XXIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA–VENEZUELA 2010

DINÁMICA DEL CONOCIMIENTO

Ramón Pino Pérez
Carlos Uzcátegui Aylwin

MÉRIDA, VENEZUELA, 5 AL 10 DE SEPTIEMBRE DE 2010

XXIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA-VENEZUELA 2010

Dinámica del conocimiento

Ramón Pino Pérez
Carlos Uzcátegui Aylwin

Universidad de Los Andes

pino@ula.ve, uzca@ula.ve

MÉRIDA, VENEZUELA, 5 AL 10 DE SEPTIEMBRE DE 2010

XXIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana. La XXIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Facultad de Ciencias y Departamento de Matemáticas), Asociación Matemática Venezolana.

2000 Mathematics Subject Classification: 03B42, (68T27, 68T30).

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
Rif: G20004206-0

Dinámica del Conocimiento

Ramón Pino Pérez y Carlos Uzcátegui Aylwin

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas
Preprensa e impresión: Editorial Texto
Depósito legal If66020105102083
ISBN 978-980-261-122-5
Caracas, Venezuela
2010

Prefacio

Tratar de entender y dar cuenta de cómo cambia el conocimiento es una tarea muy antigua. Data al menos desde los griegos, s. IV a.c. ¿Cómo revisar una teoría a la luz de una nueva información?, ¿cómo fusionar diferentes informaciones cuando ellas son contradictorias?, ¿cómo son nuestros razonamientos cuando llegamos a una conclusión?, ¿cómo explicamos las observaciones? son unas de las preguntas fundamentales a las que se quiere responder en esta área. Justamente, en los últimos 25 años se han hecho algunos avances y propuesto nuevos modelos del cambio del conocimiento y de los razonamientos no monótonos usando técnicas de la Lógica Matemática.

Este libro se concentrará en hacer un recuento de esa historia reciente de la dinámica del conocimiento. Tomaremos como punto de partida el año 1985, en el cual fue publicado el trabajo pionero de Alchourrón, Gärdenfors y Makinson: *On the logic of theory change: partial meet contraction and revision functions* (The Journal of Symbolic Logic, 50 (1985) 510-530).

Otro trabajo pionero y bastante acabado concerniendo los razonamientos del sentido común es el de Kraus, Lehmann y Magidor: *Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics* Artificial Intelligence, 44 (1990) 167-207.

Dos extensiones de esos trabajos surgen de manera natural. La primera es entender la lógica de la fusión del conocimiento y la segunda la lógica de las explicaciones. Exprondremos los principales resultados de estos dos últimos temas.

Organizamos este libro en cuatro capítulos. El primero lo dedicamos esencialmente al estudio de la revisión del conocimiento, al marco de Alchourrón, Gärdenfors y Makinson. El segundo capítulo lo dedicamos al estudio de la fusión del conocimiento. El tercer capítulo será dedicado al estudio de la lógica del razonamiento del sentido común. El cuarto será dedicado al estudio de la lógica de los razonamientos explicatorios.

Queremos agradecer a la Dra. Arelis Díaz por los comentarios y observaciones que hiciera sobre una primera version de los últimos dos capítulos del libro. También agradecemos al Profesor José Luis Chacón y a los licenciados Amílcar Mata y Mattia Medina por las discusiones sobre las pruebas de los dos primeros capítulos.

Índice general

Capítulo 1

Operadores de cambio de conocimiento

Uno de los problemas más viejos en la historia de la humanidad, de los que se tiene una traza escrita, es entender cómo conocemos. Ya los filósofos presocráticos se lo preguntaban. Ese viejo problema no sólo está lejos de estar resuelto sino que aún es de gran actualidad. Principalmente son dos las disciplinas que abordan ese problema. La Filosofía, por supuesto, en particular el área de la Epistemología y la Psicología, en particular la Psicología Cognitiva.

Modelos más precisos se han tornado necesarios para tratar de emular los procesos del conocimiento, especialmente en robots. Entonces, a las disciplinas ya mencionadas se les ha añadido las Ciencias de la Computación, en particular el área de la Inteligencia Artificial y la Matemática, a través de la Lógica Matemática.

En los últimos 25 años se han utilizado técnicas provenientes de la Lógica Matemática, para representar más precisamente al conocimiento y su cambio. Más precisamente, cómo cambiar una teoría a la luz de una evidencia que la contradice o cómo retirar una información de manera que efectivamente no se pueda inferir la información en cuestión. Estos procesos reciben el nombre de *revisión* y de *contracción* en la literatura, en particular en el artículo pionero de Alchourrón, Gärdenfors y Makinson [1]. Este artículo da pie a lo que hoy es conocido como el marco AGM (las iniciales de los tres autores) y que nosotros expondremos en este capítulo.

Se quiere modelizar el proceso de cambiar un estado de conocimiento (un estado epistémico) a la luz de una información que es más prioritaria (la nueva información) y obtener un nuevo estado epistémico. Si llamamos K al estado epistémico suceptible de ser cambiado por la información α, podemos llamar $K \otimes \alpha$ al nuevo estado epistémico. De modo más general, si $\mathcal{E}$ es el conjunto de los estados epistémicos e $\mathcal{I}$ es el conjunto de las informaciones, pensaremos que un tipo de cambio $\otimes$ está representado por una función

$$\otimes : \mathcal{E} \times \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{E}$$

Como es usual usaremos la notación infija $K \otimes \alpha$ en vez de $\otimes(K, \alpha)$.

En el modelo AGM, un estado epistémico corresponde a una teoría de la Lógica Proposicional, esto es un conjunto de enunciados (fórmulas) el cual es cerrado bajo consecuencia lógica. Las informaciones son fórmulas de la Lógica Proposicional.

En este marco pueden ocurrir tres situaciones epistémicas para un estado K con respecto a una información α:

1. $\alpha \in K$. En ese caso decimos que el estado acepta a α.
2. $\neg\alpha \in K$. En ese caso decimos que el estado rechaza a α.
3. $\alpha \notin K$ y $\neg\alpha \notin K$. En ese caso decimos que el estado K es indiferente sobre α.

Cuando queremos pasar de un estado epistémico, a un nuevo estado epistémico que acepte a la información α, tendremos un tipo de cambio que describiremos como la expansión y que consiste simplemente en añadir la información como veremos más adelante.

Cuando el estado epistémico rechaza a la información α y queremos pasar a un estado epistémico que acepte a α tenemos una situación de cambio que tipificaremos como la revisión.

Cuando el estado epistémico acepta la información α y queremos pasar a un estado epistémico que no acepte a α tenemos una situación de cambio que tipificaremos como la contracción.

En estas operaciones de cambio se trata de obedecer a dos grandes principios:

- El principio de *éxito* (o logro del propósito) agregar o quitar la información como será el caso en la revisión o en la contracción.

- El principio de *cambio minimal*. Intuitivamente se debe cambiar lo menos posible el viejo estado epistémico.

Otro principio importante, en el caso de la revisión es el *principio de la no contradicción*: se quiere que el estado epistémico que se obtiene sea coherente desde el punto de vista lógico, es decir una teoría no contradictoria.

En las proximas secciones veremos con más detalle los postulados que caracterizan estas operaciones de cambio.

1.1. Expansión

Los postulados que caracterizan al operador[1] de expansión $+ : \mathcal{E} \times \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{E}$ son los siguientes:

(K+1)	$K + \alpha$ es una teoría	
(K+2)	$\alpha \in K + \alpha$	**Éxito**
(K+3)	$K \subseteq K + \alpha$	**Permanencia**
(K+4)	$\alpha \in K \quad \Rightarrow \quad K + \alpha = K$	**Minimalidad**
(K+5)	$K \subseteq K' \quad \Rightarrow \quad K + \alpha \subseteq K' + \alpha$	**Monotonía**
(K+6)	$K + \alpha$ es la menor teoría que verifica (K+1)-(K+5)	**Clausura**

El primer postulado dice que el operador está bien definido. El segundo postulado asegura que efectivamente el nuevo estado epistémico contiene la nueva información. El tercer postulado nos dice que no hay pérdida de información, es decir toda la información del viejo estado epistémico se encuentra también en el nuevo estado epistémico. El cuarto postulado nos dice que en caso de que la nueva información ya esté en el estado epistémico el resultado de la expansión estará contenido el viejo estado epistémico. De hecho el tercero y el cuarto postulados juntos no dicen que en caso de el viejo estado epistémico acepte ya la información entonces la expansión no cambia al estado epistémico. El quinto postulado que el operador es monótono en la primera componente con respecto a la inclusión, es decir si un estado epistémico está contenido en otro cuando se expanden por la misma fórmula, los nuevos estados epistémicos mantienen la misma relación de inclusión. Finalmente el sexto postulado

[1] Más adelante veremos que solamente hay un operador que los satisface

impone una condición de cambio minimal. Este último postulado es fundamental para obtener la unicidad del operador como está establecido en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.1 *Un operador + es de expansión, es decir satisface* $(K+1)-(K+6)$ *si y sólo si para cualquier teoría* K *y cualquier formula* α *se tiene* $K+\alpha = Cn(K \cup \{\alpha\})$.

Demostración: Es un simple chequeo ver que el operador + definido por $K+\alpha = Cn(K \cup \{\alpha\})$ satisface los postulados K+1 a K+5 además es la menor teoría que contiene a α (obligatorio por K+2) y que contiene a K (lo cual es obligatorio por K+3). ∎

Note que no siempre $K+\alpha$ es una teoría consistente. Cuando K y α no comparten modelos se tiene que $K+\alpha$ es una teoría contradictoria, es decir todas las fórmulas del lenguaje.

Ejercicio 1.1.2 *Defina dos operadores diferentes de la expansión que satisfagan K+1 a K+5.*

1.2. Revisión

Para paliar al problema de la incorporación de una información que está en conflicto con el viejo estado epistémico, la cual, como ya hemos visto, produce una teoría contradictoria cuando se usa la expansión. Se introducen otros operadores de cambio que van a obedecer al principio de no contradicción además de los principios de éxito y de cambio minimal.

Definiremos un operador de revisión $* : \mathcal{E} \times \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{E}$ como una función que satisface los siguientes postulados:

(K∗1)	$K * \alpha$ es una teoría	
(K∗2)	$\alpha \in K * \alpha$	**Éxito**
(K∗3)	$K * \alpha \subseteq K + \alpha$	**Acotamiento**
(K∗4)	$\neg\alpha \notin K \quad \Rightarrow \quad K + \alpha \subseteq K * \alpha$	**Minimalidad**
(K∗5)	α consistente $\Rightarrow K * \alpha$ consistente	**Consistencia**
(K∗6)	$\alpha \equiv \beta \quad \Rightarrow \quad K * \alpha = K * \beta$	**Independencia de la sintaxis**

$$\textbf{(K}{*}\textbf{T)} \quad K * (\alpha \vee \beta) = \begin{cases} K * \alpha & \text{si } \neg\beta \in K * (\alpha \vee \beta) \\ K * \beta & \text{si } \neg\alpha \in K * (\alpha \vee \beta) \\ (K * \alpha) \cap (K * \beta) & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

Tricotomía

Como en el caso de la expansión el primer postulado nos dice simplemente que la función está bien definida. El segundo es el postulado de éxito, el cual garantiza que la nueva información ha sido incorporada. El tercer postulado nos impone un límite sobre la teoría resultante. Ella debe ser una teoría incluída en la expansión. El cuarto postulado dice que en caso en que la nueva información no está en conflicto con el estado epistémico, es decir que ella no sea rechazada, el resultado de la revisión debe contener a la expansión. Así, el tercero y el cuarto junto nos dicen que cuando no hay conflicto la expansión y al revisión coinciden. El quinto postulado es el postulado que obedece al principio de la no contradicción. El nuevo resultado no será contradictorio a menos que la información nueva sea inconsistente. El sexto postulado nos dice que el resultado es independiente de la la syntaxis en el sentido de que dos fórmulas lógimente equivalentes producirán el mismo resultado. El último postulado concierne el comportamiento del operador ante informaciones disyuntivas. El resultado de revisar por una disyuncion sera el resultado de revisar por una de ellas o bien la teoría que resulta de intersectar las teorías que resultan de revisar por cada fórmula de la disyunción. Los postulados de acotamiento, minimalidad y tricitomía tratan de dar cuenta del principio de cambio minimal.

LLamaremos a los postulados K∗1 a K∗6 los postulados básicos de la revisión.

El postulado de tricotomía tiene una formulación equivalente y es como usualmente se presenta a los póstulados de la revisión. A nosotros nos parece más natural el postulado de tricotomía.

Proposición 1.2.1 *Bajo los postulados básicos, el postulado K∗T es equivalente a los dos postulados siguientes:*

(K∗7) $K * (\alpha \wedge \beta) \subseteq (K * \alpha) + \beta$
(K∗8) $\neg\beta \notin K * \alpha \quad \Rightarrow \quad (K * \alpha) + \beta \subseteq K * (\alpha \wedge \beta)$

Para probar la proposición primero demostraremos dos lemas.

Lema 1.2.2 *Bajo los postulados básicos el postulado K∗7 es equivalente a*

$$(K * \alpha) \cap (K * \beta) \subseteq K * (\alpha \vee \beta) \qquad (\star)$$

Demostración: Por K∗7 tenemos $K * \alpha \subseteq K * (\alpha \vee \beta) + \alpha$ y también $K * \beta \subseteq K * (\alpha \vee \beta) + \beta$. Luego $(K * \alpha) \cap (K * \beta) \subseteq (K * (\alpha \vee \beta) + \alpha) \cap (K * (\alpha \vee \beta) + \beta)$. Ahora bien, es fácil ver (ejercicio) que

$$(K * (\alpha \vee \beta) + \alpha) \cap (K * (\alpha \vee \beta) + \beta) = K * (\alpha \vee \beta) + (\alpha \vee \beta)$$

Pero, por K∗2, $\alpha \vee \beta$ pertenece a $K * (\alpha \vee \beta)$, luego $K * (\alpha \vee \beta) + (\alpha \vee \beta) = K * (\alpha \vee \beta)$. Concluimos entonces que $(K * \alpha) \cap (K * \beta) \subseteq K * (\alpha \vee \beta)$.

Reciprocamente supongamos que se cumple $(\star)$. Note $\alpha \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg\beta)$. Entonces por $(\star)$, se tiene

$$[K * (\alpha \wedge \beta)] \cap [K * (\alpha \wedge \neg\beta)] \subseteq K * \alpha$$

Por la monotonía de la expansión se tiene

$$([K * (\alpha \wedge \beta)] \cap [K * (\alpha \wedge \neg\beta)]) + \beta \subseteq (K * \alpha) + \beta$$

Pero el miembro de la izquierda es exactamente (ejercicio) $K * (\alpha \wedge \beta)$. Así, tenemos

$$K * (\alpha \wedge \beta) \subseteq (K * \alpha) + \beta$$

es decir K∗7. ∎

Lema 1.2.3 *Bajo los postulados básicos el postulado K∗8 es equivalente a*

$$\neg\beta \notin K * (\alpha \vee \beta) \Rightarrow K * (\alpha \vee \beta) \subseteq K * \beta \qquad (\star\star)$$

Demostración: Asumamos K∗8 y supongamos que $\neg\beta \notin K * (\alpha \vee \beta)$. Entonces $(K * (\alpha \vee \beta)) + \beta \subseteq K * \beta$. En particular, $K * (\alpha \vee \beta) \subseteq K * \beta$.

Recíprocamente, suponga que se cumple $(\star\star)$. Queremos ver que K∗8 se cumple. Supongamos que $\neg\beta \notin K * \alpha$. Entonces, $K * \alpha$ es consistente con $\alpha \wedge \beta$. Pero $\alpha \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg\beta)$. Luego $K * ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg\beta))$ es consistente con $\alpha \wedge \beta$. Por $(\star\star)$, se tiene

$$K * ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg\beta)) \subseteq K * (\alpha \wedge \beta)$$

Por monotonía de la expansión se tiene

$$(K * ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg\beta))) + \beta \subseteq (K * (\alpha \wedge \beta)) + \beta$$

es decir, $(K * \alpha) + \beta \subseteq K * (\alpha \wedge \beta)$. ∎

Ahora estamos listos para probar la proposición 1.2.1.

Demostración de de la Proposición 1.2.1: Supongamos la tricotomía. Para verificar K*7, por el lema 1.2.2, basta verificar $(\star)$. Pero $(\star)$ se deduce inmediatamente de la propiedad de tricotomía.

Para verificar K*8, por el lema 1.2.3, basta verificar $(\star\star)$. Supongamos que $\neg\beta \notin K * (\alpha \vee \beta)$. Entonces por la tricotomía la dos respuestas posibles para $K * (\alpha \vee \beta)$ son $K * \beta$ o bien $(K * \alpha) \cap (K * \beta)$ y claramente en cualquier caso se tiene $K * (\alpha \vee \beta) \subset K * \beta$.

Ahora supongamos que K*7 y K*8 se cumplen. Verifiquemos que la tricotomía se cumple. Si α o β son contradictorias el resultado es trivial. Así que podemos suponer que ambas fórmulas son consistentes. Supongamos que $\neg\alpha \in K * (\alpha \vee \beta)$. Necesariamente $\beta \in K * (\alpha \vee \beta)$ y por el lema 1.2.3 $K * (\alpha \vee \beta) \subseteq K * \beta$.

Por otra parte, por el lema 1.2.2, tenemos $(K*\alpha) \cap (K*\beta) \subseteq K*(\alpha \vee \beta)$. Esto significa que $mod(K * (\alpha \vee \beta)) \subseteq mod(K * \alpha) \cup mod(K * \beta)$. Pero por la hypótesis de que $\neg\alpha \in K * (\alpha \vee \beta)$, no hay modelos de α en $K * (\alpha \vee \beta)$. en particular, $mod(K * (\alpha \vee \beta)) \cap mod(K * \alpha) = \emptyset$ y por lo tanto $mod(K * (\alpha \vee \beta)) \subseteq mod(K * \beta)$, es decir $K * \beta \subseteq K * (\alpha \vee \beta)$ lo que con la inclusión inversa ya establecida nos da $K * (\alpha \vee \beta) = K * \beta$.

Una prueba análoga muestra que si $\neg\beta \in K*(\alpha\vee\beta)$ entonces $K*(\alpha\vee\beta) = K * \alpha$.

Finalmente queda por ver que si α y β son consistentes con $K * (\alpha \vee \beta)$, necesariamente $K * (\alpha \vee \beta) = (K * \alpha) \cap (K * \beta)$. Por las hipótesis, aplicando $(\star\star)$, tenemos $K * (\alpha \vee \beta) \subseteq K * \alpha$ y $K * (\alpha \vee \beta) \subseteq K * \beta$ de donde se deduc $K * (\alpha \vee \beta) \subseteq (K * \alpha) \cap (K * \beta)$. Ahora bien, por $(\star)$ se tiene $(K * \alpha) \cap (K * \beta) \subseteq K * (\alpha \vee \beta)$. De donde se desprende la igualdad deseada. ∎

Cabe preguntarse si existen tales operadores y si en caso de existir son únicos. En realidad demostraremos un teorema de representación en la sección 1.5 que garantiza la existencia de estos operadores. El mismo teorema nos mostrará que no son únicos. Pero el lector ya puede verificar como ejercicio que el siguiente operador es de revisión.

Definición 1.2.4 *Defina el operador drástico $*_D$ de la manera siguiente*

$$K *_D \alpha = \begin{cases} K + \alpha & si\ \neg\alpha \notin K \\ & \\ Cn(\alpha) & si\ \neg\alpha \in K \end{cases}$$

Ejercicio 1.2.5 *Demuestre que $*_D$ es un operador de revisión.*

1.3. Contracción

Ahora queremos caracterizar los operadores que quitan informaciones. Los principios directores siguen siendo los de éxito y de cambio minimal. Por supuesto el principio de no contradicción continuará siendo válido pero veremos que en este contexto es muy natural.

Definiremos un operador de contracción $\dot{-} : \mathcal{E} \times \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{E}$ como una función que satisface los siguientes postulados:

(K$\dot{-}$1) $K \dot{-} \alpha$ es una teoría

(K$\dot{-}$2) $K \dot{-} \alpha \subseteq K$ **Acotamiento**

(K$\dot{-}$3) $\alpha \notin K \quad \Rightarrow \quad K \dot{-} \alpha = K$ **Economía**

(K$\dot{-}$4) $\not\vdash \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha \notin K \dot{-} \alpha$ **Éxito**

(K$\dot{-}$5) $K \subseteq (K \dot{-} \alpha) + \alpha$ **Restablecimiento**

(K$\dot{-}$6) $\alpha \equiv \beta \quad \Rightarrow \quad K \dot{-} \alpha = K \dot{-} \beta$ **Independencia de la sintaxis**

(K$\dot{-}$T) $$K \dot{-} (\alpha \wedge \beta) = \begin{cases} K \dot{-} \alpha & \text{si } \beta \in K \dot{-} (\alpha \wedge \beta) \\ & \\ K \dot{-} \beta & \text{si } \alpha \in K \dot{-} (\alpha \wedge \beta) \\ & \\ (K \dot{-} \alpha) \cap (K \dot{-} \beta) & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

Tricotomía

Como en el caso de la expansión y de la revisión el primer postulado nos dice simplemente que el operador está bien definido. El segundo es un postulado de acotamiento el resultado no puede salirse de la teoría inicial. El tercero nos dice que no hay nada que hacer cuando la inormación que quiere subtraerse no está en la teoría. El cuarto postulado es el postulado de éxito, el cual garantiza que de no ser una tautología la información será efectivamente sacada de la teoría. El quinto postulado nos dice que podemos recuperar la teoría si luego de una contracción por una información expandemos por la misma información. El sexto postulado nos dice que el resultado es independiente de la la syntaxis en el sentido de que dos fórmulas lógimente equivalentes producirán el mismo resultado. El último postulado concierne el comportamiento del operador ante informaciones conjuntivas. El resultado de contraer por una conjunción sera el resultado de contraer por una de ellas o bien la teoría que resulta de intersectar las teorías que resultan de contraer por cada fórmula de la conjunción. Los postulados de acotamiento, economía, restablecimiento y tricotomía tratan de dar cuenta del principio de cambio minimal.

LLamaremos a los postulados K$\dot{-}$1 a K$\dot{-}$6 los postulados básicos de la contracción.

El postulado de tricotomía tiene también una formulación equivalente la cual en conjunción con los postulados básicos es como usualmente se presenta a los póstulados de la contracción. A nosotros nos parece más natural el postulado de tricotomía.

Proposición 1.3.1 *Bajo los postulados básicos de contracción, el postulado $K\dot{-}T$ es equivalente a los dos postulados siguientes:*

(K$\dot{-}$7) $(K\dot{-}\alpha) \cap (K\dot{-}\beta) \subseteq K\dot{-}(\alpha \wedge \beta)$

(K$\dot{-}$8) $\alpha \notin K\dot{-}(\alpha \wedge \beta) \quad \Rightarrow \quad K\dot{-}(\alpha \wedge \beta) \subseteq K\dot{-}\alpha$

La prueba es similar a la de la proposición 1.2.1 y la dejamos como ejercicio.

Para los efectos de las secciones siguientes podemos pensar que la definición de operador de contracción es una función que satisface los postulados K$\dot{-}$1 a K$\dot{-}$8.

1.4. Identidades de Levi y Harper

En esta sección veremos que hay relaciones muy estrechas entre los operadores de revisión y loa operadores de contracción Sea $\dot{-}$ un operador de cambio. Defina un nuevo operador $*_{\dot{-}}$ de la siguiente manera:

$$K *_{\dot{-}} \alpha = (K \dot{-} \neg\alpha) + \alpha \qquad \textbf{Identidad de Levi}$$

Teorema 1.4.1 *Si $\dot{-}$ es un operador de contracción entonces el operador $*_{\dot{-}}$, definido por la identidad de Levi, es un operador de revisión.*

Sea $*$ un operador de cambio. Defina un nuevo operador $\dot{-}_*$ de la siguiente manera:

$$K \dot{-}_* \alpha = (K * \neg\alpha) \cap K \qquad \textbf{Identidad de Harper}$$

Teorema 1.4.2 *Si $*$ es un operador de revisión entonces el operador $\dot{-}_*$, definido por la identidad de Harper, es un operador de contracción.*

En realidad tenemos una dualidad más fuerte. Ella es establecida en el siguiente teorema:

Teorema 1.4.3 *Sean $*$ es un operador de revisión y $\dot{-}$ un operador de contracción. Entonces se cumple:*

1. $* = *_{\dot{-}_*}$

2. $\dot{-} = \dot{-}_{*_{\dot{-}}}$

En particular todo operador de revisión proviene de uno de contracción por la identidad de Levi y todo operador de contracción proviene de uno de revisión por la identidad de Harper.

Las pruebas de los teoremas de esta sección son dejadas como ejercicio.

1.5. Representación en el caso finito

En esta sección asumiremos que el lenguaje es finito, es decir que el número de varables proposicionales sobre el cual se construyen las fórmulas es finito.

Cuando el lenguaje proposicional es finito para cada interpretación ω hay una fórmula φ_ω que tiene como único modelo a ω. Así, uno puede identificar una teoría K con una fórmula φ_K que la codifica en el sentido siguiente:

$$Cn(\varphi_K) = K$$

Esto se debe a que el conjunto de modelos de K es finito, digamos $mod(K) = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ entonces podemos definir $\varphi_K = \bigvee_1^n \varphi_{\omega_i}$.

Vamos a definir operadores *circ* que van a capturar la idea de revisión de fórmulas por fórmulas y cuyo resultado será una fórmula, es decir $\circ$ es una función del siguiente tipo:

$$\circ : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

Como es usual, usaremos la notation infija $\varphi \circ \alpha$ en vez de $\circ(\varphi, \alpha)$.

Diremos que un tal operador es de revisión KM [23] si y solamente si satisface los siguientes postulados:

(R∘1)	$\varphi \circ \alpha \vdash \alpha$	**Éxito**
(R∘2)	$\varphi \wedge \alpha$ consistente $\Rightarrow \varphi \circ \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha$	**Economía**
(R∘3)	α consistente $\Rightarrow \varphi \circ \alpha$ consistente	**Consistencia**
(R∘4)	$\varphi_1 \equiv \varphi_2$ y $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \Rightarrow \varphi_1 \circ \alpha_1 \equiv \varphi_2 \circ \alpha_2$	**Independencia**
(R∘5)	$(\varphi \circ \alpha) \wedge \beta \vdash \varphi \circ (\alpha \wedge \beta)$	**Relacional-uno**
(R∘6)	$(\varphi \circ \alpha) \wedge \beta$ consistente $\Rightarrow \varphi \circ (\alpha \wedge \beta) \vdash (\varphi \circ \alpha) \wedge \beta$	**Relacional-dos**

En el caso finito, la definición de revisión KM es equivalente a la de AGM. Más precisamente si $\circ$ es un operador de revisión , podemos definir un operador AGM, $*_\circ$ de la manera siguiente:

Definición 1.5.1

$$K *_\circ \alpha = Cn(\varphi_K \circ \alpha)$$

donde ψ_K es una fórmula tal que $Cn(\varphi_K) = K$.

Recíprocamente si $*$ es un operador AGM, podemos definir un operador KM, $\circ_*$ de la siguiente manera:

Definición 1.5.2

$$\varphi \circ_* \alpha = \theta \quad ssi \quad Cn(\theta) = Cn(\varphi) * \alpha$$

Note que la fórmula θ puede ser escogida como la disyunción de las fórmulas completas cuyo unico modelo es un modelo de $Cn(\varphi) * \alpha$.

Las proposiciones siguientes establecen de manera precisa nuestras afirmaciones.

Proposición 1.5.3 *Si $\circ$ satisface (R$\circ$1) hasta (R$\circ$6) entonces el operador $*_\circ$ definido anteriormente es una función $*_\circ : \mathcal{T} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{T}$ que satisface (K*1)-(K*8), es decir es un operador AGM.*

Proposición 1.5.4 *Si $*$ satisface (K*1)-(K*8) entonces $\circ_*$, como se definió antes, es una función $\circ_* : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ que satisface (R$\circ$1)-(R$\circ$6), es decir es un operador de revisión KM.*

Demostración de la Proposición 1.5.3: En esta demostración tomaremos φ_K tal que $Cn(\varphi_K) = K$.

El postulado (K*1) se deduce directamente de la definición de $*_\circ$.

Verifiquemos el postulado (K*2), es decir $\alpha \in K *_\circ \alpha$. Tenemos por (R$\circ$1) que $\alpha \in Cn(\varphi_K \circ \alpha)$ y nuevamente la definición nos da el resultado.

Verifiquemos (K*3), es decir $K * \alpha \subseteq K + \alpha$. Por (R$\circ$2) tenemos que $\varphi_K \circ \alpha \in Cn(\varphi_K \wedge \alpha)$, luego $Cn(\varphi_K \circ \alpha) \subseteq Cn(\varphi_K \wedge \alpha)$, bastaría ver entonces que $Cn(\varphi_K \wedge \alpha) = K + \alpha$ para satisfacer (K*3). Sabemos que

$$\begin{array}{rcl} mod(Cn(\varphi_K \wedge \alpha)) & = & mod(\varphi_K \wedge \alpha) \\ & = & mod(\varphi_K) \cap mod(\alpha) \\ & = & mod(Cn(\varphi_K)) \cap mod(\alpha) \\ & = & mod(Cn(\varphi_K) \cup \{\alpha\}) \\ & = & mod(Cn(Cn(\varphi_K) \cup \{\alpha\})) \\ & = & mod(Cn(K \cup \{\alpha\})) \\ & = & mod(K + \alpha) \end{array}$$

por lo tanto, $Cn(\varphi_K \wedge \alpha) = K + \alpha$ lo que completa la prueba de (K*3).

Verifiquemos (K*4). Supongamos que $\neg\alpha \notin K$. Queremos ver que $K + \alpha \subseteq K *_\circ \alpha$. De la hipótesis $\neg\alpha \notin K$, se deduce facilmente que $\varphi_K \wedge \alpha$ es consistente. Entonces, por (R∘2), $Cn(\varphi_K \wedge \alpha) \subseteq Cn(\varphi_K \circ \alpha)$, pero por lo hecho anteriormente sabemos que $Cn(\varphi_K \wedge \alpha) = K + \alpha$ luego $K + \alpha \subseteq Cn((\varphi_K \circ \alpha)) = K *_\circ \alpha$, como queríamos.

Verifiquemos (K*5). Supongamos $K *_\circ \alpha$ es inconsistente, es decir $Cn(\varphi_K \circ \alpha)$ es inconsistente. Entonces $\varphi_K \circ \alpha$ es inconsistente y, por (R∘3), α es inconsistente.

Para (K*6) consideremos α y β fórmulas equivalentes, queremos ver que $K *_\circ \alpha = K *_\circ \beta$. Por (R∘4) tenemos que $\varphi_K \circ \alpha \equiv \varphi_K \circ \beta$, así $Cn(\varphi_K \circ \alpha) = Cn(\varphi_K \circ \beta)$ como queríamos.

Para ver que (K*7) se verifica debemos probar que $Cn(\varphi_K \circ (\alpha \wedge \beta)) \subseteq Cn(\varphi_K \circ \alpha) + \beta$. Usando (R∘5) tenemos que $Cn((\varphi_K \circ (\alpha \wedge \beta)) \subseteq Cn((\varphi_K \circ \alpha) \wedge \beta)$. Entonces bastaría ver que $Cn((\varphi_K \circ \alpha) \wedge \beta) = Cn(\varphi_K \circ \alpha) + \beta$. Sabemos que

$$\begin{aligned} mod(Cn((\varphi_K \circ \alpha) \wedge \beta)) &= mod((\varphi_K \circ \alpha) \wedge \beta) \\ &= mod(\varphi_K \circ \alpha) \cap mod(\beta) \\ &= mod(Cn(\varphi_K \circ \alpha)) \cap mod(\beta) \\ &= mod(Cn(\varphi_K \circ \alpha) \cup \{\beta\}) \\ &= mod(Cn(Cn(\varphi_K \circ \alpha) \cup \{\beta\})) \\ &= mod(Cn(\varphi_K \circ \alpha) + \beta) \end{aligned}$$

luego $Cn((\varphi_K \circ \alpha) \wedge \beta) = K *_\circ \alpha + \beta$, como queríamos.

Finalmente verifiquemos (K*8). Para esto, supongamos que $K *_\circ \alpha$ es consistente con β, y veamos que $(K *_\circ \alpha) + \beta \subseteq K *_\circ (\alpha \wedge \beta)$. Nuestra hipótesis y (R∘6) nos dicen que $Cn((\varphi_K \circ \alpha) \wedge \beta) \subseteq Cn(\varphi_K \circ (\alpha \wedge \beta))$, pero por lo visto anteriormente, $Cn((\varphi_K \circ \alpha) \wedge \beta) = K *_\circ \alpha + \beta$, hecho que concluye la prueba. ∎

Demostración de la Proposición 1.5.4: Recordemos la definición de $\circ_*$:

$$\varphi \circ_* \alpha = \theta \quad \text{ssi} \quad Cn(\theta) = Cn(\varphi) * \alpha$$

donde θ es una fórmula en el conjunto $\{\gamma : Cn(\gamma) = Cn(\varphi) * \alpha\}$. Así, $\circ_*$ es una función con el dominio y codominio deseados.

Comencemos probando (R$\circ$1). Queremos ver que $\theta \vdash \alpha$ sabiendo que θ satisface $Cn(\theta) = Cn(\varphi) * \alpha$. Gracias a (K*1) se tiene $\alpha \in Cn(\varphi) * \alpha$, lo que claramente implica que $\theta \vdash \alpha$.

Ahora verifiquemos (R$\circ$2). Supongamos $\varphi \wedge \alpha$ consistente. Queremos ver que $\varphi \circ_* \alpha \equiv \varphi \wedge \alpha$, es decir que si θ satisface $Cn(\theta) = Cn(\varphi) * \alpha$ entonces $\theta \equiv \varphi \wedge \alpha$. Por hipótesis, $Cn(\varphi)$ es consistente con α, luego, por (K*3) y (K*4), tenemos $Cn(\varphi) * \alpha = Cn(\varphi) + \alpha$. Así, $Cn(\theta) = Cn(\varphi) + \alpha$. Pero es fácil ver que $Cn(\varphi) + \alpha = Cn(\varphi \wedge \alpha)$. Por consiguiente, $\theta \equiv \varphi \wedge \alpha$.

Verifiquemos (R$\circ$3). Supongamos α consistente. Mostremos que cualquier θ que satisface $Cn(\theta) = Cn(\varphi) * \alpha$, es necesariamente consistente. En efecto, como α es consistente, por (K*5), $Cn(\varphi) * \alpha$ es consistente y por lo tanto θ es también consistente.

Verifiquemos (R$\circ$4). Supongamos que $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ y $\alpha_1 \equiv \alpha_2$. Queremos ver que para cualquier θ_i tal que $Cn(\theta_i) = Cn(\varphi_i) * \alpha_i$, para $i = 1, 2$, se tiene $\theta_1 \equiv \theta_2$. De la hipótesis $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ se obtiene $Cn(\varphi_1) = Cn(\varphi_2)$. Así, por (K*6) y la hipótesis $\alpha_1 \equiv \alpha_2$, tenemos $Cn(\varphi_1) * \alpha_1 = Cn(\varphi_2) * \alpha_2$. De donde es immediato que $\theta_1 \equiv \theta_2$.

