(t)} k : s < t \in FIN^*\}$. De la

[5]Recordamos que una red $(x_\lambda)_{\lambda \in D}$ en un espacio topológico X converge a un punto, escribimo simbólicamente $x_\lambda \to x$, si para cada $V \in \mathcal{N}(x)$ exsite $\lambda_0 \in D$ tal que $x_\lambda \in V$ para todo $\lambda_0 < \lambda \in D$.

definición es directo ver que si $s, t \in FIN^*$ y $s < t$, entonces $FS(h,t) \subseteq FS(h,s)$ y $FS(h, s \cup t) \subseteqq -n_t + FS(h,s)$.

Teorema 2.7.4. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Las siguientes condiciones son equivalente para una IP-subred $(f^{h(s)})_{s\in FIN^*}$:*

1. *$f^{h(s)}(x) \to x$.*
2. *Si $p \in \mathbb{N}^*$ satisface que $FS(h,s) \in p$, para todo $s \in FIN^*$, entonces $f^p(x) = x$.*

Prueba: $1 \Rightarrow 2$. Supongamos que la IP-subred $(f^{h(s)})_{s\in FIN^*}$ satisface que $f^{h(s)}(x) \to x$. Fijemos $p \in \mathbb{N}^*$ con la propiedad $FS(h,s) \in p$, para todo $s \in FIN^*$. Dado $V \in \mathcal{N}(x)$, existe $s \in FIN^*$ tal que $f^{h(t)}(x) \in V$, para todo $s < t \in FIN^*$. Es decir, $F(h,s) \subseteq \{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\}$ y como $FS(h,t) \in p$, $\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\} \in p$. Por tanto, $f^p(x) = x$.

$2 \Rightarrow 1$. Supongamos que $V \in \mathcal{N}(x)$ es tal que para todo $s \in FIN^*$ existe $s < t_s \in FIN^*$ tal que $f^{h(t_s)}(x) \notin V$. Consideremos el cojunto infinito $A = \{n_{h(t_s)} = \sum_{k\in t_s} k : s \in FIN^*\}$. Claramente, la familia $\{FS(h,s) \cap A : s \in FIN^*\}$ tiene la propiedad de intersección finita. Fijemos $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $FS(h,s) \cap A \in p$, para cualquier $s \in FIN^*$. Por hipótesis, $f^p(x) = x$ y por lo cual $B = \{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in V\} \in p$. Entonces, es posible hallar $s \in FIN^*$ tal que $n_{h(t_s)} \in B$, pero ésto es una contradicción. Por tanto, $f^{h(s)}(x) \to x$. $\square$

Enseguida veremos como los idempotentes de $\mathbb{N}^*$ están relacionados con la convergencia de la IP-red $(f^{h(s)}(x))_{s\in FIN^*}$:

Lema 2.7.2. *Si $h : FIN^* \to FIN^*$ es un homomorfismo, entonces $S_h = \bigcap_{s\in FIN^*} cl_{\beta(\mathbb{N})}(FS(h,s))$ es un subsemigrupo de $(\beta(\mathbb{N}), +)$.*

Prueba: Como vimos en la prueba del teorema anterior la familia $\{FS(h,s) : s \in FIN^*\}$ tiene la propiedad de intersección finita y por ello $S_h = \bigcap_{s\in FIN^*} cl_{\beta(\mathbb{N})}(FS(h,s)) \neq \emptyset$. Fijemos $p, q \in S_h$. Fijemos $s \in FIN^*$. Claramente, $-n_t + FS(h,s) \in p$, para todo $s < t \in FIN^*$, ya que $FS(h, s\cup t) \subseteqq -n_t + FS(h,s)$. Es decir, $FS(h,s) \in p + n_t$ o mejor dicho $p + n_t \in cl_{\beta(\mathbb{N})}(FS(h,s))$, para cada $s < t \in FIN^*$. Por definición, sabemos que

$$p + q = q - lim_{n\to\infty} p + n = q - lim_{s<t\in FIN^*} p + n_t \in cl_{\beta(\mathbb{N})}(FS(h,s)),$$

para todo $s < t \in FIN^*$. Como $s \in FIN^*$ fue elegida arbitrariamente, concluimos $p+q \in S_h$. Por tanto, $(S_h, +)$ es un semigrupo. $\square$

Teorema 2.7.5. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Entonces, existe un idempotente $p \in \mathbb{N}^*$ tal que x es p-recurrente si y solo si existe una subred $(f^{h(s)}(x))_{s\in FIN^*}$ tal que $f^{h(s)}(x) \to x$.*

Prueba: Necesidad. Sea $p \in \mathbb{N}^*$ un idempotente tal que $f^p(x) = x$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $B_k = \{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), x) < \frac{1}{2^k}$. Sabemos que $B_k \in p$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pongamos $A_0 = B_0$ y $C_0 = \{n \in \mathbb{N} : -n + A_0 \in p\}$. Elegimos $n_0 \in A_0 \cap C_0$ y definimos $A_1 = A_0 \cap (-n_0 + A_0) \cap B_1$. Es evidente que A_1 es un elemento de p. De manera inductiva, para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos $A_i = A_{i-1} \cap (-n_{i-1} + A_{i-1}) \cap B_i$, $C_i = \{n \in \mathbb{N} : -n + A_i \in p\}$ y $n_i \in A_i \cap C_i$. Consideremos la sucesión infinita $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Si $s \in FIN^*$, por el Lema 1.5.1, se obtiene que $n_s = \sum_{i\in s} n_i \in A_{\min\{s\}} \subseteq B_{\min\{s\}}$ y por ello $d(f^{n_s}(x), x) < 2^{\min\{s\}}$. La sucesión $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se puede escoger de tal forma que $n_i < n_j$ siempre que $i, j \in \mathbb{N}$ y $i < j$. Ahora definimos $h : FIN^* \to FIN^*$ de tal forma que $h(\{k\}) = n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \epsilon$. Si $s \in FIN^*$ satisface que $k < s$, entonces $d(f^{h(s)}(x), x) = d(f^{n_s}(x), x) < 2^{\min\{s\}} < 2^k < \epsilon$. Por tanto, la IP-subred $(f^{h(s)}(x))_{s\in FIN^*}$ converge al punto x.

Suficiencia: Sea $(f^{h(s)}(x))_{s\in FIN^*}$ una IP-subred tal que $f^{h(s)}(x) \to x$. Según el Teorema 2.7.4, $f^p(x) = x$, para todo $p \in S_h$. Gracias al Teorema 1.5.3 y al Lema 2.7.2, es posible hallar un idempotente $p \in S_h$ para el cual $f^p(x) = x$. Por tanto, x es p-recurrente y p es un idempotente. $\square$

Una reformulación del Lema 8.15 del libro [Fu81] es la siguiente:

Teorema 2.7.6. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Un punto $y \in X$ es p-recurrente para un idempotente $p \in \mathbb{N}^*$ si y solo si existen un punto $x \in X$ y una IP-subred $(f^{h(s)}(x))_{s\in FIN^*}$ tal que $f^{h(s)}(x) \to y$.*

Prueba: La necesidad se sigue directamente del Teorema 2.7.5. Supongamos que $(f^{h(s)}(x))_{s\in FIN^*}$ es una IP-subred tal que $f^{h(s)}(x) \to y$. Sea $\epsilon > 0$. Elegimos $s \in FIN^*$ que cumpla con la desigualdad $d(f^{h(t)}(x), y) < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $s < t \in FIN^*$. Fijemos $t \in FIN^*$ estrictamente mayor que s y elegimos $\delta > 0$ de tal manera que si $v, w \in X$ y $d(v, w) < \delta$, entonces

$d(f^{h(t)}(v), f^{h(t)}(w)) < \frac{\epsilon}{2}$. Tomemos $r \in FIN^*$ que satisfaga $s < r$, $t < r$ y $d(f^{h(r)}(x), y) < \delta$. Entonces, obtenemos que

$$d(f^{h(t)}(f^{h(r)}(x)), f^{h(t)}(y)) = d(f^{h(t \cup r)}(x), f^{h(t)}(y)) < \frac{\epsilon}{2}$$

y como $d(f^{h(t \cup s)}(x), y) < \frac{\epsilon}{2}$ se sigue que $d(f^{h(t)}(y), y) < \epsilon$. El teorema anterior nos asegura que y es p-recurrente para algún idempotente $p \in \mathbb{N}^*$. $\square$

2.8 Dinámica de algunas funciones del conjunto de Cantor en si mismo

En esta sección estudiaremos propiedades dinámicas de ciertas funciones continuas del conjunto de Cantor en si mismo (algunos de estos resultados aparecen en [G]). El conjunto de Cantor será identificado con el espacio topológico $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ equipado con la topología producto. Como hemos visto anteriormente Σ_2 es un espacio métrico con la métrica:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ \frac{1}{2^l} & \text{en donde } l = \min\{k \in \mathbb{N} : x(k) \neq y(k)\}. \end{cases}$$

Recordemos que dos puntos $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ cumplen con la desiguladad $d(x, y) < \frac{1}{2^l}$ si y solo si $x(k) = y(k)$ para todo $k \leq l$.

Dada una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, podemos definir una función

$$\sigma_f : \Sigma_2 \to \Sigma_2$$

como $\sigma_f(x) = x \circ f$ para cualquier $x \in \Sigma_2$. Más detalladamente, si $x \in \Sigma_2$, entonces $\sigma_f(x)(k) = x(f(k))$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En particular, si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es la traslación hacia la derecha ($f(n) = n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$), entonces $\sigma_f : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es la famosa función conocida con el nombre de *shift* en inglés.

Teorema 2.8.1. *Para toda función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la función $\sigma_f : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es un homomorfismo continuo.*

Prueba: Si $x \in \Sigma_2$, entonces $\pi_i(\sigma_f(x)) = \sigma_f(x)(i) = x(f(i)) = \pi_{f(i)}(x)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. De aquí deducimos que la función σ_f es continua. Para probar que σ_f es un homomorfismo, fijamos $x, y \in \Sigma_2$. Tenemos entonces que $\sigma_f(x+y) = (x+y)\circ f = x\circ f + y\circ f = \sigma_f(x)+\sigma_f(y)$. Lo cual muestra que σ_f es un homomorfismo continuo. $\square$

Enunciemos a continuación algunas propiedades básicas de estas funciones σ_f's:

Teorema 2.8.2. *Para toda función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se cumple lo siguiente:*

1. *Para todo $A \subseteq \mathbb{N}$, $\sigma_f(\chi_A) = \chi_{f^{-1}(A)}$.*
2. *Para todo $A, B \subseteq \mathbb{N}$, $\sigma_f(\chi_A) = \chi_B$ si y solo si $f^{-1}(A) = B$.*
3. *Dados $A, B \subseteq \mathbb{N}$, $\sigma_f(\chi_A) = \sigma_f(\chi_B)$ si y solo si $f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$.*
4. *Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, $\chi_A \in ker(\sigma_f)$ si y solo si $f[\mathbb{N}] \cap A = \emptyset$.*
5. *Si f es suprayectiva, entonces σ_f es inyectiva.*
6. *Si f es biyectiva, entonces σ_f es biyectiva.*
7. *$\sigma_{f\circ g} = \sigma_g \circ \sigma_f$, para toda función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*
8. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_f^n = \sigma_{f^n}$.*

Para estudiar las propiedades de las p-iteradas de la función σ_f necesitamos la siguiente fórmula que se obtiene de manera directa de la definición:

Teorema 2.8.3. *Para cada $p \in \mathbb{N}^*$ se cumple la identidad*

$$\sigma_f^p(x) = p - \lim_{n\to\infty} \sigma_f^n(x) = p - \lim_{n\to\infty} x \circ f^n,$$

para todo $x \in \Sigma_2$, en donde el punto p-límite es tomado dentro del conjunto de Cantor.

Recordemos que el conjunto de Cantor Σ_2 es un grupo topológico con la operación $\chi_A + \chi_B = \chi_{A\Delta B}$, donde $A, B \subseteq \mathbb{N}$.

Teorema 2.8.4. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función. Para cada $p \in \mathbb{N}^*$, la p-iterada $\sigma_f^p : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ de σ_f es un homomorfismo.*

Prueba: Sean $x, y \in \Sigma_2$. De los Teoremas 2.10.9, 2.8.2 y 2.8.3 sabemos que

$$\begin{aligned}\sigma_f^p(x+y) = p-\lim_{n\to\infty}\sigma_f^n(x+y) &= p-\lim_{n\to\infty}(x+y)\circ f^n \\ &= p-\lim_{n\to\infty} x\circ f^n + p-\lim_{n\to\infty} y\circ f^n \\ &= p-\lim_{n\to\infty}\sigma_f^n(x) + p-\lim_{n\to\infty}\sigma_f^n(y) \\ &= \sigma_f^p(x)+\sigma_f^p(y). \quad \square\end{aligned}$$

Corollary 2.8.1. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función. Para cada $p \in \mathbb{N}^*$, el conjunto de puntos p-recurrentes del sistema dinámico (σ_f, Σ_2) forma un subgrupo de Σ_2.*

Veamos a continuación algunas condiciones que nos garantizan la continuidad de las p-iteradas de la función σ_f.

Lema 2.8.1. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función. Si la órbita $\mathcal{O}_f(k)$ es finita para $k \in \mathbb{N}$, entonces la composición $\pi_k \circ \sigma_f^p$ es continua para todo $p \in \mathbb{N}^*$.*

Prueba: Sea $p \in \mathbb{N}^*$. Elegimos $l \in \mathbb{N}$ de tal forma que $\max(\mathcal{O}_f(k)) < l$. Fijemos $A \subseteq \mathbb{N}$. Si $\chi_B|_{[0,l]} = \chi_A|_{[0,l]}$, entonces

$$\{n \in \mathbb{N} : f^n(k) \in A\} = \{n \in \mathbb{N} : f^n(k) \in B\}.$$

De donde se obtiene que $\pi_k(\sigma_f^p(\chi_A)) = p - lim_{n\to\infty}\chi_A(f^n(k)) = p - lim_{n\to\infty}\chi_B(f^n(k)) = \pi_k(\sigma_f^p(\chi_B))$. Por tanto, $\pi_k \circ \sigma_f^p$ es continua. $\square$

Como una aplicación directa del lema anterior se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.8.5. *Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función con órbitas finitas, entonces la función $\sigma_f^p : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es continua para todo $p \in \mathbb{N}^*$.*

Estidiaremos enseguida el caso cuando la función tenga una órbita infinita.

Lema 2.8.2. *Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función con una órbita infinita $\mathcal{O}_f(k)$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces la composición $\pi_k \circ \sigma_f^p$ no es continua para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$.*

Prueba: Supongamos que $\mathcal{O}_f(k)$ es infinita para $k \in \mathbb{N}$. Sea $p \in \mathbb{N}^*$. Fijemos $D \subseteq \mathbb{N}$ de tal forma que $\mathcal{O}_f(k) \setminus \{f^n(k) : n \in D\}$ sea infinito y $D \in p$. Consideremos χ_A, en donde $A = \{f^n(k) : n \in D\}$, y $\pi_k \circ \sigma_f^p(\chi_A)$. Se sabe directamente de lo establecido que $\pi_k \circ \sigma_f^p(\chi_A) = p - lim_{n\to\infty}\chi_A(f^n(k)) = 1$. Sea $0 < l \in \mathbb{N}$. Podemos escoger $B \subseteq \mathbb{N}$ que sea infinito de tal forma que $\chi_B|_{[0,l]} = \chi_A|_{[0,l]}$ y $B \subseteq^* \mathcal{O}_f(k) \setminus \{f^n(k) : n \in D\}$. Claramente $\{n \in \mathbb{N} : f^n(k) \in B\} \cap D$ es finito y por tanto $\pi_k(\sigma_f^p(\chi_B)) = p - lim_{n\to\infty}\chi_B(f^n(k)) = 0$. Con ésto se establece que $\pi_k \circ \sigma_f^p$ no puede ser continua en χ_A. $\square$

Teorema 2.8.6. *Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función con al menos una órbita infinita, entonces la función $\sigma_f^p : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ no es continua para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$.*

Los Teoremas 2.8.5 y 2.8.6 nos conducen al siguiente resultado.