Verifiquemos (R$\circ$5). Sean θ y ρ tales que $Cn(\theta) = Cn(\varphi) * \alpha$ y $Cn(\rho) = Cn(\varphi) * (\alpha \wedge \beta)$. Queremos ver que $\theta \wedge \beta \vdash \rho$. Por (K*7) sabemos que $Cn(\varphi) * (\alpha \wedge \beta) \subseteq (Cn(\varphi) * \alpha) + \beta$. Pero es fácil ver que $(Cn(\varphi) * \alpha) + \beta = Cn(\theta \wedge \beta)$. Por lo tanto, $\theta \wedge \beta \vdash \rho$.

Verifiquemos (R$\circ$6). Sean θ y ρ tales que $Cn(\theta) = Cn(\varphi) * \alpha$ y $Cn(\rho) = Cn(\varphi) * (\alpha \wedge \beta)$. Suponga que $\theta \wedge \beta$ es consistente. Queremos ver que $\rho \vdash \theta \wedge \beta$. Como $\theta \wedge \beta$ es consistente, $Cn(\theta \wedge \beta)$ también es consistente, es decir $(Cn(\varphi) * \alpha) + \beta$ es consistente. Así, por (K*8), $(Cn(\varphi) * \alpha) + \beta \subseteq Cn(\varphi) * (\alpha \wedge \beta)$. Lo que se traduce como $Cn(\theta \wedge \beta) \subseteq Cn(\rho)$, de donde se deduce $\rho \vdash \theta \wedge \beta$. ∎

Observación 1.5.5 *Es fácil ver que si tenemos dos operadores,* $* : \mathcal{T} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{T}$ *y* $\circ : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ *entonces usando las definiciones 1.5.1 y 1.5.2 se tiene:*

1. $* = *_{\circ_*}$
2. $\circ = \circ_{*_\circ}$

De las proposiciones 1.5.3, 1.5.4 y la observación anterior obtenemos directamente el siguiente corolario:

Corolario 1.5.6 *Sean $* : \mathcal{T} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{T}$ y $\circ : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ dos operadores. Entonces se cumplen:*

1. *$*$ es un operador de revisión AGM ssi $\circ_*$ es un operador de revisión KM.*

2. *$\circ$ es un operador de revisión KM ssi $*_\circ$ es un operador de revisión AGM.*

Con esta nueva reformulación, Katsuno y Mendelzon [23] mostraron un teorema de representación para los operadores de revisión.

Definición 1.5.7 *Consideremos una función que asigna a cada fórmula proposicional ψ un preorden total[2] $\leq_\psi$ sobre W. Decimos que esta asignación es fiel si y sólo si*

1. *Si $\omega_1 \models \psi$, entonces $\omega_1 \leq_\psi \omega_2$ para cualquier ω_2*

2. *Si $\omega_1 \models \psi$ y $\omega_2 \not\models \psi$, entonces $\omega_1 <_\psi \omega_2$; y*

3. *Si $\psi_1 \equiv \psi_2$, entonces $\leq_{\psi_1} = \leq_{\psi_2}$.*

Aquí, $\omega_1 <_\psi \omega_2$ está definido como $\omega_1 \leq_\psi \omega_2$ y $\omega_2 \not\leq_\psi \omega_1$; $\omega_1 =_\psi \omega_2$ está definido como $\omega_1 \leq_\psi \omega_2$ y $\omega_2 \leq_\psi \omega_1$.

El siguiente teorema es uno de los resultados típicos conocidos como teoremas de representación:

Teorema 1.5.8 (Katsuno-Mendelzon [23]) *Un operador de revisión $\circ$ satisface los postulados (R$\circ$1)-(R$\circ$6) si y sólo si existe una asignación fiel que envía cada fórmula ψ a un preorden total $\leq_\psi$ tal que*

$$mod(\psi \circ \alpha) = min(mod(\alpha), \leq_\psi)$$

[2] Un preorden total es una relación total y transitiva.

Demostración: *Sólo si:*
Supongamos que existe un operador $\circ$ que satisface las condiciones (R$\circ$1)-(R$\circ$6). Definamos la relación $\leq_\psi$ para cada ψ por medio del operador $\circ$ de la manera siguiente: para cualquier par de valuaciones ω_1 y ω_2,

$$\omega_1 \leq_\psi \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 \in mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2})$$

donde $\varphi_{\omega_1,\omega_2}$ denota una fórmula[3] tal que $mod(\varphi_{\omega_1,\omega_2}) = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Primero que todo notemos que $\leq_\psi$ está bien definida pues, en virtud de (R$\circ$4) no depende de la escogencia de $\varphi_{\omega_1,\omega_2}$.

Mostraremos ahora que $\leq_\psi$ es un preorden total.

Totalidad: Sean ω_1, ω_2 valuaciones. Como $mod(\varphi_{\omega_1,\omega_2}) \neq \emptyset$, (R$\circ$3) nos dice que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2})$ es no vacío, además por (R$\circ$1) tenemos que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2}) \subseteq mod(\varphi_{\omega_1,\omega_2})$. Así, $\omega_1 \in mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2})$ o bien, $\omega_2 \in mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2})$. Por lo tanto, $\omega_1 \leq_\psi \omega_2$ o bien $\omega_2 \leq_\psi \omega_1$. Como queríamos.

Transitividad: Sean ω_1, ω_2, ω_3 valuaciones. Supongamos que $\omega_1 \leq_\psi \omega_2$ y $\omega_2 \leq_\psi \omega_3$. Queremos ver que $\omega_1 \leq_\psi \omega_3$. Hay tres casos a considerar.

(Caso 1) $\omega_1 \in mod(\psi)$
En este caso, ψ y $\varphi_{\omega_1,\omega_3}$ son consistentes entre ellas pues comparten el modelo ω_1, entonces, por (R$\circ$2), $\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_3} \equiv \psi \wedge \varphi_{\omega_1,\omega_3}$. Por lo tanto $\omega_1 \in mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_3})$, lo que implica $\omega_1 \leq_\psi \omega_3$.

(Caso 2) $\omega_1 \notin mod(\psi)$ y $\omega_2 \in mod(\psi)$
Por hipótesis tenemos que $mod(\psi \wedge \varphi_{\omega_1,\omega_2}) = \{\omega_2\}$. Así, por (R$\circ$2), tenemos que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2}) = \{\omega_2\}$, luego, como $\omega_1 \notin mod(\psi)$, tenemos que $\omega_1 \not\leq_\psi \omega_2$. Lo cual contradice la hipótesis $\omega_1 \leq_\psi \omega_2$, por lo tanto el caso 2 no puede suceder.

(Caso 3) $\omega_1 \notin mod(\psi)$ y $\omega_2 \notin mod(\psi)$
Por (R$\circ$3) sabemos que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \neq \emptyset$ y por (R$\circ$1) sabemos que

[3] En general, en el caso finito, si M es un conjunto de modelos denotamos por φ_M una fórmula tal que $mod(\varphi_M) = M$ y por abuso de lenguaje denotaremos $\varphi_{\omega_1,\omega_2}$, $\varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}$ a $\varphi_{\{\omega_1,\omega_2\}}$, $\varphi_{\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}}$ respectivamente.

$mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \subseteq \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Ahora consideremos dos subcasos.

(Caso 3.1) $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \cap \{\omega_1, \omega_2\} = \emptyset$
De esta suposición se obtiene que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) = \{\omega_3\}$. Notemos entonces que $mod(\psi \circ (\varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3} \wedge \varphi_{\omega_2,\omega_3})) = \{\omega_3\}$. Luego, de (R∘5) y (R∘6), se tiene que

$$\begin{aligned} mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \cap \{\omega_2, \omega_3\} &= mod(\psi \circ (\varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3} \wedge \varphi_{\omega_2,\omega_3})) \\ &= mod(\psi \circ \varphi_{\omega_2,\omega_3}) \end{aligned}$$

Así, $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_2,\omega_3}) = \{\omega_3\}$. Por lo tanto $\omega_2 \notin mod(\psi \circ \varphi_{\omega_2,\omega_3})$, luego $\omega_2 \not\leq_\psi \omega_3$, y esto es contradice la hipótesis inicial, por lo tanto, el caso 3.1 no es posible.

(Caso 3.2) $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \cap \{\omega_1, \omega_2\} \neq \emptyset$
Notemos que la hipótesis $\omega_1 \leq_\psi \omega_2$ implica $\omega_1 \in mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2})$. Además por la suposición de este caso, $\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}$ y $\varphi_{\omega_1,\omega_2}$ son consistentes entre ellas. Entonces se deduce de (R∘5) y (R∘6) que

$$mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \cap \{\omega_1, \omega_2\} = mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2})$$

por lo tanto, $\omega_1 \in mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \cap \{\omega_1, \omega_2\}$, en particular $\omega_1 \in mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3})$. Así, $\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}$ y $\varphi_{\omega_1,\omega_3}$ son consistentes entre ellas. Luego, de (R∘5) y (R∘6), se obtiene que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}) \cap \{\omega_1, \omega_3\} = mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_3})$. Luego $\omega_1 \in mod(\psi \circ \varphi_{\omega_1,\omega_3})$, de donde $\omega_1 \leq_\psi \omega_3$ como queríamos.

Mostremos ahora las propiedades de la *fidelidad*.
Queremos ver que si $\omega \models \psi$ entonces $\omega \leq_\psi \omega'$ para cualquier ω'. Si una valuación ω es modelo de ψ entonces $\omega \in mod(\psi \wedge \varphi_{\omega,\omega'})$. Por (R∘2), $\psi \circ \varphi_{\omega,\omega'} \equiv \psi \wedge \varphi_{\omega,\omega'}$. Así, $\omega \in \psi \circ \varphi_{\omega,\omega'}$ lo que implica $\omega \leq_\psi \omega'$. Luego la primera condición de asignación fiel se cumple.

Ahora supongamos que $\omega \in mod(\psi)$ y $\omega' \notin mod(\psi)$. Queremos ver que $\omega <_\psi \omega'$. Como antes, por (R∘2), se puede ver que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega,\omega'}) = \{\omega\}$. Así, $\omega' \not\leq_\psi \omega$. Como $\leq_\psi$ es un preorden total necesariamente $\omega <_\psi \omega'$. Por lo tanto la segunda condición de fidelidad también se cumple.

Para probar la tercera y última condición supongamos que $\psi_1 \equiv \psi_2$ y veamos que $\leq_{\psi_1} = \leq_{\psi_2}$. Por (R∘4) tenemos $mod(\psi_1 \circ \varphi_{\omega,\omega'}) = mod(\psi_2 \circ \varphi_{\omega,\omega'})$

para cualquier par de valuaciones ω, ω'. Luego, por definición, tenemos

$$\omega \leq_{\psi_1} \omega' \quad \Leftrightarrow \quad \omega \leq_{\psi_2} \omega'$$

Lo que claramente dice $\leq_{\psi_1} = \leq_{\psi_2}$.

Finalmente mostremos la ecuación de la representación, es decir

$$mod(\psi \circ \alpha) = min(mod(\alpha), \leq_\psi)$$

El caso en que α sea inconsistente ambos lados de la igualdad son el conjunto vacío y por lo tanto la igualdad se cumple.

Ahora supongamos que α es consistente.

Mostremos primero que $mod(\psi \circ \alpha) \subseteq min(mod(\alpha), \leq_\psi)$.
Supongamos que no ocurre lo que queremos y veamos que llegamos a una contradicción. Entonces asumimos que existe ω, tal que $\omega \in mod(\psi \circ \alpha)$ y
$\omega \notin min(mod(\alpha), \leq_\psi)$. Como $\omega \in mod(\psi \circ \alpha)$, por (R$\circ$1), ω es modelo de α. Pero como $\omega \notin min(mod(\alpha), \leq_\psi)$ necesariamente existe una valuación ω' modelo de α tal que $\omega' <_\psi \omega$.
Se dan dos casos:

(Caso 1) $\omega' \in mod(\psi)$
Como ω' es modelo de α, tenemos que $\psi \wedge \alpha$ es consistente. Luego, por (R$\circ$2), tenemos que $mod(\psi \circ \alpha) = mod(\psi \wedge \alpha) = mod(\psi) \cap mod(\alpha)$. Como $\omega \in mod(\psi \circ \alpha)$ entonces $\omega \in mod(\psi)$. Luego, $\omega \leq_\psi \omega'$ lo cual contradice el hecho que $\omega' < \omega$.

(Caso 2) $\omega' \notin mod(\psi)$
Como $\omega' <_\psi \omega$ tenemos $mod(\psi \circ \varphi_{\omega,\omega'}) = \{\omega'\}$. Como ω y ω' son modelos de α, tenemos que $(\alpha \wedge \varphi_{\omega,\omega'}) \equiv \varphi_{\omega,\omega'}$. Luego de (R$\circ$5) y (R$\circ$4) obtenemos que $mod(\psi \circ \alpha) \cap \{\omega, \omega'\} \subseteq mod(\psi \circ \varphi_{\omega,\omega'})$. Pero sabemos que $mod(\psi \circ \varphi_{\omega,\omega'}) = \{\omega'\}$ luego $\omega \notin mod(\psi \circ \alpha)$. Lo cual es una contradicción.

Probemos ahora que $min(mod(\alpha), \leq_\psi) \subseteq mod(\psi \circ \alpha)$.
Sea ω tal que $\omega \in min(mod(\alpha), \leq_\psi)$ y, contrariamente a lo que queremos, supongamos que $\omega \notin mod(\psi \circ \alpha)$. Con esta suposición llegaremos a una contradicción. En efecto, como α es consistente, tenemos por (R$\circ$3) que existe un modelo ω' de $\psi \circ \alpha$. Por (R$\circ$1), $\omega' \in mod(\alpha)$. Como tanto ω como ω' son modelos de α, tenemos que $(\varphi_{\omega,\omega'} \wedge \alpha) \equiv \varphi_{\omega,\omega'}$. Además notemos que $\omega' \in mod(\psi \circ \alpha) \cap \{\omega, \omega'\}$, así $(\psi \circ \alpha) \wedge \varphi_{\omega,\omega'}$ es consistente. Entonces, por las condiciones (R$\circ$5), (R$\circ$6) y (R$\circ$4), se deduce que $mod(\psi \circ \alpha) \cap \{\omega, \omega'\} = mod(\psi \circ \varphi_{\omega,\omega'})$. Como $\omega \notin mod(\psi \circ \alpha)$, tenemos, por la última igualdad, $mod(\psi \circ \varphi_{\omega,\omega'}) = \{\omega'\}$. Así, $\omega' <_\psi \omega$. Pero esto contradice el hecho que ω es minimal en $mod(\alpha)$ con respecto a $\leq_\psi$.

Si:
Supongamos que existe una asignación fiel que envía cada fórmula ψ a un preorden total $\leq_\psi$. Supongamos además que el operador $\circ$ satisface

$$mod(\psi \circ \alpha) = min(mod(\alpha), \leq_\psi)$$

Probemos que $\circ$ satisface (R$\circ$1)-(R$\circ$6).

Notemos que por definición $mod(\psi \circ \alpha) \subseteq mod(\alpha)$, luego $\psi \circ \alpha \vdash \alpha$, por lo tanto se cumple (R$\circ$1).

Verifiquemos (R$\circ$2). Supongamos que $\psi \wedge \alpha$ es consistente, bastará probar que $mod(\psi \wedge \alpha) = min(mod(\alpha), \leq_\psi)$ para verificar la condición (R$\circ$2). Probemos primero que $mod(\psi \wedge \alpha) \subseteq min(mod(\alpha), \leq_\psi)$. Sea ω una valuación tal que $\omega \in mod(\psi) \cap mod(\alpha)$. Por la primera propiedad de asignación fiel, tenemos que $\omega \leq_\psi \omega'$ para cualquier valuación ω', luego ω es minimal en $mod(\alpha)$ con respecto a $\leq_\psi$, como queríamos. Ahora mostremos que $min(mod(\alpha), \leq_\psi) \subseteq mod(\psi \wedge \alpha)$.
Sea $\omega \in min(mod(\alpha), \leq_\psi)$ y, por reducción al absurdo, supongamos que $\omega \notin mod(\psi \wedge \alpha)$. Como $mod(\psi \wedge \alpha) \neq \emptyset$, tomemos un modelo ω' de $\psi \wedge \alpha$. En particular, por la inclusión que probamos anteriormente, $\omega' \in min(mod(\alpha), \leq_\psi)$. Pero como supusimos que $\omega \notin mod(\psi \wedge \alpha)$ y sabemos que $\omega \in mod(\alpha)$, necesariamente $\omega \notin mod(\psi)$. Así, de la segunda propiedad de asignación fiel, tenemos que $\omega' <_\psi \omega$ lo que contradice la minimalidad de ω en los modelos de α. Esto completa la prueba de (R$\circ$2).

Verifiquemos (R$\circ$3). Supongamos que α es consistente. Así, $mod(\alpha)$ es un conjunto no vacío y finito. Entonces, como $\leq_\psi$ es un preorden total, $min(mod(\alpha), \leq_\psi)$ es diferente del conjunto vacío[4] y por lo tanto, $\psi \circ \alpha$ es consistente. Luego (R$\circ$3) se cumple.

Verifiquemos (R$\circ$4). Notemos que por la tercera condición de asignación fiel se tiene que $min(mod(\alpha), \leq_\psi) = min(mod(\beta), \leq_\phi)$ cuando $\alpha \equiv \beta$ y $\psi \equiv \phi$ ya que $mod(\alpha) = mod(\beta)$ y $\leq_\psi = \leq_\phi$. Así, por la representación, tenemos que $\psi \circ \alpha \equiv \phi \circ \beta$. Luego, (R$\circ$4) se cumple.

Verifiquemos (R$\circ$5). Notemos que si $min(mod(\alpha), \leq_\psi) \cap \ mod(\beta) = \emptyset$, entonces,
$mod((\psi \circ \alpha) \wedge \beta) = \emptyset$. Por consiguiente,

$$mod((\psi \circ \alpha) \wedge \beta) \subseteq mod(\psi \circ (\alpha \wedge \beta))$$

lo cual es equivalente a (R$\circ$5).
Ahora supongamos que $(\psi \circ \alpha) \wedge \beta$ es consistente, y veamos que la contención anterior se sigue cumpliendo. Supongamos que existe $\omega \in mod((\psi \circ \alpha) \wedge \beta)$, y $\omega \notin mod(\psi \circ (\alpha \wedge \beta))$, así de la representación se obtiene que ω es modelo de β y minimal en $mod(\alpha)$ con respecto a $\leq_\psi$ y, además, que ω no está en los minimales de $mod(\alpha) \cap mod(\beta)$ con respecto a $\leq_\psi$. Luego, existe $\omega' \in mod(\alpha) \cap mod(\beta)$ tal que $\omega' <_\psi \omega$, lo cual es una contradicción ya que $\omega' \in mod(\alpha)$.

Mostremos finalmente la condición (R$\circ$6). Para ello bastará ver que

$$mod(\psi \circ (\alpha \wedge \beta)) \subseteq mod((\psi \circ \alpha) \wedge \beta)$$

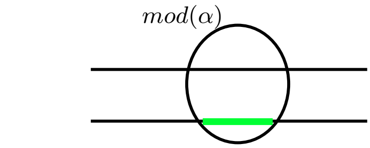
Consideremos, buscando una contradicción , que existe $\omega \in mod(\psi \circ (\alpha \wedge \beta))$ y $\omega \notin mod((\psi \circ \alpha) \wedge \beta)$. Por la representación tenemos que

$\omega \in min(mod(\alpha) \cap mod(\beta), \leq_\psi)$ y que $\omega \notin min(mod(\alpha), \leq_\psi) \cap mod(\beta)$

[4] La única manera de que no haya elementos minimales en un conjunto finito es que haya ciclos para $<_\psi$ lo cual es imposible debido a la transitividad y a la irreflexividad de la relación $<_\psi$.

Luego, como $\omega \in mod(\beta)$, tenemos que $\omega \notin min(mod(\alpha), \leq_\psi)$. Por otra parte, como
$mod((\psi \circ \alpha) \wedge \beta) \neq \emptyset$ podemos tomar $\omega' \in min(mod(\alpha), \leq_\psi) \cap mod(\beta)$. Ahora bien, como $\omega \in min((mod(\alpha) \cap mod(\beta)), \leq_\psi)$, $\omega' \in mod(\alpha) \cap mod(\beta)$ y $\leq_\psi$ es total, tenemos que $\omega \leq_\psi \omega'$, pero $\omega' \in min(mod(\alpha), \leq_\psi)$, luego $\omega \in min(mod(\alpha), \leq_\psi)$, lo cual es una contradicción. ∎

La siguiente figura ilustra el teorema de representación para la revisión:



Los modelos de $\psi \circ \mu$ están indicados en verde: los minimales de los modelos de μ con respecto al preorden $\leq_\psi$, indicado por las rayas horizontales. Los modelos en las rayas más bajas son los modelos más plausibles para ψ.

Una familia de ejemplos de operadores de revisión se puede construir cuando se toma una distancia d entre los valuaciones[5]. Esa distancia se extiende a una función la continuamos llamando d entre valuaciones y fórmulas de la manera siguiente: $d(w, \varphi) = min\{d(w, w') : w' \models \varphi\}$.

A partir de allí definimos la asignación fiel de la manera siguiente:

$$w \preceq_\varphi w' \Leftrightarrow d(w, \varphi) \leq d(w', \varphi)$$

Cuando d es la distancia drástica, *i.e.* d solo toma dos valores 0 y 1 (el valor 0 ssi son iguales, el valor 1 cuando las valuaciones son diferentes) entonces el operador que se obtiene es el operador drástico $*_D$ ya mencionado.

Otro operador bastante interesante definido por este método es cuando la distancia d_H tomada es la de Hamming, es decir $d_H(w, w')$ es el número de variables proposicionales en que difieren w y w'.

Examinemos un ejemplo concreto con esta distancia.

[5]Una aplicación $d : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathbb{R}^+$ tal que para cualesquiera $w, w', \in \mathcal{W}$ se cumple que: $d(w, w') = d(w', w)$ y $d(w, w') = 0$ si, y sólo si, $w = w'$. No exigimos la desigualdad triangular

Ejemplo 1.5.9 *Considere una formula codificando la información siguiente (se está razonando sobre el estado de dos circuitos de un computador): $s \wedge m$ significa que el sumador y el multiplicador funcionan. El preorden total asociado a esta fórmula usando la distancia de Hamming y el método precedente es el siguiente*

$$\leq_\varphi = \begin{array}{c} \mathbf{00} \\ 01\ \mathbf{10} \\ 11 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \text{mód}\ \varphi * \alpha = \{10\}$$

La nueva información es que el multiplicador no funciona. Luego el resultado de la revisión será, en términos de modelos, $(1,0)$*, lo cual significa que el sumador funciona pero el multiplicador no, es decir la fórmula* $s \wedge \neg m$.

Note que el caso finito podemos también definir una aplicación fiel $K \mapsto \leq_K$ que envía teorías en preórdenes totales sobre las valuaciones, como una función que satisface:

1. Si $\omega_1 \models K$, entonces $\omega_1 \leq_K \omega_2$ para cualquier ω_2.

2. Si $\omega_1 \models K$ y $\omega_2 \not\models K$, entonces $\omega_1 <_K \omega_2$.

Observe que una asignación fiel sobre fórmulas, se convierte fácilmente en una asignación fiel sobre teorías: simplemente basta definir $\leq_K = \leq_{\varphi_K}$, donde φ_K es una fórmula tal que $Cn(\varphi_K) = K$.

Observe también que en el caso finito si α es consistente, *i.e.*si $mod(\alpha) \neq \emptyset$, entonces $min(mod(\alpha), \leq_K) \neq \emptyset$. En el caso general esta condición no es siempre cierta. Ello será una exigencia de las asignaciones fieles.

Del Teorema de representación 1.5.8, de la Proposición 1.2.1 y del Corolario 1.5.6 obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.5.10 *Un operador de revisión $*$ satisface los postulados (K*1)-(K*8) si y sólo si existe una asignación fiel que envía cada teoría K a un preorden total $\leq_K$ tal que*

$$mod(K * \alpha) = min(mod(\alpha), \leq_K)$$

Del teorema precedente y del Teorema 1.4.3 obtenemos el siguiente resultado de representación para los operadores de contracción:

Teorema 1.5.11 *Un operador $\dot{-}$ satisface los postulados (K$\dot{-}$1)-(K$\dot{-}$8) si y sólo si existe una asignación fiel que envía cada teoría K a un preorden total $\leq_K$ tal que*

$$mod(K\dot{-}\alpha) = min(mod(\neg\alpha), \leq_K) \cup mod(K)$$

1.6. Representación en el caso general

En esta sección vamos a dar un teorema de representación similar al Teorema 1.5.10 el cual vale sin hipótesis adicionales sobre la cardinalidad del lenguaje. En particular vale para lenguajes infinitos. La única diferencia en la formulación está en la definición de asignación fiel que damos a continuación:

Definición 1.6.1 *Una aplicación $K \mapsto \leq_K$ que envía teorías en preórdenes totales sobre las valuaciones, será dicha asignación fiel si ella satisface:*

1. *Si $\omega_1 \models K$ entonces $\omega_1 \leq_K \omega_2$ para cualquier ω_2.*
2. *Si $\omega_1 \models K$ y $\omega_2 \not\models K$ entonces $\omega_1 <_K \omega_2$.*
3. *Si α es consistente entonces $min(mod(\alpha) \neq \emptyset)$.*

A la condición 3 en la definición anterior la llamamos condición de *suavidad.*

Ahora podemos enunciar el Teorema de representación para los operadores de revisión en el caso general. Recuerde que si M es un conjunto de modelos la teoría de M, denotada $Th(M)$, es el conjunto definido por

$$Th(M) = \{\varphi \in \mathcal{F} : \forall w \in M, w \vdash \varphi\}$$

Teorema 1.6.2 *Un operador de revisión $*$ satisface los postulados (K*1)-(K*8) si y sólo si existe una asignación fiel que envía cada teoría K a un preorden total $\leq_K$ tal que*

$$K * \alpha = Th(min(mod(\alpha), \leq_K))$$

Notemos que la parte *si* de este teorema es sobre todo una verificación. Ella se prueba esencialmente como la parte si del Teorema 1.5.8. La novedad está en la parte *sólo si*. Debemos indicar que en el caso finito se usó fuertemente el hecho de la existencia de una fórmula $\varphi_{\omega_1,\omega_2}$ con exactamente dos modelos. En el caso infinito una tal fórmula no existe, pues el conjunto de modelos de una fórmula es siempre infinito.

Demostración del Teorema 1.6.2: *Si:*
Suponemos que existe una asignación fiel tal que

$$K * \alpha = Th(min(mod(\alpha), \leq_K))$$

es decir $mod(K * \alpha) = min(mod(\alpha), \leq_K)$.

Verifiquemos (K$*$1). $K * \alpha$ es una teoría por definición.

Verifiquemos (K$*$2). Queremos ver que $\alpha \in K * \alpha$, es decir que $mod(K * \alpha) \subseteq mod(\alpha)$ lo cual es inmediato de la definición.

Verifiquemos (K$*$3). Ello se verifica observando que

$$mod(K) = min(\mathcal{W}, \leq_K)$$

y si $mod(K) \cap mod(\alpha) = \emptyset$ entonces $K + \alpha = K_\perp$, en este caso se tiene que $K * \alpha \subset K + \alpha$ que es la condición (K$*$3).

Verifiquemos (K$*$4). Supongamos $mod(K) \cap mod(\alpha) \neq \emptyset$.
Entonces $mod(K + \alpha) = mod(K) \cap mod(\alpha) = min(\mathcal{W}, \leq_K) \cap mod(\alpha) = min(mod(\alpha), \leq_K) = mod(K * \alpha)$, lo cual completa la prueba de (K$*$4).

Verifiquemos (K$*$5). Si α es consistente, es decir $mod(\alpha) \neq \emptyset$, tenemos, por la propiedad de suavidad $min(mod(\alpha), \leq_K) \neq \emptyset$ y por lo tanto $K * \alpha$ es consistente.

Verifiquemos (K$*$6). Esto es inmediato ya que $\alpha \equiv \beta$ si y sólo si $mod(\alpha) = mod(\beta)$. Así si $\alpha \equiv \beta$, tenemos $min(mod(\alpha), \leq_K) = min(mod(\beta), \leq_K)$, *i.e.* $K * \alpha = K * \beta$.

Verifiquemos (K$*$7). Probaremos

$$min(mod(\alpha), \leq_K) \cap mod(\beta) \subseteq min(mod(\alpha \wedge \beta), \leq_K)$$

En efecto, sea $\omega \in min(mod(\alpha), \leq_K) \cap mod(\beta)$, en particular, $\omega \in mod(\alpha \wedge \beta)$. Sea $\omega' \in mod(\alpha \wedge \beta)$, puesto que $\omega, \omega' \in mod(\alpha)$ y $\omega \in min(mod(\alpha), \leq_K)$ se tiene que $\omega \leq_K \omega'$ y así $\omega \in min\{mod(\alpha \wedge \beta), \leq\}$.

Luego la condición (K$*$7), *i.e.* $K * (\alpha \wedge \beta) \subseteq (K * \alpha) + \beta$, se verifica.

Verifiquemos (K$*$8). Si $min(mod(\alpha), \leq_K) \cap mod(\beta) \neq \emptyset$ se cumple vamos a verificar que se tiene

$$min(mod(\alpha \wedge \beta), \leq_K) \subseteq min(mod(\alpha), \leq_K) \cap mod(\beta)$$

lo cual implica $(K * \alpha) + \beta \subseteq K * (\alpha \wedge \beta)$, es decir (K$*$8). En efecto, sea $\omega \in min(mod(\alpha \wedge \beta), \leq_K)$, puesto que existe $\omega' \in min(mod(\alpha), \leq_K) \cap mod(\beta)$, en particular $\omega' \in mod(\alpha \wedge \beta)$, y se cumple $\omega \leq \omega'$; como $\omega' \in min(mod(\alpha), \leq_K)$ se tiene $\omega \in min(mod(\alpha), \leq_K)$. Así, $\omega \in min(mod(\alpha), \leq_K) \cap mod(\beta)$. En consecuencia si $\neg\beta \notin K * \alpha$ se cumple $(K * \alpha) + \beta \subseteq K * (\alpha \wedge \beta)$.

Sólo si:

Procedemos a definir un preorden total sobre $\mathcal{W}$ a partir de un operador de revisión $*$ y una teoría K. Para ello, primero definimos el conjunto $V(K)$ que corresponde al conjunto de valuaciones que son realizadas en alguna revisión de K, más precisamente

$$V(K) = \{\omega \in \mathcal{W} : \exists\, \alpha \quad \text{tal que} \quad \omega \models K * \alpha\}$$

Ahora definimos $\leq_K$ de la siguiente manera:

(i) Si $\omega' \notin V(K)$ entonces $\omega \leq_K \omega'$ para todo $\omega \in \mathcal{W}$. Esto significa que las valuaciones que no son realizables a través de la revisión de K por una fórmula son maximales.

(ii) Si $\omega \in V(K)$ y $\omega' \notin V(K)$ entonces $\omega' \not\leq_K \omega$; lo cual significa que los únicos maximales son los elementos en el complemento de $V(K)$.

(iii) Si $\omega, \omega' \in V(K)$ entonces

$$\omega \leq_K \omega' \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \alpha, \beta[(\omega \models K*\alpha, \omega' \models K*\beta) \Rightarrow \omega \models K*(\alpha \vee \beta)]$$

Es decir $\omega \leq_K \omega'$, si cada vez que ω satisface a K revisado por α y ω' satisface a K revisado por β, se tiene que ω satisface a K revisado por $\alpha \vee \beta$.

Primero veremos que esta relación es total. Sean ω y ω' en $\mathcal{W}$. Si $\omega \notin$

$V(K)$ o $\omega' \notin V(K)$ entonces $\omega' \leq_K \omega$ o $\omega \leq_K \omega'$ por la condición (i) de la definición de $\leq_K$.
Ahora supongamos que $\omega \in V(K)$ y $\omega' \notin V(K)$. Así, existen α y β tales que $\omega \models K * \alpha$ y $\omega' \models K * \beta$. Bajo estas condiciones vamos a probar que $\omega \models K * (\alpha \vee \beta)$ o $\omega' \models K * (\alpha \vee \beta)$. Enunciemos este resultado bajo forma de lema:

Lema 1.6.3 $\omega \models K * \alpha$ *y* $\omega' \models K * \beta \Rightarrow \omega \models K * (\alpha \vee \beta)$ *o bien* $\omega' \models K * (\alpha \vee \beta)$.

Demostración: Puesto que por $(K*2)$ se cumple $\alpha \vee \beta \in K * (\alpha \vee \beta)$, y por ser α y β consistentes ($(K*2)$ o $(K*5)$ lo garantizan) se tiene que $K * (\alpha \vee \beta) + \alpha \nvdash \perp$ o $K * (\alpha \vee \beta) + \beta \nvdash \perp$, en caso contrario se tiene que $K * (\alpha \vee \beta) + \alpha \vee \beta \vdash \perp$ lo que contradice $(K*2)$. Si $K * (\alpha \vee \beta) + \alpha \nvdash \perp$, entonces $\neg\alpha \notin K * (\alpha \vee \beta)$ y por $(K*7)$ y $(K*8)$ se cumple $K * (\alpha \vee \beta) + \alpha = K * ((\alpha \vee \beta) \wedge \alpha) = K * \alpha$, la última igualdad es por $(K*6)$, en particular $\omega \models K * (\alpha \vee \beta)$. Si $K * (\alpha \vee \beta) + \alpha \vdash \perp$ entonces $K * (\alpha \vee \beta) + \beta \nvdash \perp$ y de manera análoga se prueba que $\omega' \models K * (\alpha \vee \beta)$. ∎

El siguiente resultado es un lema técnico para poder cambiar los cuantificadores universales en la definición de $\leq_K$ por cuantificadores existenciales.

Lema 1.6.4 *Si* $(K * \alpha) \cup (K * \delta) \nvdash \perp$ *y* $(K * \beta) \cup (K * \gamma) \nvdash \perp$, *entonces*

$$K * (\alpha \vee \beta) + (\delta \vee \gamma) = K * (\delta \vee \gamma) + (\alpha \vee \beta)$$

Demostración: Sea $\omega \models (K * \alpha) \cup (K * \delta)$ y $\omega' \models (K * \beta) \cup (K * \gamma)$, en particular, por $(K*2)$ se tiene que $\omega \models K * \alpha$, $\omega' \models K * \beta$ y $\omega, \omega' \models \delta \vee \gamma$, por el lema 1.6.3, se tiene que $\omega \models K * (\alpha \vee \beta)$ o $\omega' \models K * (\alpha \vee \beta)$, en cualquier caso se tiene que $\neg(\delta \vee \gamma) \notin K * (\alpha \vee \beta)$ y por ($(K*7)$ y $(K*8)$ se cumple

$$K * (\alpha \vee \beta) + \delta \vee \gamma = K * ((\alpha \vee \beta) \wedge (\delta \vee \gamma))$$

Análogamente, $\omega \models K * \delta$, $\omega' \models K * \gamma$ y $\omega, \omega' \models \alpha \vee \beta$, y por el mismo argumento se tiene

$$K * (\delta \vee \gamma) + \alpha \vee \beta = K * ((\delta \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \beta))$$

Por $(K * 6)$

$$K * (\alpha \vee \beta) + (\delta \vee \gamma) = K * (\delta \vee \gamma) + (\alpha \vee \beta)$$

∎

Ahora podemos probar lo siguiente:

Lema 1.6.5

$$\forall \omega, \omega' \in V(K), \omega \leq_K \omega' \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha, \beta[\omega \models K*\alpha, \omega' \models K*\beta, \omega \models K*(\alpha \vee \beta)]$$

Demostración: Si $\omega \models K * \alpha$, $\omega' \models K * \beta$, $\omega \models K * (\alpha \vee \beta)$ y $\omega \models K * \delta$, $\omega' \models K * \gamma$ necesariamente se tiene que $\omega \models K * (\delta \vee \gamma)$, ya que se verifican las condiciones del lema 1.6.4 y puesto que $\omega \models K * (\alpha \vee \beta) + (\delta \vee \gamma)$ entonces $\omega \models K * (\delta \vee \gamma)$. ∎

Ahora por el Lema 1.6.3 y el lema 1.6.5 tenemos que si $\omega \in V(K)$ y $\omega' \notin V(K)$ entonces $\omega' \leq_K \omega$ o $\omega \leq_K \omega'$, lo que completa la prueba de la totalidad de $\leq_K$.