Corollary 2.8.2. *Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función, entonces o bien todas las funciones σ_f^p's son continuas ó todas son discontinuas.*

Para determinar y distinguir los puntos proximales del sistema dinámico (Σ_2, σ_f) es necesario considerar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N}$:

Definición 2.8.1. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función. Decimos que $A \subseteq \mathbb{N}$ es f-grueso si para cada $k \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \forall i \leq k(f^n(i) \in A)\}$ es no vacío.*

Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es la traslación hacia la derecha (es decir, $f(k) = k + 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$), entonces todo conjunto f-grueso es grueso y vice versa. Es trivial ver que si $A \subseteq \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{N} \to A$ es una función arbitraria, entonces A es f-grueso. En particular, la imagen $f[\mathbb{N}]$ es f-grueso para cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Lema 2.8.3. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es f-grueso, entonces el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \forall i \leq k(f^n(i) \in A)\}$ es infinito, para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Prueba: Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y pongamos $B = \{n \in \mathbb{N} : \forall i \leq k(f^n(i) \in A)\}$. Supongamos que $n_0 \in \mathbb{N}$ satisface la condición $f^{n_0}(i) \in A$ para cada $i \leq k$. Para el número natural $k_1 = \max\{f^{n_0}(i) : i \leq k\} + 1$, por hipótesis, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_1}(i) \in A$ para todo $i \leq k_1$. En particular tenemos que $f^{n_1}(f^{n_0}(i)) = f^{n_0+n_1}(i) \in A$ para cualquier

$i \leq k$. Por lo cual, $n_0, n_0 + n_1 \in B$. Continuando la inducción podemos determinar una cantidad infinita de elementos de B. $\square$

Ahora determinaremos las parejas de puntos proximales del sistema dinámico (Σ_2, σ_f) con la ayuda de los conjuntos f-gruesos:

Teorema 2.8.7. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función y consideremos el sistema dinámico (Σ_2, σ_f). Dos puntos $x, y \in \Sigma_2$ son proximales si y solo si el conjunto $I(x, y)$*[6] *es f-grueso.*

Prueba: Necesidad. Supongamos que x y y son puntos proximales. Sea $k \in \mathbb{N}$. Por definición tenemos que $\{n \in \mathbb{N} : d(\sigma_f^n(x), \sigma_f^n(y)) < \frac{1}{2^k}\}$ es infinito. De donde podemos observar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma_f^n(x)(i) = x(f^n(i)) = y(f^n(i)) = \sigma_f^n(x)(i)$, para todo $i \leq k$. Es decir, $f^n(i) \in I(x, y)$, para todo $i \leq k$. Con ésto se prueba que $I(x, y)$ es f-grueso.

Suficiencia. Supongamos que $I(x, y)$ es f-grueso. Sea $\epsilon > 0$ y fijemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \epsilon$. Por definición, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(i) \in I(x, y)$ para todo $i \leq k$. Por consiguiente, cada uno de estos números enteros n's satisface la condición $\sigma_f^n(x)(i) = x(f^n(i)) = y(f^n(i)) = \sigma_f^n(y)(i)$, para todo $i \leq k$. De donde se sigue que $d(\sigma_f^n(x), \sigma_f^n(y)) < \frac{1}{2^k} < \epsilon$ para una cantidad infinita de números enteros n's (esta afirmación la garantiza el Lema 2.8.3). Por tanto, x y y son proximales. $\square$

El teorema anterior generaliza el Lema 8.2 del libro [Fu81].

Corollary 2.8.3. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función y consideremos el sistema dinámico (Σ_2, σ_f). Dados un subconjunto f-grueso A de $\mathbb{N}$ y $x \in \Sigma_2$, el punto $y \in \Sigma_2$ definido por*

$$y(k) = \begin{cases} x(k) & si\ k \in A \\ x(k) + 1 & si\ k \notin A. \end{cases}$$

es proximal a x y $I(x, y) = A$.

El estudio de los puntos p-proximales del sistema dinámico (Σ_2, σ_f) requiere considerar la siguiente clase de subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Definición 2.8.2. *Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función y $p \in \mathbb{N}^*$. Decimos que $A \subseteq \mathbb{N}$ es (f, p)-grueso si $\{n \in \mathbb{N} : f^n(k) \in A\} \in p$ para toda $k \in \mathbb{N}$.*

[6] Para $x, y \in \Sigma_2$, definimos $I(x, y) = \{k \in \mathbb{N} : x(k) = y(k)\}$.

Si $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$, entonces A es (f,p)-grueso para toda función $f : \mathbb{N} \to A$ y para todo ultrafiltro $p \in \mathbb{N}^*$. Si $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{N}$ y $a \in A \setminus B$, entonces la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ constante que manda a todo número natual en a satisface que A es (f,p)-grueso para todo $p \in \mathbb{N}^*$, pero B no es (f,p)-grueso para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$. Es fácil ver que todo conjunto (f,p)-grueso es f-grueso, para cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$. Posteriormente en el Corolario 2.8.6 veremos que todo conjunto f-grueso es (f,p)-grueso para algún $p \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 2.8.8. *Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función y $p \in \mathbb{N}^*$. Consideremos el sistema dinámico (Σ_2, σ_f). Dos puntos $x, y \in \Sigma_2$ son p-proximales si y solo si el conjunto $I(x,y)$ es (f,p)-grueso.*

Prueba: Necesidad. Por hipótesis, existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $\sigma_f^p(x) = \sigma_f^p(x)$. Así, por el Teorema 2.8.3, $\sigma_f^p(x) = p - \lim_{n\to\infty} x \circ f^n = p - \lim_{n\to\infty} y \circ f^n = \sigma_f^p(y)$. Aplicando el Teorema 1.3.5, se establecen las identidades

$$i_k = \pi_k(p - \lim_{n\to\infty} x \circ f^n) = p - \lim_{n\to\infty} \pi_k(x \circ f^n) = p - \lim_{n\to\infty} x(f^n(k))$$

$$= p - \lim_{n\to\infty} y(f^n(k)) = p - \lim_{n\to\infty} \pi_k(y \circ f^n) = \pi_k(p - \lim_{n\to\infty} y \circ f^n),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces, obtenemos de manera separada que

$$\{n \in \mathbb{N} : x(f^n(k)) = i_k\} \in p \text{ y } \{n \in \mathbb{N} : y(f^n(k)) = i_k\} \in p,$$

para toda $k \in \mathbb{N}$. De aquí se obtiene la condición $\{n \in \mathbb{N} : f^n(k) \in I(x,y)\} \in p$, para toda $k \in \mathbb{N}$. Esto prueba que $I(x,y)$ es (f,p)-grueso.

Suficiencia. Por suposición, se sabe que $\{n \in \mathbb{N} : f^n(k) \in I(x,y)\} \in p$, para toda $k \in \mathbb{N}$. Por lo cual, $\{n \in \mathbb{N} : x(f^n(k)) = y(f^n(k))\} \in p$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Esto implica que

$$p - \lim_{n\to\infty} x(f^n(k)) = p - \lim_{n\to\infty} y(f^n(k)),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por ésto y el Teorema 1.3.6, se obtiene que

$$\sigma_f^p(x) = p - \lim_{n\to\infty} x \circ f^n = p - \lim_{n\to\infty} y \circ f^n = \sigma_f^p(y).$$

Lo cual significa que x y y son p-proximales. $\square$

Corollary 2.8.4. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función y consideremos el sistema dinámico (Σ_2, σ_f). Supongamos que $A \subseteq \mathbb{N}$ es (f,p)-grueso, para algún $p \in \mathbb{N}^*$. Si $x, y \in \Sigma_2$ satisfacen que $I(x,y) = A$, entonces x y y son p-proximales.*

Corollary 2.8.5. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función. Consideremos el sistema dinámico (Σ_2, σ_f). Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es (f,p)-grueso para algún $p \in \mathbb{N}^*$ y $x \in \Sigma_2$ es arbitrario, el punto $y \in \Sigma_2$ definido por*

$$y(k) = \begin{cases} x(k) & si\ k \in A \\ x(k)+1 & si\ k \notin A. \end{cases}$$

es p-proximal a x y $I(x,y) = A$.

Corollary 2.8.6. *Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función y $A \subseteq \mathbb{N}$. Entonces, A es f-grueso si y solo si A es (f,p)-grueso para algún $p \in \mathbb{N}^*$.*

Prueba: Necesidad. Supongamos que A es f-grueso. Dado $x \in \Sigma_2$ consideremos el punto $y \in \Sigma_2$ definido como en el Corolario 2.8.3. Por el mismo corolario, los puntos x y y son proximales y $I(x,y) = A$. Por otro lado, el Teorema 2.3.3 nos asegura la existencia de un ultrafiltro $p \in \mathbb{N}^*$ para el cual x y y son p-proximales. En consecuencia, basandonos en el Teorema 2.8.8, A resulta ser (f,p)-grueso.

Suficiencia. Sea $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que A es (f,p)-grueso para algún $p \in \mathbb{N}^*$. Sabemos que $A_i = \{n \in \mathbb{N} : f^n(i) \in A\} \in p$, para cada $i \leq k$. Por consiguiente, si $n \in \bigcap_{i \leq k} A_i$, entonces $f^n(i) \in A$ para todo $i \leq k$. Con ésto se demuestra que A f-grueso. $\square$

Corollary 2.8.7. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función y consideremos el sistema dinámico (Σ_2, σ_f). Si $x, y \in \Sigma_2$ son proximales, entonces $I(x,y)$ es (f,p)-grueso para algún $p \in \beta(\mathbb{N})$.*

El resultado que enseguida enunciamos deja de sorprendernos después de ver el Corolario 2.3.2.

Teorema 2.8.9. *Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{N}^*$. $A \subseteq \mathbb{N}$ es (f,p)-grueso si y solo si A es $(f, p+q)$-grueso para todo $q \in \beta(\mathbb{N})$.*

Prueba: Supongamos que A es (f,p)-grueso. Fijemos $k \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por definición se cumple que $\{l \in \mathbb{N} : f^l(f^n(k)) \in A\} \in p$.

Aplicamos la función ρ_n para obtener que $\{n+l : l \in \mathbb{N}$ y $f^l(f^n(k)) = f^{n+l}(k) \in A\} \in \rho_n(p) = p+n$. Con ésto se demuestra que $B = \{m \in \mathbb{N} : f^m(k) \in A\} \in p+n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente $B \in p+q$ para todo $q \in \beta(\mathbb{N})$. Ya que k fue tomada arbitrariamente, podemos concluir que A es $(f, p+q)$-grueso para todo $q \in \beta(\mathbb{N})$. $\square$

El siguiente teorema nos dice más directamente que nuestra noción de (f,p)-grueso generaliza a los subconjunto gruesos de $\mathbb{N}$.

Teorema 2.8.10. *Consideremos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(k) = k+1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es grueso, entonces existe $p \in A^*$ tal que A es (f,p)-grueso.*

Prueba: Por ser A grueso, para cada $k < l \in \mathbb{N}$ el conjunto $A_k = \{a \in A : a+k \in A\}$ es infinito y estos conjunto satisfacen que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ siempre que $i < j \in \mathbb{N}$. Tomemos $p \in A^*$ de tal manera que $A_k \in p$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Si $k \in \mathbb{N}$, se cumple claramente que $A_k \in \{n \in \mathbb{N} : f^n(k) = k+n \in A\}$ y por ello $\{n \in \mathbb{N} : f^n(k) = k+n \in A\} \in p$. Por tanto, A es (f,p)-grueso. $\square$

Procedemos ahora a describir un ejemplo más de dos puntos proximales que no son q-proximales para algunos ultrafiltros $q \in \mathbb{N}^*$.

Ejemplo 2.8.1. *Consideremos el sistema dinámico (Σ_2, σ_f), en donde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es la función definida por $f(k) = k+1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Pongamos $a_0 = 0$ y tomemos $b_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_0 < b_0$. Enseguida elejimos dos números $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$ que satisfagan la condición $b_0 < a_1 < a_1+1 < b_1$. Inductivamente, para cada $k \in \mathbb{N}$ elejimos $a_k, b_k \in \mathbb{N}$ de tal modo que $b_{k-1} + k - 1 < a_k < a_k + k < b_k$. Definimos $A = \{a_k + i : i \leq k \in \mathbb{N}\}$. Si $i \in \mathbb{N}$, entonces $a_k \in \{n \in \mathbb{N} : f^n(i) = n+i \in A\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $i \leq k$. Fijemos $p \in \{a_k : k \in \mathbb{N}\}^*$. Tenemos entonces que A es (f,p)-grueso. Ahora definimos $B = \{b_k : k \in \mathbb{N}\}$. Si $k \in \mathbb{N}$, entonces $b_k + i \notin A$ para todo $i \in \mathbb{N}$ con $i < k$. Por consiguiente la intersección*

$$B \cap \{n \in \mathbb{N} : f^n(i) = n+i \in A\}$$

es finita, para todo $i \in \mathbb{N}$. Lo cual implica que A no puede ser (f,q)-grueso para cualquier $q \in B^*$. Sean $x, y \in \Sigma_2$ distintos tales que $I(x,y) = A$. Por el Teorema 2.8.8, obtenemos que x y y son p-proximales para todo $p \in \{a_k : k \in \mathbb{N}\}^*$ y no pueden ser q-proximales para cualquier $q \in B^*$.

Veamos algunas propiedades combinatorias de los conjuntos (f,p)-gruesos. Empezamos con dar un contexto muy particular al enunciado del Teorema 2.3.6.

Dados $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ y $A\subseteq\mathbb{N}$, definimos

$$G_{f,A}=\{p\in\mathbb{N}^*: A \text{ es } (f,p)-\text{grueso }\}.$$

Es claro que $G_{f,A}$ puede ser vacío en muchos casos.

Teorema 2.8.11. *Para cada función $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ y para cada $A\subseteq\mathbb{N}$, $G_{f,A}$ es un ideal derecho cerrado de $(\mathbb{N}^*,+)$.*

Prueba: Seleccionamos $x,y\in\Sigma_2$ de tal modo que $I(x,y)=A$. Es evidente que $G_{f,A}=I_{x,y}$ y las condiciones se cumple por el Teorema 2.3.6. $\square$

En contraste con el enunciado anterior se tiene lo siguiente.

Teorema 2.8.12. *Si $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ es una función y $p\in\beta(\mathbb{N})$, entonces,*

$$\mathcal{F}_{f,p}=\{A\subseteq\mathbb{N}: A \textit{ es } (f,p)-\textit{grueso }\}$$

es un filtro sobre $\mathbb{N}$.

Prueba: Claramente $\mathbb{N}\in\mathcal{F}_{f,p}$. Sean $A,B\in\mathcal{F}_{f,p}$. Como $\{n\in\mathbb{N}: f^n(k)\in A\}\in p$ y $\{n\in\mathbb{N}: f^n(k)\in B\}\in p$ se sigue que $\{n\in\mathbb{N}: f^n(k)\in A\cap B\}\in p$, para todo $k\in\mathbb{N}$. Por tanto, $A,B\in\mathcal{F}_{f,p}$. Claramente si $A\in\mathcal{F}_{f,p}$ y $A\subseteq B$, entonces $B\in\mathcal{F}_{f,p}$. $\square$

Damos en el siguiente teorema una caracterización de los conjuntos (f,p)-gruesos en términos de puntos p-límites:

Teorema 2.8.13. *Sean $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ una función y $A\subseteq\mathbb{N}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es (f,p)-grueso.*
2. *$p-\lim_{n\to\infty} f^n(k)\in\hat{A}$, para todo $k\in\mathbb{N}$.*

Prueba: $1\Rightarrow 2$. Por hipótesis, para cada $k\in\mathbb{N}$, se cumple que

$$\{n\in\mathbb{N}: f^n(k)\in A\}\in p\leftrightarrow p-\lim_{n\to\infty} f^n(k)\in A^*,$$

para toda $k \in \mathbb{N}$. De aquí se sigue que $p - \lim_{n\to\infty} f^n(k) \in \hat{A}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

2 $\Rightarrow$ 1. Fijemos $k \in \mathbb{N}$. De nuestra suposición sabemos que $p - \lim_{n\to\infty} f^n(k) \in \hat{A}$. Es decir, $\{n \in \mathbb{N} : f^n(k) \in A\} \in p$. Por tanto, A es (f,p)-grueso. □

Recordemos que si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función su extensión de Stone se denota por $\hat{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Corollary 2.8.8. *Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función, entonces,*

$$\hat{f}^p[\beta(\mathbb{N})] = \bigcap_{A\in\mathcal{F}_{f,p}} \hat{A},$$

para cualquier $p \in G_{f,A}$.

Prueba: Sea $p \in G_{f,A}$. Del Teorema anterior se sigue directamente la contención

$$\hat{f}^p[\beta(\mathbb{N})] \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{F}_{f,p}} \hat{A},$$

Supongamos que $q \in (\bigcap_{A\in\mathcal{F}_{f,p}} \hat{A}) \setminus \hat{f}^p[\beta(\mathbb{N})]$. Entonces, existe $B \in q$ tal que $\hat{f}^p[\beta(\mathbb{N})]$. □

Como hemos visto las propiedades combinatorias de los subconjuntos (f,p)-gruesos de $\mathbb{N}$ se basan en las órbitas de la función f. Por lo cual, daremos algunas propiedades básicas de las órbitas de una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Recordemos que $\{P_i^m : i < m\}$ es una partición de $\mathbb{N}$, para todo $1 < m \in \mathbb{N}$.

Lema 2.8.4. *Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función y $k \in \mathbb{N}$.*

1. *Si $\mathcal{O}_f(k)$ es finita, entonces exsite $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{O}_f(k) = \{f^i(k) : i < m\}$ y $f^i(k) \neq f^j(k)$ si $i < j < m$.*

2. *Si $f^n(k) = k$ para algún número $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{O}_f(k)$ es finita y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{O}_f(k) = \{k, f(k), ..., f^{m-1}(k)\}$ y $f^m(k) = k$.*

3. *Si $\mathcal{O}_f(k) = \{k, f(k), ..., f^{m-1}(k)\}$, $f^m(k) = k$ y m es el mínimo número entero positivo con esta propiedad, entonces, para cada $i < m$ se cumple que $f^i(k) = f^j(k)$ si y solo si $j \in P_i^m$. Además se cumple que $f^m(f^i(k)) = f^i(k)$ para todo $i < m$.*

Prueba: 1. Sea $m \in \mathbb{N}$ el mínimo número natural positivo tal que $\mathcal{O}_f(k) \subseteq \{k, f(k), ..., f^m(k)\}$. Supongamos que $f^i(k) = f^j(k)$ para algunos $i < j \leq m$. Entonces,

$$f^m(k) = f^{(m-j)+j}(k) = f^{m-j}(f^j(k)) = f^{m-j}(f^i(k))$$
$$= f^{(m-j)+i}(k) = f^{m-(j-i)}(k),$$

lo cual es imposible por que $m - (j - i) < m$ y por la elección de m.