Ahora verifiquemos que la relación $\leq_K$ es transitiva:

Supongamos que $\omega \leq_K \omega' \leq_K \omega''$, si $\omega'' \notin V(K)$ se cumple por la condición (i) de la definición de $\leq_K$ que $\omega \leq_K \omega''$. Supongamos que $\omega'' \in V(K)$, por ser $\omega' \leq_K \omega''$, por definición [ii] $\omega' \in V(K)$, asimismo como $\omega \leq_K \omega'$ se tiene que $\omega \in V(K)$. Sean α, β, γ tales que $\omega \models K*\alpha$, $\omega' \models K*\beta$ y $\omega'' \models K*\gamma$. Por hipótesis se tiene que $\omega \models K*(\alpha \vee \beta)$ por ser $\omega \leq_K \omega'$ y $\omega' \models K * (\beta \vee \gamma)$, ya que $\omega' \leq_K \omega''$, asimismo, $\omega \models K * (\alpha \vee \beta \vee \gamma)$. Puesto que $\omega'' \models K * \gamma$, $\omega \models K * (\alpha \vee \beta)$ y $\omega \models K * (\alpha \vee \beta \vee \gamma)$ por definición del orden $\leq_K$ se tiene que $\omega \leq_K \omega''$.

Para probar la suavidad necesitamos el siguiente resultado.

Lema 1.6.6 *Si $\omega <_K \omega'$ y $\omega' \models K * \alpha$, entonces $\omega \not\models \alpha$.*

Demostración: Si $\omega <_K \omega'$, de la definición de $\leq_K$ existe β tal que $\omega \models K * \beta$, en caso contrario, $\omega' \leq_K \omega$ para todo $\omega' \in \mathcal{W}$. Supongamos que $\omega' \models K * \alpha$ y $\omega \models \alpha$. Puesto que $\omega \models K * \beta$ y $\omega \models \alpha$ se tiene que $\neg\alpha \notin K * \beta$, por $(K * 7)$ y $(K * 8)$ se cumple $K * (\alpha \wedge \beta) = K * \beta + \alpha$, y en consecuencia $\omega \models K * (\alpha \wedge \beta)$. Por hipótesis $\omega' \models K * \alpha$ y $\omega <_K \omega'$, de la definición de $\leq_K$ se tiene que $\omega' \not\models K*(\alpha \vee (\alpha \wedge \beta))$, como $(\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)) \equiv \alpha$, por $(K*6)$ $\omega' \not\models K*\alpha$. Contradicción. ∎

Veamos ahora que $\leq_K$ cumple con la propiedad de suavidad:
Sea α una fórmula consistente, por $(K*5)$ se tiene que $K*\alpha$ es consistente. Sea $\omega' \models K*\alpha$, luego $\omega' \models \alpha$ por $(K*2)$; veremos que ω' es un modelo minimal de α respecto a $\leq_K$. Sea $\omega \models \alpha$, del lema 1.6.6 se tiene que $\omega' \leq_K \omega$.

Ahora vamos a probar la primera propiedad de asignación fiel, es decir si $\omega', \omega \models K$, entonces, $\omega \leq_K \omega'$ y $\omega' \leq_K \omega$. Consideremos α tal que $\omega \models \alpha$ (esto es siempre posible ya que si Var es el conjunto de variables proposicionales, $\omega : Var \longrightarrow \{0,1\}$ y para $p \in Var$, si $\omega(p) = 0$, basta tomar $\alpha = \neg p$ y si $\omega(p) = 1$, $\alpha = p$). Análogamente existe β tal que $\omega' \models \beta$, puesto que $\omega, \omega' \models \alpha \vee \beta$, se tiene que $K + \alpha \vee \beta$ es consistente y por $(K*3)$, $(K*4)$ se cumple $K*(\alpha \vee \beta) = K + \alpha \vee \beta$ lo cual implica $\omega, \omega' \models K*(\alpha \vee \beta)$. Asimismo se tiene que $K*\alpha = K+\alpha$ y $K*\beta = K+\beta$; como $\omega \models K*\alpha$, $\omega' \models K*\beta$ y$\omega, \omega' \models K*(\alpha \vee \beta)$, por la condición (iii) de la definición se tiene $\omega \leq_K \omega'$ y $\omega' \leq_K \omega$.

Ahora vamos a probar la segunda propiedad de asignación fiel, es decir si $\omega \models K$ y $\omega' \not\models K$, entonces $\omega <_K \omega'$. Sean $\omega \models K$ y $\omega' \not\models K$, existe α tal que $\omega \models \alpha$ y por el argumento usado en el párrafo anterior, se tiene que $\omega \models K*\alpha$. Si $\omega' \notin V(K)$, por la condición (ii) de la definición, se tiene que $\omega <_K \omega'$. Supongamos que $\omega' \in V(K)$, entonces existe β tal que $\omega' \models K*\beta$, por ser $K + (\alpha \vee \beta)$ consistente se tiene que $K*(\alpha \vee \beta) = K + \alpha \vee \beta$ y como $\omega' \not\models K$ se cumple $\omega' \not\models K*(\alpha \vee \beta)$ y de la la condición (iii) de la definición, $\omega <_K \omega'$.

A continuación probamos que $mod(K*\alpha) = \text{mín}(mod(\alpha), \leq_K)$. Una inclusión se probó en el lema 1.6.6, es decir, si $\omega' \models K*\alpha$ y $\omega \models \alpha$ entonces $\omega' \leq_K \omega$ que es una afirmación equivalente a la del lema referido. Por lo tanto $mod(K*\alpha) \subseteq \text{mín}(mod(\alpha), \leq_K)$. Veremos la otra contención, sea $\omega \in \text{mín}(mod(\alpha), \leq_K)$, necesitamos probar que $\omega \models K*\alpha$. Como α es consistente se tiene por $(K*5)$ que $K*\alpha$ es consistente, sea $\omega' \models K*\alpha$, en particular $\omega' \models \alpha$ por $(K*2)$; primero veamos que $\omega \in V(K)$, en caso contrario, por la definición [ii] se tiene que $\omega \not\leq_K \omega'$

lo cual contradice la minimalidad de ω en los modelos de α. Luego $\omega \in V(K)$, de este modo existe β tal que $\omega \models K * \beta$, por hipótesis $\omega \leq_K \omega'$, por definición [iii] se verifica $\omega \models K * (\alpha \vee \beta)$, como $\omega \models \alpha$, se tiene que $\neg\alpha \notin K*(\alpha \vee \beta)$ y por $(K*7)$, $(K*8)$ y $(K*6)$ $K*\alpha = K*(\alpha\vee\beta)+\alpha$ y en consecuencia $\omega \models K * \alpha$.

∎

Capítulo 2

Fusion

Cómo fusionar informaciones que vienen de diferentes fuentes es una vieja e interesante pregunta. Nuestro estudio concerniendo esta pregunta se limita al caso en que las informaciones tienen representación lógica. De entrada debemos decir que el problema surge cuando hay conflicto entre las informaciones, es decir cuando ellas son contradictorias. En los otros casos la solución es poner todas las informaciones juntas. Varias propuestas [9, 5, 6, 41, 12, 11] han sido dadas pero no proponen un método general para evaluar y clasificar las diferentes técnicas. Esos son métodos de combinación. La primera proposición para clasificar y entender mejor las propiedades racionales de estos métodos aparece en [27]. Desde entonces esas técnicas han sido refinadas y extendidas [28, 29, 30, 25, 31, 26]. En este capítulo daremos un recuento de los resultados más significativos.

Los aspectos principales de estas técnicas son proponer una caracterización de operadores de fusión en un marco lógico, mediante propiedades que capturen lo racional del comportamiento. Por otra parte lograr una caracterización que permita construir tales operadores.

Es importante notar que en los métodos de fusión que expondremos la información que resulta de la fusión es una información emergente.

En el trabajo seminal [27] todas las informaciones tienen el mismo grado de confianza. En subsecuentes trabajos se generaliza esta idea pero el resultado debe obedecer a ciertas restricciones de integridad. De hecho este enfoque es más general y también extiende al marco AFM para la revisión.

Probaremos teoremas de representación. Esos teoremas sugieren métodos de construcción basados en distancias y funciones de agregación.

Es interesante notar que hay relaciones aún por estudiar entre estos métodos y algunos aspectos de la Teoría de Elección Social [4]

2.1. Bases y Conjuntos de Creencias

Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de todas las fórmulas proposicionales construidas sobre el alfabeto finito $\mathcal{P}$ de proposiciones atómicas. El conjunto de todas las interpretaciones es denotado por $\mathcal{W}$, y $\mathcal{P}^*(\mathcal{W})$ denotará el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos de $\mathcal{W}$.

Sea φ una fórmula, $mod(\varphi)$ denota el conjunto de los modelos de φ, es decir

$$mod(\varphi) = \{w \in \mathcal{W} \mid w \models \varphi\}$$

Dado un conjunto de fórmulas $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$, denotamos por $\bigwedge\Phi$ la conjunción de los elementos de Φ, es decir, $\bigwedge\Phi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$.

Definición 2.1.1 *Una base de creencias φ es un conjunto finito de formulas proposicionales.*

Note que si $\varphi = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, ese conjunto es lógicamente equivalente[1] a $\varphi' = \{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n\}$ y por lo tanto φ será identificada con una sola fórmula a saber $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$.

Una base de creencias φ_i denotará las creencias de un agente i. Supondremos que todas las bases de creencias son consistentes, es decir, que cada agente posee información coherente. Como cada conjunto de creencias es considerada conjuntivamente, denotaremos φ a $\bigwedge\varphi$ de aquí en adelante.

Definición 2.1.2 *Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ n bases de creencias, no necesariamente diferentes. Denominaremos conjunto de creencias al multiconjunto Ψ que consiste de esas n bases de creencias: $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$.*

[1] Decimos que dos conjuntos de fórmulas Σ_1 y Σ_2 son lógicamente equivalentes si $C_n(\Sigma_1) = C_n(\Sigma_2)$

Supongamos $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ y $\Psi = \{\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_m\}$ dos multiconjuntos. La unión de los dos multiconjuntos es el conjunto $\Psi \sqcup \Psi' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi'_1, \ldots, \varphi'_m\}$.

Denotemos por $\bigwedge\Psi$ a la conjunción de las bases de Ψ, es decir, $\Psi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$. Cuando $w \models \bigwedge\Psi$ escribimos $w \models \Psi$.

Obsérvese que a diferencia de $\bigwedge\varphi$ que siempre suponemos consistente, $\bigwedge\Psi$ puede ser inconsistente. Basta con tomar $\Psi = \{\varphi, \varphi'\}$, donde $\varphi = \alpha$ y $\varphi' = \neg\alpha$, con alpha proposición atómica.

Haciendo abuso de notación, si φ es una base de creencia, ella también denotará al conjunto de creencias $\Psi = \{\varphi\}$. Para un entero positivo n, denotaremos por Ψ^n al multiconjunto

$$\underbrace{\Psi \sqcup \cdots \sqcup \Psi}_{n-\textbf{veces}}.$$

Sean $\varphi \in \Psi$ y φ' una base de creencias, denotaremos por $\Psi[\varphi'/\varphi]$ al nuevo multiconjunto formado al sustituir una ocurrencia de φ por φ' en Ψ.

Definición 2.1.3 *Sean Ψ, Ψ' dos conjuntos de creencias. Diremos que Ψ y Ψ' son equivalentes, denotado por $\Psi \leftrightarrow \Psi'$ si,y sólo si, existe $f : \Psi \to \Psi'$ una biyección de multiconjuntos[2] tal que*

$$\vdash f(\varphi) \leftrightarrow \varphi.$$

Definición 2.1.4 *Un preorden $\leq$ sobre un conjunto A es una relación sobre A reflexiva y transitiva.*

Diremos que $\leq$ es un preorden total sobre A si cumple que

(i) $\leq$ es un preorden sobre A

(ii) Para cada w, w' en A se tiene que $w \leq w'$ o bien $w' \leq w$.

[2]Si $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ y $\Psi' = \{\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_n\}$, entonces $f(\varphi_i) = \varphi_{\sigma(i)}$, con σ una permutación

Definición 2.1.5 *Sea $\leq$ un preorden. Definimos $<$ la relación estricta correspondiente como sigue*

$$w < w' \text{ si, y sólo si, } w \leq w' \text{ y } w' \not\leq w,$$

y su correspondiente relación de indiferencia $\simeq$ como

$$w \simeq w' \text{ si, y sólo si, } w \leq w' \text{ y } w' \leq w.$$

Note que $\simeq$ es una relación de equivalencia cuando $\leq$ es un preorden total.

Definición 2.1.6 *Dado $\leq$ un preorden total, diremos que $w \in min(A, \leq)$ si, y sólo si, $w \in A$ y para cada $w' \in A$, $w \leq w'$.*

2.2. Operadores de Fusión

Una bases de creencias φ denotará las creencias de un agente. Un conjunto de creencias Ψ denotará las creencias individuales de los agentes en un grupo.

El objetivo de los operadores de fusión es determinar cuáles son las creencias de grupo a partir de las creencias de los individuos y las restricciones impuestas por el sistema (restricciones físicas, leyes, ...). Esas restricciones estarán codificadas en una base de creencias μ.

El concepto de operador de fusión que a continuación damos es una extensión del concepto introducido en [27]. Fue acuñado en [28] y ampliamente estudiado en [24, 29, 31].

Un operador de fusión Δ es una función que envía un conjunto de creencias Ψ y una base de creencias μ (que denota las restricciones de integridad del sistema) en una bases de creencias. Formalmente:

$$\Delta : \mathbb{P} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$$

donde $\mathbb{P}$ denota el conjunto de todos los conjuntos de creencias. En vez de $\Delta(\Psi, \mu)$ escribiremos $\Delta_\mu(\Psi)$ por simplicidad.

Definición 2.2.1 (Operadores de Fusión IC) Δ *es un operador de fusión con restricciones de integridad (Operador de fusión IC) si, y sólo si, satisface lo siguiente:*

(**IC0**) $\Delta_\mu(\Psi) \vdash \mu$.

(**IC1**) *Si μ es consistente entonces $\Delta_\mu(\Psi)$ es consistente.*

(**IC2**) *Si $\bigwedge\Psi$ es consistente con μ, entonces $\Delta_\mu(\Psi) \leftrightarrow \bigwedge\Psi \wedge \mu$*

(**IC3**) *Si $\Psi \leftrightarrow \Psi'$ y $\mu \leftrightarrow \mu'$, entonces $\Delta_\mu(\Psi) \Leftrightarrow \Delta_{\mu'}(\Psi')$*

(**IC4**) *Si $\varphi \vdash \mu$ y $\varphi' \vdash \mu$, entonces $\Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi \nvdash \bot \Rightarrow \Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi' \nvdash \bot$*

(**IC5**) $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi') \vdash \Delta_\mu(\Psi \sqcup \Psi')$

(**IC6**) *Si $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi') \nvdash \bot$, entonces $\Delta_\mu(\Psi \sqcup \Psi') \vdash \Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi')$*

(**IC7**) $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \mu' \vdash \Delta_{\mu\wedge\mu'}(\Psi)$

(**IC8**) *Si $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \mu' \nvdash \bot$, entonces $\Delta_{\mu\wedge\mu'}(\Psi) \vdash \Delta_\mu(\Psi) \wedge \mu'$*

(ICO) asegura que el operador de fusión satisface las restricciones de integridad. **(IC1)** estipula que siempre que las restricciones de integridad sean consistentes, el resultado de la fusión será consistente. **(IC2)** nos dice que, de ser posible, el resultado de la fusión es la conjunción de las creencias con las restricciones de integridad. **(IC3)** expresa que el hecho de que el resultado de la fusión depende sólo de las opiniones expresadas por los agentes y no de su interpretación sintáctica.

(IC4) es conocido como el postulado de equidad; el punto es que cuando fusionamos dos bases de creencias, el operador no debe dar preferencia a ninguna de ellas.

(IC5) e **(IC6)** estipulan que si se pueden encontrar dos subgrupos cuyos resultados son consistentes entonces el resultado de la fusión global será exactamente la conjunción de los resultados.

(IC7) e **(IC8)** estipulan que una alternativa que es preferida entre las alternativas posibles (μ) se mantendrá preferida si restringimos las posibles escogencias ($\mu \wedge \mu'$) y ella aún está allí.

La figura siguiente muestra esquemáticamente el comportamiento de un operador de fusión:

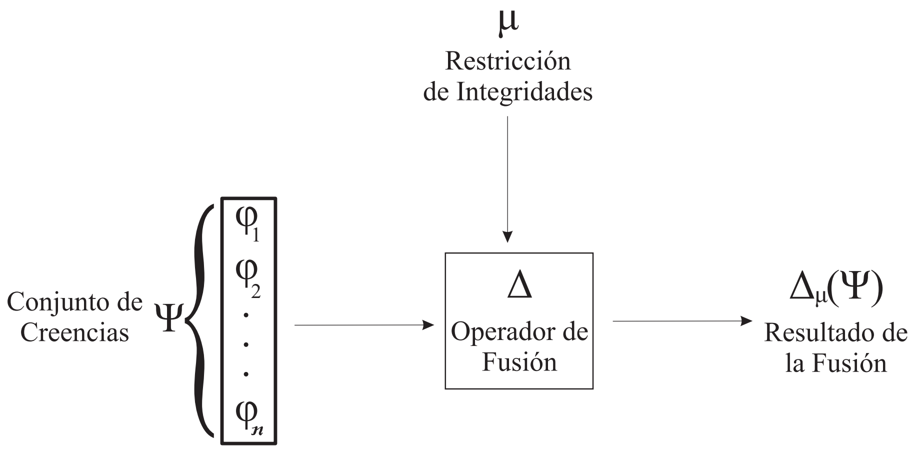


Figura 2.1: Operadores de Fusión Lógica

Definamos ahora dos importantes subclases de operadores de fusión.

Definición 2.2.2 (Operador de Mayoría) *Un operador de fusión IC es un operador de mayoría si satisface la siguiente propiedad*

(**May**) $$\exists n\ \Delta_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2^n) \vdash \Delta_\mu(\Psi_2)$$

Esta condición nos dice que si una interpretación w es estrictamente más plausible que una interpretación w' para un conjunto de creencias Ψ_2, entonces para cualquier conjunto de creencias Ψ_1 de creencias, si se repite suficientemente Ψ_2, en ese nuevo conjunto de creencias $\Psi_1 \sqcup \Psi_2^n$ se mantiene la misma relación estricta entre w y w'.

Definición 2.2.3 (Operador de Arbitraje) *Un operador de fusión IC es un operador de arbitraje si satisface la siguiente propiedad*

(**Arb**) $$\left.\begin{array}{l} \Delta_{\mu_1}(\varphi_1) \Leftrightarrow \Delta_{\mu_2}(\varphi_2) \\ \Delta_{(\mu_1 \leftrightarrow \neg\mu_2)}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \Leftrightarrow (\mu_1 \leftrightarrow \neg\mu_2) \\ \mu_1 \not\vdash \mu_2 \\ \mu_2 \not\vdash \mu_1 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \Delta_{\mu_1 \vee \mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)\ \Leftrightarrow$$

$$\Delta_{\mu_1}(\varphi_1)$$

(May) expresa el hecho de que si una opinión tiene una audiencia grande, esta será la opinión del grupo como un todo. Por otro lado **(Arb)** trata de satisfacer cada agente como sea posible.

Definición 2.2.4 (Asignación Sincrética) *Una asignación sincrética es una función que envía cada conjunto de creencias Ψ a un preorden total $\leq_\Psi$ sobre las interpretaciones tal que para conjuntos de creencias Ψ, Ψ_1, Ψ_2 y bases de creencias φ_1, φ_2 cualesquiera se tiene:*

1. *Si $w \models \Psi$ y $w' \models \Psi$, entonces $w \simeq_\Psi w'$.*

2. *Si $w \models \Psi$ y $w' \not\models \Psi$, entonces $w <_\Psi w'$.*

3. *Si $\Psi_1 \Leftrightarrow \Psi_2$, entonces $\leq_{\Psi_1} = \leq_{\Psi_2}$*

4. $\forall\, w \models \varphi_1\ \exists\, w' \models \varphi_2,\ w' \leq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} w$

5. *Si $w \leq_{\Psi_1} w'$ y $w \leq_{\Psi_2} w'$, entonces $w \leq_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} w'$*

6. *Si $w \leq_{\Psi_1} w'$ y $w <_{\Psi_2} w'$, entonces $w <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} w'$*

Las dos primeras condiciones aseguran que los modelos de los conjuntos de creencias (de haber) son las interpretaciones más plausibles[3] para el preorden asociado al conjunto de creencias. La tercera condición estipula que dos conjuntos de creencias equivalentes tienen el mismo preorden asociado.

La cuarta condición expresa que, cuando se fusionan dos bases de creencias, para cada modelo de la primera, existe un modelo de la segunda tal que es al menos tan buena como la primera. Esto asegura que las dos bases de creencias dadas tienen igual consideración.

La quinta condición dice que si una interpretación w es al menos tan plausible como una interpretación w' para un conjunto de creencias Ψ_1, y de igual manera ocurre para un conjunto de creencias Ψ_2, entonces si se unen las dos bases de creencias w se mantendrá tan plausible como w'.

[3]La relación $\leq_\Psi$ se interpreta como una relación de plausibilidad; así $w \leq_\Psi w'$ significará que w es más plausible que w'

La sexta condición fortifica la condición previa. Esta condición expresa que si una interpretación w es al menos tan plausible como una interpretación w' para un conjunto de creencias Ψ_1, y si w es estrictamente más plausible que w' para un conjunto de creencias Ψ_2, entonces si unimos las dos conjuntos de creencias w será estrictamente más plausible que w'.

Definición 2.2.5 (Asignación Sincrética de Mayoría) *Una asignación sincrética de mayoría es una asignación sincrética la cual satisface lo siguiente:*

7. *Si* $w <_{\Psi_2} w'$, *entonces existe* n *entero positivo tal que* $w <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2^n} w'$

Definición 2.2.6 (Asignación Sincrética Equitable) *Una asignación sincrética equitable es una asignación sincrética que satisface:*

8. $$\left.\begin{array}{l} w_1 <_{\varphi_1} w_2 \\ w_1 <_{\varphi_2} w_3 \\ w_2 \simeq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} w_3 \end{array}\right\} \Rightarrow w_1 <_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} w_2$$

Esta condición estipula que si una interpretación w_1 es estrictamente más plausible que una interpretación w_2 para una base de creencias φ_1, si w_1 es estrictamente más plausible que w_3 para una base de creencias φ_2, y además w_2 y w_3 son igualmente plausibles para el conjunto de creencias $\varphi_1 \sqcup \varphi_2$, entonces w_1 tiene que ser estrictamente más plausible que w_2 y w_3 para $\varphi_1 \sqcup \varphi_2$.

Ejemplo 2.2.7 Juan y Pedro[4] se perdieron del encuentro de fútbol entre estudiantes y mineros jugado el día de ayer, así que ellos no conocen el resultado. Juan escuchó en la mañana de hoy que estudiantes hizo un buen partido, así el piensa que una de victoria de estudiantes es más plausible que un empate, y que un empate es más confiable que una victoria de mineros. A Pedro le dijeron que después de ese partido que mineros tiene más chance de ganar el campeonato. De esta información Pedro infiere que mineros ganó el partido, o si no que al menos empataron.

[4]Este ejemplo es una modificación de un ejemplo ilustrativo aparecido en [31].

Confrontando sus puntos de vista, Juan y Pedro acordaron sobre el hecho de que los dos equipos tienen la misma fuerza, que cualquiera pudo haber ganado. Lo que demanda el arbitraje , con esa información, es que Juan y Pedro deben acordar que un empate es el resultado más plausible.

Teorema 2.2.8 (Teorema de representación, [28, 29]) *Un operador es un operador de fusión IC si, y sólo si, existe una asignación sincrética que manda cada conjunto de creencias* Ψ *en un preorden total* $\leq_\Psi$ *sobre* $\mathcal{W}$ *tal que*

$$mod(\Delta_\mu(\Psi)) = min(mod(\mu), \leq_\Psi)$$

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea Ψ un conjunto de creencias. Definimos la relación $\leq_\Psi$ de la siguiente forma:

$$\forall w, w' \; w \leq_\Psi w' \text{ si, y sólo si } w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi)$$

Veamos que $\leq_\Psi$ es un preorden total sobre $\mathcal{W}$

Totalidad Sean $w, w' \in \mathcal{W}$ y consideremos, la fórmula $\varphi_{\{w,w'\}}$, con $mod(\varphi_{\{w,w'\}}) = \{w, w'\}$. Así bien, por (IC1) y la consistencia de $\varphi_{\{w,w'\}}$, se tiene que $\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi)$ es consistente. Además, por (IC0), $\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi) \vdash \varphi_{\{w,w'\}}$. De esta manera $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi)$, o bien $w' \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi)$. Por lo tanto

$$w \leq_\Psi w', \text{ o bien } w' \leq_\Psi w$$

Transitividad Supongamos $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{W}$ tales que $w_1 \leq_\Psi w_2$ y $w_2 \leq_\Psi w_3$. Mostremos que $w_1 \leq_\Psi w_3$; para ello razonemos por el absurdo suponiendo que $w_1 \not\leq_\Psi w_3$. De esta forma

$$w_1 \not\models \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_3\}}}(\Psi)$$

Por otro lado, de la consistencia de $\varphi_{\{w_1,w_3\}}$ y por (IC0) e (IC1) tenemos que $\emptyset \neq mod(\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_3\}}}(\Psi)) \subset \{w_1, w_3\}$, y como $w_1 \not\models \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_3\}}}(\Psi)$, entonces

$$mod(\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_3\}}}(\Psi)) = \{w_3\}. \tag{2.1}$$

Luego, en virtud de (IC7) se tiene que

$$\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_3\}} \vdash \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_3\}}}(\Psi)$$

ya que $\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}} \wedge \varphi_{\{w_1,w_3\}} \leftrightarrow \varphi_{\{w_1,w_3\}}$ y en virtud de (IC3) Δ es independiente de la sintaxis. Así, consideremos los siguientes dos casos.

- $\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_3\}}$ consistente.

  Por (IC8) y en virtud de la hipótesis tenemos que

  $$\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_3\}}}(\Psi) \Leftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_3\}}.$$

  Así, por (2.1) se tiene que $mod(\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_3\}}) = \{w_3\}$, y de esta forma $w_1 \not\models \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)$. Nótese además que $mod(\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)) \neq \{w_2\}$. Así
  (i) $mod(\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)) = \{w_2, w_3\}$, o bien
  (ii) $mod(\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)) = \{w_3\}$]

  En el primer caso, obsérvese que por la consistencia de $\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)$ con φ_{w_1,w_2}, se tiene que

  $$\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_2\}} \Leftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2\}}}(\Psi)$$

  en virtud de (IC3), (IC7), e (IC8).

  Por otro lado, como $w_1 \not\models \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)$, entonces $w_1 \not\models \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_2\}}$, y por lo tanto $w_1 \not\models \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2\}}}(\Psi)$; lo que contradice que $w_1 \leq_\Psi w_2$.

Para el segundo caso, por la consistencia de $\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)$ con $\varphi_{\{w_2,w_3\}}$, nuevamente por (IC3), (IC7) e (IC8), se tiene que

$$\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_2,w_3\}} \Leftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w_2,w_3\}}}(\Psi)$$

y como $mod(\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)] \wedge \varphi_{\{w_2,w_3\}}) = \{w_3\}$, entonces $w_2 \not\models \Delta_{\varphi_{\{w_2,w_3\}}}(\Psi)$; lo que contradice que $w_2 \leq_\Psi w_3$.

- $\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_3\}}$ es inconsistente.

  En este caso tenemos que $\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \Leftrightarrow \varphi_{w_2}$, y por lo tanto

$$\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_2\}} \Leftrightarrow \varphi_{w_2}.$$

  Ahora bien, en virtud de (IC3),(IC7) e (IC8) tenemos que

$$\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2\}}}(\Psi) \Leftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi) \wedge \varphi_{\{w_1,w_2\}},$$

  ya que $\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2,w_3\}}}(\Psi)$ es consistente con $\varphi_{\{w_1,w_2\}}$ es consistente, lo que indica que $mod(\Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2\}}}(\Psi)) = \{w_2\}$. De esta manera $w_1 \not\models \Delta_{\varphi_{\{w_1,w_2\}}}(\Psi)$, implicando que $w_1 \not\leq_\Psi w_2$. Contradicción.

Así, para cada Ψ conjunto de creencias, $\leq_\Psi$ define un preorden total sobre $\mathcal{W}$.

Veamos ahora que para cada μ restricción de integridad $mod(\Delta_\mu(\Psi)) = min(mod(\mu), \leq_\Psi)$.

- $mod(\Delta_\mu(\Psi)) \subset min(mod(\mu), \leq_\Psi)$.

  Sea $w \in mod(\Delta_\mu(\Psi))$ y supongamos que $w \notin (mod(\mu), \leq_\Psi)$. Así existe $w' \models \mu$ tal que $w' <_\Psi w$. De la definición de $\leq_\Psi$ tenemos que

$$w \not\models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi). \tag{2.2}$$

  Por otra parte, ya que $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \varphi_{\{w,w'\}}$ es consistente, en virtud de (IC7) e (IC8), tenemos que

$$\Delta_\mu(\Psi) \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \Leftrightarrow \Delta_{\mu\wedge\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi). \tag{2.3}$$

Como $w \models \Delta_\mu(\Psi)$, en virtud de (IC0) $w \models \mu$, y como $w' \models \mu$ tenemos que $\mu \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \Leftrightarrow \varphi_{\{w,w'\}}$. Luego, de (IC3) y de (2.3) se tiene que

$$\Delta_\mu(\Psi) \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \Leftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi).$$

De esta ecuación y de (2.2) se tiene que $w \not\models \Delta_\mu(\psi)$, lo que es una contradicción.

- $mod(\Delta_\mu(\Psi)) \supset min(mod(\mu), \leq_\Psi)$.

Supongamos $w \in min(mod(\mu), \leq_\Psi)$. De esta manera para cada w' modelo de μ se tiene que $w \leq_\Psi w'$. Luego, de la definición de $\leq_\Psi$ tenemos que $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi)$.

De (IC1) sabemos que $\Delta_\mu(\Psi)$ es consistente, ya que μ lo es. De esta manera, si $w' \models \Delta_\mu(\Psi)$ tenemos que $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \varphi_{\{w,w'\}}$ es consistente y en virtud de (IC7) e (IC8) se tiene que

$$\Delta_\mu(\Psi) \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \Leftrightarrow \Delta_{\mu \wedge \varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi)$$

Ahora bien, como $\mu \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \Leftrightarrow \varphi\{w, w'\}$, de (IC3) se tiene que

$$\Delta_\mu(\Psi) \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \Leftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi)$$

Luego $w \models \Delta_\mu(\Psi)$, lo que indica que $w \in mod(\Delta_\mu(\Psi))$.

Consideremos así la aplicación que relaciona a cada base de creencias Ψ con su preorden $\leq_\Psi$ sobre $\mathcal{W}$, y mostremos que dicha aplicación es una asignación sincrética.

Consideremos los conjuntos de creencias Ψ, Ψ_1, Ψ_2 y las bases de creencias φ_1, φ_2.

1. Si $w \models \Psi$ y $w' \models \Psi$ entonces $\Psi \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \not\vdash \perp$. De (IC2) tenemos que

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi) \Leftrightarrow \Psi \wedge \varphi_{\{w,w'\}},$$

y como $\Psi \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \Leftrightarrow \varphi_{\{w,w'\}}$ se tiene que

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi) \Leftrightarrow \varphi_{\{w,w'\}}$$

de esta manera, $mod(\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi)) = \{w, w'\}$, implicando que $w \leq_\Psi w'$ y $w' \leq_\Psi w$. Luego $w \simeq_\Psi w'$.

2. Si $w \models \Psi$ y $w' \not\models \Psi$ entonces $\Psi \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \nvdash \bot$; más aún, $\Psi \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \Leftrightarrow \varphi_w$. De esta forma, en virtud de (IC2) tenemos que
$$\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi) \Leftrightarrow \varphi_w$$
De esta manera $w \leq_\Psi w'$ y $w' \not\leq_\Psi w$, y por lo tanto $w <_\Psi w'$.

3. Supongamos que $\Psi_1 \Leftrightarrow \Psi_2$, y sean $w, w' \in \mathcal{W}$ tales que $w \leq_{\Psi_1} w'$. De esta manera $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1)$. De (IC3) sabemos que $\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1) \Leftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_2)$, de esta forma $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_2)$. De aquí se sigue que $w \leq_{\Psi_2} w'$.

4. Antes de demostrar esta propiedad, veamos que $\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_2$ es consistente. Razonemos por el absurdo, y supongamos que no es así. De esta forma se tiene que
$$\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_2 \vdash \bot \tag{2.4}$$
Por otro lado, en virtud de (IC0), $\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$. Así, por (2.4) tenemos que $\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \vdash \varphi_1$ lo que nos dice que $\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_1 \nvdash \bot$. De (IC4) se tiene que $\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_2 \nvdash \bot$, lo que contradice (2.4).

   Continuando con la demostración de esta propiedad, supongamos $w \models \varphi_1$ y mostremos la existencia de $w' \models \varphi_2$ tal que $w' \leq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} w$.

   Sea $w' \models \Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_2$ y consideremos la base de creencias $\varphi_{\{w,w'\}}$. Por la consistencia de $\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_{\{w,w'\}}$ y en virtud de (IC7) e (IC8) se tiene que
$$\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \Leftrightarrow \Delta_{(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$$
   Como $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \Leftrightarrow \varphi_{\{w,w'\}}$, de (IC3) se tiene que
$$\Delta_{\varphi_1 \vee \varphi_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \wedge \varphi_{\{w,w'\}} \Leftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$$
   De esta forma $w' \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$, implicando que $w' \leq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} w$.

5. Sean $w, w' \in \mathcal{W}$ tales que $w \leq_{\Psi_1} w'$ y $w \leq_{\Psi_2} w'$. Así, por la definición de $\leq_\Psi$ tenemos que $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1) \wedge \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_2)$. Por (IC5) se tiene que

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1) \wedge \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_2) \vdash \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2),$$

luego $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$. Así $w \leq_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} w'$.

6. Si $w, w' \in W$ son tales que $w \leq_{\Psi_1} w'$ y $w <_{\Psi_2} w'$, entonces $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1) \wedge \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_2)$ y $w' \not\models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1) \wedge \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_2)$.

   Por ser $\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1) \wedge \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_2)$ consistente, de (IC5) e (IC6) se tiene que

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1) \wedge \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_2) \Leftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$$

   De esta manera, $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$ y $w' \not\models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$, implicando que $w <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} w'$.

($\Leftarrow$) Consideremos una asignación sincrética que asocia a cada conjunto de creencias Ψ, un preorden total $\leq_\Psi$sobre $\mathcal{W}$ y definamos un operador $\Delta : \mathbb{P} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ mediante la ecuación

$$mod(\Delta_\mu(\Psi)) = min(mod(\mu), \leq_\Psi). \tag{2.5}$$

Mostremos que Δ satisface (IC0)-(IC8), para ello consideremos Ψ, Ψ' conjuntos de creencias y μ, μ' restricciones de integridad

(**IC0**) Directamente de la definición $mod(\Delta_\mu(\Psi)) = min(mod(\mu), \leq_\Psi) \subset mod(\mu)$, y por el teorema de completitud $\Delta_\mu(\Psi) \vdash \mu$.

(**IC1**) Si μ es consistente, entonces $mod(\mu) \neq \emptyset$. Como existe un número finito de interpretaciones, no existe cadenas decrecientes infinitas de desigualdades, así $min(mod(\mu), \leq_\Psi) \neq \emptyset$. Luego $\Delta_\mu(\Psi)$ es consistente.

(**IC2**) Supongamos que $\bigwedge\Psi \wedge \mu \not\vdash \bot$, y mostremos que $mod(\bigwedge\Psi \wedge \mu) = min(mod(\mu), \leq_\Psi)$.

- $mod(\bigwedge\Psi \wedge \mu) \subset min(mod(\mu), \leq_\Psi)$:

  Notemos que si $w \models \Psi$, entonces, en virtud de los postulados 1 y 2, para cualquier $w' \in \mathcal{W}$ se tiene que $w \leq_\Psi w'$. De esta manera si $w \models \bigwedge\Psi \wedge \mu$ entonces para cualquier $w' \in \mathcal{W}$ $w \leq_\Psi w'$, implicando que $w \in min(mod(\mu), \leq_\Psi)$.

- $mod(\bigwedge\Psi \wedge \mu) \supset min(mod(\mu), \leq_\Psi)$:

  Sea $w \in min(mod(\mu), \leq_\Psi)$ y, buscando una contradicción, supongamos que $w \not\models \bigwedge\Psi \wedge \mu$. De esta manera $w \not\models \Psi$, lo que nos dice que para cualquier $w' \models \Psi$ $w' <_\Psi w$, en particular si tomamos $w' \models \Psi \wedge \mu$. Luego $w \notin min(mod(\mu), \leq_\Psi)$, lo cual es una contradicción.

(**IC3**) Supongamos que $\Psi \Leftrightarrow \Psi'$ y que $\mu \Leftrightarrow \mu'$. Para mostrar que $min(mod(\mu), \leq_\Psi) = min(mod(\mu'), \leq'_\Psi)$, basta con mostrar que $min(mod(\mu), \leq_\Psi) = min(mod(\mu), \leq_{\Psi'})$ pues $mod(\mu) = mod(\mu')$. Pero esto es evidente pues por la propiedad 3, $\leq_\Psi = \leq_{\Psi'}$

(**IC4**) Supongamos que φ y φ' son bases de creencias tales que $\varphi \vdash \mu$, $\varphi' \vdash \mu$ y $\Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi \nvdash \bot$. Mostremos que $\Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi' \nvdash \bot$.

Supongamos $w \models \Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi$. Como $w \models \Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi')$, por la definición de Δ, para cualquier $w'' \models \mu$ se tiene que $w \leq_{\varphi \sqcup \sigma} w''$. Por otro lado, en virtud del postulado 4, existe $w' \models \varphi'$ tal que $w' \leq_{\varphi \sqcup \varphi'} w$. Así, por transitividad, $w' \leq_{\varphi \sqcup \varphi'} w''$ para cualquier w'' modelo de μ. Luego, por definición de Δ, $w' \models \Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi')$ y por lo tanto $w' \models \Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi'$, es decir $\Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi' \nvdash \bot$

(**IC5**) Supongamos $w \models \Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi')$. De esta manera $w \models \mu$ y si $w' \models \mu$, entonces $w \leq_\Psi w'$ y $w \leq_{\Psi'} w'$. Así, de la condición 5 se tiene que, si $w' \models \mu$ entonces $w \leq_{\Psi \sqcup \Psi'} w'$, implicando que $w \in min(mod(\mu), \leq_{\Psi \sqcup \Psi'})$, lo que nos dice que $w \models \Delta_\mu(\Psi \sqcup \Psi')$. Luego

$$\Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu\big(\Psi'\big) \vdash \Delta_\mu\big(\Psi \sqcup \Psi'\big)$$

en virtud del Teorema de completitud.

(**IC6**) Supongamos que $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi')$ es consistente, y demostremos que $\Delta_\mu(\Psi \sqcup \Psi') \vdash \Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi')$.

Sea $w \models \Delta_\mu(\Psi \sqcup \Psi')$. Así para cualquier $w' \models \mu$ $w \leq_{\Psi \sqcup \Psi'} w'$. Supongamos que $w \not\models \Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi')$, así $w \not\models \Delta_\mu(\Psi)$, o bien $w \not\models \Delta_\mu(\Psi')$.

Sin perdida de generalidad, supongamos que $w \not\models \Delta_\mu(\Psi)$ (el caso $w \not\models \Delta_\mu(\Psi')$ se demuestra de forma análoga). En virtud de la consistencia de $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi')$, podemos tomar $w' \models \Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi')$, obteniendo así que $w' <_\Psi w$ y $w' \leq_{\Psi'} w$. Como consecuencia de la condición 5, $w' <_{\Psi \sqcup \Psi'} w$. De esta manera $w \notin min(mod(\mu), \leq_{\Psi \sqcup \Psi'})$, y por lo tanto $w \not\models \Delta_\mu(\Psi \sqcup \Psi')$. Contradicción.

(**IC7**) Supongamos que $w \models \Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$. Así:

$$\forall\, w' \models \mu_1,\; w \leq_\Psi w',$$

en especial si $w' \models \mu_1 \wedge \mu_2$.
Luego, $w \in min(mod(\mu_1 \wedge \mu_2), \leq_\Psi)$, lo que implica $w \models \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$. Por lo tanto $\Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2 \vdash \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$.

(**IC8**) Supongamos que $\Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$ es consistente. Así existe $w' \models \Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$. En búsqueda de una contradicción, supongamos $w \models \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$ tal que $w \not\models \Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$. En virtud de (IC0) $w \models \mu_1 \wedge \mu_2$, así $w \not\models \Delta_{\mu_1}(\Psi)$ y por lo tanto $w' <_\Psi w$. Pero $w' \models \mu_1 \wedge \mu_2$, lo que nos lleva a que $w \notin min(mod(\mu_1 \wedge \mu_2), \leq_\Psi)$ y en consecuencia $w \not\models \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$, lo que es una contradicción.

∎

El teorema 2.2.8 nos dice que un operador de fusión IC le corresponde una familia de preordenes. De hecho, un operador está determinado completamente por estos preordenes, usando una función que envía cada conjunto de creencias a un preorden. Daremos algunos algunos ejemplos de esto en la siguiente sección.

Un análisis de la demostración del teorema 2.2.8 revela que el postulado (IC6) solamente se usó para demostrar la condición 6 de la definición de asignación sincrética y, del mismo modo, dicha condición se uso para demostrar (IC6). De igual forma, (IC4) corresponde a la condición 4 sobre la asignación. Esta simple observación nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 2.2.9 *Un operador satisface* (IC0)-(IC5), (IC7) *e* (IC8) *si, y sólo si, puede ser representado por una asignación que satisface* $1-5$. *Un operador satisface* (IC0)-(IC3), (IC5)-(IC8) *si, y sólo si, puede ser representado por una asignación que satisface* $1-3$, 5 *y* 6.

Próximamente daremos una variante del Teorema 2.2.8 debilitando el postulado (IC6) y su correspondiente condición sobre la asignación.

Consideremos el siguiente postulado

(IC6′) *Si* $\Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi') \nvdash \bot$ *entonces* $\Delta_\mu(\Psi \sqcup \Psi') \vdash \Delta_\mu(\Psi) \vee \Delta_\mu(\Psi')$

Esta propiedad dice que si una alternativa es tomada por un grupo, entonces si dividimos el grupo en dos subgrupos (los cuales concuerdan en algo), al menos uno de estos subgrupos tendrá esa alternativa. Esta propiedad corresponde a la siguiente condición que es obviamente más débil que la condición 6 para las asignaciones sincréticas.

$6'$. Si $w <_\Psi w'$ y $w <_{\Psi'} w'$, entonces $w <_{\Psi\sqcup\Psi'} w'$

Note que por ser $\leq_\Psi$ y $\leq_{\Psi'}$ preórdenes totales el contrarecíproco de 6' se puede escribir de la siguiente manera:

$$w' \leq_{\Psi\sqcup\Psi'} w \;\Rightarrow\; w \leq_\Psi w' \quad \text{o} \quad w <_{\Psi'} w'$$

Definición 2.2.10 *Diremos que un operador es un operador de cuasi-fusión IC si satisface* (IC0)-(IC5), (IC6'), (IC7) *e* (IC8). *Una asignación cuasi-sincrética es una asignación que satisface las condiciones* $1-5$ *y* $6'$.

Teorema 2.2.11 *Un operador* Δ *es un operador de cuasi-fusión si, y sólo si, puede ser representado por una asignación cuasi-sincrética.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos Δ un operador que satisface los postulados (IC0)-(IC5), (IC6'), (IC7) e (IC8), y definamos una asignación sincrética como se en la demostración del teorema 2.2.8. En virtud del corolario 2.2.9, la asignación representada por Δ satisface las condiciones 1-5. De esta manera sólo nos queda por demostrar la condición 6'.

Supongamos que $w, w' \in \mathcal{W}$ son tales que $w <_\Psi w'$ y $w <_{\Psi'} w'$, veamos que $w <_{\Psi \sqcup \Psi'} w'$. Por hipótesis tenemos que:

$$(i)\ \ w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi) \wedge \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi')$$

$$(ii)\ \ w' \not\models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi) \vee \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi')$$

Así, en virtud de (IC0) e (IC6') se tiene que

$$mod(\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi \sqcup \Psi')) \subset mod(\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi) \vee \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi')) \subset \{w\},$$

y de (IC5) se tiene que

$$\emptyset \neq mod(\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi) \wedge \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi')) \subset mod(\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi \sqcup \Psi')).$$

De esta manera $mod(\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi \sqcup \Psi')) = \{w\}$, lo que indica que $w \models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi \sqcup \Psi')$ y $w' \not\models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi \sqcup \Psi')$. De esta manera $w <_{\Psi \sqcup \Psi'} w'$.

($\Leftarrow$) Consideremos una aplicación que envía a cada conjunto de creencia Ψ en un preorden total $\leq_\Psi$ sobre $\mathcal{W}$ que satisface 1-5 y 6' y definamos Δ como en la ecuación 2.5. Por el corolario 2.2.9 sabemos que Δ satisface (IC0)-(IC5), (IC7) e (IC8); faltando sólo por demostrar (IC6').

Supongamos $w \models \Delta_\mu(\Psi \sqcup \Psi')$. Por hipótesis existe w'' tal que $w'' \models \Delta_\mu(\Psi) \wedge \Delta_\mu(\Psi')$. Por definición de Δ, $\forall\ w' \models \mu$ se tiene que $w \leq_{\Psi\sqcup\Psi'} w'$, en particular $w \leq_{\Psi\sqcup\Psi'} w''$. Luego, en virtud de la condición 6 (su contrarecíproco), $w \leq_\Psi w''$ o $w \leq_{\Psi'} w''$; de allí se obtiene facilemente que $w \in min(mod(\mu), \leq_\Psi)$, o bien $w \in min(mod(\mu), \leq_{\Psi'})$ es decir $w \models \Delta_\mu(\Psi) \vee \Delta_\mu(\Psi')$.

∎

Teorema 2.2.12 *Un operador Δ es un operador mayoritario si, y sólo si, existe una asignación sincrética de mayoría tal que asocia a cada conjunto de creencia Ψ un preorden total $\leq_\Psi$ sobre $\mathcal{W}$ tal que*

$$mod(\Delta_\mu(\Psi)) = min(mod(\mu), \leq_\Psi)$$

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea Δ un operador que satisface (IC0)-(IC8) y (May) . En virtud del teorema 2.2.8, sabemos que existe una asignación sincrética tal que a cada conjunto de creencias Ψ le asocia un preorden total $\leq_\Psi$. De esta manera, sólo nos falta por demostrar la condición de asignación sincrética de mayoría.

Supongamos Ψ y Ψ' conjuntos de creencias, y sean w, w' modelos tales que $w <_{\Psi'} w$. En virtud de (IC0) e (IC1) se tiene que

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi') \Leftrightarrow \varphi_w, \tag{2.6}$$

y por (May) sabemos que existe n tal que $\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi \sqcup (\Psi')^n) \vdash \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi')$. En virtud de (IC1) y de (2.6)se tiene que $\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\Psi \sqcup (\Psi')^n) \Leftrightarrow \varphi_w$. Luego, $\exists n\ w <_{\Psi\sqcup(\Psi')^n} w'$.

($\Leftarrow$) Consideremos una aplicación sincrética de mayoría que envía cada base de creencias Ψ en un preorden total $\leq_\Psi$, y definamos el operador Δ como en la ecuación (2.5). Por el teorema 2.2.8 sabemos que el operador Δ define un operador de fusión IC, satisfaciendo las condiciones (IC0)-(IC8). Veamos que Δ satisface también (May) ; para ello veamos primero, haciendo uso del Principio de inducción, que la siguiente condición es cierta:

$$w <_{\Psi'} w' \Rightarrow \exists\, n_o \,\forall\, n \geq n_o \quad w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^n} w' \tag{2.7}$$

En efecto, si $w <_{\Psi'} w'$, por la condición 7 de mayoría tenemos que

$$\exists\, n_o\; w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^{n_o}} w';$$

luego por la condición 6 tenemos que $w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^{n_o} \sqcup \Psi'} w'$, es decir

$$w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^{n_o+1}} w',$$

puesto que $(\Psi \sqcup (\Psi')^{n_o}) \sqcup \Psi' = \Psi \sqcup (\Psi')^{n_o+1}$.

Supongamos ahora que para $n \geq n_o$ se tiene que $w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^n} w'$, y mostremos que para $n+1$ también se cumple que $w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^{n+1}} w'$. Como $w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^n} w'$ y $w <_{\Psi'} w'$, en virtud de la condición 6 se tiene que $w <_{(\Psi \sqcup (\Psi')^n) \sqcup \Psi'} w'$.

Luego, como $(\Psi \sqcup (\Psi')^n) \sqcup \Psi' = \Psi \sqcup (\Psi')^{n+1}$, entonces $w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^{n+1}} w'$, con lo que se demuestra nuestra afirmación.

Ahora supongamos que $\forall n\; \Delta_\mu(\Psi \sqcup (\Psi')^n) \not\vdash \Delta_\mu(\Psi')$ y veamos que esto nos lleva a una contradicción. De esta hipótesis se tiene que

$$\forall\, n\, \exists w_n \models \mu\; \forall w' \models \mu,\; w_n \leq_{\Psi \sqcup (\Psi')^n} w' \;\wedge\; \exists w'_n \models \mu,\; w'_n <_{\Psi'} w_n \tag{2.8}$$

Consideremos la función $f : \mathbb{N} \to \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ definida por $f(n) = (w_n, w'_n)$, donde w_n y w'_n cumplen con las propiedad dada en 2.8. Por la finitud de $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ se tiene que existe (w, w') imagen de infinitos valores de n, es decir que para n arbitrariamente grande, se tiene que

$$\exists w \models \mu\; \forall w'' \models \mu,\; w \leq_{\Psi \sqcup (\Psi')^n} w'' \;\wedge\; \exists w' \models \mu,\; w' <_{\Psi'} w,$$

en especial:

$$w \leq_{\Psi \sqcup (\Psi')^n} w' \wedge \ w' <_{\Psi'} w$$

lo que contradice 2.7.

∎

Teorema 2.2.13 *Un operador Δ es un operador de arbitraje si, y sólo si, existe una asignación sincrética equitable que envía cada conjunto de creencias Ψ en un preorden total $\leq_\Psi$, tal que $mod(\Delta_\mu(\Psi)) = min(mod(\mu), \leq_\Psi)$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Consideremos Δ un operador que satisface los postulados (IC0)-(IC8) y (Arb) . Definamos una asignación sincrética como se hizo en la demostración del teorema 2.2.8, así sólo nos queda demostrar la condición de asignación sincrética equitable.

Supongamos $w <_\varphi w'$, $w <_{\varphi'} w''$ y $w' \simeq_{\varphi \sqcup \varphi'} w''$. Notemos que si $w' = w''$ entonces de la condición 6 tenemos que $w <_{\varphi \sqcup \varphi'} w'$. Supongamos entonces que $w' \neq w''$.

Como $w <_\varphi w'$, entonces $w' \not\models \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi)$. Así, en virtud de (IC0) e (IC1) tenemos que $\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi_w$.

De manera análoga, como $w <_{\varphi'} w''$, entonces

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w''\}}}(\varphi') \Leftrightarrow \varphi_w$$

y por lo tanto

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi) \Leftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w,w''\}}}(\varphi') \tag{2.9}$$

Veamos que $(\varphi_{\{w,w'\}} \Leftrightarrow \neg\varphi_{\{w,w''\}}) \Leftrightarrow \varphi_{\{w',w''\}}$. En efecto, como

$$(\varphi_{\{w,w'\}} \Leftrightarrow \neg\varphi_{\{w,w''\}}) \Leftrightarrow ((\varphi_{\{w,w'\}} \vee \varphi_{\{w,w''\}}) \wedge \neg(\varphi_{\{w,w'\}} \wedge \varphi_{\{w,w''\}})),$$

además como

$$(\varphi_{\{w,w'\}} \vee \varphi_{\{w,w''\}}) \Leftrightarrow \varphi_{\{w,w',w''\}} \text{ y } (\varphi_{\{w,w'\}} \wedge \varphi_{\{w,w''\}}) \Leftrightarrow \varphi_w$$

entonces

$$((\varphi_{\{w,w'\}} \vee \varphi_{\{w,w''\}}) \wedge \neg(\varphi_{\{w,w'\}} \wedge \varphi_{\{w,w''\}})) \Leftrightarrow \varphi_{\{w',w''\}} \tag{2.10}$$

Ahora bien, en virtud de (IC3) tenemos que

$$\Delta_{(\varphi_{\{w,w'\}} \leftrightarrow \neg\varphi_{\{w,w''\}})}(\varphi \sqcup \varphi') \Leftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w',w''\}}}(\varphi \sqcup \varphi') \tag{2.11}$$

Por otro lado, como

$$mod(\Delta_{\varphi_{\{w',w''\}}}(\varphi \sqcup \varphi')) = min(mod(\varphi_{\{w',w''\}}), \leq_{\varphi\sqcup\varphi'}) = \{w', w''\}$$

entonces

$\Delta_{\varphi_{\{w',w''\}}}(\varphi \sqcup \varphi') \Leftrightarrow \varphi_{\{w',w''\}}$ así, en virtud de 2.10 y 2.11 tenemos que

$$\Delta_{(\varphi_{\{w,w'\}} \leftrightarrow \neg\varphi_{\{w,w''\}})}(\varphi \sqcup \varphi') \Leftrightarrow (\varphi_{\{w,w'\}} \leftrightarrow \neg\varphi_{\{w,w''\}}) \tag{2.12}$$

Ahora bien, como

$$\left.\begin{array}{ccc} \varphi_{\{w,w'\}} & \not\vdash & \varphi_{\{w,w''\}} \\ \varphi_{\{w,w''\}} & \not\vdash & \varphi_{\{w,w'\}} \end{array}\right\} \tag{2.13}$$

y $w' \neq w''$, en virtud de (Arb) , 2.9, 2.11 y 2.13, se tiene que

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}} \vee \varphi_{\{w,w''\}}}(\varphi \sqcup \varphi') \Leftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi) \tag{2.14}$$

Por otro lado, como $\varphi_{\{w,w'\}} \vee \varphi_{\{w,w''\}} \Leftrightarrow \varphi_{\{w,w',w''\}}$, de (IC3) se tiene que

$$\Delta_{\varphi_{\{w,w',w''\}}}(\varphi \sqcup \varphi') \Leftrightarrow \Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi) \tag{2.15}$$

y como $\Delta_{\varphi_{\{w,w'\}}}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi_w$ se tiene que $\Delta_{\varphi_{\{w,w',w''\}}}(\varphi \sqcup \varphi') \Leftrightarrow \varphi_w$. De esta manera

$$w <_{\varphi\sqcup\varphi'} w' \text{ y } w <_{\varphi\sqcup\varphi'} w''.$$

(⇒) Consideremos una asignación sincrética equitable que asigna a cada conjunto de creencias Ψ un preorden total $\leq_\Psi$ y definamos Δ tomando para cada μ, restricción de integridad, $mod(\Delta_\mu(\Psi)) = min(mod(\mu), \leq_\Psi)$. Por el teorema 2.2.8, Δ satisface (IC0)-(IC8), faltando sólo por demostrar (Arb) .
Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

$\Delta_\mu(\varphi) \Leftrightarrow \Delta_{\mu'}(\varphi')$
$(\Delta_{(\mu\leftrightarrow\neg\mu')}(\varphi \sqcup \varphi')) \Leftrightarrow (\mu \leftrightarrow \neg\mu')$
$\mu \wedge \neg\mu' \nvdash \bot$
$\mu' \wedge \neg\mu \nvdash \bot$

y demostremos que $\Delta_{\mu\vee\mu'}(\varphi \sqcup \varphi') \Leftrightarrow \Delta_\mu(\varphi)$; para ello veamos primero que $\Delta_\mu(\varphi) \vdash \Delta_{\mu\vee\mu'}(\varphi \sqcup \varphi')$. Por la consistencia de μ tenemos que $\Delta_\mu(\varphi)$ es consistente. Sea$w$ tal que $w \models \Delta_\mu(\varphi)$ y supongamos que $w \not\models \Delta_{\mu\vee\mu'}(\varphi \sqcup \varphi')$. De esta manera existe $w' \models \mu \vee \mu'$ tal que $w' <_{\varphi\sqcup\varphi'} w$.

Consideremos los siguientes tres casos:

Caso 1.1 Supongamos que $w' \models \mu \wedge \mu'$. Puesto que $w \models \Delta_\mu(\varphi)$ se tiene $w \leq_\varphi w'$, y como $\Delta_\mu(\varphi) \Leftrightarrow \Delta_{\mu'}(\varphi')$ se tiene que $w \leq_{\varphi'} w'$. En virtud de la condición 5 tenemos que $w \leq_{\varphi\sqcup\varphi'} w'$, lo cual es una contradicción.

Caso 1.2 Supongamos que $w' \models \mu \wedge \neg\mu'$. Como $w' \not\models \mu'$ entonces, en virtud de (IC0), $w' \not\models \Delta_{\mu'}(\varphi')$, lo que nos lleva a que $w' \not\models \Delta_\mu(\varphi)$. De esta manera $w <_\varphi w'$.

Por otro lado, como $\mu' \wedge \neg\mu \nvdash \bot$, existe $w'' \models \mu' \wedge \neg\mu$. De esta manera, $w'' \not\models \mu$ y por lo tanto $w'' \not\models \Delta_\mu(\varphi)$, implicando que $w'' \not\models \Delta_{\mu'}(\varphi')$. Así $w <_{\varphi'} w''$.

Puesto que $\Delta_{(\mu\leftrightarrow\neg\mu')}(\varphi \sqcup \varphi') \Leftrightarrow (\mu \leftrightarrow \neg\mu')$, y como

$$(\mu \wedge \neg\mu') \vee (\mu' \wedge \neg\mu) \Leftrightarrow (\mu \Leftrightarrow \neg\mu')$$

entonces $w', w'' \in mod(\Delta_{(\mu\leftrightarrow\neg\mu')}(\varphi \sqcup \varphi'))$, ya que $w', w'' \in mod((\mu \wedge \neg\mu') \vee (\mu' \wedge \neg\mu))$. De esta forma $w' \simeq w''$. Luego, por la condición de asignación equitable, $w <_{\varphi \sqcup \varphi'} w'$, lo cual es una contradicción

Caso 1.3 Si ocurre que $w' \models \mu' \wedge \neg\mu$ se procede análogamente al caso anterior.

En cualquiera de los casos hemos llegado a una contradicción, implicando que $\Delta_\mu(\varphi) \vdash \Delta_{\mu\vee\mu'}(\varphi \sqcup \varphi')$.

Mostremos ahora que $\Delta_{\mu\vee\mu'}(\varphi \sqcup \varphi') \vdash \Delta_\mu(\varphi)$.

Sea $w \models \Delta_{\mu\vee\mu'}(\varphi \sqcup \varphi')$ y, razonando por el absurdo, supongamos que $w \not\models \Delta_\mu(\varphi)$. En virtud de (IC0) tenemos que $w \models \mu \vee \mu'$, obteniendo así los siguientes casos

Caso 2.1 Supongamos que $w \models \mu \wedge \mu'$. Como $w \not\models \Delta_\mu(\varphi)$, entonces existe $w' \models \mu$ tal que $w' <_\varphi w$. Por definición de Δ podemos tomar w' tal que $w' \models \Delta_\mu(\varphi)$. Como $\Delta_\mu(\varphi) \Leftrightarrow \Delta_{\mu'}(\varphi')$ entonces $w' <_{\varphi'} w$, implicando que $w' <_{\varphi' \sqcup \varphi} w$, en virtud de la condición 6. Esto nos conduce a que $w \notin min(mod(\mu \vee \mu'), \leq_{\varphi \sqcup \varphi'})$, y por lo tanto $w \not\models \Delta_{\mu\vee\mu'}(\varphi \sqcup \varphi')$, lo que es una contradicción.

Caso 2.2 Supongamos que $w \models \mu \wedge \neg\mu'$. Como $\mu' \not\vdash \mu$, existe $w'' \models \mu'$ tal que $w'' \not\models \mu$. Por otro lado, ya que $w \not\models \Delta_\mu(\varphi)$ entonces existe $w' \models \mu$ tal que $w' <_\varphi w$. Por definición de Δ podemos suponer que $w' \models \Delta_\mu(\varphi)$. Como $\Delta_\mu(\varphi) \Leftrightarrow \Delta_{\mu'}(\varphi')$, entonces $w' \models \Delta_{\mu'}(\varphi')$. Luego, como $w'' \not\models \Delta_\mu(\varphi)$ entonces $w'' \not\models \Delta_{\mu'}(\varphi')$, de esta manera $w' <_{\varphi'} w''$.

Ahora bien, como $(\mu \leftrightarrow \neg\mu') \Leftrightarrow ((\mu \wedge \neg\mu') \vee (\mu' \wedge \neg\mu))$ entonces $w, w'' \in mod(\mu \Leftrightarrow \neg\mu')$, y como $\Delta_{(\mu\leftrightarrow\neg\mu')}(\varphi \sqcup \varphi') \Leftrightarrow (\mu \leftrightarrow \neg\mu')$ entonces $w \simeq_{\varphi \sqcup \varphi'} w''$. De aquí se tiene $w' <_{\varphi \sqcup \varphi'} w$, en virtud del postulado de 8 de asignación sincrética equitable. Por lo tanto $w \notin min(mod(\mu \vee \mu'), \leq_{\varphi \sqcup \varphi'})$ y así $w \not\models \Delta_{\mu\vee\mu'}(\varphi \sqcup \varphi')$. Contradicción.

Caso 2.3 Si $w \models \mu' \wedge \neg\mu$, el estudio es análogo al anterior.

De esta manera, $\Delta_{\mu\vee\mu'}(\varphi \sqcup \varphi') \vdash \Delta_{\mu}(\varphi)$, y por lo tanto

$$\Delta_{\mu\vee\mu'}(\varphi \sqcup \varphi') \Leftrightarrow \Delta_{\mu}(\varphi).$$

∎

2.3. Algunos operadores de fusión IC

Daremos en esta sección la definición de tres familias de operadores. Todos estos operadores están basados sobre una distancia entre interpretaciones que inducen el preorden asociado a cada conjunto de creencias.

Definición 2.3.1 (Distancia entre interpretaciones) *Una pseudodistancia entre interpretaciones es una aplicación* $d : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathbb{R}^{+}$ *tal que para cualesquiera* $w, w', \in \mathcal{W}$ *se cumple que:*

- $d(w, w') = d(w', w)$
- $d(w, w') = 0$ *si, y sólo si,* $w = w'$

Una distancia entre interpretaciones es una pseudodistancia que satisface la desigualdad triangular:

- $\forall w, w', w'' \in \mathcal{W},\ d(w, w') \leq d(w, w'') + d(w'', w')$

Dos distancias muy usadas entre interpretaciones son la distancia de Dalal, denotada por d_H, la cual es la distancia de Hamming entre interpretaciones (es decir el número de variables proposicionales sobre las cuales difieren dos interpretaciones), y la distancia drástica denotada por d_D, el cual es la distancia más simple que se pueda definir: es cero si las interpretaciones son la misma, y 1 en otro caso.

Definición 2.3.2 *Para cada número natural* n *sea* A_n *un conjunto y* $\preceq_n$ *un orden lineal sobre* A_n*, y supongamos* $\overline{0}_n = min(A_n, \preceq_n)$*. Una función de agregación es una función total que asocia asocia a cada* n*-upla finita de números reales no negativos un elemento en* A_n*, y es tal que para cada* $x_1, x_2, \ldots, x_n, x, y$ *de reales positivos*

Anonimato *Para cualquier permutación* σ*,*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

Monotonía *Si* $x < y$ *entonces*

$$f(x_1, \dots, x, \dots, x_n) \prec_n f(x_1, \dots, y, \dots, x_n)$$

Minimalidad $f(x_1, \dots, x_n) = \overline{0}_n$ *si, y sólo si,* $x_1 = \cdots = x_n = 0$*.*

En muchos casos las estructuras ordenadas serán todas las mismas iguales a $\mathbb{R}^+$ con el orden natural. Ese será el caso de la función suma y máximo ver más abajo. Pero en otros no será de esa manera, como en el caso de la función Gmax donde para cada n, A_n será $(\mathbb{R}^+)^n$ y el orden $\preceq_n$ será el orden lexicográfico para los vectores de tamaño n.

Una distancia entre interpretaciones induce en forma natural una extensión, que llamaremos distancia entre una interpretación y una base de creencias de la siguiente manera

$$d(w, \varphi) = \underset{w' \models \varphi}{min}\ d(w, w')$$

Esta a su vez, en conjunto con f, induce una "distancia" entre una interpretación y un conjunto de creencias como sigue: Sea $\Psi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

$$d_{d,f}\,(w, \Psi) = f(d(w, \varphi_1), \dots, d(w, \varphi_n))\ \underset{\varphi \in \Psi}{f}\ \big(d(w\varphi)\big)$$

Usaremos la notación $\underset{\varphi \in \Psi}{f}\ \big(d(w\varphi)\big)$ para esta última expresión.

Esto nos permite definir un preorden sobre interpretaciones como sigue:

$$w \leq_{\Psi}^{d,f} w' \text{ si, y sólo si, } d_{d,f}\,(w, \Psi) \preceq_n d_{d,f}\,\big(w', \Psi\big)$$

Por abuso de lenguaje y con el deseo de simplificar la notación denotaremos a $\overline{0}_n$ por $\overline{0}$ y a $\preceq_n$ por $\preceq$ siendo claro del contexto de quien se trata.

Proposición 2.3.3 *Sea* d *una pseudo distancia y* f *una función de agregación. La aplicación* $\Psi \mapsto \leq_{\Psi}^{d,f}$ *cumple con las primeras cuatro postulados de la asignación sincrética.*

Demostración: Consideremos Ψ, Ψ' conjuntos de creencias y φ y φ' bases de creencias cualesquiera.

1. Si $w \models \Psi$ y $w' \models \Psi$, entonces para cada $\varphi \in \Psi$ se tiene que $w \models \varphi$ y $w' \models \varphi$. De esta manera
$$\forall\, \varphi \in \Psi,\ d(w,\varphi) = d(w',\varphi) = 0$$
y de la propiedad de minimalidad de f se tiene que
$$d_{d,f}\,(w,\Psi) = \overline{0} = d_{d,f}\,\big(w',\Psi\big)$$
De esta manera $w \simeq_{\Psi}^{d,f} w'$.

2. Supongamos que $w \models \Psi$ y $w' \not\models \Psi$. Como $w \models \Psi$, $d_{d,f}\,(w,\Psi) = \overline{0}$. Por otro lado $w' \not\models \varphi$, para algún $\varphi \in \Psi$ y por lo tanto $d(w',\varphi) > 0$. Así de la propiedad de minimalidad se tiene
$$d_{d,f}\,\big(w',\Psi\big) = \underset{\varphi\in\Psi}{f}\,\big(d(w',\varphi)\big) \succ \overline{0}$$
Como (también por minimalidad) $\overline{0} = d_{d,f}\,(w,\Psi)$ tenemos
$$d_{d,f}\,(w,\Psi) \prec d_{d,f}\,\big(w',\Psi\big)$$
lo que indica que $w <_{\Psi}^{d,f} w'$

3. Supongamos que $\Psi \Leftrightarrow \Psi'$. Así existe una biyección $g : \Psi \longrightarrow \Psi'$ tal que para cada $\varphi \in \Psi$, $\vdash g(\varphi) \Leftrightarrow \varphi$. Consideremos w y w' interpretaciones y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $w \leq_{\Psi}^{d,f} w'$. De esta manera $d_{d,f}\,(w,\Psi) \preceq d_{d,f}\,(w',\Psi)$.

   Puesto que para cada $\varphi \in \Psi$, $\vdash g(\varphi) \Leftrightarrow \varphi$ entonces,
$$\forall\, \varphi \in \Psi,\ d(w,\varphi) = d(w,g(\varphi))$$
y de la condición de anonimato de f se tiene
$$d_{d,f}\,(w,\Psi) = \underset{\varphi\in\Psi}{f}\,\Big(d\big(w,g(\varphi)\big)\Big)$$
De la biyectividad de g y del anonimato se tiene que $d_{d,f}\,(w,\Psi) = \underset{\varphi\in\Psi'}{f}\,\big(d(w,\varphi)\big)$ y así
$$d_{d,f}\,(w,\Psi) = d_{d,f}\,\big(w,\Psi'\big)$$

De igual manera se demuestra que $d_{d,f}\left(w', \Psi\right) = d_{d,f}\left(w', \Psi'\right)$, lo que implica que

$$d_{d,f}\left(w, \Psi'\right) \preceq d_{d,f}\left(w', \Psi'\right)$$

luego $w \leq_{\Psi'}^{d,f} w'$.

4. Sea $w \models \varphi$. Mostremos que existe $w' \models \varphi'$ tal que $w' \leq_{\varphi \sqcup \varphi'} w$.

   Consideremos $w' \models \varphi'$ tal que $d(w, w') = d(w\varphi')$. Notemos que $d(w, \varphi) = d(w', \varphi') = 0$. Ahora bien,

   $$d(w', \varphi) \leq d(w, w')$$

   de esta manera $d(w', \varphi) \leq d(w, \varphi')$. En virtud de la propiedad de monotonía de f tenemos que

   $$f(d(w', \varphi'), d(w', \varphi)) \preceq f(d(w', \varphi'), d(w, \varphi')).$$

   De aquí se tiene que $f(d(w', \varphi'), d(w', \varphi)) \preceq f(d(w, \varphi), d(w, \varphi'))$, implicando que

   $$d_{d,f}\left(w', \varphi \sqcup \varphi'\right) \preceq d_{d,f}\left(w, \varphi \sqcup \varphi'\right).$$

   Esto muestra que $w' \leq_{\varphi \sqcup \varphi'}^{d,f} w$.