2. Basta con tomar el mínimo $n \in \mathbb{N}$ para el cual $f^n(k) = k$.

3. Supongamos que $\mathcal{O}_f(k) = \{k, f(k), ..., f^{m-1}(k)\}$, $f^m(k) = k$ y m es el mínimo número entero positivo con esta propiedad. Supongamos que $f^i(k) = f^j(k)$ para $i < j < m$. Entonces, se cumple que $f^{m+1-j}(f^j(k)) = f^{m+1}(k) = k = f^{m+1-j}(f^i(k)) = f^{m+1-(j-i)}(k)$, lo cual contradice la suposición ya que $m+1-(j-i) \leq m$. Fijemos $i < m$ y supongamos que $f^i(k) = f^j(k)$ para algún $m < j \in \mathbb{N}$. Pongamos $j = ml + r$, en donde $l, r \in \mathbb{N}$ y $r < m$. Aplicando esta identidad hallamos que $f^i(k) = f^j(k) = f^{ml+r}(k) = f^r(k)$, pero por la primera parte de la prueba debemos tener que $r = i$. Por lo tanto, $j \in P_i^m$. Es claro que si $j \in P_i^m$, entonces $f^i(k) = f^j(k)$. $\square$

A una órbita que satisfaga la tercer condición del lema anterior la llamaremos *cíclica* y síempre supondremos que m es el menor número entero con dicha propiedad.

Lema 2.8.5. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función para la cual existe $k \in \mathbb{N}$ con órbita cíclica de tamaño m. Si A es (f, p)-grueso para algún $p \in \mathbb{N}^*$, entonces $\mathcal{O}_f(k) \subseteq A$.*

Prueba: Tenemos que $\mathcal{O}_f(k) = \{k, f(k), ..., f^{m-1}(k)\}$, $f^m(k) = k$ y $m \in \mathbb{N}$ es el menor número natural con esta propiedad. Elgimos $l < m$ tal que $P_l^m \in p$. Fijemos $i \in \mathbb{N}$. Por ser A un conjunto (f, p)-grueso, sabemos que $B = \{n \in \mathbb{N} : f^n(f^i(k)) \in A\} \in p$. De aquí es posible tomar un número natural $n \in P_l^m \cap B$. Como $n \in P_l^m$, $n = l + mr$ para algún $r \in \mathbb{N}$ y por ello, $f^n(f^i(k)) = f^{n+i}(k) = f^{l+mr+i}(k) = f^{l+i}(k) \in A$. Sea $j < m$. Como i es un número natural arbitrario, podemos seleccionarlo de la siguiente manera:

$$i = \begin{cases} j - l & \text{si } l \leq j \\ j - l + m & \text{si } j < l. \end{cases}$$

Esto nos garantiza que $\mathcal{O}_f(k) \subseteq A$. $\square$

Corollary 2.8.9. *Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función cuyas órbitas son finitas y $A \subseteq \mathbb{N}$. Entonces, A es (f,p)-grueso para algún $p \in \mathbb{N}^*$ si y solo si A es (f,q)-grueso para todo $q \in \mathbb{N}^*$.*

Prueba: Supongamos que A es (f,p)-grueso para algún $p \in \mathbb{N}^*$. Fijemos $k \in \mathbb{N}$. Por hipótesis y por el Lema 2.8.4, sabemos que $\mathcal{O}_f(k) = \{k, f(k), ..., f^{m-1}(k)\}$. Tomemos el menor número $i < m$ tal que $f^m(k) = f^i(k)$. De aquí podemos ver que la órbita $\mathcal{O}_f(f^i(k))$ de $f^i(k)$ es cíclica y según el Lema 2.8.5, $\mathcal{O}_f(f^i(k)) \subseteq A$. Como una consecuencia de ésto se cumple que $\mathbb{N} \setminus \{0, 1, ..., i-1\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : f^n(k) \in A\}$. De donde concluimos que A es (f,q)-grueso para todo $q \in \mathbb{N}^*$. $\square$

La prueba del siguiente resultado es obvia.

Teorema 2.8.14. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función. $A \subseteq \mathbb{N}$ es (f,p)-grueso, para todo $p \in \mathbb{N}^*$, si y solo si $\{n \in \mathbb{N} : f^n(k) \notin A\}$ es finito para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Consideremos la traslación hacia la derecha $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ que está dada por $\sigma(x)(n) = x(n+1)$, para todo $x \in \Sigma_2$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos el comportamiento de los puntos recurrentes de este sistema dinámico desde el punto de vista combinatorio:

Claramente $\chi_\emptyset$ y $\chi_\mathbb{N}$ son puntos recurrentes del sistema dinámico (Σ_2, σ). Supongamos que $\chi_A \in \Sigma_2$ es un punto recurrente, para algún subconjunto propio $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ que contenga al número 0. Ponemos $n_0 = \min\{A \setminus \{0\}\}$ y elegimos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 < n_1$ y $\chi_A(n_1 + i) = \chi_A(i)$ para todo $i \leq n_0 + 1$. Hay que observar que $n_0, n_1, n_0 + n_1 \in A$. Procediendo inductivamente podemos encontrar una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en A tal que:

1. $n_0 + ... + n_k < n_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

2. Para cada $k \in \mathbb{N}$ y para cada $i \leq n_{k-1}$ se cumple que $n_k + i \in A$ si y solo si $i \in A$.

3. $FS((n_k)_{k\in\mathbb{N}}) \subseteq A$.

Tenemos entonces que $d(\sigma^{n_k}(\chi_A), \chi_A) < \frac{1}{2^{n_{k-1}}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De aquí se obtiene que χ_A es p-recurrente para cualquier $p \in \{n_k : k \in \mathbb{N}\}^*$. Inversamente, empezemos con una sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números enteros positivos tal que $n_0 + n_1 + ... + n_k < n_{k+1}$ y $n_{k-1} + i < n_k$ siempre que

$i \leq n_{k-1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $A = FS((n_k)_{k\in\mathbb{N}})$. Supongamos que $n_k + i = n_{j_0} + ... + n_{j_m}$ en donde $i \leq n_k$, $i \notin A$ y $j_0 < j_1 < .... < j_m$. Entonces, claramente se debe cumplir que $n_k < n_{j_m}$ y por consiguiente, $n_k + i < n_{k+1} \leq n_{j_m}$, lo cual es una contradicción. Por tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$ y para cada $i \leq n_k$ se tiene que $n_k + i \in A$ si y solo si $i \in A$. De todo lo anterior podemos deducir que $d(\sigma^{n_k}(\chi_A), \chi_A) < \frac{1}{2^{n_{k-1}}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto prueba que χ_A es un punto recurrente en el sistema dinámico (Σ_2, σ).

Usaremos el conjunto de Cantor para mostrar que la p-recurrencia puede ayudar a distinguir dos puntos recurrentes de un sistema dinámico discreto. Para nuestros propósitos el siguiente lema es crucial.

Lema 2.8.6. *Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ un función, $A, B \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $p \in \mathbb{N}^*$. En el sistema dinámico (Σ_2, σ_f), las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\sigma_f^p(\chi_A) = \chi_B$.
2. $n \in B$ *si y solo si* $\{k \in \mathbb{N} : f^k(n) \in A\} \in p$.

Prueba: $1 \Rightarrow 2$. Supongamos que $\sigma_f(\chi_A) = \chi_B$. Fijemos $n \in B$. Como $\sigma_f^p(\chi_A)(n) = \chi_B(n) = 1$, se sigue que $\sigma_f^p(\chi_A) =p\text{-}\lim_{k\to\infty} \sigma_f^k(\chi_A) \in [n, 1]$ y por lo cual

$$\{k \in \mathbb{N} : \sigma_f^k(\chi_A) \in [n, 1]\} = \{k \in \mathbb{N} : \sigma_f^k(\chi_A)(n) = 1\}$$

$$= \{k \in \mathbb{N} : \chi_A(f^k(n)) = 1\} = \{k \in \mathbb{N} : f^k(n) \in A\} \in p.$$

Si $n \in \mathbb{N}$ satisface que $\{k \in \mathbb{N} : f^k(n) \in A\} \in p$, entonces tenemos que $\{k \in \mathbb{N} : \sigma_f^k(\chi_A) \in [n, 1]\} \in p$. De aquí vemos que $\sigma_f^p(\chi_A) =p\text{-}\lim_{k\to\infty} \sigma_f^k(\chi_A) \in [n, 1]$. Por tanto, $\sigma_f^p(\chi_A)(n) = \chi_B(n) = 1$. Esto prueba que $n \in B$.

$2 \Rightarrow 1$. Pongamos $\sigma_f^p(\chi_A) = \chi_C$ para algún $C \subseteq \mathbb{N}$. Por la primera parte de la prueba sabemos que $n \in C$ si y solo si $\{k \in \mathbb{N} : f^k(n) \in A\} \in p$. De esta equivalencia y nuestra suposición concluimos que $C = B$. □

Ejemplo 2.8.2. *Consideremos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = n+1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $f^k(n) = n+k$, para cada $n, k \in \mathbb{N}$. De aquí observamos que $\sigma_f^k(\chi_{2\mathbb{N}}) = \chi_{2\mathbb{N}} \circ f^k = \chi_{2\mathbb{N}}$ para todo $k \in 2\mathbb{N}$. De donde encontramos que $\sigma_f^p(\chi_{2\mathbb{N}}) = \chi_{2\mathbb{N}}$ para todo $p \in \widehat{2\mathbb{N}}$. De este modo* *se obtiene que $\chi_{2\mathbb{N}}$ es p-recurrente para todo $p \in \widehat{2\mathbb{N}}$. Ahora fijemos un ulrafiltro $q \notin \widehat{2\mathbb{N}}$ y supongamos que $\sigma_f^q(\chi_{2\mathbb{N}}) = \chi_{2\mathbb{N}}$. Del Lema 2.8.6 vemos que $n \in 2\mathbb{N}$ si y solo si $\{k \in \mathbb{N} : n + k \in 2\mathbb{N}\} \in q$. Sea $n \in 2\mathbb{N}$. Entonces, existe un número natural impar $k \in \mathbb{N}$ tal que $n + k \in 2\mathbb{N}$, lo cual es imposible. Por tanto, $\chi_{2\mathbb{N}}$ no puede ser q-recurrente para cualquier $q \notin \widehat{2\mathbb{N}}$.*

Veamos a continuación un ejemplo un poquito más general que el anterior.

Ejemplo 2.8.3. *Elejimos $A \in [\mathbb{N}]^\omega$ de tal modo $a - \max FS(\{a' : a' < a\}) \to \infty$ de manera estrictamente creciente y $1 < a' - a$, para todo $a, a' \in C$ con $a < a'$. Fijamos $B \in [\mathbb{N}]^\omega$ disjunto de $FS(A)$. Ahora enumeremos $FS(A)$ y B crecientemente como $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ y $\{b_k : k \in \mathbb{N}\}$, respectivamente. En base a todo lo anterior, definimos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como:*

$$f(x) = \begin{cases} b_0 & si \;\; x = a_0 \\ b_{j+1} & si \;\; x = b_j \;\; y \;\; 0 \leq j < a_1 - 2 \\ b_{j+1} & si \;\; x = b_j, a_i - 1 \leq j < a_{i+1} - 2 \;\; y \;\; 1 \leq i \\ a_i & si \;\; x = b_{a_i - 2} \;\; y \;\; 1 \leq i \\ b_{a_i - 1} & si \;\; x = a_i \;\; y \;\; 1 \leq i \\ x & de \;\; otro \;\; modo. \end{cases}$$

Por la manera como se definio f se puede observar que es inyectiva y por ello todas sus iteradas f^n son inyectivas, con $n \in \mathbb{N}$. Inductivamente, podemos ver que $f^{a_i}(a_0) = a_i$ y $f^{a_i}(a_j) = f^{a_i}(f^{a_j}(a_0)) = f^{a_i + a_j}(a_0) = a_i + a_j$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$ con $0 < i$. De aquí se obtiene que $FS(C) \subseteq \{k \in \mathbb{N} : f^k(a_i) \in FS(C)\}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Por definición, para toda $j \in \mathbb{N}$ existe el número natual más pequeño k_j tal que $f^{k_j}(a_0) = b_j$. Fijemos $p \in FS(A)^*$. Supongamos ahora que $n \in \mathbb{N}$ satisface que $\{k \in \mathbb{N} : f^k(n) \in FS(A)\} \in p$ y que $n = b_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Si $\sum_{t \leq l} a_{i_t} \in FS(A) \cap \{k \in \mathbb{N} : f^k(b_j) \in FS(A)\}$, entonces

$$f^{\sum_{t \leq l} a_{i_t}}(b_j) = f^{\sum_{t \leq l} a_{i_t}}(f^{k_j}(a_0)) = f^{\sum_{t \leq l} a_{i_t} + k_j}(a_0) = \sum_{s \leq m} a_{k_s},$$

para algún $\sum_{s \leq m} a_{k_s} \in FS(A)$. Entonces, tenemos que

$$f^{\sum_{t \leq l} a_{i_t} + k_j}(a_0) = f^{\sum_{s \leq m} a_{k_s}}(a_0),$$

y por tanto, $\sum_{t\leq l} a_{i_t} + k_j = \sum_{s\leq m} a_{k_s}$ *lo cual es equivalente a decir que* $k_j = \sum_{s\leq m} a_{k_s} - \sum_{t\leq l} a_{i_t} > 0$. *Eliminando términos podemos suponer que* $a_{k_s} \neq a_{i_t}$ *para todo* $s \leq m$ *y para todo* $t \leq l$. *Por ésto y nuestra suposición,* $\max\{a_{k_s} : s \leq m\} > \max\{a_{i_t} : t \leq l\}$.

$$k_j = \sum_{s\leq m} a_{k_s} - \sum_{t\leq l} a_{i_t} > \max\{a_{k_s} : s \leq m\} - \sum_{t\leq l} a_{i_t},$$

lo cual es imposible ya que estamos suponiendo que la intersección $FS(A) \cap \{k \in \mathbb{N} : f^k(b_j) \in FS(A)\}$ *es infinita. Por el Lemma 2.8.6, obtenemos que* $\sigma_f^p(\chi_{FS(A)}) = \chi_{FS(A)}$ *siempre que* $FS(A)^*$. *Por otra parte, sabemos que* $f^{a_i+1}(a_0) = f(f^{a_i}(a_0)) = f(a_i) = b_{a_i-1}$, *para todo* $i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. *Por lo cual, si* $q \in \{a_i+1 : i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}^*$, *entonces* $\{k \in \mathbb{N} : f^k(a_0) \in FS(A)\} \notin q$. *Según el Lemma 2.8.6, obtenemos que* $\sigma_f^q(\chi_{FS(A)}) \neq \chi_{FS(A)}$. *Todo ésto prueba que* $\chi_{FS(A)}$ *es p-recurrente para todo* $p \in FS(A)^*$ *y no es q-recurrente para cualquier* $q \in \{a_i + 1 : i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}^*$.

Pregunta 2.8.1. *Dados dos ultrafiltros* $p, q \in \mathbb{N}^*$, *¿ es posible encontrar un sistema dinámico que contenga un punto p-recurrente que no sea q-recurrente ?*

2.9 Acciones

Sea (X, f) un sistema dinámico con X espacio métrico compacto. Consideremos la acción $F : \beta(\mathbb{N}) \times X \to X$ definida como $F(p, x) = f^p(x)$, para todo $(p, x) \in \beta(\mathbb{N}) \times X$, y su restricción $F^* = F|_{\mathbb{N}^*\times X}$. Vale la pena remarcar que $F(p, \_) = f^p$ y $F(\_, x) = f_x$ para todo $p \in \beta(\mathbb{N})$ y para todo $x \in X$.

En el siguiente resultado daremos algunas condiciones que son equivalentes a la continuidad de todas las iteradas de la función de un sistema dinámico.

Teorema 2.9.1. *Sea* (X, f) *un sistema dinámico con* X *espacio métrico compacto. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La función* F^* *es separadamente continua*[7] *(es decir,* f^p *es continua, para todo* $p \in \mathbb{N}^*$*).*

[7] Una función $F : X \times Y \to Z$ se dice que es *separadamente continua* si las funciones $F^x = F(x, \_) : Y \to Z$ y $F_y = F(\_, y) : X \to Z$ son continuas, para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$.

2. *Existe un G_δ-conjunto denso D de $\mathbb{N}^*$ tal que la restricción $F^*|_{D\times X}$ es continua.*

3. *Existe un subconjunto denso D de $\mathbb{N}^*$ tal que $F^*|_{D\times X}$ es continua.*

Prueba: La implicación $1 \Rightarrow 2$ se sigue directamente del conocido Teorema de Namioka [N74] (se puede ver opcionalmente [Ar92, Th. III.5.5]), la implicación $2 \Rightarrow 3$ es evidente y, por último, la implicación $3 \Rightarrow 1$ es una consecuencia inmediata del Corolario 2.1.1. $\square$

De aquí en adelante supondremos que el espacio de fases del sistema dinámico en cuestión es un espacio métrico compacto. Además para evitar casos triviales supondremos que para cada par de puntos distintos $n, m \in \mathbb{N}$ existe $x \in X$ tal que $f^n(x) \neq f^m(x)$.

A continuación, nuestra meta principal es probar que la acción $F : \beta(\mathbb{N}) \times X \to X$ inducida por un sistema dinámico (X, f) es equivalente a la acción de un semigrupo metrizable. Nuestro subgrupo metrizable es el siguiente:

Dados $p, q \in \beta(\mathbb{N})$, definimos $p \sim q$ si se cumple que $f^p(x) = f^q(x)$ para todo $x \in X$.No es difícil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\beta(\mathbb{N})$. De nuestras condiciones impuestas deducimos que cada número entero $n \in \mathbb{N}$ es solo equivalente consigo mismo. Supongamos ahora que $d : X \times X \to X$ es una métrica acotada compatible con X. La función $\bar{d} : \beta(\mathbb{N}) \times \beta(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\bar{d}(p,q) = \sup_{x\in X} d(f^p(x), f^q(x)) \qquad p, q \in \beta(\mathbb{N}),$$

resulta ser una pseudométrica en $\beta(\mathbb{N})$. Claramente la pseudométrica $\bar{d}$ induce una métrica (también denotada por $\bar{d}$) en el cociente $\beta(\mathbb{N})/\sim$. La clase de equivalencia de un punto $p \in \beta(\mathbb{N})$ será por el símbolo $[p]$. Del Teorema 2.1.1 obtnemos lo siguiente:

Teorema 2.9.2. $\beta(\mathbb{N})/\sim$ *es un semigrupo con la operación $+$ definida por*

$$[\,p\,] + [\,q\,] = [\,p + q\,],$$

para cada $p, q \in \beta(\mathbb{N})$.

Una pregunta que surge naturalmente es bajo que condiciones el semigrupo $(\beta(\mathbb{N})/\sim, +)$ equipado con la topología inducida por la métrica $\bar{d}$ es un semigrupo topologógico[8]. Veamos que la equicontinuidad uniforme nos proporciona una respuesta afirmativa.

Lema 2.9.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si la familia de funciones $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente equicontinua, entonces la familia $\{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}$ es también uniformemente equicontinua.*

Prueba: Sea $\epsilon > 0$. Fijemos $\delta > 0$ de tal forma que si $x, y \in X$ satisfacen que $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{\epsilon}{3}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sean $x, y \in X$. Supongamos que $d(x, y) < \delta$ y que $p \in \mathbb{N}^*$ es arbitrario. Elejimos $n \in \mathbb{N}$ de modo que $d(f^p(x), f^n(x)) < \frac{\epsilon}{3}$ y que $d(f^p(y), f^n(y)) < \frac{\epsilon}{3}$. Obtenemos entonces que

$$d(f^p(x), f^p(y)) \leq d(f^p(x), f^n(x)) + d(f^n(x), f^n(y)) + d(f^n(x), f^p(y)) <$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Por tanto, la familia de funciones $\{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}$ es uniformemente equicontinua. □

Teorema 2.9.3. [GS07] *Si la familia $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente equicontinua, entonces $\beta(\mathbb{N})/\sim$ es un semigrupo topológico con la topología inducida por la métrica $\bar{d}$.*

Prueba: Sean $[p], [q] \in \beta(\mathbb{N})/\sim$. Por el Lema 2.9.1, la familia $\{f^t : t \in \beta(\mathbb{N})\}$ es también uniformemente continua. Fijemos $\epsilon > 0$. Entonces, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{\epsilon}{2}$ y si $x, y \in X$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^t(x), f^t(y)) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $t \in \beta(\mathbb{N})$. Supongamos que $r, s \in \beta(\mathbb{N})$ satisfacen que

$$\bar{d}(p, r) = \sup\{d(f^p(x), f^r(x)) : x \in X\} < \delta$$

y

$$\bar{d}(q, s) = \sup\{d(f^q(x), f^s(x)) : x \in X\} < \delta.$$

[8]Es decir, cuando la función $+ : \beta(\mathbb{N})/\sim \times \beta(\mathbb{N})/\sim \to \beta(\mathbb{N})/\sim$ es continua con dicha topología.

Entonces, $d(f^s(f^p(x)), f^s(f^r(x))) < \frac{\epsilon}{2}$ y $d(f^q(f^p(x)), f^s(f^p(x))) < \frac{\epsilon}{2}$, para toda $x \in X$. Así obtenemos que

$$d(f^q(f^p(x)), f^s(f^r(x))) \leq d(f^q(f^p(x)), f^s(f^p(x))) + d(f^s(f^p(x)), f^s(f^r(x)))$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para todo $x \in X$. Por lo cual,

$$\bar{d}(p+q, r+s) = \sup\{d(f^q(f^p(x)), f^s(f^r(x))) : x \in X\} \leq \epsilon.$$

Con ésto se conluye la prueba del teorema. $\square$

Para cada $p \in \beta(\mathbb{N})$, definimos $f^{[p]} : X \to X$ por $f^{[p]}(x) = f^p(x)$, para todo punto $x \in X$. La acción $F : \beta(\mathbb{N}) \times X \longrightarrow X$ induce, de manera natural, una acción $\widehat{F} : (\,\beta(\mathbb{N})/\!\sim) \times X \longrightarrow X$ definida como

$$\widehat{F}\,([\,p\,], x) = f^{[\,p\,]}(x) = f^p(x), \text{ para cada } ([\,\mathrm{p}\,], \mathrm{x}) \in (\,\beta(\mathbb{N})/\!\sim) \times \mathrm{X}\,.$$

Para estudiar esta función que acabamos de definir necesitaremos el siguiente resultado que seguramente es muy conocido, pero que hasta la fecha no hemos podido precisar alguna referencia.

Teorema 2.9.4. [GS07] *Sean $(\,X, d_1)$, $(\,Y, d_2)$ y $(\,Z, d_3)$ tres espacios métricos compactos. Si $F\colon X \times Y \to Z$ es una función separadamente continua, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *F es continua.*
2. *La familia de funciones $\{\,F^x \mid x \in X\,\}$ es uniformemente equicontinua.*
3. *La familia de funciones $\{\,F_y \mid y \in Y\,\}$ es uniformemente equicontinua.*

Prueba: Basta con establecer la equivalencia entre los incisos (1) y (2).

(1)$\Longrightarrow$(2). Consideremos el espacio métrico $(\,C(Y,Z), \rho)$ en donde $\rho(f,g) = \sup\{d_3(f(y), g(y)) : y \in Y\}$ para toda $f, g \in C(Y,Z)$. Se sabe que la continuidad de F implica que la función $h\colon X \to (\,C(Y,Z), \rho)$ definida como $h(x) = F^x$, para todo $x \in X$, es continua (para asegurarse de este hecho el lector puede consultar [Sa, Theorem 3,3]). Así, la compacidad de X implica que el conjunto $g[X] = \{ F^x \mid x \in X \}$ es también compacto. Sea $\epsilon > 0$. Entonces, podemos hallar una familia finita $\{ F^{x_1}, F^{x_2}, \ldots, F^{x_n} \}$ de tal forma que

$$\{ F^x \mid x \in X \} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(F^{x_i}, \epsilon/3)\,.$$

Como cada F^{x_i} es uniformemente continua, podemos encontrar $\delta > 0$ que satisfaga $d_3(F^{x_i}(y), F^{x_i}(y')) < \frac{\varepsilon}{3}$ siempre que $d_2(y, y') < \delta$ y $1 \leq i \leq n$. Fijemos ahora $x \in X$ y consideremos la función F^x. Si F^{x_i} satisface que $F^x \in B(F^{x_i}, \varepsilon/3)$ para algún $1 \leq i \leq n$, entonces

$$\begin{aligned} d_3(F^x(y), F^x(y')) \ &\leq d_3(F^x(y), F^{x_i}(y)) + \\ &+ d_3(F^{x_i}(y), F^{x_i}(y')) + d_3(F^{x_i}(y'), F^x(y')) \leq \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

siempre que $d_2(y, y') < \delta$. Por tanto, la familia $\{ F^x \mid x \in X \}$ resulta ser uniformemente equicontinua.

(2)$\Longrightarrow$(1) Consideremos nuevamente el espacio métrico $(C(X, Z), \rho)$. Ya que la familia de funciones $\{ F^x \mid x \in X \}$ es uniformemente continua, la función $g\colon Y \to (C(X, Z), \rho)$ dada por $g(y) = F_y$ es continua. Probaremos que la función F es continua en el punto $(x_0, y_0) \in X \times Y$. En efecto, sea $\epsilon > 0$. Como las funciones g y F_{y_0} son continuas, podemos elegir $\delta > 0$ de tal forma que

$$d_3(F(x, y), F(x, y_0)) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad d_3(F(x, y_0), F(x_0, y_0)) < \frac{\epsilon}{2}$$

siempre que $d_1(x, x_0) < \delta$ y $d_2(y, y_0) < \delta$. Es decir,

$$\begin{aligned} d_3(F(x, y), F(x_0, y_0) \ &\leq d_3(F(x, y), F(x, y_0)) + d_3(F(x, y_0), F(x_0, y_0)) \leq \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

toda vez que $d_1(x, x_0) < \delta$ y $d_2(y, y_0) < \delta$. Por tanto, F es continua en el punto $(x_0, y_0) \in X \times Y$. $\square$

La prueba del siguiente resultado se deja al lector.

Teorema 2.9.5. **[GS07]** *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Para cada punto $p \in \beta(\mathbb{N})$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. F^p *es continua en* x.

2. $F^{[p]}$ *es continua en* x.

Finalmente llegamos al resultado principal.

Teorema 2.9.6. [GS07] *Para un sistema dinámico* (X, f)*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La familia* $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ *es uniformemente equicontinua en* X.

2. $\bar{d}$ *induce la topología cociente en* $\beta(\mathbb{N})/\!\sim$ *y la acción* $F : \beta(\mathbb{N}) \times X \to X$ *es continua.*

3. *La acción* $\widehat{F} : (\beta(\mathbb{N})/\!\sim, \bar{d}) \times X \longrightarrow X$ *es continua.*

Prueba: La implicación $(3) \Longrightarrow (1)$ se sigue directamente del Teorema 2.9.4.

$(1) \Longrightarrow (2)$. Primero probarems que la función cociente $g : \beta(\mathbb{N}) \longrightarrow (\beta(\mathbb{N})/\!\sim, \bar{d})$ es continua. Efectivamente, del Lema 2.9.1 deducimos que la familia $\{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}$ es uniformemente equicontinua y por ello el Theorem 2.9.4 nos asegura que la acción $F : \beta(\mathbb{N}) \times X \to X$ es continua. Por lo cual, dada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^p(x), f^p(y)) < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $p \in \beta(\mathbb{N})$. Es evidente que la función g es continua en cualquier punto de $\mathbb{N}$. Sea $p \in \mathbb{N}^*$. Entonces, para cada punto $x \in X$ existen $A_x \in p$ y $\delta_x < \delta$ tal que si $(q, y) \in A_x^* \times B(x, \delta_x)$, entonces $d(f^p(x), f^q(y)) < \frac{\epsilon}{3}$. Como el espacio X es compacto, podemos hallar $x_0, ..., x_k \in X$ tal que $X = \bigcup_{i \leq k} B(x_i, \delta_{x_i})$. Pongamos $A = \bigcap_{i \leq k} A_{x_i}$. Se tiene entonces que $A \in p$. Fijemos $q \in A^*$ y sea $x \in X$. Tenemos entonces que $x \in B(x_j, \delta_{x_j})$ para algún $j \leq k$. Por consiguiente,

$$d(f^p(x), f^q(x)) \leq d(f^p(x), f^p(x_j)) + d(f^p(x_j), f^q(x_j)) + d(f^q(x_j), f^q(x))$$
$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Por tanto, $\bar{d}([p], [q]) \leq \epsilon$ siempre que $q \in A^*$. Esto prueba la continuidad de la función g. De aquí deducimos que $\bar{d}$ induce la topología cociente en $\beta(\mathbb{N})/\!\sim$.

$(2) \Longrightarrow (3)$. Ya que el espacio $\beta(\mathbb{N})$ es compacto, de acuerdo con el Teorema de Whitehead ([En89, Th. 3.3.17]), la función $g \times \mathrm{id}_X : \beta(\mathbb{N}) \times X \to$

$(\beta(\mathbb{N})/\sim) \times X$ resulta ser una función cociente. Como F es continua, la composición $F = \widehat{F} \circ (g \times \mathrm{id}_X)$ es continua. Por la Proposición 2.4.2 del libro [En89], se obtiene que la función $\widehat{F}$ es continua. $\square$

Concluimos esta sección con el siguiente resultado:

Corollary 2.9.1. *En cualquier sistema dinámico (X, f), la acción $F : \beta(\mathbb{N}) \times X \to X$ es continua si y solo si la acción $\widehat{F} : \beta(\mathbb{N})/\sim \times X \to X$ es continua. En ambos casos, $\beta(\mathbb{N})/\sim$ es un semigrupo topológico metrizable.*

2.10 El semigrupo de Ellis

El semigrupo de Ellis de un sistema dinánimco fué introducido por R. Ellis [E69] como una herramienta para el estudio y comprensión de los sistemas dinámicos. Actualmente el semigrupo de Ellis juega un papel fundamental en la teoría general de los sitemas dinámicos.

Definición 2.10.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto. El semigrupo de Ellis*[9] *$E(X, f)$ de (X, f) es la cerradura del conjunto de funciones $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ en el espacio producto X^X.*

Por ser X compacto y $E(X, f)$ un cerrado dentro del espacio compacto X^X, el semigrupo de Ellis resulta ser siempre un espacio compacto.

Usando p-iteradas de una función continua se puede describir el semigrupo de Ellis de la siguiente manera:

Teorema 2.10.1. *Si (X, f) es un sistema dinámico con X un espacio compacto, entonces*

$$E(X, f) = \{f^p : p \in \beta(\mathbb{N})\},$$

y $f^p \circ f^q = f^{q+p}$ para cada $p, q \in \beta(\mathbb{N})$.

Prueba: Consideremos la función $h : \mathbb{N} \to X^X$ definida por $h(n) = f^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por ser $\mathbb{N}$ un espacio discreto la función h es continua y por ello se pueden extender continuamente a una función

[9] También conocido como *semigrupo envolvente*.

$\hat{h} : \beta(\mathbf{N}) \to X^X$. Claramente se tiene $E(X, f) = \hat{h}[\beta(N)]$. Ahora si $p \in \mathbb{N}^*$, por el Teorema 1.3.5, tenemos entonces que

$$\hat{h}(p) = \hat{h}(p - lim_{n\to\infty} n) = p - lim_{n\to\infty} \hat{h}(n)) = p - lim_{n\to\infty} \hat{h}(n))$$
$$= p - lim_{n\to\infty} f^n = f^p.$$

Del Teorema 2.1.1 se sabe que $f^p \circ f^q = f^{q+p}$ para cada $p, q \in \beta(\mathbb{N})$. $\square$

Dado un sistema dinámico (X, f) con X un espacio compacto, las fibras de la función $\hat{h} : \beta(\mathbf{N}) \to X^X$ son precisamente las clases de equivalencia de $\beta(\mathbb{N})$ dadas por la relación de equivalencia $p \sim q$ si $f^p(x) = f^q(x)$ para todo $x \in X$. De aquí es posible concluir que el espacio cociente $\beta(\mathbb{N})/\sim$ y el semigrupo de Ellis $E(X, f)$ son homeomorfos e isomorfos.

El resultado que a continuación enunciamos es una consecuencia directa del Teorema 2.10.1.

Teorema 2.10.2. *Sea X un espacio compacto. Una función $g : X \to X$ pertenece a $E(X, f)$ para alguna función continua $f : X \to X$ si y solo si existe $p \in \beta(\mathbb{N})$ tal que $g(x) = f^p(x) = p - \lim_{n\to\infty} f^n(x)$ para todo $x \in X$.*

Basandonos en el teorema anterior podemos reformular un problema de la página 3 de la notas de clase [Su2] como sigue:

Pregunta 2.10.1. *¿ Es posible encontrar un epacio métrico compacto X para el cual exista una función $g \in X^X$ que no pertenezca a ningún semigrupo se Ellis de X^X ?*

A continuación, describiremos los semigrupos de Ellis de algunos sistemas dinámicos conocidos.

Ejemplo 2.10.1. *En el Ejemplo 2.1.2, tenemos que $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ es una sucesión convergente con su punto de acumulacón, y $f : X \to X$ está definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x & si \;\; x = 0 \\ \frac{1}{n+1} & si \;\; x = \frac{1}{n} \; y \; 1 \leq n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

En este caso se obtiene que $E(X)$ es una sucesión convergente con su punto límite.