∎

Notación. La operación de concatenación de dos vectores cuyas coordenadas están en $\mathbb{R}^+$ será denotada por $\odot$.

Definición 2.3.4 *Diremos que una función de agregación f es Pareto fuerte si para cualesquiera vectores $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$, con $|v_1| = |v_2|$ y $|v_3| = |v_4|$ se cumplen*

(i) $f(v_1) \preceq f(v_2) \wedge f(v_3) \preceq f(v_4) \Longrightarrow f(v_1 \odot v_3) \preceq f(v_2 \odot v_4)$;

(ii) $f(v_1) \preceq f(v_2) \wedge f(v_3) \prec f(v_4) \Longrightarrow f(v_1 \odot v_3) \prec f(v_2 \odot v_4)$

Diremos que una función de agregación f es Pareto débil si cumple la condición (i) anterior y además la condición (ii') que se enuncia a continuación:

(*ii'*) $f(v_1) \prec f(v_2) \wedge f(v_3) \prec f(v_4) \Longrightarrow f(v_1 \odot v_3) \prec f(v_2 \odot v_4)$

Proposición 2.3.5 *Sea d una pseudo distancia. Si f una función de agregación Pareto fuerte entonces la aplicación definida por que envía a cada conjunto de creencias Ψ en un preorden $\leq_{\Psi}^{d,f}$ es una asignación sincrética.*

La demostración de este resultado es directa de la proposición 2.3.3 y de las propiedades (*i*) y (*ii*) de la definición de Pareto fuerte.

Como corolario directo de esta proposición y del teorema de representación 2.2.8.

Corolario 2.3.6 *Sea d una pseudo distancia y f una función de agregación Pareto fuerte de la proposición 2.3.5. Entonces el operador $\Delta^{d,f}$ es un operador de fusión IC.*

Proposición 2.3.7 *Sea d una pseudo distancia. Si f una función de agregación Pareto débil entonces la aplicación definida por que envía a cada conjunto de creencias Ψ en un preorden $\leq_{\Psi}^{d,f}$ es una asignación cuasi sincrética.*

La demostración de este resultado es directa de la proposición 2.3.3 y de las propiedades (*i*) y (*ii'*) de la definición de Pareto débil.

Como corolario directo de esta proposición y del teorema de representación 2.2.11

Corolario 2.3.8 *Sea d una pseudo distancia y f una función de agregación Pareto débil. Entonces el operador $\Delta^{d,f}$ es un operador de fusión IC.*

La diferencia entre las tres familias de operadores que definiremos más adelante radica en la manera en que la distancia entre una interpretación y una base de creencias es usada para definir la distancia entre una interpretación y un conjunto de creencias, es decir en la función f que se va a considerar.

Definición 2.3.9 *Sea Ψ un conjunto de creencias, w una interpretación y d una distancia entre interpretaciones. La distancia max es definida por*

$$d_{d,Max}(w,\Psi) = \max_{\varphi\in\Psi} d(w,\varphi)$$

La función *max* es claramente una función de agregación. Como ya vimos esto induce un preorden sobre las interpretaciones de la siguiente manera:

$$w \leq_{\Psi}^{d,Max} w' \Leftrightarrow\ d_{d,Max}\,(w,\Psi) \leq d_{d,Max}\left(w',\Psi\right)$$

Definimos el correspondiente operador de fusión IC, $\Delta^{d,Max}$ como sigue:

$$mod(\Delta_{\mu}^{d,Max}(\Psi)) = min\big(mod(\mu), \leq_{\Psi}^{d,Max}\ \big)$$

Teorema 2.3.10 *El operador $\Delta^{d,Max}$ es un operador de cuasi-fusión que cumple con (Arb) .*

Demostración:

Para ver que es un operador de cuasi-fusión basta ver, en virtud del corolario 2.3.8, la función *max* es una función de agregación Pareto débil. Que es de agregación es inmediato como ya lo observamos anteriormente. Las propiedades de Pareto débil se deducen directamente de las propiedades del máximo entre conjuntos.

Sólo nos queda por ver que la propiedad 8 (de equidad) de las asignaciones (cuasi) sincréticas que como vimos implica (Arb) .

8 Supongamos que w, w' y w'' son interpretaciones tales que $w <_{\varphi}^{d,Max} w'$, $w <_{\varphi'}^{d,Max} w''$ y además $w' \simeq_{\varphi\sqcup\varphi'}^{d,Max} w''$. De esta manera $d_{d,Max}\,(w,\varphi) \leq d_{d,Max}\,(w',\varphi)$, $d_{d,Max}\,(w,\varphi') \leq d_{d,Max}\,(w'',\varphi')$ y $d_{d,Max}\,(w',\varphi\sqcup\varphi') = d_{d,Max}\,(w'',\varphi\sqcup\varphi')$. Luego
$d(w,\varphi) < max\{d(w',\varphi), d(w',\varphi')\} = d_{d,Max}\,(w',\varphi\sqcup\varphi')$
$d(w,\varphi') < max\{d(w'',\varphi), d(w'',\varphi')\} = d_{d,Max}\,(w',\varphi\sqcup\varphi')$
lo que implica que

$$d_{d,Max}\left(w,\varphi\sqcup\varphi'\right) = max\{d(w,\varphi), d(w,\varphi')\} < d_{d,Max}\left(w',\varphi\sqcup\varphi'\right)$$

y por lo tanto $w <_{\varphi\sqcup\varphi'}^{d,Max} w'$.

∎

La condición 6 no necesariamente se cumple, para esto consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.11 Consideremos las bases de creencias φ y φ' cuyos modelos son $mod(\varphi) = \{101, 100, 111\}$ y $mod(\varphi') = \{110, 111\}$, y consideremos las interpretaciones $w = 101$ y $w' = 011$. Si consideramos la distancia de Hamming (número de posiciones en que las interpretaciones difieren), d_H, tenemos que:

$$d_H(w, \varphi) = 0, \qquad d_H(w, \varphi') = 1,$$

$$d_H(w', \varphi) = 1, \qquad d_H(w', \varphi') = 1$$

De esta manera $w <_{\varphi}^{d_H,Max} w'$ y $w <_{\varphi'}^{d_H,Max} w'$. Sin embargo

$$max\{d_H(w', \varphi), d_H(w', \varphi')\} = 1 = max\{d_H(w, \varphi), d_H(w, \varphi')\}$$

lo que implica $d_{d_h,Max}(w, \varphi \sqcup \varphi') = d_{d_h,Max}(w', \varphi \sqcup \varphi')$, y por lo tanto $w \simeq_{\varphi \sqcup \varphi'}^{d_H,Max} w'$.

Ahora definiremos un nuevo operador a partir de la función suma (la suma de los elementos de un vector de números reales positivos). Esta función es claramente una función de agregación.

Definición 2.3.12 *Sea Ψ un conjunto de creencias, w una interpretación y d una distancia entre interpretaciones. La distancia Σ esta definida por*

$$d_{d,\Sigma}(w, \Psi) = \sum_{\varphi \in \Psi} d(w, \varphi)$$

Esto induce un preorden sobre las interpretaciones:

$$w \leq_{\Psi}^{d,\Sigma} w' \Leftrightarrow d_{d,\Sigma}(w, \Psi) \leq d_{d,\Sigma}\left(w', \Psi\right)$$

y el correspondiente operador de fusión $\Delta^{d\Sigma}$ definido por

$$mod(\Delta_{\mu}^{d,\Sigma}(\Psi)) = min\big(mod(\mu), \leq_{\Psi}^{d,\Sigma}\big)$$

El resultado de los operadores $\Delta^{d,\Sigma}$ puede ser considerado como la elección de la opción *más popular* entre las restricciones de integridad.

Este operador es en realidad un operador de fusión mayoritario, como lo establece el siguiente teorema, pero antes de ello mostremos la siguiente propiedad de la distancia $d_{d,\Sigma}$.

Lema 2.3.13 *Sea d una pseudo-distancia entre interpretaciones. Entonces, para cualesquiera Ψ y Ψ' conjuntos de creencias y w interpretación se tiene que*

$$d_{d,\Sigma}\left(w, \Psi \sqcup \Psi'\right) = d_{d,\Sigma}\left(w, \Psi\right) + d_{d,\Sigma}\left(w, \Psi'\right)$$

Demostración: Sabemos que

$$d_{d,\Sigma}\left(w, \Psi\right) = \sum_{\varphi \in \Psi} d(w,\varphi) \text{ y } d_{d,\Sigma}\left(w, \Psi'\right) = \sum_{\varphi \in \Psi'} d(w,\varphi).$$

De esta manera:

$$\begin{aligned} d_{d,\Sigma}\left(w, \Psi\right) + d_{d,\Sigma}\left(w, \Psi'\right) &= \sum_{\varphi \in \Psi} d(w,\varphi) + \sum_{\varphi \in \Psi'} d(w,\varphi) \\ &= \sum_{\varphi \in \Psi \sqcup \Psi'} d(w,\varphi) \\ &= d_{d,\Sigma}\left(w, \Psi \sqcup \Psi'\right) \end{aligned}$$

∎

Teorema 2.3.14 *Para cualquier pseudo-distancia d entre interpretaciones, el operador $\Delta^{d,\Sigma}$ es un operador mayoritario.*

Demostración: Para ver que el operador $\Delta^{d,\Sigma}$ es de fusion basta ver, envirtud del corolario 2.3.6, que la suma es una función de agregación Pareto fuerte. Esto último es bastante directo por la conmutatividad y la monotonía de la suma en cualquiera de sus argumentos. Las propiedades de Pareto fuerte se deducen del lema 2.3.13 y la monotonía.

Así sólo falta ver que es mayoritario lo que es equivalente a probar la propiedad 7 de las asignaciones sincréticas.

7. Supongamos w, w' interpretaciones tales que $w <_{\Psi'}^{d,\Sigma} w'$. De esta manera $d_{d,\Sigma}(w, \Psi') < d_{d,\Sigma}(w', \Psi')$. Para demostrar que $\exists n\ w <_{\Psi \sqcup (\Psi')^n}^{d,\Sigma} w'$ tenemos que demostrar que

$$d_{d,\Sigma}\left(w, \Psi \sqcup (\Psi')^n\right) < d_{d,\Sigma}\left(w', \Psi \sqcup (\Psi')^n\right).$$

En virtud del lema 2.3.13 esto ocurre si, y sólo si,

$$d_{d,\Sigma}(w, \Psi) + n d_{d,\Sigma}\left(w, \Psi'\right) < d_{d,\Sigma}\left(w', \Psi\right) + n d_{d,\Sigma}\left(w', \Psi'\right).$$

Así basta con tomar

$$n > \frac{d_{d,\Sigma}(w, \Psi) - d_{d,\Sigma}(w', \Psi)}{d_{d,\Sigma}(w', \Psi') - d_{d,\Sigma}(w, \Psi')}$$

Note que por hipótesis el denominador es estrictamente positivo, luego tal n existe.

∎

Ahora vamos a definir la función $Gmax$. Si v es un vector de reales mayores o iguales a cero, denotamos $v\downarrow$ al vector obtenido de v ordenándolo en orden decreciente. Entonces definimos $Gmax(v) = v\downarrow$. Note así que los conjuntos $(\mathbb{R}^+)^n$ son enviados en $(\mathbb{R}^+)^n$ al cual ordenamos con el orden lexicográfico. Es fácil ver que $Gmax$ es una función de agregación.

Definición 2.3.15 *Sea $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ un conjunto de creencias y sea d una distancia entre interpretaciones. Para cada interpretación w construimos la lista $(d_1^w, d_2^w, \ldots, d_n^w)$ de distancias entre esta interpretación y las n bases de creencias en Ψ, es decir, $d_i^w = d(w, \varphi_i)$. Sea $d_{d,GMax}((,w), \Psi)$ la lista obtenida de $(d_1^w, d_2^w, \ldots, d_n^w)$ al ordenarla de forma decreciente.*

De esta manera, si consideramos $\leq_{lex}$, el orden lexicográfico entre sucesiones de enteros con la misma longitud, definimos el siguiente preorden total

$$w \leq_{\Psi}^{d,Gmax} w' \Leftrightarrow d_{d,Gmax}(w, \Psi) \leq_{lex} d_{d,Gmax}\left(w', \Psi\right)$$

y el operador $\Delta^{d,Gmax}$ es definido por

$$mod(\Delta_\mu^{d,Gmax}(\Psi)) = min(mod(\mu), \leq_\Psi^{d,Gmax})$$

De hecho $d_{d,GMax}((,w),\Psi) = Gmax_{\varphi\in\Psi(d)}(d(w,\varphi))$ y $\Delta^{d,Gmax}$ es el operador definido a partir de d y la función $Gmax$ de la que pronto mostraremos es una función de agregación Pareto fuerte.

Supongamos L_1 y L_2 listas de números ordenados de forma decreciente. Denotamos por $L_1\vec{\odot}L_2$ a la lista que se obtiene al ordenar de forma decreciente la concatenación de L_1 con L_2.

Notemos que de la definición de $d_{d,Gmax}$ tenemos que si Ψ y Ψ' son dos bases de creencias, para cualquier base de creencias w, $d_{d,Gmax}(w,\Psi\sqcup\Psi') = d_{d,GMax}(w,\Psi)\,\vec{\odot}\,d_{d,GMax}(w,\Psi')$. También, por medio de la definición, es fácil demostrar que el operador $\Delta^{d,Gmax}$ es un refinamiento del operador $\Delta^{d,Max}$.

Proposición 2.3.16 *Sea d una pseudo-distancia entre interpretaciones. Para cualesquiera restricción de integridad μ y cualquier conjunto de creencias Ψ, $\Delta_\mu^{d,GMax}(\Psi) \vdash \Delta_\mu^{d,Max}(\Psi)$.*

Demostración: Sea μ restricción de integridad, Ψ un conjunto de creencias y supongamos que $w \models \Delta_\mu^{G,Max}(\Psi)$. De esta manera $w \models \mu$, y para cada $w' \models \mu$ se tiene que $w \leq_\Psi^{d,GMax} w'$. Notemos que por definición tenemos que $d_{d,GMax}(w,\Psi) \leq_{lex} d_{d,GMax}(w',\Psi)$.

Supongamos que

$d_{d,GMax}(w,\Psi) = (d_1^w, d_2^w, \ldots, d_n^w)$ y $d_{d,GMax}\left(w',\Psi\right) = (d_1^{w'}, d_2^{w'}, \ldots, d_n^{w'})$.

Por definición sabemos que $d_1^w \geq d_i^w$ y $d_1^{w'} \geq d_i^{w'}$, para cada $1 \leq i \leq n$. De esta manera $d_1^w = \underset{\varphi\in\Psi}{max}\ d(w,\varphi)$ y $d_1^{w'} = \underset{\varphi\in\Psi}{max}\ d(w',\varphi)$, y en virtud del orden lexicográfico, $\leq_{lex}$, tenemos que $d_1^w \leq d_1^{w'}$. De esta manera $d_{d,Max}(w,\Psi) \leq d_{d,Max}(w',\Psi)$ para todo $w' \models \mu$, y por lo tanto $w \models \Delta_\mu^{d,Max}(\Psi)$. ∎

Lema 2.3.17 *Sean L_1, L_2 y L_3 lista de números enteros ordenados de forma decreciente con $|L_1| = |L_2|$. Si $L_1 \leq_{lex} L_2$, entonces $L_1\vec{\odot}L_3 \leq_{lex} L_2\vec{\odot}L_3$.*

Demostración: Por inducción en el tamaño de L_3. En realidad el caso interesante es cuando $|L_3| = 1$, pues claramente si $L_3 = (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ se tiene

$$L\vec{\odot}L_3 = (L\vec{\odot}(a_1, \ldots, a_{n-1}))\vec{\odot}(a_n)$$

Si $L_1 = L_2$ es trivial. Así supongamos que $L_1 \neq L_2$, lo que nos lleva a $L_1 <_{lex} L_2$. luego existe d'_j en la lista L_2 tal que $d_j \leq d'_j$ y si $k \in \overline{1, j-1}$ [5] se tiene que $d_k = d'_k$.

Sea $L_3 = (l)$. Si $l \leq d_j$, entonces $l \leq d'_j$. De esta manera las primeros j elementos de $L_1\vec{\odot}L_3$ y $L_2\vec{\odot}L_3$ son respectivamente los mismos de los vectores L_1 y $L2$ lo que implica $L_1\vec{\odot}L_3 \leq_{lex} L_2\vec{\odot}L_3$.

Por otro lado, si $l > d_j$ vamos a considerar dos casos: $l \geq d'_j$ o $l < dj'$. En el primer caso, como l va a coincidir con la i-ésima coordenada de la lista $L_2\vec{\odot}L_3$, para algún i en $\overline{1, j+1}$ y para ese mismo i l va a coincidir con la i-ésima coordenada de la lista $L_1\vec{\odot}L_3$. Así la situación será como se describe, más graficamente, a continuación

$$\begin{array}{cccccccc} d_1 & d_2 & \ldots & d_{i-1} & l & d_i & \ldots & d_j \\ \shortparallel & \shortparallel & \cdots & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \cdots & \wedge \\ d'_1 & d'_2 & \ldots & d'_{i-1} & l & d'_i & \ldots & d'_j \end{array}$$

donde se ve claramente que $L_1\vec{\odot}L_3 <_{lex} L_2\vec{\odot}L_3$.

Si $l < d'_j$ entonces la j-ésima componente de $L_2\vec{\odot}L_3$ sigue siendo d'_j y la j-ésima componente de $L_1\vec{\odot}L_3$ es l (las primeras $j-1$ componentes son idénticas en ambos casos a las de L_2). Así, recapitulando, la situación es graficamente la siguiente:

$$\begin{array}{cccccc} d_1 & d_2 & \ldots & d_{j-1} & l & \ldots \\ \shortparallel & \shortparallel & \cdots & \shortparallel & \wedge & \cdots \\ d'_1 & d'_2 & \ldots & d'_{j-1} & d'_j & \ldots \end{array}$$

de donde se ve claramente que $L_1\vec{\odot}L_3 \leq_{lex} L_2\vec{\odot}L_3$. ∎

De forma análoga al lema anterior se demuestra el siguiente resultado.

[5] $\overline{1, n}$ denota el conjunto formado por los primeros n números naturales.

Lema 2.3.18 *Sean L_1, L_2 y L_3 lista de números enteros ordenados de forma decreciente con $|L_1| = |L_2|$. Si $L_1 <_{lex} L_2$, entonces $L_1 \vec{\odot} L_3 <_{lex} L_2 \vec{\odot} L_3$.*

Como corolario de los dos lemas anteriores, se tienen:

Corolario 2.3.19 *Sean L_1, L_1', L_2, L_2' listas de números enteros ordenados de forma decreciente tales que $|L_1| = |L_1'|$ y $|L_2| = |L_2'|$.*

(i) Si $L_1 \leq_{lex} L_1'$ y $L_2 \leq_{lex} L_2'$, entonces $L_1 \vec{\odot} L_2 \leq_{lex} L_1 \vec{\odot} L_2$.

(ii) Si $L_1 \leq_{lex} L_1$ y $L_2 <_{lex} L_2'$, entonces $L_1 \vec{\odot} L_2 <_{lex} L_1 \vec{\odot} L_2$.

Demostración:

Demostremos sólo (i); (ii) se demuestra de forma análoga a (i), haciendo uso del lema 2.3.18. Supongamos que $L_1 \leq_{lex} L_1'$ entonces, por el lema 2.3.17, $L_1 \vec{\odot} L_2 \leq_{lex} L_1' \vec{\odot} L_2$ y $L_2 \vec{\odot} L_1' \leq_{lex} L_2' \vec{\odot} L_1'$. Como $L_1' \vec{\odot} L_2 = L_2 \vec{\odot} L_1'$ y en virtud de la transitividad de la relación de orden $\leq_{lex}$ se tiene que $L_1 \vec{\odot} L_2 \leq_{lex} L_1' \vec{\odot} L_2'$. ∎

Mostremos ahora bien que los operadores $\Delta^{d,GMax}$ son operadores de arbitraje.

Teorema 2.3.20 *Para cualquier d una pseudo-distancia entre interpretaciones, el operador $\Delta^{d,GMax}$ define un operador de arbitraje.*

Demostración: Para ver que es un operador de fusión basta ver, por el corolario 2.3.6, que $Gmax$ es una función de agragación pareto fuerte. Que es de agregación es directo de la definición. Que se cumplen las propiedades de Pareto fuerte es consecuencia inmediata del corolario 2.3.19.

Nos queda por demostrar la propiedad de arbitraje lo cual es equivalente a la propiedad 8 para las asignaciones sincréticas:

8. Supongamos que w_1, w_2, w_3 son interpretaciones tales que $w_1 <_{\varphi}^{d,GMax} w_2$, $w_1 <_{\varphi'}^{d,GMax} w_3$ y que $w_2 \simeq_{\varphi \sqcup \varphi'}^{d,GMax} w_3$, veamos que $w_1 <_{\varphi \sqcup \varphi'}^{d,GMax} w_2$.

Consideremos $d(w_i, \varphi) = d_{\varphi}^{w_i}$ y $d(w_i, \varphi') = d_{\varphi'}^{w_i}$, para cada $i = 1, 2, 3$, y notemos que $d_{\varphi}^{w_1} < d_{\varphi}^{w_2}$ y $d_{\varphi'}^{w_1} < d_{\varphi'}^{w_3}$. Ahora bien, como $w_2 \simeq_{\varphi \sqcup \varphi'}^{d,GMax} w_3$, tenemos los siguientes casos.

Caso 1 Si $d_{\varphi}^{w_2} = d_{\varphi}^{w_3}$, entonces:

$$\begin{aligned} d_{\varphi}^{w_1} &< d_{\varphi}^{w_2} \leq max\{d_{\varphi}^{w_2}, d_{\varphi'}^{w_2}\}, \\ d_{\varphi'}^{w_1} &< d_{\varphi'}^{w_3} = d_{\varphi'}^{w_2} \leq max\{d_{\varphi}^{w_2}, d_{\varphi'}^{w_2}\}. \end{aligned}$$

De esta manera $d_{d,GMax}(w_1, \varphi \sqcup \varphi') <_{lex} d_{d,GMax}(w_2, \varphi \sqcup \varphi')$, y por lo tanto $w_1 <_{\varphi \sqcup \varphi'}^{d,GMax} w_2$

Caso 2 Si $d_{\varphi}^{w_2} = d_{\varphi'}^{w_3}$ se tiene:

$$\begin{aligned} d_{\varphi}^{w_1} &< d_{\varphi}^{w_2} \leq max\{d_{\varphi}^{w_2}, d_{\varphi'}^{w_2}\}, \\ d_{\varphi'}^{w_1} &< d_{\varphi'}^{w_3} = d_{\varphi}^{w_2} \leq max\{d_{\varphi}^{w_2}, d_{\varphi'}^{w_2}\}, \end{aligned}$$

lo que implica $d_{d,GMax}(w_1, \varphi \sqcup \varphi') <_{lex} d_{d,GMax}(w_2, \varphi \sqcup \varphi')$, y así $w_1 <_{\varphi \sqcup \varphi'}^{d,GMax} w_2$.

∎

Ahora, ilustremos el comportamiento de esta familias de operadores con un ejemplo.

Ejemplo 2.3.21 En una reunión de la directiva de un complejo recreacional, el presidente de dicho complejo propone, para el año venidero, la construcción de una cancha de tenis, una montaña rusa y una pista de carting. Durante la reunión la directiva se da cuenta que si dos de estas atracciones son construidas, la renta se incrementará significativamente para los accionistas del complejo.

Denotemos por C, M, P las construciones de la cancha de tenis, la montaña rusa y la pista de carting, respectivamente, y denotemos por I el incremento de la renta.

La directiva notó que la construcción de dos o más de las atracciones conducirá a un importante incremento sobre la renta

$$\mu = (C \wedge M) \vee (C \wedge P) \vee (M \wedge P) \rightarrow I$$

Hay cuatro miembros de la directiva cuyas creencias serán denotadas por $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4$. Así, $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$. Dos de los miembros de la directiva quieren construir las tres atracciones y no les importa el incremento de la renta ($\varphi_1 = \varphi_2 = C \wedge M \wedge P$). El tercero de los miembros piensa que la construcción de cualquiera de las atracciones causará, el cualquier momento, un aumento en la renta y quiere que los accionistas paguen la renta más baja posible, de esta forma el se opone a cualquier construcción de ($\varphi_3 = \neg C \wedge \neg M \wedge \neg P \neg I$). El último directivo piensa que el complejo en realidad necesita la cancha de tenis y la pista de carting pero no desea un incremento en la renta ($\varphi_3 = C \wedge P \neg I$).

Las variables proposicionales C, M, P e I serán consideradas en ese orden para las valuaciones. Así:

- $mod(\mu) = \mathcal{W} - \{0110, 1010, 1100, 1110\}$
- $mod(\varphi_1) = mod(\varphi_2) = \{1110, 1111\}$
- $mod(\varphi_3) = \{0000\}$
- $mod(\varphi_4) = \{1010, 1110\}$

Los resultados de las distancias están en la tabla 2.1. Las Filas sombreadas corresponden a las interpretaciones rechazadas por la restricción de integridad. De esta manera, los resultados han de ser encontrados entre las interpretaciones que no están sombreadas.

Con el operador $\Delta^{d_H, Max}$, la distancia la distancia mínima es 2 y las interpretaciones escogidas son

$$mod(\Delta_\mu^{d_H, Max}(\Psi)) = \{0010, 0011, 0100, 1000, 1001\}$$

Así la decisión que más se ajusta a los deseos del grupo es entonces no incrementar la renta y construir una de las tres atracciones, o incrementar la renta y construir la cancha de tenis o sino la pista de carting.

$mod(\mu)$	$d(w,\varphi_1)$	$d(w,\varphi_2)$	$d(w,\varphi_3)$	$d(w,\varphi_4)$	$dist_{Max}$	$dist_{\Sigma}$	$dist_{G}$
0000	3	3	0	2	3	8	(3,3,
0001	3	3	1	3	3	10	(3,3,
0010	2	2	1	1	**2**	6	(**2**, **2**,
0011	2	2	2	2	**2**	8	(2,2,
0100	2	2	1	2	**2**	7	(2,2,
0101	2	2	2	3	3	9	(3,2,
0110	1	1	2	1	2	5	(2,1,
0111	1	1	3	2	3	7	(3,2,
1000	2	2	1	1	**2**	6	(**2**, **2**,
1001	2	2	2	2	**2**	8	(2,2,
1010	1	1	2	0	2	4	(2,1,
1011	1	1	3	1	3	6	(3,1,
1100	1	1	2	1	2	5	(2,1,
1101	1	1	3	2	3	7	(3,2,
1110	0	0	3	0	3	3	(3,0,
1111	0	0	4	1	4	**5**	(4,1,

Cuadro 2.1: Tabla 1

Podemos observar en este ejemplo por qué el operador $\Delta^{d_H,Max}$ no es un operador de fusión IC. Por ejemplo las interpretaciones 0010 y 0011 son escogidas por $\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(\Psi)$, aunque 0010 es mejor para φ_3 y φ_4 que 0011, siendo así que estas dos son igualmente preferidas por φ_1 y φ_2. Parece natural entonces que 0010 sea globalmente preferida a 0011.

La familia de operadores $\Delta^{d,GMax}$ ha sido construida con la idea de que sea más selectiva que la familia $\Delta^{d,Max}$ al tener estos requerimientos en cuenta. Con el operador $\Delta^{d_H,GMax}$ el resultado es

$$mod(\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}(\Psi)) = \{0010, 1000\}$$

así la decisión en este caso es construir la pista de carting o la cancha de tenis sin incrementar la renta.

Pero si uno escoge $\Delta^{d_H,\Sigma}$ para resolver el conflicto de acuerdo a los deseos de la mayoría, el resultado es entonces

$$mod(\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}(\Psi)) = \{1111\}$$

y la decisión será construir las tres atracciones e incrementar la renta.

La elección mayoritaria, a menudo parece más democrática que los otros métodos pero, por ejemplo en este caso, este resultado sólo se dará a cabo si φ_3 acepta obedecer esta decisión que es totalmente opuesta a su opinión. Si φ_3 y a quienes representa deciden no pagar la mensualidad, los trabajos tal vez no se lleven a cabo por la carencia de dinero. Entonces si una decisión requiere de la decisión de todos sus miembros, un método más consensual, como el arbitraje, parece adecuado. Este tipo de eventos está estrechamente relacionado con la teoría de elección social.

Capítulo 3

Razonamientos no monótonos

El estudio de los llamados razonamientos de sentido común ha sido un tema de investigación en el área de inteligencia artificial por muchos años. En este capítulo presentaremos algunas de las ideas desarrolladas para analizar un tipo particular de estos razonamientos.

Una *afirmación condicional* es una afirmación de la forma *"si α, entonces β"*. Por ejemplo, considere la siguiente expresión: *"si α ocurre, normalmente también β ocurre"* o *"α normalmente implica β"*. Estas afirmaciones se hacen durante un proceso de inferencia que, por estar basado en información incompleta, puede admitir excepciones. Un primer ejemplo está dado por la deducción clásica: $\alpha \vdash \beta$. Este caso es ideal, pues cuando decimos "α implica lógicamente a β" no se permite ninguna excepción. Otro ejemplo lo obtenemos cuando el proceso de inferencia se basa en probabilidades. Diremos que α normalmente implica β, si la probabilidad de que α y β ocurran simultáneamente es alta en relación a la probabilidad de α. Esto no excluye la posibilidad que α se cumpla pero β no, aunque *normalmente* esto no sucede.

Consideremos ahora las oraciones subjuntivas. Por ejemplo: *"Si no hubieras renunciado a tu trabajo, hoy serías el gerente"*, o más generalmente, *"Si α hubiese ocurrido, entonces β también hubiese ocurrido"*. En este tipo de afirmaciones condicionales la premisa puede, o no, entrar en contradicción con las creencias o hechos aceptados hasta el momento. Cuando la premisa contradice nuestra creencias, se dice que el argumento o la afirmación es "contrafactual" [1]. Como veremos más adelante, ese

[1]En español a veces usamos la expresión *"en el supuesto negado"* para indicar

tipo de afirmaciones está estrechamente relacionado con los procesos de revisión de las creencias.

Las afirmaciones condicionales se denotarán como sigue:

$$\alpha \mid\!\sim \beta.$$

Las leeremos diciendo: "si α, entonces normalmente β", o también, "α normalmente implica β".

El estudio de estas afirmaciones condicionales ha puesto el énfasis en el análisis de $\mid\!\sim$ como relación binaria entre fórmulas en un lenguaje proposicional. El objetivo es determinar las propiedades estructurales que debe poseer $\mid\!\sim$ para que represente un proceso de inferencia "legítimo", "racional" o al menos capture ese tipo de razonamiento que llamamos de "sentido común". Estas relaciones se llaman relaciones de consecuencia.

Para ilustrar uno de los problemas tratados en este capítulo, considere la siguiente colección K formada por tres afirmaciones condicionales escritas en un lenguaje proposicional con (al menos) tres variables a, p y v:

$$p \mid\!\sim a \qquad a \mid\!\sim v \qquad p \mid\!\sim \neg v.$$

La interpretación usual de K dice: los **p**ingüinos son **a**ves, las **a**ves (normalmente) **v**uelan y los **p**ingüinos no **v**uelan.

No podemos interpretar $\mid\!\sim$ como $\vdash$, la deducción clásica, pues por ser $\vdash$ transitiva, obtendríamos $p \vdash v$ y $p \vdash \neg v$, que es una contradicción.

Si la única información que conocemos acerca de las variables p, a y v son las afirmaciones contenidas en K, una pregunta natural es ¿qué más podemos inferir?, ¿es razonable pensar que $p \wedge a \mid\!\sim v$? o ¿será que $p \wedge a \mid\!\sim \neg v$?. De acuerdo a la interpretación que dimos en términos de aves y pingüinos, uno esperaría que $p \wedge a \mid\!\sim \neg v$ y también que $p \wedge a \not\mid\!\sim v$. Ahora bien, ¿qué se puede decir en general? Uno de los objetivos de este capítulo es presentar algunas herramientas que permiten dar una respuesta general a esas preguntas de apariencia tan sencilla.

Una propiedad que posee la deducción clásica es que si γ es una consecuencia de un conjunto P de premisas, entonces γ también es una consecuencia de cualquier conjunto de premisas que contenga a P. Esto

que la premisa de la oración condicional en realidad no es cierta, o la consideramos imposible o muy improvable que ocurra. En inglés se les llama "counterfactuals".

es, las consecuencias crecen monotónicamente en relación a las premisas. En nuestro caso, uno dice que una relación de consecuencia $\mid\!\sim$ es *monótona*, si cada vez que tengamos $\alpha \mid\!\sim \gamma$, entonces también se cumple que $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$ para toda fórmula β. En los razonamientos de sentido común es frecuente que no se cumpla la monotonía. En el ejemplo presentado anteriormente, uno espera que $a \wedge p \not\mid\!\sim v$, aunque $a \mid\!\sim v$.

Para concluir esta introducción, comentaremos sobre otra manera de interpretar formalmente las afirmaciones condicionales (es decir, darles una semántica) que hace uso de los operadores de revisión AGM. La idea fundamental se basa en el *Test de Ramsey*. Sea K un conjunto de creencias expresadas en un lenguaje proposicional.

Test de Ramsey: Se acepta una oración condicional $\alpha \mid\!\sim \beta$ con respecto a K si el cambio minimal de K necesario para aceptar a α también requiere que aceptemos a β.

En vista de lo que hemos estudiado en el capítulo 1 podemos formalizar el Test de Ramsey de la siguiente manera. Dado un operador de revisión AGM $*$, y una teoría K, definimos una relación binaria $\mid\!\sim_K$ entre fórmulas:

$$\alpha \mid\!\sim_K \beta \text{ sii } \beta \in K * \alpha.$$

Esta es una forma de darle sentido a afirmaciones del tipo: *Si α hubiese ocurrido, entonces β también.* En general, $\mid\!\sim_K$ no es monótona (excepto cuando K es el conjunto de todas las tautologías).

En la bibliografía el lector encontrará algunas referencias de la extensa literatura existente sobre relaciones de consecuencia. El enfoque que presentaremos está basado en los trabajos de Makinson, Kraus, Lehmann and Magidor [32, 33, 36].

3.1. Relaciones acumulativas, preferenciales y racionales

En esta sección presentaremos una clasificación de las relaciones de consecuencia siguiendo los trabajos de Krauss, Lehmann y Magidor [32, 33]. A menos que digamos expresamente otra cosa, los resultados de esta sección provienen de esos trabajos.

En un sentido puramente formal, una *afirmación condicional* es un par de fórmulas (α, β) que como dijimos, se denotará por

$$\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta.$$

Una *relación de consecuencia* es una colección de afirmaciones condicionales.

Comenzaremos presentando algunas reglas básicas que uno esperaría sean satisfechas por una relación de consecuencia:

REF $\alpha \mathrel{|\!\sim} \alpha$.

LLE Si $\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$ y $\vdash \alpha \leftrightarrow \gamma$, entonces $\gamma \mathrel{|\!\sim} \beta$.