Ejemplo 2.10.2. *Sea X un espacio compacto. Si $f : X \to X$ es una función continua tal que f^n es la función identidad para algún $n \in \mathbb{N}$, es entonces evidente que*

$$E(X, f) = \{identidad, f, ..., f^{n-1}\}.$$

Ejemplo 2.10.3. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y f una contracción*[10]*. De acuerdo con el Teorema del Punto Fijo de Banach [En89, 4.3.J], la función f tiene un único punto fijo $z \in X$. Sea $g : X \to X$ la función constante que envia a todo punto de X en z. El lector puede verificar sin problema alguno que $f^p = g$ para todo $p \in \mathbb{N}^*$. Por tanto, $E(X, f) = \{f^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{g\}$ es o bien finito o la compactación por un punto de $\mathbb{N}$.*

Ejemplo 2.10.4. *Consideremos la traslación hacia la derecha $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ (es decir, $\sigma(x)(n) = x(n + 1)$ para todo $x \in \Sigma_2$ y para todo $n \in \mathbb{N}$). Probaremos que $E(\Sigma_2, f)$ es homeomorfo a $\beta(\mathbb{N})$. Para ésto probaremos que la función $\hat{h} : \beta(\mathbf{N}) \to E(X, f)$ definida en la prueba del Teorema 2.10.1 es inyectiva. Ciertamente, tomamos dos puntos distintos $p, q \in \beta(\mathbb{N})$. Fijamos un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $A \in p$ y $\mathbb{N} \setminus A \in q$. Sabemos que el conjunto $U = \{x \in \Sigma_2 : x(0) = 1\}$ es abierto y cerrado en Σ_2. Observamos que $A = \{n \in \mathbb{N} : \sigma^n(\chi_A) \in U\} \in p$ y $\mathbb{N} \setminus A = \{n \in \mathbb{N} : \sigma^n(\chi_A) \notin U\} \in q$. Por lo cual, $\sigma^p(\chi_A) \neq \sigma^q(\chi_A)$ y por tanto $\hat{h}(p) \neq \hat{h}(q)$.*

Ejemplo 2.10.5. *Sea $\mathbb{S}$ el círculo unitario y sea $\alpha \in [0, 1)$. Sea $T_\alpha : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ la rotación en un ángulo α de $\mathbb{S}$ en sentido contrario a las menecillas del reloj. En el caso cuando α es racional, existe un número entero $n \in \mathbb{N}$ tal que T_α^n es la función identidad. Si n es el menor número con esta propiedad, entonces $E(\mathbf{S}, T_\alpha)$ es un grupo cíclico de órden n. Ahora elejimos un número irracional $\alpha \in [0, 1)$. En este caso, T_α tiene orden infinito. Dejamos al lector la demostración de hecho que $E(\mathbf{S}, T_\alpha)$ es el grupo ortogonal especial $SO(2, \mathbb{R})$ de todas las rotaciones de $\mathbb{S}$ el cual es a la vez isomorfo al mismo $\mathbb{S}$.*

En el siguiente teorema daremos una condición necesaria y suficiente para que el semigrupo de Ellis sea una compactación de $\mathbb{N}$.

[10] Una función entre espacios métricos $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ se dice que es una *contracción* si existe $r \in [0, 1)$ tal que $d_Y(f(x), f(y)) \leq r d_X(x, y)$ para todo $x, y \in X$.

Lema 2.10.1. *Sea (X, f) sistema dinámico con X un espacio compacto. Si f^p es un punto aislado de $E(X)$ para algún $p \in \mathbb{N}^*$, entonces existe $A \in p$ tal que $f^p = f^n$ para todo $n \in A$.*

Prueba: Consideremos la extensión de Stone $\hat{h} : \beta(\mathbf{N}) \to X^X$ dada en la prueba del Teorema 2.10.1. Supongamos que f^p es un punto aislado de $E(X)$. Por ser $\{f^p\}$ un conjunto abierto de $E(X)$, es posible hallar $A \in p$ de tal forma que $\hat{A} \subseteq \overline{\phi}^{-1}(\{f^p\}))$ y por lo cual $f^n = f^p$, para todo $n \in A$. $\Box$

Teorema 2.10.3. **[GS10]** *Sea (X, f) un sistema dinámico tal que X es compacto y $f^n \neq f^m$ para cada par de números distintos $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces, $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto discreto de $E(X)$ si y solo si $f^n \neq f^p$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y para todo $p \in \mathbb{N}^*$.*

Prueba: Necesidad. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{N}^*$. Supongamos que $f^n = f^p =p\text{-}\lim_{k\to\infty} f^k$. De donde se obtiene que f^p es un punto aislado de $E(X)$ y, por el Lema 2.10.1, podemos encontrar $A \in p$ tal que $f^p = f^n$ para todo $n \in A$. Por lo tanto, $f^n = f^m$ para cada par de elementos distintos $n, m \in A$, lo cual es imposible. Por tanto, $f^n \neq f^p$.

Suficiencia. Si f^n es un punto de acumulación del conjunto $\{f^k : k \in \mathbb{N}\}$, entonces existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^n =p\text{-}\lim_{k\to\infty} f^k = f^p$, pero ésto contradice nuestra suposición. Por consiguiente, f^n es un punto aislado $E(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto denso discreto de $E(X)$. $\Box$

Dentro de la prueba anterior vale la pena remarcar que si f^n es un punto de acumulación del conjunto $\{f^k : k \in \mathbb{N}\}$, entonces existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^n =p\text{-}\lim_{k\to\infty} f^k = f^p$.

Para evitar discusión de casos triviales de aquí en adelante supondremos que $f^n \neq f^m$ para cada par de números enteros distintos $n, m \in \mathbb{N}$. De esta suposición podemos identificar a $\mathbb{N}$ con el conjunto $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Como vimos en el Ejemplo 2.10.1, $E(X)$ es una sucesión convergente con su punto límite y X solo tiene al 0 como un punto periódico que es de hecho un punto fijo de la función f. En relación a ésto tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.10.4. [GS10] *Sea (X, f) un sistema dinámico tal que $E(X)$ sea una compactación de $\mathbb{N}$ equipado con la topología discreta. Si, $E(X)$ tiene exactamente k puntos de acumulación, para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $E(X)$ no tiene puntos periódicos de periódo mayor que k.*

Prueba: Supongamos que $E(X) = \{f^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{f^{p_i} : i \leq k\}$ en donde $\{f^{p_i} : i \leq k\}$ son los únicos puntos de acumulación de $E(X)$ y supongamos que $p_i \in \mathbb{N}^*$ para cada $i \leq k$. Sea $x \in X$ un punto periódico cuyo periódo l sea estrictamente mayor que k. Para cada $i < l$, elejimos $V_i = \mathcal{N}(f^i(x))$ de tal forma que $cl_X(V_i) \cap cl_X(V_j) = \emptyset$ siempre que $i < j < l$. Como $k < l$, podemos encontrar $j < l$ tal que $f_x^{-1}(cl_X(V_j)) \cap \{p_i : i < k\} = \emptyset$. Por ser $E(X)$ un espacio compacto, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que f^p es un punto de acumulación del conjunto $\{f^n : n \in f_x^{-1}(cl_X(V_j)) \cap \mathbb{N}\}$. Tenemos entonces que $p = p_i$ para algún $i \leq k$, y por otro lado $f^p =q\text{-}\lim_{n\to\infty} f^= f^q$ para algún $q \in f_x^{-1}(cl_X(V_j))$. Por tanto, $f^{p_i}(x) = f_x(p_i) = f^q(x) = f_x(q)$ y $p_i \in f_x^{-1}(cl_X(V_j))$, lo cual es imposible. $\square$

Pregunta 2.10.2. *Dada una compactación K de $\mathbb{N}$, ¿ es posible hallar un sistema dinámico (X, f) tal que $E(X, f)$ y K sean homeomorfos ?*

En el artículo [GMU], los autores estudiaron la metrizabilidad del grupo de Ellis de un sistema dinámico (X, f) en donde X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ es un homeomorfismo. De hecho ellos probaron que el semigrupo de Ellis $E(X, f)$ es metrizable si y solo si cada subsistema cerrado de (X, f) es casi equicontinuo[11]. Al final de su artículo afirman que esta equivalencia se cumple para cualquier sistema dinámico (X, f) en donde X es un espacio métrico compacto. A continuación daremos algunos teoremas de metrización en la dirección de los resultados principales de trabajo [GMU] (dichos resultados aparecen en [GS10]).

Consideremos primero el siguiente tipo de sistemas dinámicos.

Definición 2.10.2. *Un sistema dinámico (X, f) se llama casi periódico si la familia de funciones $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua en todo punto de X.*

[11] Decimos que $Y \subseteq X^X$ es *casi equicontinuo* si es equicontinuo en un subconjunto denso de X.

Basandonos en el Ejercicio E.1, un sistema dinámico (X, f) es casi periódico si y solo si la familia de funciones $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente equicontinua. A continuación veremos que la propiedad de ser casi periódico tiene una relación muy cercana con la metrizabilidad del semigrupo de Ellis. Para ésto necesitamos la siguiente sub-pseudométrica:

Si d es una métrica en X y $D \subseteq X$ es denso, entonces definimos la sub-pseudométrica en $E(X)$ relativa a D como

$$d_D(f^p, f^q) = \sup_{x \in D} d(f^p(x), f^q(x)) \qquad p, q \in \beta(\mathbb{N}).$$

Como X es compacto, la métrca d resulta ser acotada y por ello d_D está bien definida. Si $X = D$, es claro que $d_X = d_u$. Dado un subconjunto denso D de X, definimos $E_D(X) = \{f^p|_D : p \in \beta(\mathbb{N})\}$ y $\pi_D : E(X) \to E_D(X)$ es la proyección dada por $\pi_D(f^p) = f^p|_D$, para todo $p \in \beta(\mathbb{N})$. Si equipamos a $E_D(X)$ con la topología heredada del espacio producto X^D, entonces π_D es una función continua por ser una projección. Por lo cual, $E_D(X)$ es un espacio compacto y separable. Recordemos una noción de J. L. Kelley [K75] que necesitaremos, decimos que $D \subseteq X$ *distingue puntos de* $Y \subseteq X^X$ si siempre que tengamos dos funciones distintas $g, h \in Y$ podemos encontrar $d \in D$ tal que $g(d) \neq h(d)$. Observemos que si $D \subseteq X$ es denso y distingue puntos de $\{f^p : p \in \beta(\mathbb{N})\}$, entonces $E(X)$ y $E_D(X)$ son homeomorfos ya que, en este caso particular, la función π_D es inyectiva (ver [K75, Th. 2, p. 220]).

Teorema 2.10.5. [GS10] *Para un sistema dinámico (X, f) las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La familia $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua.*
2. *La familia $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente equicontinua.*
3. *La familia $\{f^p : n \in \beta(\mathbb{N})\}$ es equicontinua.*
4. *La familia $\{f^p : n \in \beta(\mathbb{N})\}$ es uniformemente equicontinua.*
5. *La métrica d_u induce la topología en $E(X)$.*
6. *$G : E(X) \times X \to X$ es continua.*
7. *$F : \beta(\mathbb{N}) \times X \to X$ es continua.*

8. *d_D induce la topología de $E_D(X)$, para todo subconjunto denso D de X.*

9. *Existe un subconjunto denso D of X tal que d_D induce la topología de $E_D(X)$.*

10. *La familia $\{f^p|_D : p \in \beta(\mathbb{N})\}$ es uniformemente equicontinua, para cualquier subconjunto denso D de X.*

11. *Existe un subconjunto denso D de X tal que la familia $\{f^p|_D : p \in \beta(\mathbb{N})\}$ es uniformemente equicontinua.*

Prueba: La equivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (2) se sigue directamente del Ejercicio 1 y las equivalencias (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) son consecuencia directa del Problema 1 y el Lema 2.9.1. Las implicaciones (5) $\Rightarrow$ (8), (8) $\Rightarrow$ (9) y (10) $\Rightarrow$ (11) son evidentes. La equivalencia (6) $\Leftrightarrow$ (7) se deduce del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\beta(\mathbb{N}) \times D \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\hat{h}\times Id"'] & X \\
E(X) \times D \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

(4) $\Rightarrow$ (5). Sea $V = (\bigcap_{i\leq k}[x_i, V_i]) \cap E(X)$ un subconjunto abierto básico de $E(X)$ y sea $f^p \in V$. Es posible encontrar $\epsilon > 0$ de tal manera que $B_\epsilon(f^p(x_i)) \subseteq V_i$ para cada $i \leq k$. Supongamos que $f^q \in B_\epsilon(f^p)$. Entonces, $d_u(f^p, f^q) = sup_{x\in X} d(f^p(x), f^q(x)) < \epsilon$. En consecuencia, tenemos que $d(f^p(x_i), f^q(x_i)) < \epsilon$ para cada $i \leq k$. Así, $f^q(x_i) \in B_\epsilon(f^p(x_i)) \subseteq V_i$ para cualquier $i \leq k$. Esto prueba que $B_\epsilon(f^p) \subseteq V$. Ahora fijamos $\epsilon > 0$ y $p \in \beta(\mathbb{N})$. Elejimos $\delta > 0$ de modo que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^q(x), f^q(y)) < \frac{\epsilon}{3}$, para todo $q \in \beta(\mathbb{N})$. Sea $\{x_i : i \leq k\} \subseteq X$ tal que $X = \bigcup_{i\leq k} B_\delta(x_i)$. Pongamos $U = (\bigcap_{i\leq k}[x_i, B_{\frac{\epsilon}{3}}(f^p(x_i))]) \cap E(X)$. Claramente, $f^p \in U$. Sean $f^q \in U$ y $x \in X$. Sabemos que $d(x, x_j) < \delta$ para algún $j \leq k$. Entonces,

$$d(f^p(x), f^q(x)) \leq d(f^p(x), f^p(x_j)) + d(f^p(x_j), f^q(x_j)) + d(f^q(x_j), f^q(x))$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Por tanto, $d_u(f^p, f^q) = sup_{x \in X} d(f^p(x), f^q(x)) \leq \epsilon$. Con ésto probamos que el conjunto V está contenido en la bola cerrada con centro f^p y radio ϵ. Por lo cual, d_u induce la topología de $E(X)$.

(5) $\Rightarrow$ (7). Fijamos $(f^p, x) \in E(X) \times X$ y sea $\epsilon > 0$. Elejimos $\delta > 0$ de modo que $\frac{\delta}{2} < \frac{\epsilon}{3}$. Como $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $E(X)$, podemos hallar $k \in \mathbb{N}$ que satisfaga $f^k \in B_{\frac{\delta}{4}}(f^p)$. Seleccionamos $\gamma > 0$ que sea testigo de la continuidad uniforme de f^k para el número real $\frac{\epsilon}{3}$. Sea $(f^q, y) \in B_{\frac{\delta}{4}}(f^p) \times B_\gamma(x)$. Sabemos que

$$d_u(f^q, f^k) \leq d_u(f^q, f^p) + d_u(f^p, f^k) \leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2} < \frac{\epsilon}{3}.$$

De aquí se obtiene que

$$\begin{aligned} d(f^p(x), f^q(y)) &\leq d(f^p(x), f^k(x)) + d(f^k(x), f^k(y)) + d(f^k(y), f^q(y)) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, $G : E(X) \times X \to X$ es continua.

(7) $\Rightarrow$ (1). Por hipótesis, sabemos que $E(X) \subseteq C_\pi(X, X)$. De acuerdo con el Teorema 5.5.1 de [MN], se obtiene que $E(X)$ es metrizable. Por el inciso (6) y el Teorema 2.9.4, concluimos que la familia $\{f^p : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente equicontinua en X.

(8) $\Rightarrow$ (10). Sea D un subconjunto denso de X y sea $\epsilon > 0$. Para cada $f^p \in E(X)$, sea $B^U_\epsilon(f^p|_D) = \{g \in E_D(X) : d_D(f^p|_D, g) < \epsilon\}$. Como d_D induce la topología de $E_D(X)$ y $E_D(X)$ es un espacio compacto, existe $\{f^{p_i} : i \leq l\} \subseteq E(X)$ tal que $E_D(X) = \bigcup_{i \leq l} B^u_{\frac{\epsilon}{5}}(f^{p_i}|_D)$. Por la densidad de $\{f^n|_D : n \in \mathbb{N}\}$ en $E_D(X)$, para cada $i \leq l$ es posible encontrar $n_i \in \mathbb{N}$ de tal forma que $f^{n_i}|_D \in B^u_{\frac{\epsilon}{5}}(f^{p_i}|_D)$. Sea $\delta > 0$ el testigo de la continuidad uniforme de todas las funciones f^{p_i}'s para $\frac{\epsilon}{5}$. Fijamos $q \in \beta(\mathbb{N})$. Elejimos $j \leq l$ tal que $f^q|_D \in B^U_{\frac{\epsilon}{5}}(f^{p_j}|_D)$. Supongamos que $x, y \in D$ satisface que $d(x, y) < \delta$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(f^q(x), f^q(y)) &\leq d(f^q(x), f^{p_j}(x)) + d(f^{p_j}(x), f^{n_j}(x)) \\ &+ d(f^{n_j}(x), f^{n_j}(y)) + d(f^{n_j}(y), f^{p_j}(y)) + d(f^{p_j}(y), f^q(y)) \\ &< \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, la familia $\{f^p|_D : p \in \beta(\mathbb{N})\}$ es uniformemente equicontinua.