RW Si $\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$ y $\vdash \beta \to \gamma$, entonces $\alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma$.

CUT Si $\alpha \wedge \beta \mathrel{|\!\sim} \gamma$ y $\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$, entonces $\alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma$.

CM Si $\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$ y $\alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma$, entonces $\alpha \wedge \gamma \mathrel{|\!\sim} \beta$.

Donde REF es una abreviación en inglés de *Reflexivity*, LLE de *Left Logical Equivalence*, RW de *Right Weakening* y CM de *Cautious Monotony.*

Definición 3.1.1 *Una relación de consecuencia es* acumulativa *si satisface* REF, LLE, RW, CM *y* CUT. *Este sistema de reglas lo denotaremos por* **C**.

Es fácil verificar que la relación de consecuencia de la lógica clásica $\vdash$ satisface todas esas propiedades. La gran mayoría de relaciones de consecuencia que estudiaremos satisfacen este conjunto de reglas. Sin embargo, también veremos más adelante (sección 3.4) una familia muy natural de relaciones de consecuencia que no satisfacen todas estas reglas. El estudio de las relaciones de consecuencia ha hecho énfasis en entender aquellas relaciones que no satisfacen el principio de monotonía:

Monotonía Si $\alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma$, entonces $\alpha \wedge \beta \mathrel{|\!\sim} \gamma$.

Como ya lo mencionamos en la introducción de este capítulo, los razonamientos que ocurren en la "vida diaria" con frecuencia no respetan el principio de monotonía. Esto usualmente se debe al hecho que estos razonamientos se basan en información incompleta y a medida que recibimos más información algunas de la conclusiones iniciales ya no son convalidadas.

La regla CM, como su nombre lo indica, es una versión *cautelosa* de la monotonía, veremos mas adelante otra forma más fuerte. Además de estas reglas que claramente son formas de monotonía, veremos otras que tienen más bien que ver con las propiedades de la disyunción.

El conjunto de consecuencias de una fórmula lo denotaremos de la siguiente manera

$$C_{\mid\!\sim}(\alpha) = \{\beta : \ \alpha \mid\!\sim \beta\}.$$

En caso que la relación de consecuencia sea clara del contexto, sólo escribiremos

$$C(\alpha).$$

Comenzaremos mostrando que a partir del sistema **C** se pueden obtener otras reglas que son interesantes.

Lema 3.1.2 *Las siguientes reglas son deducibles del sistema* **C***.*

Supraclásica	*Si* $\alpha \vdash \beta$, *entonces* $\alpha \mid\!\sim \beta$.
AND	*Si* $\alpha \mid\!\sim \beta$ *y* $\alpha \mid\!\sim \gamma$, *entonces* $\alpha \mid\!\sim \beta \wedge \gamma$.
MPC	*Si* $\alpha \mid\!\sim \beta \rightarrow \gamma$ *y* $\alpha \mid\!\sim \beta$, *entonces* $\alpha \mid\!\sim \gamma$.

Demostración: Comencemos mostrando la regla Supraclásica. Por REF tenemos que $\alpha \mid\!\sim \alpha$ y con RW obtenemos $\alpha \mid\!\sim \beta$.

Veamos que AND se cumple. Supongamos que $\alpha \mid\!\sim \beta$ y $\alpha \mid\!\sim \gamma$. Por CM, $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$. Por otra parte, usando Supraclásica se concluye que $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \mid\!\sim \beta \wedge \gamma$. Por CUT, obtenemos $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \beta \wedge \gamma$. Y de nuevo por CUT, $\alpha \mid\!\sim \beta \wedge \gamma$. La regla MPC se obtiene inmediatamente de AND y RW. ∎

MPC abrevia *Modus Ponens in the Consequent.* El siguiente resultado es útil y su prueba sencilla, la dejamos a cargo del lector interesado.

Lema 3.1.3 *Suponga que* $\mid\!\sim$ *es acumulativa. Entonces* $C(\alpha) = C(\beta)$ *sii* $\alpha \mid\!\sim \beta$ *y* $\beta \mid\!\sim \alpha$ *para todo par de fórmulas* α *y* β.

Ahora veremos dos formas equivalentes de presentar la monotonía.

EHD Si $\alpha \mid\!\sim \beta \to \gamma$, entonces $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$.

Transitividad Si $\alpha \mid\!\sim \beta$ y $\beta \mid\!\sim \gamma$, entonces $\alpha \mid\!\sim \gamma$.

EHD abrevia *Easy Half of the Deduction theorem.*

Lema 3.1.4 *En el sistema* **C**, *las reglas* Monotonía, EHD *y* Transitividad *son todas equivalentes.*

Demostración: Probaremos primero que Monotonía implica EHD. Supongamos $\alpha \mid\!\sim \beta \to \gamma$, entonces por Monotonía, $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \beta \to \gamma$. Ahora como $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \beta$, por AND y RW obtenemos que $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$.

Supongamos ahora que EHD vale y veamos Monotonía. Suponga que $\alpha \mid\!\sim \gamma$. Como $\gamma \vdash (\beta \to \gamma)$, entonces por RW $\alpha \mid\!\sim (\beta \to \gamma)$. Luego por EHD $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$.

Veamos ahora que Monotonía es equivalente a Transitividad. Supongamos que $\alpha \mid\!\sim \beta$ y $\beta \mid\!\sim \gamma$. Entonces por Monotonía, $\beta \wedge \alpha \mid\!\sim \gamma$. Por LLE, $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$ y por CUT, $\alpha \mid\!\sim \gamma$. Recíprocamente, supongamos que $\alpha \mid\!\sim \gamma$. Por RW, $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \alpha$, luego por Transitividad concluimos que $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$. ∎

A continuación estudiaremos otras reglas que tratan sobre las propiedades de la negación y de otros conectivos.

OR Si $\alpha \mid\!\sim \gamma$ y $\beta \mid\!\sim \gamma$, entonces $\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma$

S Si $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$, entonces $\alpha \mid\!\sim \beta \to \gamma$

DR Si $\alpha \vee \beta \mid\!\sim \rho$, entonces $\alpha \mid\!\sim \rho$ o $\beta \mid\!\sim \rho$

RM Si $\alpha \mid\!\sim \rho$ y $\alpha \not\mid\!\sim \neg\beta$, entonces $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \rho$

NR Si $\alpha \wedge \gamma \not\mid\!\sim \beta$ y $\alpha \wedge \neg\gamma \not\mid\!\sim \beta$, entonces $\alpha \not\mid\!\sim \beta$.

Donde DR abrevia *Disjunctive Rationality*, RM *Rational Monotony* y NR *Negation Rationality.*

Definición 3.1.5 *Una relación de consecuencia* $\mid\!\sim$ *se llama* preferencial *si es acumulativa y satisface la regla* OR. *Denotaremos con* **P** *a este sistema.*

El sistema **P** ocupa un lugar más importante que el acumulativo, pues por una parte incorpora la disyunción y por otra, las reglas preferenciales han sido consideradas por muchos investigadores como el núcleo que debe satisfacer toda sistema de razonamiento no monótono. El lector interesado en conocer más detalles sobre este sistema puede leer [32].

Lema 3.1.6 *Toda relación preferencial satisface* S.

Demostración: Supongamos que $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$, entonces por RW, tenemos que $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \beta \to \gamma$. Pero $\alpha \wedge \neg\beta \mid\!\sim \beta \to \gamma$, por lo tanto por OR y LLE, $\alpha \mid\!\sim \beta \to \gamma$. ∎

Las reglas NR, DR, RM no son derivables en **P**. La regla RM es obviamente una forma de monotonía.

Definición 3.1.7 *Una relación de consecuencia es* Racional *si es preferencial y satisface además* RM. *Denotaremos con* **R** *a este sistema.*

El siguiente resultado, que usaremos más adelante, muestra la conexión entre los operadores de revisión AGM y las relaciones racionales.

Lema 3.1.8 *Supongamos que* $\mid\!\sim$ *es una relación racional. Si* $\alpha \not\mid\!\sim \neg\beta$, *entonces*

$$C(\alpha \wedge \beta) = Cn(C(\alpha) \cup \{\beta\}).$$

Demostración: Para ver una dirección, sea $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$. Por la regla S, tenemos que $\alpha \mid\!\sim \beta \to \gamma$. Por lo tanto $\beta \to \gamma$ pertenece a $C(\alpha)$. Y de esto se concluye que γ pertenece a $Cn(C(\alpha) \cup \{\beta\})$.

Recíprocamente, suponga que γ pertenece a $Cn(C(\alpha) \cup \{\beta\})$ y sean δ_i para $i \leq n$ tales que $\alpha \mid\!\sim \delta_i$ para $i \leq n$ y $\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n \wedge \beta \vdash \gamma$. Entonces $\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n \vdash \beta \to \gamma$. Por AND, $\alpha \mid\!\sim \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n$ y por RW, $\alpha \mid\!\sim \beta \to \gamma$. Por RM, $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \beta \to \gamma$. Como $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \beta$, entonces por RW, $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$. ∎

Lema 3.1.9 *Toda relación racional satisface* DR *y* NR.

Demostración: Ejercicio. ∎

La regla NR se puede interpretar más fácilmente si la expresamos en su forma contrapositiva:

NR Si $\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$, entonces $\alpha \wedge \gamma \mathrel{|\!\sim} \beta$ o $\alpha \wedge \neg\gamma \mathrel{|\!\sim} \beta$.

Veamos un ejemplo de esta regla. Normalmente, la fiesta de despedida de año del departamento de Matemáticas son muy buenas ($\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$). Pero cuando fulanito (γ) asiste, normalmente la cosa se pone medio pesada y la fiesta ya no es tan buena ($\alpha \wedge \gamma \not\mathrel{|\!\sim} \beta$). La regla NR dice que es razonable pensar que si fulanito no se aparece, la reunión será agradable ($\alpha \wedge \neg\gamma \mathrel{|\!\sim} \beta$).

3.2. Relaciones racionales y los operadores AGM

En esta sección precisaremos un comentario que hicimos en la introducción de este capítulo, sobre la estrecha relación existente entre los operadores de revisión AGM y las relaciones de consecuencia.

Teorema 3.2.1 *(Gärdenfors and Makinson) [20] Sea $*$ un operador de revisión AGM, K una teoría. Definimos una relación $\mathrel{|\!\sim}_K$ por*

$$\alpha \mathrel{|\!\sim}_K \beta \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \beta \in K * \alpha$$

Entonces $\mathrel{|\!\sim}_K$ es una relación racional y además satisface:

$$\textit{Si } \alpha \mathrel{|\!\sim}_K \bot, \textit{ entonces } \alpha \vdash \bot$$

Diremos en este caso que $\mathrel{|\!\sim}_K$ preserva consistencia.

Demostración: Usando $K{*}2$ es claro que se cumple REF. A partir de $K{*}6$ se obtiene LLE y ya que $K * \alpha$ es lógicamente cerrado, entonces tenemos que RW se cumple. Para mostrar CUT primero recordemos la propiedad de *reciprocidad* de los operadores AGM:

$$\text{Si } \beta \in K * \alpha \ \text{ y } \ \alpha \in K * \beta, \ \text{ entonces } K * \alpha = K * \beta.$$

Sea $\beta \in K * \alpha$, entonces por la propiedad de reciprocidad tenemos que $K * (\alpha \wedge \beta) = K * \alpha$. Por lo tanto, CUT se cumple. Para ver CM, tenemos como antes que si $\beta \in K * \alpha$, entonces $K * (\alpha \wedge \beta) = K * \alpha$. Y de esto se sigue obviamente CM. Veamos ahora RM. Supongamos que $\alpha \not\mid\!\sim \neg\beta$ y que $\alpha \mid\!\sim \gamma$. Entonces $(K * \alpha) \cup \{\beta\}$ es consistente, luego por $K * 7$ y $K * 8$ tenemos que $K * (\alpha \wedge \beta) = K * \alpha + \beta$. Por lo tanto, $\gamma \in K * (\alpha \wedge \beta)$. Por último, usando $K * 5$ se tiene que $\mid\!\sim_K$ preserva la consistencia.

∎

El siguiente teorema es el inverso.

Teorema 3.2.2 *(Gärdenfors and Makinson [20]) Sea $\mid\!\sim$ una relación de consecuencia racional tal que preserva consistencia (esto es, si α es consistente, entonces α $\not\mid\!\sim \bot$). Entonces existe una teoría K y un operador de revisión AGM tal que $\mid\!\sim = \mid\!\sim_K$.*

Demostración: Sea $K = \{\alpha : \top \mid\!\sim \alpha\}$. Por RW se tiene que K es una teoría. Por otra parte, como $\mid\!\sim$ preserva la consistencia, entonces K es consistente. Definimos $K * \alpha = \{\beta : \alpha \mid\!\sim \beta\}$. Afirmamos que $*$ es un operador de revisión AGM para K. Observe que sólo hemos definido el operador sobre K por lo tanto tenemos que extender $*$ a todas las teorías. Esto se puede hacer arbitrariamente, por ejemplo dada una teoría L diferente de K, definimos $L * \alpha$ como la revisión drástica de L (ver ejemplo 1.2.4).

Es fácil verificar que $K * 1$, $K * 2$, $K * 5$ y $K * 6$ se cumplen. Para verificar $K * 3$ y $K * 4$, supongamos que $K \cup \{\alpha\}$ es consistente. Es decir $\top \not\mid\!\sim \neg\alpha$. Sea $\beta \in K * \alpha$, es decir, $\alpha \mid\!\sim \beta$. Entonces por la regla S (que vale en los sistemas preferenciales) tenemos que $\top \mid\!\sim \alpha \to \beta$, luego $\alpha \to \beta \in K$. Por lo tanto $K \cup \{\alpha\} \vdash \beta$. Recíprocamente, supongamos que $K \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, entonces $\alpha \to \beta \in K$, así $\top \mid\!\sim \alpha \to \beta$. Ya que $\top \not\mid\!\sim \neg\alpha$, entonces por RM y RW tenemos que $\alpha \mid\!\sim \beta$.

Verificaremos $K * 7$. Sea $\gamma \in K * (\alpha \wedge \beta)$, es decir, $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$. Entonces $\alpha \mid\!\sim \beta \to \gamma$, por lo tanto $\beta \to \gamma \in K * \alpha$. Es decir, $\gamma \in K * \alpha + \beta$.

Por último para ver $K * 8$, supongamos que $(K * \alpha) \cup \{\beta\}$ es consistente y además que $K * \alpha \vdash \beta \to \gamma$. Es decir, $\alpha \mid\!\sim \beta \to \gamma$. Por hipótesis $\alpha \not\mid\!\sim \beta$, luego por RM $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \beta \to \gamma$. Usando RW obtenemos que $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$. ∎

3.3. Teoremas de representación

En esta sección presentaremos los teoremas de representación para las relaciones de consecuencia. Un método para definir relaciones de consecuencia es el siguiente. Dada una función $J : Form \to Mod$ tal que

$$J(\alpha) \subseteq Mod(\alpha),$$

definimos una relación de consecuencia como sigue

$$\alpha \mid\!\sim_J \beta \text{ sii } J(\alpha) \models \beta.$$

Las propiedades de $\mid\!\sim_J$ por supuesto dependerán de la función J. Por ejemplo, si $J(\alpha) = Mod(\alpha)$, entonces $\mid\!\sim_J = \vdash$.

Como veremos en este capítulo, toda relación de consecuencia satisfaciendo ciertas condiciones es de la forma $\mid\!\sim_J$ para alguna función J.

3.3.1. Modelos acumulativos

Definición 3.3.1 *([32]) Sea $\prec$ una relación binaria sobre un conjunto S. Diremos que $A \subseteq S$ es* suave *si para cada $a \in A$ se tiene que a es minimal en A ó existe $b \in A$ tal que $b \prec a$ y b es minimal en A.*

Para entender mejor el significado de cuando un conjunto es suave observemos lo siguiente: Si $B \subseteq A \subseteq S$, entonces es claro que $min(A) \cap B \subseteq min(B)$. Supongamos que $min(A) \subseteq B$, por lo tanto $min(A) \subseteq min(B)$. Bajo estas condiciones es razonable esperar que $min(B) = min(A)$. Esto es cierto cuando A es suave, ya que en este caso tendríamos que $min(B) \subseteq min(A)$.

Definición 3.3.2 *Un* modelo *es una tripleta $(S, l, \prec)$ donde*

1. *S es un conjunto no vacío (sus elementos se llamarán* estados*)*
2. *l es una función (llamada de interpretación) que asigna a cada estado $s \in S$ una colección no vacía $l(s)$ de valuaciones del lenguaje.*

3. *$\prec$ es una relación binaria asimétrica sobre S (i.e. $s \not\prec s$ para todo $s \in S$).*

Definición 3.3.3 *Dado un modelo $(S, l, \prec)$ a cada fórmula α le asociamos un conjunto de estados*

$$\widehat{\alpha} = \{s \in S : \ l(s) \subseteq Mod(\alpha)\}$$

i.e., $s \in \widehat{\alpha}$ si $N \models \alpha$ para cada $N \in l(s)$. Diremos que $\prec$ es una relación suave *si $\widehat{\alpha}$ es un subconjunto suave de S para toda fórmula consistente α.*

Definición 3.3.4 *Un modelo $(S, l, \prec)$ se dice que es* acumulativo*, si $\prec$ es una relación suave.*

Es importante observar que la condición de ser una relación suave en particular garantiza la existencia de minimales en $\widehat{\alpha}$ para cada fórmula consistente α.

Definición 3.3.5 *Dado un modelo acumulativo $W = (S, l, \prec)$ definimos su relación de consecuencia asociada $\mid\!\sim_W$ de la manera siguiente:*

$$\alpha \mid\!\sim_W \beta \quad sii \quad min(\widehat{\alpha}, \prec) \subseteq \widehat{\beta}$$

i.e. $\alpha \mid\!\sim_W \beta$ sii $(s) \models \beta$ para todo $s \in min(\widehat{\alpha}, \prec)$.

Cuando no exista riesgo de confusión, escribiremos $min(\widehat{\alpha})$ en lugar de $min(\widehat{\alpha}, \prec)$.

Ejercicio 3.3.6 *Suponga que el lenguaje es finito. Sea $\equiv$ la relación de equivalencia lógica en el conjunto $Form$ de todas las fórmulas consistentes y S el conjunto de las clases de equivalencia módulo $\equiv$. Considere $l([\alpha]) = mod(\alpha)$ donde $[\alpha]$ es la clase de equivalencia de α y $\prec$ un orden parcial estricto sobre S. Muestre que $W = (S, l, \prec)$ es un modelo acumulativo.*

Ejercicio 3.3.7 *Muestre que existe un modelo acumulativo $W = (S, l, \prec)$ donde $\prec$ es la relación vacía, de tal manera que $\mid\!\sim_W$ satisface* Monotonía *pero no satisface* OR.

3.3.2. Relaciones acumulativas

Proposición 3.3.8 *Sea $W = (S, l, \prec)$ un modelo acumulativo. Entonces la relación $\mid\!\sim_W$ es acumulativa.*

Demostración: Veamos que CM se cumple. Supongamos que $\alpha \mid\!\sim_W \beta$ y $\alpha \mid\!\sim_W \gamma$. Queremos ver que $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim_W \gamma$. Sea $s \in min(\widehat{\alpha \wedge \beta})$. Afirmamos que $s \in min(\widehat{\alpha})$. En efecto, si no fuera así, por ser $\widehat{\alpha}$ suave, existiría $t \prec s$ con $t \in min(\widehat{\alpha})$. Entonces como $\alpha \mid\!\sim_W \beta$ se tiene que $t \in \widehat{\beta}$, pero esto es imposible pues $s \in min(\widehat{\alpha \wedge \beta})$. Por lo tanto, $s \in min(\widehat{\alpha})$ y en consecuencia $s \in \widehat{\gamma}$.

Ahora veremos que $\mid\!\sim_W$ satisface CUT. Supongamos que $\alpha \mid\!\sim_W \beta$ y que $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim_W \gamma$. Queremos ver que $\alpha \mid\!\sim_W \gamma$. Sea $s \in min(\widehat{\alpha})$. Como $\alpha \mid\!\sim_W \beta$, entonces $s \in \widehat{\alpha \wedge \beta}$ y de hecho $s \in min(\widehat{\alpha \wedge \beta})$. Por lo tanto, $s \in \widehat{\gamma}$.

Dejamos a cargo del lector verificar que REF, RW y LLE son satisfechas por $\mid\!\sim_W$. ∎

Nos encaminamos a mostrar el recíproco de la proposición anterior. Es decir, dada una relación acumulativa $\mid\!\sim$ veremos cómo construir un modelo acumulativo W tal que $\mid\!\sim$ coincida con $\mid\!\sim_W$.

Fijaremos, por lo que resta de esta sección, una relación de consecuencia acumulativa $\mid\!\sim$. Consideremos la siguiente relación binaria entre fórmulas:

$$\alpha \sim \beta \;\text{ sii }\; C(\alpha) = C(\beta).$$

Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia. En el lema 3.1.3 vimos que $\alpha \sim \beta$ sii $\alpha \mid\!\sim \beta$ y $\beta \mid\!\sim \alpha$. La clase de equivalencia de α respecto a $\sim$ la denotaremos por $\widetilde{\alpha}$.

Ahora le asociaremos un conjunto (de estados) a la relación $\mid\!\sim$:

$$S = \mathcal{L}/\sim .$$

Considere la siguiente relación binaria sobre S:

$$\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta} \;\text{ sii existe }\alpha' \in \widetilde{\alpha} \text{ tal que } \beta \mid\!\sim_W \alpha'.$$

Lema 3.3.9 *La relación $\preceq$ sobre S es antisimétrica.*

Demostración: Supongamos que $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$ y $\widetilde{\beta} \preceq \widetilde{\alpha}$. Entonces por definición de $\preceq$ se tiene que existen $\alpha' \in \widetilde{\alpha}$ y $\beta' \in \widetilde{\beta}$ tales que $\beta \mid\!\sim \alpha'$ y $\alpha \mid\!\sim \beta'$. En particular, $\beta' \mid\!\sim \alpha'$ y $\alpha' \mid\!\sim \beta'$. Por el lema 3.1.3 se tiene que $\alpha' \sim \beta'$ y por lo tanto $\alpha \sim \beta$. ∎

Definimos $\alpha \prec \beta$ si $\alpha \preceq \beta$ y $\beta \not\preceq \alpha$. De lo anterior se deduce que $\prec$ es asimétrica. Finalmente, el modelo que le asociamos a $\mid\!\sim$ es el siguiente:

$$W = (S, l, \prec)$$

donde

$$l(\widetilde{\alpha}) = \{N : \ N \text{ es una valuación tal que } N \models C(\alpha)\}.$$

Dejamos a cargo del lector la verificación que la definición de $l(\widetilde{\alpha})$ no depende de la elección del representante de la clase de $\widetilde{\alpha}$.

Definición 3.3.10 *Dada una relación de consecuencia $\mid\!\sim$. Una valuación N del lenguaje se dice que es* normal *para una fórmula α, si N satisface todas las fórmulas en $C(\alpha)$, esto es, $N \models C(\alpha)$. Diremos que N es normal (para $\mid\!\sim$), si es normal para alguna fórmula.*

Lema 3.3.11 *Para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$, $\alpha \mid\!\sim \beta$ sii toda valuación normal para α satisface β.*

Demostración: Supongamos que $\alpha \mid\!\sim \beta$ y N es una valuación normal para α, entonces por definición se tiene que $N \models \beta$. Por otra parte, supongamos que $\alpha \not\mid\!\sim \beta$. Mostraremos que existe una valuación normal para α que no satisface β. En efecto, considere el conjunto $\Gamma = \{\neg\beta\} \cup C(\alpha)$. Mostraremos que Γ es consistente. Si no lo fuera, entonces por compacidad, existen $\delta_1, \cdots, \delta_n$ en $C(\alpha)$ tal que $\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n \vdash \beta$. Por AND tenemos que $\alpha \mid\!\sim \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n$ y por RW se concluye que $\alpha \mid\!\sim \beta$, lo que contradice la suposición. ∎

Ya tenemos todo lo que hace falta para demostrar el siguiente resultado fundamental.

Teorema 3.3.12 *(Krauss, Lehmann y Magidor [32]) Una relación de consecuencia $\mid\!\sim$ es acumulativa si, y sólo si, existe un modelo acumulativo $W = (S, l, \prec)$ tal que $\mid\!\sim \, = \, \mid\!\sim_W$.*

Demostración: Ya vimos en la proposición 3.3.8 que si W es un modelo acumulativo, entonces $\mid\!\sim_W$ es una relación acumulativa. Para ver el recíproco, sea $\mid\!\sim$ una relación acumulativa, mostraremos que el modelo $W = (S, l, \prec)$ definido arriba es acumulativo y que $\mid\!\sim \, = \, \mid\!\sim_W$. Para ver que W es acumulativo, fijemos α y mostremos que $\widehat{\alpha}$ es suave. En efecto, afirmamos que $\widetilde{\alpha}$ es un elemento mínimo de $\widehat{\alpha}$. Sea $\widetilde{\beta} \in \widehat{\alpha}$, queremos ver que $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$. Tenemos que toda valuación normal para β satisface α, por el lema 3.3.11 concluimos que $\beta \mid\!\sim \alpha$. Y por lo tanto, $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$. Con esto hemos mostrado que $\widetilde{\alpha}$ es suave.

Nos queda por verificar que $\mid\!\sim \, = \, \mid\!\sim_W$. Supongamos que $\alpha \mid\!\sim \beta$. Como $\widetilde{\alpha}$ es mínimo en $\widehat{\alpha}$, basta ver que toda valuación en $l(\widetilde{\alpha})$ satisface β. Esto es cierto por lo visto en el lema 3.3.11. Recíprocamente, supongamos que $\alpha \mid\!\sim_W \beta$. Como $\widetilde{\alpha}$ es mínimo en $\widehat{\alpha}$ y por la definición de $\mid\!\sim_W$, tenemos que todo valuación normal para α satisface β, de nuevo por el lema 3.3.11 se tiene que $\alpha \mid\!\sim \beta$.

∎

3.3.3. Relaciones preferenciales

Para representar las relaciones preferenciales es necesario considerar modelos similares a los acumulativos pero más restringidos en el sentido que la función l asigna sólo una valuación a cada estado s y la relación $\prec$ es un orden estricto. Más precisamente tenemos

Definición 3.3.13 *[32] Un* modelo preferencial *es un modelo acumulativo $(S, l, \prec)$ tal que l es una función que asigna a cada estado $s \in S$ una valuación y además $\prec$ es una relación transitiva, no reflexiva y suave.*

Ejercicio 3.3.14 *Suponga que el lenguaje es finito. Sea S el conjunto de todas las valuaciones del lenguaje y $\prec$ un orden parcial estricto sobre S. Sea $l(N) = N$ para cada $N \in S$. Muestre que $W = (S, l, \prec)$ es un modelo preferencial.*

Como antes, a cada modelo preferencial $W = (S, l, \prec)$ le asociamos una relación de consecuencia $\mid\!\sim_W$ y tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.3.15 *Sea $W = (S, l, \prec)$ un modelo preferencial. Entonces la relación $\mid\!\sim_W$ es preferencial.*

Demostración: Sea $W = (S, l, \prec)$ un modelo preferencial. En vista de la proposición 3.3.8, sólo debemos mostrar que $\mid\!\sim_W$ satisface OR. Supongamos entonces que $\alpha \mid\!\sim_W \gamma$ y $\beta \mid\!\sim_W \gamma$. Queremos ver que $\alpha \vee \beta \mid\!\sim_W \gamma$. Sea $s \in min(\widehat{\alpha \vee \beta})$. Sea $N = l(s)$. Si N satisface α, es fácil ver que $s \in min(\widehat{\alpha})$ y por lo tanto, $N \models \beta$. El otro caso se trata igual. ∎

Teorema 3.3.16 *(Krauss, Lehmann y Magidor [32]) Una relación de consecuencia $\mid\!\sim$ es preferencial si, y sólo si, existe un modelo preferencial $W = (S, l, \prec)$ tal que $\mid\!\sim = \mid\!\sim_W$. Además, si el lenguaje es finito, entonces toda relación preferencial se puede representar por un modelo finito (esto es, con S un conjunto finito).*

No daremos la demostración de este teorema (ver [32]).

3.3.4. Relaciones racionales

En esta sección mostraremos el teorema de representación de las relaciones racionales. Para hacerlo restringiremos aún más los modelos preferenciales

Definición 3.3.17 *[33] Un* modelo rankeado *es un modelo preferencial $(S, l, \prec)$ tal que $\prec$ es modular (es decir, existe un orden lineal estricto $(\Omega, <)$ y una función $r : S \to \Omega$ tal que $s \prec s'$ sii $r(s) < r(s')$ para todo $s, s' \in S$).*

Los modelos rankeados (también llamados *modulares*) no son otra cosa que un preorden total suave en la colección de valuaciones. Estos modelos fueron usados para representar los operadores de revisión AGM (ver el teorema 1.5.8).

A continuación presentamos una caracterización de los órdenes modulares que usaremos mas adelante.

Lema 3.3.18 *Un orden estricto $\prec$ sobre un conjunto S es modular sii para todo $s, t, u \in S$, si s, t son $\prec$-incomparables y $s \prec u$, entonces $t \prec u$.*

Demostración: La dejamos como ejercicio. Para una de las direcciones, considere la relación $s \sim t$ si s y t son $\prec$-incomparables. Se muestra que $\sim$ es una relación de equivalencia y se toma Ω como $S/\sim$. ∎

El resultado mas importante de esta sección es el siguiente teorema.

Teorema 3.3.19 *(Lehmann y Magidor [33]) Una relación de consecuencia $\mid\!\sim$ es racional si, y sólo si, existe un modelo rankeado $W = (S, l, \prec)$ tal que $\mid\!\sim = \mid\!\sim_W$.* ∎

Seguiremos la prueba presentada en [39]. Comenzaremos mostrando una dirección del teorema y después probaremos algunos resultados auxiliares necesarios para completar la demostración.

Proposición 3.3.20 *Sea $W = (S, l, \prec)$ un modelo rankeado. Entonces la relación $\mid\!\sim_W$ es racional.*

Demostración: Sea $W = (S, l, \prec)$ un modelo rankeado. Fijemos $r : S \to \Omega$ con $(\Omega, <)$ un orden lineal estricto tal que $s \prec s'$ sii $r(s) < r(s')$. Por la proposición 3.3.15 basta mostrar que $\mid\!\sim_W$ satisface RM. En efecto, supongamos que $\alpha \mid\!\sim_W \gamma$ y $\alpha \not\mid\!\sim_W \neg\beta$. Queremos ver que $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim_W \gamma$. Sea $s \in min(\widehat{\alpha \wedge \beta})$. Basta ver que $s \in min(\widehat{\alpha})$. Supongamos que no es así, entonces existe $t \prec s$ con $t \in min(\widehat{\alpha})$. Entonces $r(t) < r(s)$. Por otra parte, como $\alpha \not\mid\!\sim_W \neg\beta$, existe $u \in min(\widehat{\alpha})$ tal que $l(u) \models \beta$. Por ser Ω un orden lineal, tenemos que $r(u) < r(s)$. Entonces $u \in min(\widehat{\alpha \wedge \beta})$. Lo que contradice que $s \in min(\widehat{\alpha \wedge \beta})$.

∎

Definición 3.3.21 *Dada un relación de consecuencia $\mid\!\sim$ le asociamos un relación binaria entre valuaciones de la siguiente manera:*

$$M \prec_e N \iff \forall \alpha\, (N \models C(\alpha) \to M \not\models \alpha).$$

Formalmente, sería mas preciso denotar la relación $\prec_e$ por $\prec_e^{\mid\sim}$ para enfatizar que depende de la relación $\mid\sim$. Pero cuando no haya riesgo de confusión, sólo escribiremos $\prec_e$.

Recordemos que una valuación es normal (3.3.10) si existe una fórmula α tal que $M \models C(\alpha)$. Por lo tanto, si N no es normal y M es normal, entonces $M \prec_e N$. Como veremos, uno puede restringir la relación $\prec_e$ a las valuaciones normales. Por el resto de esta sección denotaremos por

$$\mathcal{S} = \text{colección de valuaciones normales.}$$

El siguiente resultado justifica la definición de $\prec_e$.

Lema 3.3.22 *Sea $\mid\sim$ una relación de consecuencia. Si $M \models C(\alpha)$, entonces*

$$M \in min(mod(\alpha) \cap \mathcal{S}, \prec_e).$$

Demostración: Es inmediata de la definición de $\prec_e$. ∎

Introducimos ahora otra regla que juega un papel importante para analizar la relación $\prec_e$.

WDR $\quad C(\alpha \vee \beta) \subseteq Cn(C(\alpha) \cup C(\beta))$.

La regla WDR fue propuesta por Freund [19] para estudiar los modelos preferenciales donde la función l es inyectiva. Como veremos, las relaciones racionales se pueden representar por modelos prefereciales con l inyectiva. Para obtener más información sobre los modelos inyectivos ver [19, 39]. WDR es una abreviación en inglés de *Weak Disjunctive Rationality.*

Notemos que si uno pudiera garantizar que $\prec_e$ fuera suave, entonces $W = (\mathcal{S}, l, \prec_e)$, con $l(N) = N$, sería un modelo preferencial. Observemos que en este caso $\widehat{\alpha}$ es la colección de modelos normales que satisfacen N. El siguiente resultado muestra que $\prec_e$ es suave cuando $\mid\sim$ es preferencial y satisface WDR.

Lema 3.3.23 *Supongamos que* $\mid\!\sim$ *es una relación preferencial que además satisface* WDR*, entonces* $\prec_e$ *es asimétrica y suave sobre* $\mathcal{S}$ *y además para toda fórmula* α *se cumple que*

$$mod(C(\alpha)) \;=\; min(mod(\alpha) \cap \mathcal{S}, \prec_e). \tag{3.1}$$

Demostración: Comenzaremos mostrando que $\prec_e$ es asimétrica sobre $\mathcal{S}$. Sea M una valuación normal y sea α una fórmula tal que $M \models C(\alpha)$. En particular $M \models \alpha$, por lo tanto $M \not\prec_e M$.

Ahora mostraremos que $\prec_e$ es suave. Sea $M \in mod(\alpha) \cap \mathcal{S}$. Queremos mostrar que, o bien, $M \in min(mod(\alpha) \cap \mathcal{S}, \prec_e)$, o bien, existe $N \prec_e M$ tal que $N \in min(mod(\alpha) \cap \mathcal{S}, \prec_e)$. Consideraremos dos casos:

(i) Si $M \models C(\alpha)$, entonces por el lema 3.3.22 se tiene que $M \in min(mod(\alpha) \cap \mathcal{S}, \prec_e)$.

(ii) Supongamos que $M \not\models C(\alpha)$. Defina

$$U = C(\alpha) \cup \{\neg\beta : \; M \models C(\beta)\}.$$

Afirmamos que U es consistente. Supongamos que no es así, entonces por compacidad, existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in C(\alpha)$ y $\beta_1, \cdots, \beta_n$ tales que $M \models C(\beta_i)$ para todo $i \leq n$ y $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \neg\beta_1, \cdots, \neg\beta_n\}$ es inconsistente. Es decir, $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m \vdash \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_n$. Sea $\beta = \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_n$. Por AND tenemos que $\alpha \mid\!\sim \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m$. Por RW $\alpha \mid\!\sim \beta$. Así que $\alpha \mid\!\sim_W \alpha \wedge \beta$ y por CM, $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \alpha$. Por el lema 3.1.3, se tiene que $C(\alpha) = C(\alpha \wedge \beta)$.

Por otra parte, afirmamos que $M \models C(\alpha \wedge \beta)$. Lo que junto con lo visto anteriormente nos permite concluir que $M \models C(\alpha)$, y esto es una contradicción. Para ver que $M \models C(\alpha \wedge \beta)$, supongamos que $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$, entonces por el lema 3.1.6, $\beta \mid\!\sim \alpha \to \gamma$. Usando WDR, tenemos que $M \models C(\beta)$. En particular, $M \models \alpha \to \gamma$ y como $M \models \alpha$, entonces $M \models \gamma$. Esto muestra que $M \models C(\alpha \wedge \beta)$.

En resumen, hemos mostrado que U es consistente. Sea N una valuación tal que $N \models U$. Por la definición de $\prec_e$, se tiene que $N \prec_e M$. Como $N \models C(\alpha)$, entonces por el lema 3.3.22, concluimos que $N \in min(mod(\alpha) \cap \mathcal{S}, \prec_e)$.

Observemos que hemos mostrado que si $M \not\models C(\alpha)$, entonces $M \notin min(mod(\alpha) \cap \mathcal{S}, \prec_e)$. Esto junto con el lema 3.3.22 completa la demostración de (3.1). ∎

Aún para relaciones preferenciales que satisfagan WDR, la relación $\prec_e$ puede no ser transitiva (un ejemplo de esto se puede ver en [39]). Sin embargo, al cumplirse el postulado DR, que es mas fuerte que WDR, veremos que $\prec_e$ si es transitiva.

Lema 3.3.24 *Sea $\mid\!\sim$ una relación preferencial. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(i) $\mid\!\sim$ *satisface* DR.

(ii) Para todo par de fórmulas α y β y valuaciones N y M, si $M \models C(\alpha)$ y $N \models C(\beta)$, entonces $M \models C(\alpha \vee \beta)$ o $N \models C(\alpha \vee \beta)$.

Demostración: La dejamos como ejercicio al lector. ∎

Lema 3.3.25 *Supongamos que $\mid\!\sim$ es preferencial y satisface* DR. *Entonces para todo par de valuaciones normales M y N los siguientes enunciados son equivalentes.*

(i) $M \prec_e N$.

(ii) Para todo par de fórmulas α y β, si $M \models C(\alpha)$ y $N \models C(\beta)$, entonces $M \models C(\alpha \vee \beta)$ y $N \not\models C(\alpha \vee \beta)$.

Demostración: Supongamos que $M \prec_e N$. Sean α, β fórmulas tales que $M \models C(\alpha)$ y $N \models C(\beta)$. Entonces por el lema 3.3.24 basta mostrar que $N \not\models C(\alpha \vee \beta)$. En efecto, si $N \models C(\alpha \vee \beta)$, entonces, como $M \prec_e N$, se tendría que $M \not\models \alpha \vee \beta$, lo cual es falso (pues $M \models \alpha$).

Recíprocamente, supongamos que se cumple lo que expresa (ii). Para ver que $M \prec_e N$, supongamos que $N \models C(\beta)$. Queremos mostrar que $M \not\models \beta$. Supongamos que $M \models \beta$. Como M es normal, existe una fórmula γ tal que $M \models C(\gamma)$. Entonces por ser $\mid\!\sim$ preferencial, es fácil verificar como se hizo en la demostración del lema 3.3.23, que $M \models C(\gamma \wedge \beta)$. Luego por (ii) tenemos que $N \not\models C((\gamma \wedge \beta) \vee \beta)$. Pero esto es una contradicción, pues $(\gamma \wedge \beta) \vee \beta$ es lógicamente equivalente a β.

∎

Lema 3.3.26 *Si* $\mid\!\sim$ *es una relación preferencial que además satisface* DR*, entonces* $\prec_e$ *es transitiva.*

Demostración: Supongamos que N, M y P son valuaciones normales tales que $N \prec_e M$ y $M \prec_e P$. Queremos mostrar que $N \prec_e P$. Supongamos que $N \not\prec_e P$. Por el lema 3.3.25 existen fórmulas α y γ tales que $P \models C(\gamma)$, $N \models C(\alpha)$ y $N \not\models C(\alpha \vee \gamma)$ o $P \models C(\alpha \vee \gamma)$. Analizaremos las dos alternativas por separado. Como M es normal, fijemos una fórmula β tal que $M \models C(\beta)$.

Supongamos que $P \models C(\alpha \vee \gamma)$. Como $M \prec_e P$, entonces, por el lema 3.3.25, $M \models C(\alpha \vee \gamma \vee \beta)$. Pero esto contradice que $N \prec_e M$, pues $N \models C(\alpha)$.

Si $N \not\models C(\alpha \vee \gamma)$, entonces por el lema 3.3.24, sabemos que necesariamente $P \models C(\alpha \vee \gamma)$. Y estamos en el caso anterior.

∎

Lema 3.3.27 *Supongamos que* $\mid\!\sim$ *es racional. Entonces para todo par de valuaciones normales* M *y* N *los siguientes enunciados son equivalentes.*

(i) $M \prec_e N$.

(ii) Existen fórmulas α *y* β *tales que* $M \models C(\alpha)$, $N \models C(\beta)$, $M \models C(\alpha \vee \beta)$ *y* $N \not\models C(\alpha \vee \beta)$.

Demostración: Como RM implica DR, entonces del lema 3.3.25 se obtiene que (i) implica (ii). Para mostrar la otra dirección, supongamos que α y β satisfacen lo expresado en (ii) y veamos que $M \prec_e N$. Usaremos de nuevo el lema 3.3.25. Sean γ y δ fórmulas tales que $N \models C(\gamma)$ y $M \models C(\delta)$. Entonces por el lema 3.3.24 se concluye que $\gamma \vee \delta \not\mid\!\sim \neg(\alpha \vee \beta)$ y también que $\alpha \vee \beta \not\mid\!\sim \neg(\gamma \vee \delta)$. Por el lema 3.1.8 tenemos que

$$\begin{aligned} C((\alpha \vee \beta) \wedge (\gamma \vee \delta)) &= Cn(C(\gamma \vee \delta) \cup \{\alpha \vee \beta\}) \\ &= Cn(C(\alpha \vee \beta) \cup \{\gamma \vee \delta\}). \end{aligned}$$

De esto se concluye que $M \models C(\gamma \vee \delta)$ y que $N \not\models C(\gamma \vee \delta)$. Por el lema 3.3.25 se tiene que $M \prec_e N$.

∎

Ya tenemos todo lo necesario para completar la demostración del teorema 3.3.19.

Demostración de 3.3.19. Sea W un modelo rankeado. Ya vimos en la proposición 3.3.20 que $\mid\sim_W$ es racional.

Recíprocamente, supongamos que $\mid\sim$ es una relación racional. Considere el modelo $W = (\mathcal{S}, l, \prec_e)$ donde $l(N) = N$. Ya vimos en los lemas 3.3.23 y 3.3.26 que $\prec_e$ es asimétrica, suave y transitiva. Y además (3.1) muestra que $\mid\sim_W = \mid\sim$. Sólo falta verificar que $\prec_e$ es modular. Usaremos la caracterización de modularidad dada en el lema 3.3.18. Sean N, M y P valuaciones normales. Supongamos que N y M son $\prec_e$-incomparables y que $N \prec_e P$. Queremos mostrar que $M \prec_e P$. Sean α, β y γ fórmulas tales que $M \models C(\alpha)$, $N \models C(\beta)$ y $P \models C(\gamma)$. Como N y M son $\prec_e$-incomparables, del lema 3.3.27 se concluye que N y M satisfacen $C(\alpha \vee \beta)$. Afirmamos que $M \models C(\alpha \vee \beta \vee \gamma)$ y $P \not\models C(\alpha \vee \beta \vee \gamma)$. En efecto, como $M \models C(\alpha \vee \beta)$, $P \models C(\gamma)$ y $M \prec_e P$, entonces $P \not\models C(\alpha \vee \beta \vee \gamma)$. Del lema 3.3.24 se obtiene que $M \models C(\alpha \vee \beta \vee \gamma)$. Finalmente, del lema 3.3.27 se concluye que $M \prec_e P$.

∎

3.3.5. Clausuras respecto a los sistemas C, P y R.

En esta sección introduciremos el concepto de clausura acumulativa y preferencial. Además, analizaremos la relación entre los teorema de representación y la completitud de los sistemas de reglas **C**, **P** y **R**.

Definición 3.3.28 *Sea K un conjunto de afirmaciones condicionales. Diremos que una afirmación condicional $\alpha \mid\sim \beta$ es* acumulativamente implicada *por K, si $\alpha \mid\sim_W \beta$ para todo modelo acumulativo W que satisface todas las afirmaciones en K. De manera análoga definimos los conceptos de cuando una afirmación es preferencialmente o racionalmente implicada por una colección K, usando en cada caso modelos preferenciales o modelos modulares.*

Una *regla* es una relación $R(a_1, \cdots, a_n, b)$ entre afirmaciones condicionales, donde n puede ser un entero positivo cualquiera. Por ejemplo, la regla CM la podemos expresar de la siguiente manera: Usaremos el par ordenado (α, β) para indicar la afirmación condicional $\alpha \mid\!\sim \beta$.

$$\mathsf{CM} = \{((\alpha,\gamma),(\alpha,\beta),(\alpha\wedge\beta,\gamma)) : \ \alpha,\ \beta \text{ y } \gamma \text{ son fórmulas}\}.$$

Diremos que una afirmación condicional b se obtiene a partir de un conjunto de afirmaciones K usando la regla R, si existen afirmaciones $a_1, \cdots, a_n$ en K tales que $R(a_1, \cdots, a_n, b)$ se satisface.

Ejercicio 3.3.29 *Muestre que todas la reglas del sistema* **R** *se pueden representar como relaciones entre afirmaciones condicionales, análogamente a lo que hicimos con la regla* CM.

Dado un conjunto **A** de reglas y un conjunto K de afirmaciones condicionales, una prueba de una afirmación condicional b a partir de K usando las reglas en **A** es una sucesión finita de afirmaciones condicionales $a_1, \cdots, a_n$ tales que a_1 está en K, a_{i+1} se obtiene a partir de $\{a_1, \cdots, a_i\}$ usando alguna regla en **A** y $a_n = b$.

Definición 3.3.30 *Dado un conjunto* **A** *de reglas y un conjunto K de afirmaciones condicionales. Diremos que un condicional $\alpha \mid\!\sim \beta$ es* **A**-*deducible de K, si existe una prueba de $\alpha \mid\!\sim \beta$ a partir de K usando las reglas en* **A**.

Es claro que si una afirmación es **C**-deducible a partir de K, entonces es acumulativamente implicada por K. Lo mismo podemos decir para los sistemas **P** y **R**.

El problema que nos interesa es ver si el recíproco también se cumple. Es decir, si una afirmación es acumulativamente implicada por K, entonces ¿será **C** deducible?. Preguntas similares se formulan para los sistemas **P** y **R**.

Es fácil verificar que todas las reglas de los sistemas **C** y **P** son estables bajo intersecciones. Más formalmente, si $\{\mid\!\sim_i : \ i \in I\}$ es una colección de relaciones acumulativas (respectivamente, preferenciales) entonces la relación $\bigcap_{i\in I} \mid\!\sim_i$ es acumulativa (respectivamente, preferencial). La razón es que todas las reglas de estos sistemas son *reglas Horn*, es decir, reglas que aseguran que si ciertos condicionales están en la relación, entonces otro condicional también pertenece a la relación. Por ejemplo, la regla CM dice que si los pares (α, γ), (α, β) están en la relación, entonces el par $(\alpha \wedge \beta, \gamma)$ también pertenecen a la relación.

Lema 3.3.31 *La intersección de una familia arbitraria de relaciones acumulativas es acumulativa. Lo mismo vale para una familia de relaciones preferenciales.*

En vista del lema anterior es natural introducir el concepto de clausura acumulativa y preferencial. Sólo lo haremos con la clausura preferencial, pues es la que usaremos.

Definición 3.3.32 *Sea K un conjunto de afirmaciones condicionales, la* clausura preferencial *de K, que denotaremos por K^{p}, es la menor relación preferencial que contiene a todas las afirmaciones en K.*

El concepto de clausura preferencial de una colección puede enunciarse usando la noción de deducción que se introdujo arriba.

Lema 3.3.33 *Sea K una colección de afirmaciones condicionales. Entonces la clausura preferencial de K consiste de todas las afirmaciones que son* **P***-deducibles a partir de K*

Demostración: Es claro que toda afirmación que sea **P**-deducible a partir de K debe estar en cualquier relación preferencial que contenga a K y por lo tanto debe pertenecer a la clausura preferencial de K. Para la otra dirección, sea L la colección de aquellas afirmaciones condicionales que son **P**-deducibles a partir de K. El lector interesado puede verificar que L es una relación preferencial que claramente contiene a K (esto se debe a que todas las reglas en **P** son Horn). Esto garantiza que L debe contener a la clausura preferencial de K y con esto termina la demostración.

∎

El siguiente resultado se puede interpretar como un teorema de completitud para el sistema **P**.

Teorema 3.3.34 *Sea K un conjunto de afirmaciones condicionales. Dada una afirmación condicional $\alpha \mid\!\sim \beta$, los siguientes enunciados son equivalentes*

(i) $\alpha \mid\!\sim \beta$ es preferencialmente implicada por K.

(ii) $\alpha \mid\!\sim \beta$ es **P***-deducible a partir de K.*

Demostración: Es claro que (ii) implica (i).

Supongamos que una afirmación $\alpha \mid\!\sim \beta$ no es **P**-deducible a partir de $\underline{K}$. Sea $\overline{\mid\!\sim}$ la clausura preferencial de K. Por el lema 3.3.31 sabemos que $\overline{\mid\!\sim}$ es preferencial y por el lema 3.3.33 $\alpha \overline{\not\mid\!\sim} \beta$. Sea W un modelo preferencial (vea el teorema 3.3.16) tal que $\overline{\mid\!\sim} \;=\; \mid\!\sim_W$. Entonces $\alpha \not\mid\!\sim_W \beta$ y por lo tanto K no implica preferencialmente a $\alpha \mid\!\sim \beta$. ∎

En algunos ejemplos la clausura preferencial no captura correctamente nuestra intuición. Considere la siguiente situación. Supongamos que el lenguaje contiene al menos tres variables: p, q y r. Sea K la colección que sólo contiene una afirmación condicional: $p \mid\!\sim q$. Mostraremos más abajo (ver 3.3.37) que $p \wedge r \mid\!\sim q$ no pertenece a la clausura preferencial de K. Esto es contraintuitivo, pues si la única información disponible es que cuando p ocurre, normalmente q también sucede, y no tenemos información sobre la relación que r y p guardan entre sí, es natural suponer que r no tiene influencia sobre los objetos que satisfacen p, y por consiguiente es racional inferir q si $p \wedge r$ ocurre. La explicación de este fenómeno es que la clausura preferencial $\overline{K}$ de K no es racional, pues $p \not\mid\!\sim \neg r$ pertenece a $\overline{K}$ y $p \wedge r \mid\!\sim q$ no pertenece a $\overline{K}$. Una solución a este problema fue propuesta en [33].

No es posible definir de manera análoga la clausura racional, esto es, para algunas K la intersección de todas las relaciones racionales que contienen a K no es una relación racional (ver los ejemplos 3.3.37 y 3.3.38). Observemos que la demostración del lema 3.3.31 no se puede usar para el sistema **R** pues la regla RM no es Horn. Lo que resulta sumamente interesante es que la intersección de todas las relaciones racionales que contienen a K, es igual a la clausura preferencial de K (ver [33]). Daremos una demostración de este hecho sólo para el caso cuando el lenguaje es finito. Necesitaremos un resultado bien conocido sobre órdenes parciales que enunciamos en el ejercicio que sigue.

Ejercicio 3.3.35 Sea $(S, \preceq)$ un orden parcial con S finito. Muestre que existe un orden lineal $\sqsubseteq$ sobre S que extiende a S, es decir, si $s \preceq t$, entonces $s \sqsubseteq t$, para todo $s, t \in S$.

Sugerencia: Muéstrelo por inducción en la cardinalidad de S. Para el paso inductivo, sea x un elemento maximal de S, extienda el orden sobre $S \setminus \{x\}$ a un orden lineal y defina la extensión lineal sobre S colocando a x como máximo.

Teorema 3.3.36 *Supongamos que el lenguaje es finito y K es una colección de afirmaciones condicionales. Si $\alpha \mid\!\sim \beta$ no pertenece a la clausura preferencial de K, entonces existe un modelo linealmente ordenado que satisface K y no satisface $\alpha \mid\!\sim \beta$. En particular, la clausura preferencial de K es igual a la intersección de todas las relaciones racionales que contienen a K.*

Demostración: Como la clausura preferencial de K es una relación preferencial, entonces por el teorema de representación 3.3.16 existe un modelo preferencial finito $W = (S, l, \prec)$ tal que $\alpha \not\mid\!\sim_W \beta$ y además W es un modelo de todas las afirmaciones en K. Sea $s \in S$ un estado en $min(\widehat{\alpha})$ tal que $l(s)$ no es un modelo de β. Considere ahora el conjunto $S' = \{t \in S : \ t \preceq s\}$. Por el ejercicio 3.3.35 existe una relación de orden lineal $\sqsubseteq$ sobre S' que extiende a $\preceq$. Considere el modelo $W' = (S', l, \sqsubseteq)$. Por ser S' finito y $\sqsubseteq$ un orden lineal, entonces $\sqsubseteq$ es una relación suave y en consecuencia W' es un modelo preferencial. Para ver que W' satisface todas las afirmaciones en K, simplemente observe que al ser $\sqsubseteq$ una extensión de $\preceq$ se cumple que $min_{S'}(\widehat{\gamma}, \sqsubseteq) \subseteq min_S(\widehat{\gamma}, \preceq)$ para toda fórmula γ. Por último, note que $s \in min_{S'}(\widehat{\alpha}, \sqsubseteq)$ y en consecuencia $\alpha \not\mid\!\sim_{W'} \beta$.

Para mostrar la segunda afirmación, sea $\overline{K}$ la intersección de todas las relaciones racionales que contienen a K. Denotemos por K^p la clausura preferencial de K. Claramente $K^p \subseteq \overline{K}$. Si $\alpha \mid\!\sim \beta$ no pertenece a K^p, entonces por lo visto arriba existe un modelo preferencial lineal W de K que no satisface $\alpha \mid\!\sim \beta$. Pero es fácil verificar que $\mid\!\sim_W$ es racional, esto muestra que $\alpha \mid\!\sim \beta$ no pertenece a $\overline{K}$. ∎

Ejemplo 3.3.37 *Supongamos que el lenguaje contiene al menos tres variables, p, q y r. Sea K la colección que sólo contiene a $p \mid\!\sim q$. Sea K^p la clausura preferencial de K. Mostraremos que $p \wedge r \mid\!\sim q$ no pertenece a K^p.*

Presentaremos los modelos indicando las valuaciones que ocupan cada punto en el orden parcial. Recordemos que las valuaciones, para un lenguaje finito, las representamos por el conjunto de los átomos que reciben valor 1.

Consideremos el siguiente modelo modular W_1:

$$\begin{array}{c} \{p, r\} \\ | \\ | \\ \{p, q\}. \end{array}$$

El lector puede verificar que $p \mid\!\sim_{W_1} q$ y $p \wedge r \not\mid\!\sim_{W_1} q$. En consecuencia, $p \wedge r \mid\!\sim q$ no pertenece a $\overline{K}^p$.

Considere el siguiente modelo W_2 con un sólo nivel:

$$\{p, q, r\}.$$

Es claro que $p \mid\!\sim_{W_2} q$ y $p \not\mid\!\sim_{W_2} \neg r$. Por lo tanto $p \mid\!\sim \neg r$ no pertenece a K^p. Esto muestra que K^p no satisface RM.

Sea $\widetilde{K}$ la intersección de todas las relaciones racionales que contienen a K. Ya mostramos en el teorema 3.3.36 que $\widetilde{K}$ es igual a K^p. En consecuencia $\widetilde{K}$ no es racional. Esto se puede mostrar directamente, observando que los dos modelos W_1 y W_2 que usamos antes son modulares.

3.3.6. Dos ejemplos clásicos

Daremos dos ejemplos más sobre la clausura preferencial. Esperamos sirvan para ilustrar por qué esta clausura permite inferir información interesante a partir de un conjunto de afirmaciones condicionales.

Ejemplo 3.3.38 *(El diamante) Sea K la siguiente colección de afirmaciones condicionales:*

$$t \mid\!\sim p \qquad p \mid\!\sim e \qquad t \mid\!\sim s \qquad s \mid\!\sim \neg e.$$

Construiremos varios modelos preferenciales que satisfacen todas estas afirmaciones.

(i) *Sea W el modelo que consiste de un sólo punto donde colocamos la siguiente valuación:*

$$\{p, e\}$$

El lector puede verificar que este es un modelo para K. Por ejemplo, la afirmación $t \mid\!\sim_W p$ es válida pues $\widehat{t}$ es vacío.

De la misma manera, el lector puede verificar que si en lugar de $\{p, e\}$ colocamos $\{s\}$ también obtenemos un modelo para K.

(ii) *Con los modelos anteriores se obtiene una relación $\mid\!\sim_W$ que es mucho mas grande que K. En esos dos ejemplos se cumple que $t \mid\!\sim_W \alpha$ para toda fórmula consistente α. Considere ahora un modelo W_1 con dos niveles como se indica a continuación.*

$$\begin{array}{c} \{t, p, s\} \\ | \\ | \\ \{p, e\} \end{array}$$

Y sea W_2 el modelo definido de la manera siguiente:

$$\begin{array}{c} \{t, p, s, e\} \\ | \\ | \\ \{s\} \end{array}$$

Le dejamos al lector interesado la tarea de verificar que W_1 y W_2 son modelos para K.

(iii) *Denotemos por $\mid\!\sim$ la clausura preferencial de K. Afirmamos que $\top \mid\!\sim \neg t$. En efecto, basta notar que si $(\mathcal{S}, l, \prec)$ es un modelo preferencial que satisface K y x es un estado minimal para $\top$, se tiene necesariamente que $l(x) \not\models t$. Pues de lo contrario, por ser x minimal para $\top$, se tiene que x también es minimal para t y en consecuencia minimal para p y s, lo que es imposible. Esto dice que respecto a la clausura preferencial de K, uno no espera que t se cumpla.*

Por otra parte, $\top \not\mid\!\sim \neg s$*, pues* $\top \not\mid\!\sim_{W_2} \neg s$*. Además,* $s \not\mid\!\sim \neg t$*, pues* $s \not\mid\!\sim_{W_1} \neg t$*. Tenemos entonces que* $\top \mid\!\sim \neg t$*,* $\top \not\mid\!\sim \neg s$ *y* $s \not\mid\!\sim \neg t$*. Esto muestra que* $\mid\!\sim$ *no satisface* RM *y por lo tanto no es racional.*

Este ejemplo ilustra que la intersección de dos relaciones racionales, $\mid\!\sim_{W_1}$ *y* $\mid\!\sim_{W_2}$*, no es necesariamente racional.*

Ejemplo 3.3.39 *(El triángulo del pingüino) Sea* K *la siguiente colección de afirmaciones condicionales:*

$$p \mid\!\sim a \qquad p \mid\!\sim \neg v \qquad a \mid\!\sim v.$$

Una interpretación usual de K *dice: los* **p**ingüinos son **a**ves, las **a**ves (normalmente) **v**uelan y los **p**ingüinos no **v**uelan.

Construiremos un modelo racional que satisface todas estas afirmaciones. Considere un modelo W *con dos niveles como se indica a continuación:*

$$\begin{array}{c} \{p, a\} \\ | \\ | \\ \{a, v\} \end{array}$$

El lector puede verificar que $\mid\!\sim_W$ *contiene a* K*.*

Sea $\mid\!\sim$ *la clausura preferencial de* K*. Afirmamos que* $v \mid\!\sim \neg p$*. En efecto, sea* $(\mathcal{S}, l, \prec)$ *un modelo preferencial para* $\mid\!\sim$*. Sea* $s \in \widehat{v}$*. Mostraremos que si* $l(s) \models p$*, entonces* $s \notin min(\widehat{v})$*. Supongamos entonces que* $l(s) \models p$*. Como* $p \mid\!\sim \neg v$*, entonces* s *no es minimal en* $\widehat{p}$*. Sea* $t \prec s$ *con* $t \in min(\widehat{p})$*. Entonces* $l(t) \models a \wedge \neg v$*. Como* $a \mid\!\sim v$*, entonces* $t \notin min(\widehat{a})$*. Sea* $u \prec t$ *con* $u \in min(\widehat{a})$*. Como* $a \mid\!\sim b$*, entonces* $l(u) \models v$ *y* $u \prec s$*.*

Le dejamos al lector mostrar de igual manera que $a \wedge p \mid\!\sim \neg v$*.*

3.4. Relaciones probabilistas y el sistema O

En esta sección presentaremos un tipo de relación de consecuencia que se basa en una medida de probabilidad sobre el lenguaje. Todos los resultados de esta sección provienen de los trabajos de J. Hawthorne y Makinson [21, 22] y J. Paris y R. Simmonds [37].

Una *función de probabilidad* sobre $\mathcal{L}$ es una función $p : \mathcal{L} \to [0,1]$ tal que

(i) Si $\vdash \alpha$, entonces $p(\alpha) = 1$.

(ii) Si $\vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$, entonces $p(\alpha \vee \beta) = p(\alpha) + p(\beta)$.

Las funciones de probabilidad vienen dadas por medidas de probabilidad sobre el conjunto de todas las valuaciones $\mathcal{W}$. En efecto, si m es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{W}$ defina $p : \mathcal{L} \to [0,1]$ por

$$p(\alpha) = m(mod(\alpha)). \tag{3.2}$$

Ejercicio 3.4.1 *Muestre que en efecto la función p definida por* (3.2) *es una función de probabilidad sobre $\mathcal{L}$. Y recíprocamente, si el lenguaje es finito, para toda función de probabilidad p sobre $\mathcal{L}$ existe una medida de probabilidad m sobre $\mathcal{W}$ tal que* (3.2) *se cumple.*

Definición 3.4.2 *Dada una función de probabilidad p y un real $r \in [0,1]$ definimos la* relación de consecuencia probabilista $\mid\!\sim_{p,r}$ *por*

$$\alpha \mid\!\sim_{p,r} \beta, \ \ si \ \ p(\alpha \wedge \beta) \geq rp(\alpha).$$

Note que $p(\alpha \wedge \beta) \geq rp(\alpha)$ es equivalente a que la probabilidad condicional $p(\beta|\alpha)$ sea mayor que r. El valor r se llama el *umbral.*

Los ejemplos que presentamos a continuación ilustran que las relaciones de consecuencia probabilista no cumplen las reglas AND y OR.

Ejemplo 3.4.3 La paradoja de la lotería.

Supongamos que en un juego de lotería se juegan 1 millón de boletos. Es natural suponer que la probabilidad que un boleto resulte ganador es la misma sin importar el boleto, así, si denotamos por b_i el evento en el que el boleto i resulta ganador, entonces b_i tiene probabilidad 10^{-6} para cada $1 \leq i \leq 10^6$. Por otra parte, supondremos que un, y sólo un boleto, puede resultar ganador. Por esto, el evento $b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_{10^6}$ tiene probabilidad 1. Considere el umbral $r = 1 - 10^{-6}$. Tenemos entonces que $p(\neg b_i) = r$ para todo i. Esto dice que

$$\top \mid\!\sim_r \neg b_i \ \ para\ todo\ i.$$

Sin embargo

$$\top \not\mid\!\sim_r (\neg b_1 \wedge \neg b_2 \wedge \cdots \wedge \neg b_{10^6}).$$

Pues la probabilidad de $\neg b_1 \wedge \neg b_2 \wedge \cdots \wedge \neg b_{10^6}$ *ya dijimos que es cero.*

Ejemplo 3.4.4 Un ejemplo de una relación probabilista que no satisface OR.

Suponga que el lenguaje tiene al menos 3 variables, de tal forma que existan al menos 6 valuaciones que denotaremos por v_i*, con* $i \in \{1, \cdots, 6\}$*. Considere la siguiente asignación de probabilidades a estas valuaciones:*

$$\begin{aligned} p(v_i) &= 2/9 \quad \text{para } 1 \leq i \leq 3, \\ p(v_i) &= 1/9 \quad \text{para } 4 \leq i \leq 6. \end{aligned}$$

Sea α, β, γ *fórmulas cuyos modelos se indican a continuación:*

$$\begin{aligned} \text{mód } \alpha &= v_1, v_2, v_4, v_5 \\ \text{mód } \beta &= v_2, v_3, v_4, v_6 \\ \text{mód } \gamma &= v_1, v_2, v_6 \end{aligned}$$

El lector puede convencerse que para $r = 1/2$ *se cumple que*

$$\alpha \mid\!\sim_{p,r} \gamma, \;\; \beta \mid\!\sim_{p,r} \gamma, \;\; (\alpha \vee \beta) \not\mid\!\sim_{p,r} \gamma.$$

Ejercicio 3.4.5 *[21] Extienda lo hecho en el ejemplo 3.4.4 y muestre el resultado más general que dice que para todo* $r \in (0, 1)$ *y toda función de probabilidades* p *la relación* $\mid\!\sim_{p,r}$ *no satisface* OR.

Veremos en seguida que las siguientes versiones débiles de AND y OR son convalidadas por la relaciones de consecuencia probabilistas.

WOR Si $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$ y $\alpha \wedge \neg\beta \mid\!\sim \gamma$, entonces $\alpha \mid\!\sim \gamma$.

WAND Si $\alpha \mid\!\sim \gamma$ y $\alpha \wedge \neg\beta \mid\!\sim \beta$, entonces $\alpha \mid\!\sim \gamma \wedge \beta$.

Debido a que la regla AND en general no se cumple, reformularemos la monotonía cautelosa de la siguiente manera

VCM Si $\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta \wedge \gamma$, entonces $\alpha \wedge \beta \mathrel{|\!\sim} \gamma$.

Donde VCM es la abreviación en inglés de *Very Cautious Monotony.*

Definición 3.4.6 *[21] El sistema* **O** *consiste de las reglas* REF*,* LLE*,* RW*,* VCM*,* WAND *y* WOR*.*

Teorema 3.4.7 *[21] Toda relación de consecuencia probabilista satisface el sistema* **O***.*

Demostración: Sea p una función de probabilidad y $r \in [0,1]$. Dejamos a cargo del lector verificar que $\mathrel{|\!\sim}_{p,r}$ satisface REF, LLE, RW y WOR. Verifiquemos que VCM se cumple. Supongamos que $\alpha \mathrel{|\!\sim}_{p,r} \beta \wedge \gamma$. Esto es, $p(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) \geq rp(\alpha)$. Como $p(\alpha) \geq p(\alpha \wedge \beta)$, entonces $p(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) \geq rp(\alpha \wedge \beta)$. Esto dice que $\alpha \wedge \beta \mathrel{|\!\sim}_{p,r} \gamma$. ∎

En el ejercicio 3.4.5 vimos que la regla OR falla para cualquier valor de $r \in (0,1)$. El siguiente resultado tomado de [21] analiza el caso $r = 1$.

Proposición 3.4.8 *Si $r = 1$, entonces $\mathrel{|\!\sim}_{p,r}$ es preferencial, para toda función de probabilidad p.*

Demostración: Mostraremos que OR y AND se cumplen. Notemos que $\alpha \mathrel{|\!\sim}_{1,p} \beta$ sii $p(\alpha \wedge \beta) = p(\alpha)$. En particular, esto implica que $p(\alpha \wedge \neg\beta) = 0$.

Veamos OR. Supongamos que $\alpha \mathrel{|\!\sim}_{1,p} \gamma$ y $\beta \mathrel{|\!\sim}_{1,p} \gamma$. Entonces $p(\alpha \wedge \neg\gamma) = p(\beta \wedge \neg\gamma) = 0$. Por lo tanto $p((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\gamma) = 0$. Esto dice que $p((\alpha \vee \beta) \wedge \gamma) = p(\alpha \vee \beta)$. Es decir, $\alpha \vee \beta \mathrel{|\!\sim}_{1,p} \gamma$.

De manera similar se verifica que AND se cumple. ∎

Teorema 3.4.9 *[22] Toda regla Horn que sea probabilístamente válida (es decir, que sea satisfecha por cualquier relación de consecuencia probabilista), también es preferencialmente válida (es decir, es satisfecha en todo modelo preferencial).*

La hipótesis que la regla sea Horn es necesaria, como veremos a continuación. Recordemos la regla NR.

NR Si $\alpha \wedge \gamma \not\mid\!\sim \beta$ y $\alpha \wedge \neg\gamma \not\mid\!\sim \beta$, entonces $\alpha \not\mid\!\sim \beta$.

Podemos reescribirla de la siguiente forma

NR Si $\alpha \mid\!\sim \beta$, entonces $\alpha \wedge \gamma \mid\!\sim \beta$ o $\alpha \wedge \neg\gamma \mid\!\sim \beta$.

Es claro entonces que NR no es una regla Horn.

Proposición 3.4.10 *Toda relación de consecuencia probabilista satisface* NR.

Demostración: Observemos que

$$p(\alpha \wedge \beta) = p(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) + p(\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma)$$

$$\begin{aligned} p(\alpha \wedge \beta) &\geq rp(\alpha) \\ &= rp(\alpha \wedge \gamma) + rp(\alpha \wedge \neg\gamma). \end{aligned}$$

Por consiguiente, o bien $p(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) \geq rp(\alpha \wedge \gamma)$, o bien $p(\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma) \geq rp(\alpha \wedge \neg\gamma)$. ∎

El siguiente ejemplo ilustra que no toda relación preferencial satisface NR.

Ejemplo 3.4.11 *Considere el siguiente orden parcial donde los nodos están etiquetados con una valuación en un lenguaje de 2 variables:* a, b.

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & & \{a\} \\ | & & | \\ \{b\} & & \{a,b\} \end{array}$$

Sea $\alpha = \top$, $\beta = b$ *y* $\gamma = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$. *Sea* $\mid\!\sim$ *la relación preferencial dada por este modelo. Entonces* $\alpha \mid\!\sim \beta$, $\alpha \wedge \gamma \not\mid\!\sim \beta$ *y* $\alpha \wedge \neg\gamma \not\mid\!\sim \beta$.

Ejercicio 3.4.12 *[21] Sea* $\mid\!\sim$ *una relación de consecuencia que satisface las reglas del sistema* **O** *y* AND. *Muestre que* $\mid\!\sim$ *es preferencial.*

3.4.1. Completitud y representabilidad de las relaciones probabilistas

Es natural preguntarse si existe un teorema de representación para las relaciones de consecuencia probabilistas, es decir, ¿existirá un conjunto $\mathcal{A}$ (finito o infinito) de reglas Horn que sean probabilísticamente válidas tales que toda relación de consecuencia que satisfaga todas las reglas en $\mathcal{A}$ es igual a una relación probabilista?. A continuación enunciaremos un resultado de [22] que muestra que la respuesta a esa pregunta es negativa. Una regla Horn se dice que es finita, si tiene una cantidad finita de premisas.