(9) $\Rightarrow$ (11). La prueba de ésta implicación es completamente análoga a la anterior.

(11) $\Rightarrow$ (4). Supongamos que existe un subconjunto denso D de X tal que la familia $\{f^p|_D : p \in \beta(\mathbb{N})\}$ es uniformemente continua. Sea $\epsilon > 0$. Elejimos $\delta > 0$ que testifique la continuidad uniforme de la familia $\{f^p|_D : p \in \beta(\mathbb{N})\}$ para el número $\frac{\epsilon}{5}$. Sean $x, y \in X$ tales que $d(x,y) < \frac{\delta}{3}$. Fijamos dos sucesiones $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en D de tal forma que $d_n \to x$ y $e_n \to y$. Sea $p \in \beta(\mathbb{N})$. Tomamos $k, l \in \mathbb{N}$ de modo que $d(f^p(x), f^k(x)) < \frac{\epsilon}{5}$, $d(f^p(y), f^k(y) < \frac{\epsilon}{5}$, $d(f^k(x), f^k(d_l) < \frac{\epsilon}{5}$, $d(f^k(y), f^k(e_l)) < \frac{\epsilon}{5}$ y $d(f^k(d_l), f^k(e_l)) < \delta$. Entonces,

$$d(f^p(x), f^p(y)) \leq d(f^p(x), f^k(x)) + d(f^k(x), f^k(d_l))$$

$$+d(f^k(d_l), f^k(e_l)) + d(f^k(e_l), f^k(y)) + d(f^k(y), f^p(y))$$

$$< \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} = \epsilon.$$

Con ésto queda probado el inciso (4). □

Una forma general de las equivalencias (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (6) del teorema anterior, en el contexto de G-espacios uniformes, se encuentra en [GM, Cor. 5.5] (otros resultados relacionados se pueden hallar en [GM] y [GM]).

De la prueba de la implicación (7) $\Rightarrow$ (1) podemos resaltar lo siguiente:

Corollary 2.10.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Si $E(X) \subseteq C_\pi(X,X)$, entonces $E(X)$ es metrizable.*

En un contexto mucho más general, R. Ellis [E59] probó que (X, f) es débilmente casi periódico si y solo si $E(X) \subseteq C_\pi(X,X)$.

Ahora reformularemos algunos resulados del artículo [GMU]. Para ésto consideremos la siguiente métrica introducida en [GM]:

Para $x, y \in X$, definimos

$$d_\mathbb{N}(x,y) = \sup\{d(f^n(x), f^n(y)) : n \in \mathbb{N}\},$$

para cada $x, y \in X$. Claramente $d_\mathbb{N}$ es una métrica en X tal que $d(x,y) \leq d_\mathbb{N}$, $\tau_d \subseteq \tau_{d_N}$ y

$$d_\mathbb{N}(x,y) = \sup\{d(f^p(x), f^p(y)) : p \in \beta(\mathbb{N})\}.$$

La prueba del siguiente lema se le deja al lector.

Lema 2.10.2. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $x \in X$. Entonces la familia $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua en x si y solo si la función $f : (X, d) \to (X, d_{\mathbb{N}})$ es continua en x.*

Del lema anterior vemos que si la familia $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua en el punto $x \in X$, entonces las topologías τ_d y $\tau_{d_{\mathbb{N}}}$ coinciden alrededor del punto x. En efecto, sabemos que $\tau_d \subseteq \tau_{d_{\mathbb{N}}}$ y si $\epsilon > o$, por la equicontinuidad de f en x, existe $\delta > 0$ tal que si $y \in X$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De aquí se obtiene que $B_d(x, \delta) \subseteq B_{d_{\mathbb{N}}}(x, \epsilon)$.

Lema 2.10.3. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $D \subseteq X$ tal que las topologías τ_d y $\tau_{d_{\mathbb{N}}}$ coinciden en D. Si $E \subseteq D$ es τ_d-denso en D , entonces $f^p|_D = f^q|_D$ siempre que $f^p|_E = f^q|_E$, para cualesquiera $p, q \in \beta(\mathbb{N})$.*

Prueba: Supongamos que $E \subseteq D$ es τ_d-denso en D que $f^p|_E = f^q|_E$ para algunos $p, q \in \beta(\mathbb{N})$. Fijemos $x \in D$ y $\epsilon > 0$. Entonces, existe $y \in E$ tal que

$$d_{\mathbb{N}}(x, y) = \sup\{d(f^s(x), f^s(y)) : s \in \beta(\mathbb{N})\} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} d(f^p(x), f^q(x)) &\leq d(f^p(x), f^p(y)) + d(f^p(y), f^q(y)) + d(f^q(y), f^q(x)) \\ &= d(f^p(x), f^p(y)) + d(f^q(y), f^q(x)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ se seleccionó de manera arbitraria, $f^p(x) = f^q(x)$. Por tanto, $f^p|_D = f^q|_D$. $\Box$

Lema 2.10.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Si $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua en cada punto de un subconjunto $D \subseteq X$, entonces $E_D(X)$ es metrizable.*

Prueba: De acuerdo con el Lema 2.10.2, la topologías τ_d y $\tau_{d_{\mathbb{N}}}$ coinciden en cada punto de D. Como X es compacto y métrizable, D contiene un subconjunto denso numerable E. Se sigue del Lema 2.10.3 que la proyección $\pi : E_D(X) \to X^E$ es un encaje y como X^E es metrizable, obtenemos que $E_D(X)$ es metrizable. $\Box$

Enunciamos a continuación la Proposición 2.4 del artículo [GMU] que necesitaremos.

Lema 2.10.5. *Supongamos que X es un espacio de Baire, Y es métrico separable y Z es métrico compacto. Si $f : X \to C(Y, Z)$ es una función tal que para cada $z \in Z$ la función $x \mapsto f(x)(z) : X \to Z$ es continua, entonces existe un G_δ-conjunto denso D de X tal que f es continua en cada punto de D.*

Lema 2.10.6. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y sea D un G_δ-conjunto de X. Si $E_D(X)$ es metrizable, entonces existe un G_δ-conjunto D' de D tal que D' es τ_d-denso y $(D', \tau_{d_\mathbb{N}}|_{D'})$ is separable.*

Prueba: Supongamos que el espacio $E_D(X)$ es metrizable. Consideremos la función evaluación $e : D \to C_u(E_D(X), X)$. Por el Lema 2.10.5, existe un denso G_δ-conjunto D' de D tal que la función e es continua en cada punto de D'. De aquí obtenemos que la familia $\{f^p : p \in \beta(\mathbb{N})\}$ es equicontinua en cada punto de D'. Por tanto, las topologías τ_d y $\tau_{d_\mathbb{N}}$ coinciden en D'. Ya que $(D', \tau_d|'_D)$ es separable, resulta que $(D', \tau_{d_\mathbb{N}}|_{D'})$ es también separable. □

Lema 2.10.7. *Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto y $D \subseteq X$ un subconunto τ_d-denso de X. Si $(D, \tau_{d_\mathbb{N}}|_D)$ es separable, entonces $E_D(X)$ es metrizable.*

Prueba: Sea $D \subseteq X$ un subconjunto τ_d-denso de X tal que $(D, \tau_{d_\mathbb{N}}|_D)$ es separable. Sea E un subconjunto numerable $\tau_{d_\mathbb{N}}$-denso de D. Por el Lema 2.10.3, la función proyección $\pi : E_D(X) \to X^E$ es un encaje y como X^E es metrizable, obtenemos que $E_D(X)$ es metrizable. □

En el teorema que a continuación enunciaremos enlistaremos condiciones que son equivalentes a la equicontinuidad de la familia $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ en cada punto de un G_δ-conjunto denso de X. Pero para ésto necesitamos el siguiente lema cuya prueba se deja como un ejercicio al lector.

Si X y Y son dos espacios topológicos y $\mathcal{F} \subseteq Y^X$ es un subespacio, entonces la función evaluación $e : X \to Y^\mathcal{F}$ satisface que $e(x) \in C(\mathcal{F}, Y)$ para todo $x \in X$. De aquí obtenemos que si (X, f) es un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto, entonces $e[X] \subseteq C(E(X), X)$.

Lema 2.10.8. *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos compactos, $\mathcal{F} \subseteq Y^X$ y$x \in X$. Entonces, la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en x si y solo si la función evaluación $e : X \to C_u(\mathcal{F}, Y)$ es continua en x.*

Teorema 2.10.6. *Para cualquier sistema dinámico (X, f) en donde X sea un espacio métrico compacto las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La familia $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua en cada punto de un G_δ-conjunto denso de X.*

2. *La familia $\{f^p : p \in \beta(\mathbb{N})\}$ es equicontinua en cada punto de un G_δ-conjunto denso de X.*

3. *Existe un G_δ-conjunto denso D de X tal que $E_D(X)$ es metrizable.*

4. *Existe un G_δ-conjunto denso D de X tal que $G : E(X) \times D \to X$ es continua.*

5. *Existe un G_δ-conjunto denso D de X tal que $F : \beta(\mathbb{N}) \times D \to X$ es continua.*

6. *Existe un G_δ-conjunto denso D de X tal que $E_D(X) \subseteq C_\pi(D, X)$.*

7. *Existe un G_δ-conjunto denso D de X tal que $(D, \tau_{d_{\mathbb{N}}}|_D)$ es separable.*

Prueba: La implicación (4) $\Rightarrow$ (6) es evidente y la implicación (2) $\Rightarrow$ (3) es una consecuencia directa del Lema 2.10.4 y la implicación (7) $\Rightarrow$ (3) se sigue del Lema 2.10.7. La equivalencia (4) $\Leftrightarrow$ (5) se deduce del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\beta(\mathbb{N}) \times D \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\hat{h} \times Id"'] & X \\
E(X) \times D \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

(1) $\Rightarrow$ (2). Sea D un G_δ-conjunto denso de X tal que la familia $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua en cada punto de D. Fijamos $p \in \mathbb{N}^*$ y $x \in D$. Sea $\epsilon > 0$. Podemos encontrar $\delta > 0$ de tal manera que si $y \in D$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \frac{\epsilon}{3}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $y \in D$ satisface que $d(x, y) < \delta$. Seleccionamos $k \in \mathbb{N}$ de modo que $d(f^p(x), f^k(x)) < \frac{\epsilon}{3}$ y $d(f^p(y), f^k(y)) < \frac{\epsilon}{3}$. Entonces, tenemos que

$$d(f^p(x), f^p(y)) \leq d(f^p(x), f^k(x)) + d(f^k(x), f^k(y)) + d(f^k(y), f^p(y))$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que $D \subseteq X$ es un G_δ-conjunto denso de X y que $E_D(X)$ es metrizable. Consideremos la función evaluació $e : X \to C_u(E_D(X), X)$ que está definida por $e(x)(f^p) = f^p(x)$ para cada $x \in X$. Según el Lema 2.10.5, existe un G_δ-conjunto denso E de D tal que la función evaluación $e : D \to C_u(E(X), X)$ es continua en cada punto de E. Por el Lema 2.10.8, la familia $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ resulta ser equicontinua en cada punto de E y como D es un G_δ-conjunto denso de X, E es también un G_δ-conjunto de X.

(3) $\Rightarrow$ (4). Supongamos que existe un G_δ-conjunto denso D' de X tal que $E_{D'}(X)$ es metrizable. Consideremos la función $\sigma : D' \to C_u(E_{D'}(X), X)$ definida por $\sigma(d)(f^p|_{D'}) = f^p(d)$, para todo $d \in D'$. Dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, sabemos que la función $d \mapsto \sigma(d)(f^n|_{D'}) = f^n(d)$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$. En virtud del Lema 2.10.5, existe un G_δ-conjunto denso D de D' tal que la función $\sigma|_D : D \to C_u(E_{D'}(X), X)$ es continua. Veamos que la función $G : E(X) \times D \to X$ es continua. Efectivemente, para $d \in D$ y $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\sigma[B_\delta(d) \cap D] \subseteq B_\epsilon(\sigma(d))$. Fijemos $q \in \beta(\mathbb{N})$. Si $(f^p, z) \in E(X) \times (B_\delta(d) \cap D)$, entonces

$$d(f^p(z), f^q(d)) = d(\sigma(z)(f^p|_D), \sigma(d)(f^q|_D) \leq d_u(\sigma(z), \sigma(d)) < \epsilon.$$

Esto prueba la continuidad de la función $G : E(X) \times D \to X$ en el punto (f^q, d) y es claro que D es un G_δ-conjunto denso de X.

(6) $\Rightarrow$ (3). Sea D un G_δ-conjunto denso de X tal que $E_D(X) \subseteq C_\pi(D, X)$. Como D es métrico y segundo numerable, por el Ejercicio IV. 12(a) de [MN], debemos tener que $C_\pi(D, X)$ es un σ-espacio[12] y por ello $E_D(X)$ es un σ-espacio compacto. Aplicando el Teorema 9 de [NS] (ver también [En89, Problem 5.4.I]), se obtiene que $E_D(X)$ es metrizable.

[12]Se dice que un espacio es σ-espacio si tiene una network σ-*discreta*.

(3) $\Rightarrow$ (7). Supongamos que D' es un G_δ-conjunto denso de X tal que $E_{D'}(X)$ es metrizable. De acuerdo con el Lema 2.10.6, existe G_δ-conjunto denso D de D' tal que $(D, \tau_{d_{\mathbb{N}}}|_D)$ es separable. Es claro que D es también un G_δ-conjunto denso de X. $\square$

La equivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (2) del teorema anterior es una caso particular de un teorema de E. Akin, J. Auslander y K. Berg [AAB].

El semigrupo de Ellis del sistema dinámico definido en el Ejemplo 2.10.1 es evidentemente merizable. Pongamos $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Por ser D discreto, la familia de funciones $\{f^p : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua en D y D es un subconjunto abierto de X. Sabemos también que la función f^p no es continua para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$. Esto nos dice que el sistema dinámico (X, f) satisface que $E(X)$ es métrico y no cumple ninguna de las condiciones del Teorema 2.10.5.

El siguiente teorema es de E. Glasner, M. Megrelishvili y V. Uspenskij [GMU, Th. 1.2]. Para probarlo necesitamos un lema que a continuación enunciamos.

Lema 2.10.9. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Si D es un subconjunto $\tau_{d_{\mathbb{N}}}$-denso de X, entonces la función proyección $\pi : E(X) \to E_D(X)$ es un homeomorfismo.*

Proof: Sea $f^p, f^q \in E(X)$ tal que $f^p|_D = f^q|_D$. Fijemos $x \in X$ y sea $\epsilon > 0$. Tomamos $y \in D$ de tal forma que $d_{\mathbb{N}}(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces,

$$d(f^p(x), f^q(x)) \leq d(f^p(x), f^p(y)) + d(f^p(y), f^q(x)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por tanto, $f^p = f^q$. Esto prueba que π es inyectiva y como $E(X)$ y $E_D(X)$ son espacios compactos, obtenemos que la proyección π es un homeomorfismo. $\square$

Teorema 2.10.7. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Entonces, $E(X)$ es metrizable si y solo si $(X, d_{\mathbb{N}})$ es separable.*

Prueba: Necesidad. Supongamos que $(X, d_{\mathbb{N}})$ no es separable. Entonces, podemos hallar $\epsilon > 0$ y un subconjunto no numerable A de X tal que $d_{\mathbb{N}}(x, y) > \epsilon$ para cualesquiera $x, y \in A$. Ya que A es segundo numerable como subespacio de X, por el Teorema de Cantor y Bendixson (ver [En89, P.1.7.11]), podemos encontrar $M \subseteq A$ tal que M is perfecto (particularmente, sin puntos aislados) y $A \setminus M$ es numerable. Pongamos $Y = cl_X(\{f^n(a) : a \in M \text{ and } n \in \mathbb{N}\})$. Es evidente que Y es un subconjunto cerrado invariante de X y que $E(Y)$ es también metrizable. Por el Teorema 2.10.6, existe un punto $x \in Y$ para el cual la familia $\{f^n|_Y : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua. Sea V subconjunto abierto de Y que contiene a x tal que si $y \in V$, entonces $d(f^m(x), f^m(y)) < \epsilon$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Sabemos que $V \cap \{f^n(a) : a \in A \text{ and } n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. Por ello, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-n}(V) \cap A \neq \emptyset$. Elejimos $\delta > 0$ que testifique la continuidad uniforme de las funciones f, f^2,...., y f^{n-1} con respecto a ϵ. Sea U un subconjunto abierto de X con diámetro $< \delta$ tal que $U \cap f^{-n}(V) \cap M \neq \emptyset$. Como M no tiene puntos aislados, es posible encontrar dos puntos $y, z \in U \cap f^{-n}(V) \cap M \neq \emptyset$. Entonces, $d(f^i(x), f^i(y)) < \epsilon$, para cada $i < n$, y $d(f^{n+m}(y), f^{n+m}(z)) < \epsilon$, para cada $m \in \mathbb{N}$, pero ésto implica que $d_{\mathbb{N}}(x, y) < \epsilon$, lo cual es una contradicción.

Suficiencia. Sabemos que se sigue del Lema 2.10.7, pero nos gustaría dar la métrica que hace a $E(X)$ metrizable. Sea $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto numerable $\tau_{d|_{\mathbb{N}}}$-denso de X. Por el Lema 2.10.9, la proyección $\pi : E(X) \to E_D(X)$ es un homeomorfismo. Observemos que $\rho(g, h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(g(d_n), h(d_n))}{2^n}$, para cada $g, h \in X^D$, es una métrica compatible con la topología de X^D. De aquí deducimos que

$$\rho(f^p, f^q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(f^p(d_n), f^q(d_n))}{2^n},$$

para cada $p, q \in \beta(\mathbb{N})$, es una métrica en $E(X)$ compatible con su topología. $\square$

Teorema 2.10.8. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Si $E(X) \subseteq C_\pi(X, X)$, entonces existe un G_δ-conjunto denso Z de $E(X)$ tal que la topología de $E(X)$ y la topología inducida por la métrica d_u coinciden en cada punto de Z.*

Prueba: Es claro que cada abierto básico de $E(X)$ contiene una bola abierta del espacio métrico $(E(X), d_u)$. De acuerdo cn el Corolario 2.10.1, $E(X)$ es metrizable y, por nuestra suposición, la función $G : E(X) \times X \to X$ es separadamente continua. Por un teorema del artículo

[Ch83] que generaliza el resultado original de Namioka, existe un G_δ-conjunto denso Z de $E(X)$ tal que $G : E(X) \times X \to X$ es continua en cada punto de $Z \times X$. Fijemos $g \in Z$ y $\epsilon > 0$. Para cada $x \in X$ podemos encontrar $\delta_x > 0$ y una vencindad abierta V_x de g en $E(X)$ que satisfaga que $G[V_x \times B_{\delta_x}(x)] \subseteq B_{\frac{\epsilon}{2}}(g)$. Por la compacidad de X, seleccionamos $x_0, ..., x_k \in X$ de tal forma que $X = \bigcup_{i \leq k} B_{\delta_{x_i}}(x_i)$. Sea $U_g = \bigcap_{i \leq k} V_{x_i}$. Ahora fijamos $(h, x) \in U_g \times X$. Entonces, se tiene que $x \in B_{\delta_{x_i}}(x_i)$, para algún $i \leq k$, y por tanto $G((h, x)) = h(x) \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(g)$. Así se cumple que $d(g(x), h(x)) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $(h, x) \in U_g \times X$. Es decir, $d_u(g, h) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ para todo $h \in U_g$. Por consiguiente, $g \in U_g \subseteq B^{d_u}_\epsilon(g)$. Por tanto, la topología de $E(X)$ y la topología inducida por la métrica d_u coinciden en cada punto de Z. $\Box$

Corollary 2.10.2. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Si $E(X) \subseteq C_\pi(X, X)$, entonces existe un G_δ-conjunto denso de $E(X)$ que es metrizable con la sup-métrica d_u.*

Dado un espacio métrico compacto(X, d), podemos extender la métrica d_u a todo el producto X^X definiendo $d_u(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$. Por ser la métrica d acotada, d_u es está bien definida y es una métrica. Sabemos que $C_u(X, X)$ es un semigrupo topológico con la composición de funciones. Dentro de este contexto tenemos lo siguiente:

Teorema 2.10.9. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Si $f^p \in C(X, X)$ para algún $p \in \beta(\mathbb{N})$ y τ_{d_u} es la topología en $E(X)$ inducida por la sup-métrica d_u, entonces la operación de $E(X)$ es τ_{d_u}-continua en el punto (f^p, g), para cualquier $g \in E(X)$.*

Prueba: Fijemos $q \in \beta(\mathbb{N})$ y $\epsilon > 0$. Es posible hallar $\delta > 0$ que testifique la continuidad uniforme de la función f^p para $\frac{\epsilon}{2}$ y además se cumple $\delta < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $(f^s, f^t) \in B^{d_u}_\delta(f^p) \times B^{d_u}_\delta(f^q)$. Entonces, tenemos que $d(f^p(y), f^s(y)) \leq d_u(f^p, f^s) < \delta$ y $d(f^q(y), f^t(y)) \leq d_u(f^q, f^t) < \delta$, para cada $y \in X$, y por tanto

$$d(f^{q+p}(x), f^{t+s}(x)) = d(f^p(f^q(x)), f^s(f^t(x)))$$

$$\leq d(f^p(f^q(x)), f^p(f^t(x))) + d(f^p(f^t(x)), f^s(f^t(x))) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Así probamos que la operación de $E(X)$ es τ_{d_u}-continua en (f^p, f^q). $\Box$

Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Si $E(X) \subseteq C(X, X)$, por el Teorema anterior, se tiene entonces que $E(X)$ es un semigrupo topológico con la topología que heredada de espacio de funciones $C_u(X, X)$. Como consecuencia de ésto y el Teorema 2.10.5, si la familia de funciones $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua en X, entonces $E(X)$ es un semigrupo topológico.

Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Definimos $\mathcal{C} = \{cl_X \mathcal{O}_f(x) : x \in X\}$. Es evidente que $\mathcal{C}$ es una cubierta de X. Para cada $x \in X$, definimos

$$\psi_x : E(X) \to C(cl_X \mathcal{O}_f(x), X)$$

como $\psi(f^p) = f^p|_{cl_X \mathcal{O}_f(x)}$, para cada $p \in \beta(\mathbb{N})$. Sea $\tau_{\mathcal{C}}$ la topología débil en $E(X)$ que hace a cada función $\psi_x : E(X) \to C_u(cl_X \mathcal{O}_f(x), X)$ continua, para todo $x \in X$. Si τ_π es la topología original de $E(X)$, entonces $\tau_\pi \subseteq \tau_{\mathcal{C}}$. No es difícil ver que $\tau_\pi = \tau_{\mathcal{C}}$ si y solo si $C_\pi(cl_X \mathcal{O}_f(x), X) = C_u(cl_X \mathcal{O}_f(x), X)$, para todo $x \in X$. A contiuación enunciaremos condiciones que son equivalentes a la igualdad $\tau_\pi = \tau_{\mathcal{C}}$.

Teorema 2.10.10. *Para cualquier sistema dinámico (X, f) con X un espacio métrico compacto, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$E(X)$ es un semigrupo topológico.*

2. *$\tau_\pi = \tau_{\mathcal{C}}$.*

Prueba: (1) $\Rightarrow$ (2). Sabemos que $\tau_p \subsetneqq \tau_{\mathcal{C}}$. Para establecer la otra contención, consideremos las funciones $\varphi : E(X) \times E(X) \to E(X) \times cl_X \mathcal{C}_f(x)$ y $\sigma : E(X) \times cl_X \mathcal{C}_f(x) \to X$ definidas, resectivamente, como

$$\varphi(f^p, f^q) = (f^p, f^q(x)) \qquad (\text{para todo } f^p, f^q \in E(X)),$$

y

$$\sigma(f^p, y)) = f^p(y) \qquad (\text{para todo } f^p \in E(X, f),\, y \in cl_X \mathcal{C}_f(x))\,.$$

Observemos que la función φ es continua y sobre. Ya que el producto $E(X) \times E(X)$ es compacto, φ es una función cociente ([En89, Corollary 2.4.8]). Como $E(X)$ es un semigrupo topológico, la composición $\sigma \circ \varphi$ es continua y por ello la función σ es continua ([En89, Proposition 2.4.2]). Es fácil ver que la continuidad de la función σ implica la continuidad de la función $\psi_x : (E(X), \tau_\pi) \to C(cl_X\mathcal{O}_f(x), X)$ para todo $x \in X$. Por tanto, $\tau_\pi \subseteq \tau_{\mathcal{C}}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sean f^p y f^q dos elementos de $E(X, f)$, y sean $\{f^{p_\lambda}\}_{\lambda\in\delta}$, $\{f^{q_\lambda}\}_{\lambda\in\delta}$ dos redes que convergen puntualmente a f^p y f^q, respectivamente. Probarems que la red $\{f^{p_\lambda} \circ f^{q_\lambda}\}_{\lambda\in\Delta}$ converge puntualmente a $f^p \circ f^q$. Para ésto fijamos $x \in X$. Como $C_\pi(cl_X\mathcal{O}_f(x), X) = C_u(cl_X\mathcal{O}_f(x), X)$, dada $\epsilon > 0$ existe $\lambda_0 \in \Delta$ tal que

$$d(f^{p_\lambda}(y), f^p(y)) < \epsilon, \quad d(f^{q_\lambda}(y), f^q(y)) < \epsilon$$

para cada $y \in cl_X\mathcal{O}_f(x)$ y para cada $\lambda_0 \leq \lambda \in \Delta$. Adicionalmente, $f^p|_{cl_X\mathcal{O}_f(x)}$ es un límite uniforme de funciones continuas de $cl_X\mathcal{C}_f(X)$. De aquí se obtiene la continuidad de la función f^p en $cl_X\mathcal{O}_f(x)$. Así, podemos elejir λ_0 que satisfaga de manera adicional la condición

$$d(f^p(f^{q_\lambda}(x), f^p(f^q(x)) < \epsilon$$

para todo $\lambda_0 \leq \lambda \in \Delta$. Entonces,

$$d(f^{p_\lambda}(f^{q_\lambda}(x)), f^p(f^q(x))) \leq$$

$$d(f^{p_\lambda}(f^{q_\lambda}(x)), f^p(f^{q_\lambda}(x))) + d(f^p(f^{q_\lambda}(x)), f^p(f^q(x))) \leq 2\epsilon,$$

para todo $\lambda_0 \leq \lambda \in \Delta$. $\square$

El siguiente corolario nos da una condición de metrizabilidad cuando el sistema dinámico es transitivo.

Corollary 2.10.3. *Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto Si (X, f) es transitivo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$E(X, f)$ es un semigrupo topológico.*
2. *$E(X, f)$ es metrizable.*
3. *La topología de $E(X, f)$ coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre X.*

Capítulo 3

Ejercicios

E.1. Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{F} \subseteq X^X$. Probar que la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua si y solo si es uniformemente equicontinua.

E.2. Probar las siguientes afirmaciones:

1. $A \subseteq \mathbb{N}$ es sintético si y solo si existe $0 < k \in \mathbb{N}$ tal que $\{n, n+1, ..., n+k\} \cap A \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ no es sintético, entonces $\mathbb{N} \setminus A$ es grueso.
3. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ no es grueso, entonces $\mathbb{N} \setminus A$ es sintético.
4. Si $S \subseteq \mathbb{N}$ intersecta a todo subconjunto grueso de $\mathbb{N}$, probar que S tiene que ser sintético.
5. Si $G \subseteq \mathbb{N}$ intersecta a todo subconjunto sintético de $\mathbb{N}$, probar que S tiene que ser grueso.
6. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ es sintético por tramos si y solo si es la intersección de un conjunto sintético y uno grueso.

E.3. Consideremos el sistema dinámico (Σ_2, σ) en donde $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ está dada por $\sigma(x)(n) = x(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in \Sigma_2$. Si A es sintético por tramos, probar que existe $\chi_B \in cl_{\Sigma_2}(\mathcal{O}_\sigma(\chi_A))$ tal que B es sintético.

Definition. Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico y $x \in X$. El *conjunto ω-límite* de x es el conjunto

$$\omega(x) = \omega_f(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} cl_X(\{f^k(x) : n \leq k \in \mathbb{N}\}).$$

A los puntos de $\omega(x)$ se les conoce como ω-*límites* de x.

Definicón.[Ma01] Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Dados $x, y \in X$, decimos que $x \frown_f y$ si $y \in \omega(x)$. $A \subseteq X$ se dice que es $\frown_f$-*cerrado* si siempre que $x \frown_f y$ y $x \in A$ se tiene que $y \in A$.

Definición. Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Dados $x, y \in X$ y $p \in \mathbb{N}^*$, decimos que $x \frown_p y$ si $f^p(x) = y$.

E.4. Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Probar las siguientes afirmaciones:

1. $y \in \omega(x)$ si y solo si existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^p(x) = y$
2. Si $x \frown_f y$ y $y \frown_f z$, entonces $x \frown_f z$.
3. $x \frown_f y$ si y solo si existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $x \frown_p y$.
4. Si $x \frown_p y$ y $y \frown_q z$, entonces $x \frown_{p+q} z$.
5. $A \subseteq X$ es $\frown_f$-cerrado si y solo si $f^p[A] \subseteq A$ para todo $p \in \mathbb{N}^*$.
6. $\omega(x)$ es un conjunto cerrado de X y $\frown$-cerrado.

E.5. Dado un sistema dinámico (X, f) con X un espacio métrico compacto y $x \in X$, probar que $\{f^p(x)\} = \bigcap_{A \in p} cl_X(\{f^n(x) : n \in A\})$ para todo $p \in \mathbb{N}^*$.

E.6. Sea (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Probar que la órbita de $y \in cl_X(\mathcal{O}_f(x))$ es densa en $cl_X(\mathcal{O}_f(x))$ si y solo si $x \in cl_X(\mathcal{O}_f(y))$.

E.7. Sea $f : X \to X$ una función.

1. Probar que la intersección de conjuntos invariantes es invariante.
2. Probar que la unión de conjuntos invariantes es invariante.
3. Es el complemento de un conjunto invariante invariante ?
4. Si f es continua y $A \subseteq X$ es invariante, probar que $cl_X(A)$ es también invariante.

E.8. Sea (X, f) un sistema dinámico. Probar que cada uno de los siguientes conjuntos son invariantes.

1. $\mathcal{O}_f(x)$ para todo $x \in X$.

2. $\omega(x)$ para todo $x \in X$.

3. El conjunto de puntos recurrentes $R(X)$ de (X, f).

E.9. Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico.

1. Para cada $x \in X$, para cada $\epsilon > 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, probar que el conjunto $\{x \in X : d(x, f^n(x)) < \epsilon\}$ es abierto.

2. Para cada $z \in X$, para cada $\epsilon > 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, probar que el conjunto $\{x \in X : d(z, f^n(x)) < \epsilon\}$ es abierto.

3. Probar que el conjunto de puntos recurrentes de X, denotado por $R(X)$, es un G_δ-conjunto de X.

4. Para cada $\epsilon > 0$ y para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, probar que el conjunto $\{x \in X : \forall n \in A(d(x, f^n(x))) < \epsilon\}$ es un G_δ-conjunto.

Definición.[Su1] Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico y $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función. Definimos

$$R(f, \phi) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \leq n \in \mathbb{N}} \{x \in X : \phi(n) d(x, f^n(x)) < \frac{1}{m}\}.$$

E.10.[Su1] Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico.

1. Para cada función $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y y para cada $\epsilon > 0$, probar que el conjunto $\{x \in X : \phi(n) d(x, f^n(x)) < \epsilon\}$ es abierto.

2. Si $P(X)$ es el conjunto de puntos periódicos de X, probar que $P(X) = \bigcap_\phi R(f, \phi)$.

E.11. Sean (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto y $x, y \in X$. Si $f^p(x) = f^p(y)$ para todo $p \in \mathbb{N}^*$, ¿ es cierto que $f^n(x) = f^n(y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$?

E.12. Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto y sean $x_0, ..., x_r \in X$. Consideremos la función $f_{x_0,...,x_r} : \beta(\mathbb{N}) \to X^r$ definida como $f_{x_0,...,x_r}(p) = (f^p(x_0), ..., f^p(x_r))$ para todo $p \in \beta(\mathbb{N})$. Probar las siguientes afirmaciones:

1. $f_{x_0,...,x_r}$ es una función continua.

2. La imagen $f_{x,y}[\beta(\mathbb{N})]$ es un conjunto cerrado invariante dentro del sistema dinámico $(X^r, f \times ... \times f)$.

E.13. Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto. Probar que dos puntos $x, y \in X$ son proximales si y solo si

$$cl_{X\times X}(\mathcal{O}_{f\times f}(x,y)) \cap \Delta_X \neq \emptyset.$$

Definición. Un sistema dinámico (X, f) se llama *transitivo* si podemos encontrar un punto $x \in X$ cuya órbita sea un subconjunto denso de X (es decir, $cl_X(\mathcal{O}_f(x)) = X$).

E.14. Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Probar que (X, f) es transitivo si y solo si para cada par de subconjuntos abiertos no vacíos U y V de X se cumple que el conjunto $N(U, V) = \{n \in \mathbb{N} : f^n[U] \cap V \neq \emptyset\}$ es no vacío.

E.15. Si el sistema dinámico (X, f) es transitivo y X es un espacio métrico compacto, probar que el conjunto $\{x \in X : cl_X(\mathcal{O}_f(x)) = X\}$ es denso en X.

E.16. Sea (X, f) un sistema dinámico. Probar las siguientes afirmaciones:

1. $N(U, X) = \mathbb{N}$ para todo abierto no vacío U de X.

2. Si U, U', V y V' son abiertos no vacíos de X tales que $U \subseteq U'$ y $V \subseteq V'$, entonces $N(U, V) \subseteq N(U', V')$.

3. Si U, U', V y V' son abiertos no vacíos de X tales que $U \cap U' \neq \emptyset$ y $V \subseteq V' \neq \emptyset$, entonces $N(U \cap U', V \cap V') \subseteq N(U, V) \cap N(U', V')$.

4. Si U, U', V y V' son abiertos no vacíos de X, entonces

$$N(U \times U', V \times V')^1 = N(U, V) \cap N(U', V').$$

5. Si (X, f) es transitivo y $x, y \in X$, entonces $\{N(U, V) : U \in \mathcal{N}(x) \text{ y } V \in \mathcal{N}(y)\}$ es una base de filtro en $\mathbb{N}$.

E.17. Probar que un sistema dinámico (X, f) con X compacto es transitivo si y solo si podemos encontrar un punto $x \in X$ de modo que

[1] En esta parte consideramos el sitema dinámico $(X \times X, f \times f)$

para cada $y \in X$ existe $p \in \beta(\mathbb{N})$ tal que $f^p(x) = y$. Equivalentemente, la función $f_x : \beta(\mathbb{N}) \to X$ es suprayectiva.

E.18. Dado un sistema dinámico (X, f), ¿ es cierto que $N(U, V) = N(V, U)$ para todo par de abiertos no vacíos U y V de X ? ¿ Es cierta esta conmutatividad si el sistema dinámico es transitivo ?

E.19. Sea (X, f) un sistema dinámico transitivo. Probar que si N es denso en ninguna parte, entonces $f^{-1}(N)$ es también denso en ninguna parte.

Definición. Dados un sistema dinámico (X, f) y dos puntos $x, y \in X$, se dice que y es *transitivamente cercano* a x si $y \in cl_X(\mathcal{O}_f(x))$.

E.20. Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto y $x, y \in X$. Probar que y es transitivamente cercano a x si y solo si existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^p(x) = y$.

Definición. Dados un sistema dinámico (X, f) y dos puntos $x, y \in X$, decimos que y es *cercano* a x si $\forall U \in \mathcal{N}(x) \forall V \in \mathcal{N}(y) \exists n \in \mathbb{N}(f^n[U] \cap V)$.

E.21. Probar que un sistema dinámico es transitivo si todo par de puntos del espacio de fases son cercanos.

E.22. Probar que en todo sistema dinámico, dos puntos transitivamente cercanos son cercanos.

E.23. Dar un ejemplo dos puntos x y y en un sistema dinámico tales que y sea transitivamente cercano a x pero x no sea cercano a y.

E.24. Dados un sistema dinámico (X, f) y dos puntos $x, y \in X$, probar que y es cercano a x si y solo si $\{N(U, V) : U \in \mathcal{N}(x) \text{ y } V \in \mathcal{N}(y)\}$ es una base de filtro en $\mathbb{N}$.

E.25. Sean (X, f) un sistema dinámico (X, f) con X un espacio compacto y $x, y \in X$. Si existe $p \in \beta(\mathbb{N})$ y una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x = p - \lim_{n \to \infty} x_n$ y $y = p - \lim_{n \to \infty} f^n(x_n)$, probar que y es cercano a x.

E.26. Sean (X, f) un sistema dinámico (X, f) con X un espacio métrico compacto y $x, y \in X$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalntes:

1. Existe $p \in \beta(\mathbb{N})$ y una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x = p - \lim_{n \to \infty} x_n$ y $y = p - \lim_{n \to \infty} f^n(x_n)$
2. y es cercano a x.

Definición. Un sistema dinámico (X, f) se llama *débilmente mezclado* si el sistema dinámico $(X \times X, f \times f)$ es transitivo.

E.27.[Teorema de Furstenberg] Sea (X, f) un sistema dinámico en donde $f : X \to X$ es un homeomorfismo. Probar que (X, f) es débilmente mezclado si y solo si

$$\{N(U, V) : \emptyset \neq U, V \subseteq X \text{ son abiertos } \}$$

es una base de filtro en $\mathbb{N}$.

E.28. Sean (X, f) un sistema dinámico mezclado con X un espacio métrico compacto, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de X. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $X_k = \{x \in X : d(x_n, f^n(x)) < \frac{1}{k+1}\}$. Probar que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ es un conjunto denso de X.

E.29.[Su1] Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. (X, f) es débilmente mezclado.
2. Para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X, existe un G_δ-conjunto denso D de X tal que $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, f^n(x)) = 0$ para todo $x \in D$.
3. Dados dos conjunto abiertos no vacíos U y V de X, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n[U]$ corta a toda bola de radio $\geq \epsilon$ contenida en V.

E. 30. Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio compacto. Probar que X es minimal si y solo si para cada subconjunto abierto no vacío V de X existen $n_0, n_1, ..., n_l \in \mathbb{N}$ tales que $X = \bigcup_{i\leq l} f^{-n_i}(V)$.

Recordemos la Definicion 2.4.7: Sean $p \in \mathbb{N}^*$ y $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de un espacio X. Un punto $x \in X$ es un punto p-*límite* de la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si para cada $V \in \mathcal{N}(x)$, $\{n \in \mathbb{N} : V \cap S_n \neq \emptyset\} \in p$. El conjunto de puntos p-límites de una sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será denotado por $L(p, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

E.31. Dar un ejemplo de un espacio topológico X y una sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos no vacíos de X tal que $L(p, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ sea infinito para todo $p \in \mathbb{N}^*$.

E.32. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x, y \in X$. Probar que y es cercano a x si y solo si $\exists p \in \beta(\mathbb{N})\forall U \in \mathcal{N}(x)(y \in L(p, (f^n[U])_{n\in\mathbb{N}}))$.

E.33. Sea (X, f) un sistema dinámico en donde $f : X \to X$ es un homeomorfismo. Probar que (X, f) es débilmente mezclado si y solo si $\exists p \in \beta(\mathbb{N})\forall U \subseteq X(U \text{ abierto } \wedge U \neq \emptyset \to X = L(p, (f^n[U])_{n\in\mathbb{N}}))$.

Definición.[2] Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{N}$. Decimos que (X, f) es *$\mathcal{F}$-transitivo* si $N(U, V) \in \mathcal{F}$ para todo par de conjuntos abiertos no vacíos U y V de X.

Definición. Sea (X, f) un sistema dinámico.

1. Decimos que (X, f) es *mezclado* si es $\mathcal{F}_r$-transitivo.

2. Se dice que (X, f) es *transitivamente recurrente* si $N(U, V) \in [\mathbb{N}]^\omega$ para todo par de conjuntos abiertos no vacíos U y V de X.

E.34.[Su1] Sea (X, f) un sistema dinámico con X un espacio métrico compacto. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. (X, f) es mezclado.

2. Para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X y para cada una de sus subsucesiones $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, existe un G_δ-conjunto denso D de X tal que $\liminf_{k\to\infty} d(x_{n_k}, f^{n_k}(x)) = 0$ para todo $x \in D$.

E.35. Dar un ejemplo de un sistema dinámico que sea transitivo pero que no sea transitivamente recurrente.

E.36. Si (X, f) es un sistema dinámico y X no tienen puntos islados, probar que (X, f) es tansitivamente recurrente si y solo si es transitivo.

Definición. En el sistema dinámico (X, f), un punto $x \in X$ se llama *vagabundo* si existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que los conjuntos $\{f^n[V] : n \in \mathbb{N}\}$ son ajenos entre si.

E.37. Si el conjunto de puntos recurrentes del sistema dinámico (X, f) es denso, probar que (X, f) no tiene puntos vagabundos.

E.38.[simbolico]. Sea $2 \leq r \in \mathbb{N}$. Consideremos $\Sigma_r = \{0, 2, ..., r - 1\}^\mathbb{N}$ con la topología producto y la traslación $\sigma : \Sigma_r \to \Sigma_r$ que está dada por $\sigma(x)(n) = x(n+1)$ para todo $x \in \Sigma_r$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar las siguientes afirmaciones.

1. σ es continua para todo $2 \leq k \in \mathbb{N}$.

2. El sistema dinámico (Σ_r, σ) tiene r^k puntos periódicos de periódo k, para cada $k \in \mathbb{N}$.

3. Los puntos periódicos de σ forman un subconjunto denso de Σ_r.

[2]Esta definición es un caso particular de una más general del artículo [GlW06].

4. Los puntos no periódicos de σ forman un subconjunto denso de Σ_r.

E.39. Sean $A = (a_{i,j})$ una matriz de $m \times m$ con ceros y unos y supongamos que $v_1, ..., v_{m-1}$ y v_m son los vértices de una gráfica. La matriz A nos dice la ubicación y dirección de las aristas dirigidas. Es decir, si $a_{i,j} = 1$, entonces hay una arista dirigida del vértice v_i al vértice v_j, y si $a_{i,j} = 0$, entonces no hay ninguna arista del vértice v_i al vértice v_j. Por ejemplo consideremos la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso tenemos solo tres vértices v_1, v_2 y v_3. La matriz A nos dice que las aristas dirigidas van de v_1 a v_1, de v_1 a v_3, de v_2 a v_1, de v_2 a v_3, de v_3 a v_1, de v_3 a v_2 y de v_3 a v_3. Sea $A = (a_{i,j})$ una matriz de $m \times m$ con ceros y unos. Decimos que $x \in m^{\mathbb{N}}$ es *permitido* si $a_{x(i),x(i+1)} > 0$ siempre que se tenga una arista del vértice $v_{x(i)}$ al vértice $v_{x(i+1)}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Si $x \in m^{\mathbb{N}}$ no es permitido, entonces decimos que es *prohibido*. Definimos $\Sigma_A = \{x \in \Sigma_m : x \text{ es permitido } \}$. Cada elemento de Σ_A se puede ver como una treyectoria infinita atravez de las aristas dirigidas de la gráfica adyacente a la matriz A. Ahora tomemos a consideración la traslación $\sigma : \Sigma_m \to \Sigma_m$ de ejercicio anterior. Probrar las siguientes afirmaciones:

1. σ_A es un subconjunto cerrado invariante de Σ_m bajo la traslación σ.

2. El número de puntos fijos de $\sigma_A = \sigma|_{\Sigma_A}$ es igual a la traza de la matriz A.

3. El número de puntos periódicos de periódo n del sistema dinámico (Σ_A, σ_A) es igual a la traza de A^n, para cada $n \in \mathbb{N}$.

4. Si todas las entradas de alguna potencia de A son positivas, probar que los puntos periódicos del sistema dinámico (Σ_A, σ_A) forman un subconjunto denso de Σ_A. Probar que hay puntos con órbitas densas.

E.40. Probar que el recíproco del Teorema 2.7.3 también se cumple.

E.41. Sea (X, f) un sitema dinámico con X un espacio métrico compacto. Supongamos que $x \in X$ es recurrente. Probar que para toda $\epsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), x) < \epsilon\}$ contiene un IP-conjunto.

Bibliografía

[A97] E. Akin, *Recurrence in topological dynamics. Furstenberg families and Ellis actions*, The University Series in Mathematics, Plenum Press, New York (1997).

[AAB] E. Akin, J. Auslander y K. Berg, *Almost equicontinuity and the enveloping semigroup*, Topological Dynamics and Applications, Contemporary Mathematics **215** (1998), 75-81.

[Ar92] A. V. Arkhangel'skii, *Topological function spaces*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1992.

[AF94] J. Auslander y H. Furstenberg, *Product recurrence and distal points*, Trans. Amer. Math. Soc. **343** (1994), 221-232.

[B03] V. Bergelson *Minimal idepotens and ergodic ramsey theory*, Topics in dynamics and ergodic theory, London Math. Soc. Lecture Notes Ser. **310** (2003), 8- 39.

[BH90] V. Bergelson y N. Hindman *Nonmetrizable topological dynamics and Ramsey theory* , Trans. Amer. Math. Soc. **320** (1990), 293-320.

[B70] A. R. Bernstein, *A new kind of compactness for topological spaces*, Fund. Math. **66** (1970), 185-193.

[Bl93] A. Blass, *Ultrafilters: where topological dynamics = algebra = combinatorics*, Topology Proc. **18** (1993), 33-56.

[BS] M. Brin y G. Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge, United Kingdom (2002).

[Ch83] J. P. R. Christensen, *Remarks on Namioka spaces and R. E. Johnson's theorem on the norm separability of the range of certain mappings*, Math. Scand. **52** (1983), no. 1, 112-116.

[C77] Comfort, W., W., *Ultrafilters: Some old and some new results*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 417-455.

[CN74] W. W. Comfort y S. Negrepontis, *The Theory of Ultrafilters*, Springer-Verlag, Berlin (1974).

[D78] J. Dugundji, *Topology*, Allyn-Bacon, Toronto (1978).

[E59] R. Ellis, *Equicontinuity and almost periodic function*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 637-643.

[E69] R. Ellis, *Lectures on Topological Dinamics*, Benjamin, New York (1969).

[En89] R. Engelking, *General topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6, Heldermann Verlag, 1989.

[Fr08] Y. Freites, *Algunas Conexiones entre Dinámica Topológica y Teoría Combinatoria*, Tesis de Grado, Universidad Central de Venezuela, 2008.

[F67] Z. Frolík, *Sums of ultrafilters*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 87-91.

[Fu81] H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton University Press (1981).

[FW79] H. Furstenberg y B. Weiss, *Topological dynamics and combinatorial number thoery*, J. Analyse. Math. **34** (1979), 61-85.

[G] S. García-Ferreira, *Some dynamical properties of certain continuous functions of the Cantor set*, en proceso.

[GS07] S. García-Ferreira y M. Sanchis, *Ultrafilter-limit points in metric dynamical systems*, Comment. Math. Univ. Carolin. **48** (2007), 465-485.

[GS10] S. García-Ferreira y M. Sanchis, *Some remarks on the metrizability of the Ellis semigroup*, en proceso.

[GiSa] J. Ginsburg y V. Saks, *Some applications of ultrafilters to topology*, Pacific J. Math. **57** (1975), 403-418.

[Gl04] E. Glasner, *Classifying dynamical systems by their recurrrence properties*, Top. Methods Nonlinear Analysis **24** (2004), 21-40.

[GM] E. Glasner y M. Megrelishvili, *Hereditarily non-sensitive dynamical systems and linear representations*, Colloq. Math. **104** (2006), no. 2, 223-283.

[GMU] E. Glasner, M. Megrelishvili y V. Uspenskij, *On metrizable enveloping semigroups*, Israel J. Math. **164** (2008), 317-332.

[GN] E. Glasner y M. Nerurkar, *Weakly almost periodic flows*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), no. 1, 103–119.

[GlW06] E. Glasner y B. Weiss, *On the interplay between measurable and topological dynamics*, Handbook of Dynamical Systems vol. 1B, Elsevier, The Netherlands (2006), 597-648.

[HS98] N. Hindman y D. Strauss, *Algebra in the Stone-Čech Compactification*, de Gruyter Expositions in Mathematics, **27**, Walter de Gruyter and Co., Berlin (1998).

[K75] J. L. Kelley, *General topology*. Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.]. Graduate Texts in Mathematics, **27**. Springer-Verlag, New York-Berlin (1975).

[Ku78] K. Kunen, *Weak P-points in ω^**, Colloq. Math. Soc. János Bolyai on Topology **23**, 741-749, Budapest (1978).

[Ma01] A. R. D. Mathias, *Delays, recurrence and ordinals*, Proc. London Math. Soc. **82** (2001), 257-298.

[MN] R. A. McCoy y I. Ntantu, *Topological properties of spaces of continuous functions*, Lecture Notes in Mathematics no. **1315**, Springer-Verlag, Berlin (1988).

[Mi] Ch. F. Mills, *An easier proof of the Shelah P-point independence theorem*, Rapport 78, Wiskundig Seminarium, Free University of Amsterdam.

[NS] J. Nagata y F. Siwiec, *A note on nets and metrization*, Proc. Japan Acad. **44** (1968), no. 7, 623-627.

[N74] I. Namioka, *Separate continuity and joint continuity*. Pacific. J. Math. **51** (1974), 515-531.

[Nu52] K. Numakura, *On bicompact semigroups*, Math. J. Okayama Univ. **1** (1952), 99-108.

[R56] W. Rudin, *Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications*, Duke Math. J. **23** (1956), 409-419; 633.

[Sa] M. Sanchis, *Continuous functions on locally pseudocompact groups*, Topology Appl. **86** (1998), 5-23.

[Su1] T. K. Subrahmonian-Moothathu, *Quantitative views of recurrence and proximality*, manuscrito.

[Su2] T. K. Subrahmonian-Moothathu, *The algebra of topological dynamics*, classroom notes.

[W74] R. C. Walker, *The Stone-Čech Compactification*, Springer-Verlag, Berlin (1974).

[Wa53] A. D. Wallace, *A note on mobs* I, II, An. Acad. Brasil. Ci. **24** (1953), 335-336.

[Wa55] A. D. Wallace, *on the structure of topological semigroups* Bull. Amer. Math. Soc. **61** (1955), 95-112.

[W82] E. Wimmers, *The Shelah P-point independence theorem*, Israel J. Math. **43** (1982), 28-48.

Index

Index