Teorema 3.4.13 *Dada cualquier familia $\mathcal{A}$ de reglas Horn finitas que sean probabilísticamente válidas, existe una relación de consecuencia $\mid\!\sim$ que satisface todas las reglas de $\mathcal{A}$ pero que no es una relación de consecuencia probabilista. Además, tal relación $\mid\!\sim$ está determinada por un modelo preferencial lineal.*

Por otra parte, también es natural preguntarse si existe un conjunto $\mathcal{A}$ de reglas Horn finitas probabilísticamente válidas tales que cualquier regla Horn finita que sea probabilísticamente válida se puede derivar a partir de $\mathcal{A}$. En particular, ¿será **O** completo en el sentido que acabamos de mencionar? Las respuesta es negativa como lo mostraron Paris y Simmonds [37].

Capítulo 4

Razonamientos explicatorios

Muchos procesos que manipulan información pueden ser modelados como procesos que buscan una explicación. Por ejemplo: (a) Hacer diagnósticos (en su sentido más amplio tanto en medicina, computación y economía) (b) Interpretación en los lenguajes naturales (por ejemplo, para la búsqueda del significado de una palabra) (c) Diseño de planes de acción. En esta sección presentaremos algunos ideas que sirven para modelar los razonamientos explicatorios.

Un modelo tradicional para los razonamientos explicatorios supone la existencia de una relación lógico deductiva entre las observaciones y sus explicaciones. En este enfoque se supone que tenemos una teoría de base que describe la leyes básicas que rigen el problema o situación en estudio y que se denotará por Σ. Diremos que una fórmula γ (consistente con Σ) es una explicación de α (llamada observación) si

$$\Sigma \cup \{\gamma\} \vdash \alpha. \tag{4.1}$$

Una observación puede tener varias explicaciones, y es por esto que usualmente se dice que la *abducción* es la búsqueda de la mejor explicación de una observación (o de las mejores explicaciones). Nos referiremos a estas explicaciones como las *explicaciones preferidas*. El enfoque lógico modela un razonamiento explicatorio como el inverso del razonamiento deductivo más alguna condición extra que permite seleccionar la mejor explicación. Las preguntas fundamentales que estudiaremos son las siguientes:

1. Si vemos los razonamientos explicatorios como un proceso de inferencia lógica ¿Cuáles son sus propiedades, es decir, que reglas estructurales satisfacen?

2. ¿Cómo podemos medir que tan cercana está la abducción de ser deducción al reves? Es decir, hasta que punto podríamos decir que una fórmula γ es una explicación de una observación α si α se infiere a partir de γ.

3. ¿Que papel juegan los mecanismos de selección de explicaciones para entender las reglas estructurales que satisfacen los razonamientos explicatorios?

Preguntas similares a éstas han sido estudiadas en la literatura: Aliseda [2, 3], Bochman [8], Cialdea-Pirri [13], Flach [16, 17, 18], Zadrozny [43]. Presentaremos algunas de las ideas desarrolladas en [7, 14, 15, 35, 38, 40].

Siguiendo la metodología KLM usada para las relaciones de consecuencia, Flach [18] modeló los razonamientos explicatorios a través de una relación binaria entre una observación y una de sus explicaciones preferidas. En nuestro enfoque usaremos la siguiente noción.

Definición 4.0.14 *Una* relación explicatoria *es una relación binaria* $\alpha \rhd \gamma$ *entre fórmulas tal que*

$$\alpha \rhd \gamma \Rightarrow \ \ \Sigma \not\vdash \neg\gamma \ \ \& \ \ \Sigma \cup \{\gamma\} \vdash \alpha$$

La relación $\alpha \rhd \gamma$ se lee "γ es una explicación preferida de α". Más precisamente, uno debería decir que γ es una explicación respecto de Σ, pero no mencionaremos a Σ pues se mantendrá fija.

La colección de fórmulas consistentes con Σ será denotada por $Form_\Sigma$. El conjunto de posibles explicaciones de una fórmula α es

$$Expla(\alpha) = \{\gamma \in Form_\Sigma : \ \Sigma \cup \{\gamma\} \vdash \alpha\}.$$

Una relación explicatoria $\rhd$ selecciona, para cada α, algunas fórmulas en $Expla(\alpha)$ y por esto las llamamos explicaciones preferidas.

Usaremos la siguiente abreviación

$$\alpha \vdash_\Sigma \beta \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta.$$

Antes de introducir los postulados de racionalidad para las relaciones explicatorias daremos un ejemplo.

4.1. Un ejemplo

Laura es una estudiante de Química y, como pocos, tiene carro. Cuando está en clases normalmente deja su carro en el estacionamiento A, pero si no consigue puesto lo deja en el B. El hermano de Laura, Roberto, tiene una copia de la llave del carro pero para usarlo debe pedirle permiso a Laura. Es bien sabido por todos que Laura sólo le presta el carro a Roberto, si su novia (María C.) lo acompaña.

Un día, después de salir de clases, Laura va a buscar su carro en el estacionamiento A y no lo consigue. Piensa que lo dejó en el B y se va para allá. Al llegar y no hallarlo, sospecha que Roberto se lo llevó sin avisar. Saca el celular para llamarlo y reclamarle, pues él sabía perfectamente que ella lo necesitaba para poder llegar a tiempo a la cita con el odontólogo. Pero no tiene saldo en el celular. *Que broma!*. No importa, donde El Chuchero alquilan teléfonos. Para su sorpresa, al llegar al tarantín de El Chuchero se consigue con María tomándose un café. Esto cambia todo y ahora Laura está preocupada, cree que le robaron el carro, pide el teléfono, llama a Roberto y después de una corta conversación, dice una grosería. Toma el teléfono otra vez y llama a Francisco, un primo policía, para que la ayude con la denuncia del robo.

Vamos a construir un modelo para este ejemplo. Primero que todo, representaremos las diferentes proposiciones con letras.

$$\begin{array}{lcl}
c & = & \textit{el carro_está_estacionado} \\
a & = & \textit{el carro_está_el estacionamiento A} \\
b & = & \textit{el carro_está_el estacionamiento B} \\
j & = & \textit{Roberto_tiene_el_carro} \\
l & = & \textit{María_está_con_Roberto} \\
r & = & \textit{el_carro_se_lo_robaron} \\
p & = & \textit{llamar_a_la_policía}
\end{array}$$

Las reglas que rigen este ejemplo son las siguientes:

$$\Sigma = \begin{cases} c & \leftrightarrow & a \vee b \\ j & \rightarrow & \neg c \wedge l \\ r & \rightarrow & \neg c \wedge p. \end{cases}$$

Una manera de modelar el método que Laura usa para escoger una explicación consiste en ordenar las valuaciones. En este caso, ordenaremos las valuaciones en 5 niveles N_1, N_2, N_3, N_4 y N_5.

$$\begin{array}{lclcl} N_1 & = & mod\,(\ \Sigma \cup \{a\}\ ) & = & \text{estacionado en el A} \\ N_2 & = & mod\,(\ \Sigma \cup \{b\}\ ) & = & \text{estacionado en el B} \\ N_3 & = & mod\,(\ \Sigma \cup \{\neg c \wedge j \wedge \neg r\}\ ) & = & \text{se lo llevó Roberto} \\ N_4 & = & mod\,(\ \Sigma \cup \{\neg c \wedge \neg j \wedge r\}\ ) & = & \text{se lo robaron} \\ N_5 & = & & = & \text{otras alternativas.} \end{array}$$

Las valuaciones en N_1 son las más preferidas o más plausibles para Laura y en N_5 hemos puesto las menos plausibles. Laura considera que es más plausible que Roberto tenga el carro a que el carro haya sido robado. Notemos que N_5 no es vacío, pues la fórmula $\neg c \wedge \neg j \wedge \neg r$ es consistente con Σ, pero esta alternativa Laura la considera como la menos plausible de todas (¿O será que alguien le está jugando una broma pesada a Laura?).

El criterio de selección de Laura simplemente consiste en elegir fórmulas tales que todos sus modelos sean lo más plausible que se pueda.

Comencemos analizando algunas de las posibles explicaciones de c:

$$Expla(c) = \{a \vee b,\ a,\ b, \cdots\}.$$

De entre todas esas explicaciones, Laura escoge a como la explicación más preferida, pues todos los modelos de $\Sigma \cup \{a\}$ están en el primer nivel. En el ejemplo que nos ocupa, realmente Laura no ha observado el carro, simplemente "supone" que el carro está estacionado y por esto se dirige al estacionamiento A (es decir, el proceso "explicatorio" sirve para hacer un plan de acción). Después que llega al estacionamiento A y no consigue el carro, entonces trata de explicar $c \wedge \neg a$, pues sigue pensando que el carro está estacionado. En este caso, elige $\neg a \wedge b$ como la explicación preferida y se dirige al estacionamiento B.

Ahora veamos algunas de las explicaciones posibles de $\neg c$.

$$Expla(\neg c) = \{j,\ r,\ j \wedge \neg r,\ \neg j \wedge r,\ \neg a \wedge \neg b,\ \cdots\}.$$

Notemos que $\neg c$ no tiene modelos en los dos primeros niveles. De todas estas explicaciones Laura escoge $j \wedge \neg r$, pues tiene todos sus modelos en el tercer nivel. Observen que $\neg a \wedge \neg b$ no es una explicación preferida de $\neg c$, pues tiene modelos en los niveles 3, 4 y 5.

Una vez que Laura se encuentra con María, su observación cambia de $\neg c$ a $\neg c \wedge \neg l$ y tenemos

$$Expla(\neg c \wedge \neg l) = \{\neg j \wedge r \wedge \neg l,\ \neg j \wedge \neg l \wedge \neg a \wedge \neg b,\ \neg c \wedge \neg l \wedge \neg j \wedge \neg r,\ \cdots\}.$$

De estas, Laura escoge $\neg j \wedge r \wedge \neg l$. Es importante notar que las explicaciones preferidas de $\neg c$ y $\neg c \wedge \neg l$ son diferentes. Más precisamente, una explicación preferida de $\neg c \wedge \neg l$ no tiene porque ser una explicación preferida de $\neg c$. Este es un hecho importante que analizaremos más adelante.

4.2. Reglas para los razonamientos explicatorios

En esta sección introduciremos algunas reglas para los razonamientos explicatorios. El método usado para aislar estas propiedades será explicado en la sección 4.4.

Comenzaremos por las reglas básicas que satisfacen la gran mayoría de las relaciones explicatorias que estudiaremos.

E-CM	Si $\alpha \rhd \gamma$ y para todo δ $[\alpha \rhd \delta \ \Rightarrow\ \delta \vdash_\Sigma \beta\,]$, entonces $(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$.
E-S-CM	Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\gamma \vdash_\Sigma \beta$, entonces $(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$.
E-C-Cut	Si $(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$ y para todo δ $[\alpha \rhd \delta \ \Rightarrow\ \delta \vdash_\Sigma \beta\,]$, entonces $\alpha \rhd \gamma$.
LLE$_\Sigma$	Si $\vdash_\Sigma \alpha \leftrightarrow \alpha'$ y $\alpha \rhd \gamma$, entonces $\alpha' \rhd \gamma$.
E-Con$_\Sigma$	Si $\not\vdash_\Sigma \neg\alpha$, entonces existe γ tal que $\alpha \rhd \gamma$.

Los postulados están denotados siguiendo las siglas de sus nombres en inglés, y son, respectivamente, *Explanatory Cautious Monotony*, *Explanatory Strong Cautious Monotony*, *Explanatory Cautious Cut*, *Left Logical Equivalence* y *Explanatory Consistency Preservation*.

La regla E-S-CM tiene una interpretación natural. Si uno sabe que γ es una explicación preferida de una observación α y β es una consecuencia de γ, uno esperaría que γ también sea una explicación preferida de $\alpha \wedge \beta$. La regla E-CM se introduce por razones de naturaleza técnica, pues prácticamente todas las relaciones explicatorias que se usan en este texto satisfacen E-S-CM. Note que E-S-CM implica E-CM. El ejemplo 4.1 sirve para ilustrar esta regla. En ese ejemplo vimos que $\gamma = \neg j \wedge r \wedge \neg l$ es una explicación preferida de $\neg c \wedge \neg l$. Como $\gamma \vdash_\Sigma p$, concluimos que γ también es una explicación preferida de $\neg c \wedge \neg l \wedge p$.

La regla E-C-Cut es la primera de las reglas de corte que estudiaremos. Estas reglas indican cuando uno puede inferir una explicación preferida de una observación α sabiendo una explicación preferida de una observación más completa $\alpha \wedge \beta$. En otras palabras, uno quisiera saber bajo que circunstancias uno de los "síntomas" de una observación $\alpha \wedge \beta$ es de alguna manera redundante o innecesario para explicar $\alpha \wedge \beta$. La regla E-C-Cut dice que si *todas* las explicaciones preferidas de α implican a β, entonces β es innecesario a la hora de explicar $\alpha \wedge \beta$. O para decirlo más claramente aún, si cada vez que el síntoma α está presente, también lo está el síntoma β, entonces β es innecesario para explicar a $\alpha \wedge \beta$, pues basta explicar α.

El ejemplo 4.1 ilustra porqué no siempre es razonable "cortar" una parte de la observación. Vimos en ese ejemplo que $\neg j \wedge r \wedge \neg l$ es una explicación preferida de $\neg c \wedge \neg l$ pero no lo es de $\neg c$. En este ejemplo es evidente que para Laura fue esencial saber que María no estaba con su hermano.

Las reglas de corte explicatorio son las duales a las reglas de monotonía para relaciones de consecuencias. Estas reglas juegan un papel importante para mostrar los teoremas de representación, pues "codifican" las preferencias implícitas en una relación explicatoria. Para ver esto, expresemos E-C-Cut en su forma contrapositiva: Si γ es una explicación preferida de $\alpha \wedge \beta$ pero no lo es de α, entonces debe haber algo que lo justifique, es decir, debe existir una explicación preferida δ de α que no implique a β. Aquí estamos implícitamente diciendo que entre las explicaciones posibles de α, δ es mejor que γ.

Ahora introduciremos otras reglas más restrictivas, algunas de ellas son importantes para manejar las disyunciones.

E-R-Cut	Si $(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$ y existe δ tal que $\delta \not\vdash_\Sigma \neg\beta$ y $\alpha \rhd \delta$, entonces $\alpha \rhd \gamma$.
RS	Si $\alpha \rhd \gamma$, $\gamma' \vdash_\Sigma \gamma$ y $\gamma' \not\vdash_\Sigma \perp$, entonces $\alpha \rhd \gamma'$.
RLE_Σ	Si $\vdash_\Sigma \gamma \leftrightarrow \gamma'$ y $\alpha \rhd \gamma$, entonces $\alpha \rhd \gamma'$.
LOR	Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\beta \rhd \gamma$, entonces $(\alpha \vee \beta) \rhd \gamma$.
LOR^-	Sean $\alpha, \beta \in Form_\Sigma$. Si $(\alpha \vee \beta) \rhd \gamma$, entonces existen δ y ρ tales que $\alpha \rhd \delta$, $\beta \rhd \rho$ y $\gamma \vdash_\Sigma \delta \vee \rho$.
ROR	Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\alpha \rhd \delta$, entonces $\alpha \rhd (\gamma \vee \delta)$.
SC	Si $\beta \rhd \delta$, $\delta \vdash_\Sigma \alpha$ y $\alpha \not\rhd \delta$, entonces existe ρ tal que $\alpha \rhd \rho$, $\rho \not\vdash_\Sigma \beta$ y $(\rho \vee \beta) \rhd \rho$.

E-R-Cut abrevia *Explanatory Racional Cut* y RS *Right strengthening.* RLE_Σ es *Right Logical Equivalence*, LOR y LOR^- son, respectivamente, reglas de introducción y eliminación de la disyunción por la izquierda, ROR es una regla de introducción de la disyunción por la derecha y SC abrevia *Strengthened Cumulativity.*

A continuación presentaremos una clasificación de las relaciones explicatorias análoga a la usada para las relaciones de consecuencia que vimos en el capítulo 3. La justificación de los nombres usados en esta clasificación la daremos en la sección 4.4.

Definición 4.2.1 *Una relación explicatoria se dice que es* E-acumulativa *cuando satisface* E-CM*,* E-C-Cut*,* LLE_Σ *y* $\mathsf{E\text{-}Con}_\Sigma$*. Se llama* E-acumulativa fuerte *cuando satisface* E-S-CM*,* E-C-Cut*,* LLE_Σ *y* $\mathsf{E\text{-}Con}_\Sigma$*. Diremos que es* E-preferencial *cuando es E-acumulativa fuerte y además satisface* LOR^-*. Diremos que es* E-racional *cuando es E-preferencial y además satisface* E-R-Cut*.*

Observación: Esta clasificación es un poco diferente a la presentada originalmente en [38, 40]. Al leer esos trabajos, es importante tener presente que no estamos usando la misma notación para las reglas. Por ejemplo, E-CM denotó lo que ahora es E-S-CM y E-R-Cut denotó una regla mas débil que la usada en este libro (ver el ejercicio 4.2.5). La regla ROR era denotada E-RW y RA denotaba a RS. Por otra parte, en esos trabajos las relaciones E-preferenciales se suponía satisfacían RS (ver la proposición 4.2.3).

La regla SC es de carácter meramente técnico pues se necesita para los teoremas de representación que mostraremos más adelante en la sección 4.7. La siguiente proposición muestra la conexión entre SC y los otros postulados y da una justificación de su nombre. La prueba es inmediata y se deja a cargo del lector.

Proposición 4.2.2 *Sea $\rhd$ una relación explicatoria que satisface* LLE_Σ *y* $\mathsf{E\text{-}Con}_\Sigma$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) $\rhd$ *satisface* E-S-CM *y* E-C-Cut.

(ii) *Para cada $\alpha, \beta \in Form_\Sigma$, si $\beta \rhd \delta$, $\delta \vdash_\Sigma \alpha$ y $\alpha \not\rhd \delta$, entonces existe ρ tal que $\alpha \rhd \rho$ y $\rho \nvdash_\Sigma \beta$.*

En particular, si $\rhd$ satisface LLE_Σ, $\mathsf{E\text{-}Con}_\Sigma$ *y* SC*, entonces $\rhd$ es E-acumulativa fuerte.*

La regla RS es controversial. La crítica a RS se puede resumir en lo siguiente. Supongamos que a es una explicación preferida de una observación O. No es "razonable" pensar que $a \wedge b$ es también una explicación preferida de O para cualquier otra variable b. Pues b puede ser totalmente irrelevante para explicar a O. Un ejemplo que ilustra lo que acabamos de decir ocurre en el diagnóstico médico: generalmente se busca explicar los síntomas sin incluir innecesariamente enfermedades que normalmente no son la causa de esos síntomas. Este principio se conoce como la *Navaja de Occam*, en honor al filósofo del siglo XIV, Guillermo de Occam [1]. Según este principio, de entre varias explicaciones de un fenómeno, siempre se debe escoger la más sencilla que lo explique por completo.

[1]Este principio se enuncia en latín: "Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem". Que en español dice: los entes no se multiplican más allá de lo necesario.

A pesar de lo controversial que RS pudiera resultar, estudiaremos las propiedades de las relaciones que satisfacen ese postulado. Por una parte, existe una familia de relaciones explicatorias (que llamaremos causales) que satisfacen RS que son muy fáciles de describir y construir. Y por otra parte, como lo veremos más adelante, dos de sus consecuencias, SC y LOR^-, son suficientes para los teoremas de representación. Estas dos propiedades no son tan restrictivas como RS, pues muchas relaciones explicatorias las satisfacen.

Proposición 4.2.3 *Supongamos que $\rhd$ es E-acumulativa fuerte y además satisface* RS*, entonces* RLE_Σ*,* SC *y* LOR^- *se cumplen.*

Demostración: Es obvio que RLE_Σ se cumple. Mostraremos que SC se cumple. Supongamos que $\beta \rhd \delta$, $\delta \vdash_\Sigma \alpha$ y $\alpha \not\rhd \delta$. Entonces $\alpha \vee \beta \not\rhd \delta$, sino por E-S-CM tendríamos $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \rhd \delta$ y por LLE_Σ obtenemos que $\alpha \rhd \delta$, lo cual es imposible. Por otra parte, por E-S-CM tenemos $(\alpha \vee \beta) \wedge \beta \rhd \delta$. Por lo tanto por E-C-Cut existe γ tal que $(\alpha \vee \beta) \rhd \gamma$ y $\gamma \not\vdash_\Sigma \beta$. Por lo tanto $\gamma \wedge \neg\beta$ es consistente con Σ. Sea $\rho = \gamma \wedge \neg\beta$. Por RS, $\alpha \vee \beta \rhd \rho$. Ya que $\rho \vdash_\Sigma \alpha$ y $\rho \vdash_\Sigma \rho \vee \beta$, entonces por E-S-CM y LLE_Σ concluimos que $\alpha \rhd \rho$ y $\rho \vee \beta \rhd \rho$.

Ahora veremos que LOR^- se cumple. Sean α, β y γ en $Form_\Sigma$ tales que $\alpha \vee \beta \rhd \gamma$. Si $\gamma \vdash_\Sigma \alpha$ o $\gamma \vdash_\Sigma \beta$, entonces por E-S-CM y LLE_Σ se tiene que $\alpha \rhd \gamma$ o $\beta \rhd \gamma$ y en este caso no hay nada que mostrar. Por esto, supondremos que $\gamma \wedge \alpha$ y $\gamma \wedge \beta$ son consistentes con Σ. Por RS tenemos que $\alpha \vee \beta \rhd \alpha \wedge \gamma$ y $\alpha \vee \beta \rhd \beta \wedge \gamma$. Por E-S-CM se tiene que $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \rhd \gamma \wedge \alpha$, $\beta \wedge (\alpha \vee \beta) \rhd \gamma \wedge \beta$. Por lo tanto, por LLE_Σ se obtiene $\alpha \rhd \alpha \wedge \gamma$ y $\beta \rhd \beta \wedge \gamma$. Ya que $\gamma \vdash_\Sigma (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$, se concluye lo deseado.

∎

Las últimas reglas que consideraremos son las siguientes:

E-DR Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\beta \rhd \delta$, entonces $(\alpha \vee \beta) \rhd \gamma$ o $(\alpha \vee \beta) \rhd \delta$.

NEG Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\gamma \not\vdash_\Sigma \neg\beta$, entonces existe ρ tal que $\alpha \rhd \rho$ y $\rho \vdash_\Sigma \beta$.

Proposición 4.2.4 *Sea $\rhd$ una relación explicatoria.*

(i) Si $\rhd$ *satisface* RS*, entonces satisface* NEG*.*

(ii) Si $\rhd$ *es E-acumulativa fuerte y satisface* E-R-Cut*, entonces también cumple con* E-DR*.*

Demostración: (i) es directo. Para (ii) suponga $\alpha \rhd \gamma$ y $\beta \rhd \delta$. Notemos que por LLE_Σ se tiene que $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \rhd \gamma$ y $\beta \wedge (\alpha \vee \beta) \rhd \delta$. Como $\alpha \vee \beta$ es consistente, por $\mathsf{E\text{-}Con}_\Sigma$ existe ρ tal que $\alpha \vee \beta \rhd \rho$. Entonces $\rho \nvdash_\Sigma \neg\alpha$ o $\rho \nvdash_\Sigma \neg\beta$. Usando E-R-Cut, en el primer caso concluimos que $\alpha \vee \beta \rhd \gamma$ y en el segundo que $\alpha \vee \beta \rhd \delta$.

∎

Ejercicio 4.2.5 *Suponga que* $\rhd$ *satisface* $\mathsf{E\text{-}Con}_\Sigma$*. Entonces* $\rhd$ *satisface* E-R-Cut *si, y sólo si, satisface* NEG *y la siguiente regla de corte:*

$$\textit{Si } (\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma \textit{ y existe } \delta \textit{ tal que } \alpha \rhd \delta \textit{ y } \delta \vdash_\Sigma \beta, \textit{ entonces } \alpha \rhd \gamma. \quad (4.2)$$

Ejercicio 4.2.6 *Halle un modelo para la siguiente historia y determine que instancia de la regla de corte no se cumple. El estacionamiento del edificio donde vivo tiene un portón eléctrico. Hoy al mediodía al llegar lo conseguí abierto. Pensé que era por culpa de un apagón. Al entrar a la torre donde está mi apartamento, el ascensor sí funcionaba. Entonces me dije que el motor del portón se volvió a dañar.*

4.3. Algunos ejemplos de relaciones explicatorias

Presentaremos algunos ejemplos de relaciones explicatorias (el lector interesado encontrará otros ejemplos en [40]). Todos los ejemplos que presentaremos son E-acumulativos fuertes.

Ejemplo 4.3.1 Introduciremos un ejemplo extremo que usaremos más adelante: deducción al revés.

$$\alpha \rhd_{rd} \gamma \overset{def}{\Leftrightarrow} \gamma \vdash_\Sigma \alpha \;\;\&\;\; \gamma \nvdash_\Sigma \bot \,.$$

Note que por definición, toda relación explicatoria $\rhd$ satisface

$$\rhd \;\subseteq\; \rhd_{rd}.$$

Ejemplo 4.3.2 En este ejemplo supondremos que el lenguaje es finito. Sea $mod(\Sigma)$ el conjunto de todos los modelos de Σ. Considere un orden parcial $\sqsubset$ sobre $mod(\Sigma)$. Abusando un poco de la notación, denotaremos por $mod(\alpha)$ el conjunto de modelos de $\Sigma \cup \{\alpha\}$. Los modelos minimales de α es el siguiente conjunto:

$$min(\alpha) = \{N \in mod(\alpha) : \; M \not\models \alpha \text{ para todo } M \sqsubset N\}.$$

(i) *Relaciones explicatorias basadas en modelos minimales.* El conjunto $min(\alpha)$ contiene los modelos más plausibles de α. Se pueden definir varias relaciones explicatorias basadas en esta noción de plausibilidad. Comenzaremos definiendo las relaciones que hemos llamado *causales*:

$$\alpha \rhd_c \gamma \overset{def}{\Leftrightarrow} mod(\gamma) \subseteq min(\alpha).$$

Las relaciones de la forma $\rhd_c$ son las típicas relaciones que satisfacen RS y ROR. Más adelante mostraremos que las relaciones causales ocupan un lugar especial entre las relaciones explicatorias (ver sección 4.6). El ejemplo 4.1 sobre el carro perdido de Laura es de este tipo $\rhd_c$.

Una variante natural de $\rhd_c$ es la siguiente:

$$\alpha \rhd_{se} \gamma \overset{def}{\Leftrightarrow} \gamma \vdash_\Sigma \alpha \;\;\&\;\; min(\gamma) \subseteq min(\alpha) \tag{4.3}$$

Esta relación es E-acumulativa fuerte y satisface LOR$^-$ pero en general no satisface RS. Si $\sqsubset$ es modular (ver la definición 3.3.17), entonces $\rhd_{se}$ satisface E-R-Cut pero en general no satisface RS.

(ii) *Relaciones explicatorias basadas en anticadenas.* Para definir el último ejemplo necesitaremos otra noción. Diremos que un subconjunto A de $mod(\Sigma)$ es una $\sqsubset$-anticadena (o simplemente, una anticadena), si los modelos en A son mutuamente $\sqsubset$-incomparables. Por ejemplo, $min(\alpha)$ es un anticadena para toda fórmula α. De hecho, $min(\alpha)$ es una anticadena maximal de $mod(\alpha)$, es decir, si $min(\alpha) \subseteq A \subseteq mod(\alpha)$ y A es una anticadena, entonces $A = min(\alpha)$. Definimos otra relación explicatoria de la siguiente manera:

$$\alpha \rhd_{ma} \gamma \overset{def}{\Leftrightarrow} mod(\gamma) \text{ es una anticadena maximal de } mod(\alpha).$$

No es difícil mostrar que $\rhd_{ma}$ satisface SC y LOR$^-$ pero en general no satisface RS.

Una variación de $\rhd_{ma}$ es

$$\alpha \rhd_{mac} \gamma \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \begin{array}{l} mod(\gamma) \text{ es una anticadena de } mod(\alpha) \\ \text{de cardinalidad máxima.} \end{array}$$

Es claro que RLE$_\Sigma$ se cumple. En la mayoría de los casos, $\rhd_{mac}$ no satisface LOR$^-$ ni SC. Sin embargo, existe $\sqsubset$ tal que $\rhd_{mac}$ satisface LOR$^-$ pero no SC y también existe a $\sqsubset$ tal que $\rhd_{mac}$ satisface SC pero no LOR$^-$. Por ejemplo, sea Σ la teoría que tiene cuatro modelos M, N, S y T y sea $\sqsubset$ el siguiente orden :

```
      M
    / | \
   /  |  \
  /   |   \
 N    S    T
```

Entonces $\rhd_{mac}$ satisface LOR$^-$ pero no SC. Por otra parte, si $\sqsubset$ es el siguiente orden

```
M       N
| \   / |
|  \ /  |
|  / \  |
| /   \ |
S       T
```

entonces $\rhd_{mac}$ satisface SC pero no LOR$^-$. En particular, esto muestra que en el sistema E-acumulativo fuerte las reglas LOR$^-$ y SC son independientes.

El ejemplo que sigue es particularmente interesante pues es una relación explicatoria que satisface LOR$^-$ y SC pero, de una manera muy fuerte, es dependiente por la derecha de la sintaxis, esto es RLE$_\Sigma$ no se cumple y por consiguiente no satisface RS. Esta relación se basa en un criterio de simplicidad muy natural para seleccionar las explicaciones preferidas [34].

Ejemplo 4.3.3 Para este ejemplo supondremos que Σ es vacío. Un *literal* es un átomo o la negación de un átomo. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las fórmulas que son conjunciones de literales sin repeticiones junto con $\top$. Defina un orden parcial $\prec_{lit}$ sobre $\mathcal{C}$ de la manera siguiente:

$$\gamma \prec_{lit} \delta \overset{def}{\Leftrightarrow} \delta \vdash \gamma \ \& \ \gamma \nvdash \delta.$$

Sea $\rhd_{lit}$ dada por

$$\alpha \rhd_{lit} \gamma \overset{def}{\Leftrightarrow} \gamma \in min(Expla(\alpha) \cap \mathcal{C}, \prec_{lit}).$$

Es decir, si $\gamma \vdash \rho$, $\rho \vdash \alpha$ y $\rho \in \mathcal{C}$, entonces $\gamma = \rho$. Esto es, γ es un implicante primo de α.

La relación $\rhd_{lit}$ es E-acumulativa fuerte. De hecho, mostraremos que $\rhd_{lit}$ satisface SC. En efecto, supongamos que $\beta \rhd_{lit} \gamma$, $\gamma \vdash \alpha$ y $\alpha \not\rhd_{lit} \gamma$. De la definición de $\prec_{lit}$, existe $\delta \in \mathcal{C}$ tal que $\gamma \vdash \delta$ y $\alpha \rhd_{lit} \delta$. Es suficiente mostrar que $(\delta \vee \beta) \rhd_{lit} \delta$. Supongamos que no, entonces existe $\rho \in \mathcal{C}$ tal que $\delta \vdash \rho$ y $(\delta \vee \beta) \rhd_{lit} \rho$ y $\rho \nvdash \delta$. Existen $\eta, \xi \in \mathcal{C}$ y un literal l tales que $\delta = \rho \wedge l \wedge \eta$ y $\gamma = \rho \wedge l \wedge \eta \wedge \xi$. Como $\rho \wedge \neg l \vdash \neg\delta$ y $\rho \vdash \delta \vee \beta$, entonces $\rho \wedge \neg l \vdash \beta$. Ya que $\gamma \vdash \beta$, entonces $\rho \wedge \eta \wedge \xi \vdash \beta$ y esto contradice que $\beta \rhd_{lit} \gamma$.

Se puede mostrar, como lo hicimos para SC, que esta relación también satisface LOR^-.

Ejercicio 4.3.4 *(i) Muestre que $\rhd_c$ es E-acumulativa fuerte y satisface* RS *y* ROR. *Si $\sqsubset$ es modular, entonces $\rhd_c$ satisface* E-R-Cut.

(ii) Muestre que $\rhd_{se}$ es E-acumulativa fuerte y satisface LOR^-. *Muestre que si existen $N, M \in$* mód (Σ) *tales que $N \sqsubset M$, entonces $\rhd_{se}$ no satisface* RS. *Muestre que si $\sqsubset$ es modular, entonces $\rhd_{se}$ satisface* E-R-Cut.

(iii) Muestre que $\rhd_{ma}$ satisface SC *y* LOR^- *pero en general no satisface* RS.

(iv) Muestre que $\rhd_{mac}$ es E-acumulativa fuerte y satisface la regla (4.2) dada en el ejercicio 4.2.5, pero en general no satisface E-R-Cut.

4.4. Razonando con explicaciones

En esta sección estudiaremos una manera natural de asociar a cada relación explicatoria una relación de consecuencia. Esto nos permitirá estudiar una dualidad entre relaciones explicatorias y de consecuencia que es la clave para entender el origen de muchas de las reglas para los razonamientos explicatorios que hemos introducido.

Definición 4.4.1 *A cada relación explicatoria $\rhd$ se le asocia una relación de consecuencia $\mid\!\sim_{\rhd}$ definida por*

$$\alpha \mid\!\sim_{\rhd} \beta \quad \textit{si } \Sigma \cup \{\gamma\} \vdash \beta \textit{ para cada } \gamma \textit{ tal que } \alpha \rhd \gamma. \tag{4.4}$$

La relación $\alpha \mid\!\sim_{\rhd} \beta$ dice *"normalmente, si α es observado, entonces β también debe estar presente"*.

La idea inicial que guió la búsqueda de las propiedades estructurales de las relaciones explicatorias se basa en la interelación de $\rhd$ y $\mid\!\sim_{\rhd}$. La heurística fue imponer condiciones sobre $\rhd$ de tal manera que $\mid\!\sim_{\rhd}$ tenga propiedades buenas en el sentido que hemos estudiado en el capítulo 3.

Podemos reescribir las reglas E-CM, E-C-Cut y E-R-Cut usando la relación $\mid\!\sim_{\rhd}$ de la siguiente manera.

E-CM	Si $\alpha \rhd \gamma$ y $\alpha \mid\!\sim_{\rhd} \beta$, entonces $(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$.
E-C-Cut	Si $(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$ y $\alpha \mid\!\sim_{\rhd} \beta$, entonces $\alpha \rhd \gamma$.
E-R-Cut	Si $(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$ y $\alpha \not\mid\!\sim_{\rhd} \neg\beta$, entonces $\alpha \rhd \gamma$.

El siguiente resultado muestra que la heurística usada es correcta.

Teorema 4.4.2 *Sea $\rhd$ una relación explicatoria.*

(i) Si $\rhd$ es E-acumulativa, entonces $\mid\!\sim_{\rhd}$ es acumulativa.

(ii) Si $\rhd$ es E-preferencial, entonces $\mid\!\sim_{\rhd}$ es preferencial.

(iii) Si $\rhd$ es E-racional, entonces $\mid\!\sim_{\rhd}$ es racional.

Demostración: (i) Queda a cargo del lector.

(ii) Suponga que $\rhd$ es E-preferencial y veamos que $\mid\!\sim_{\rhd}$ satisface OR. Supongamos que $\alpha \mid\!\sim_{\rhd} \theta$, $\beta \mid\!\sim_{\rhd} \theta$. Queremos ver que $\alpha \vee \beta \mid\!\sim_{\rhd} \theta$. Para esto, suponga que $\alpha \vee \beta \rhd \gamma$. Por LOR$^-$, existen δ y ρ tales que $\alpha \rhd \delta$, $\beta \rhd \rho$ y $\gamma \vdash_\Sigma \delta \vee \rho$. Como $\alpha \mid\!\sim_{\rhd} \theta$ y $\beta \mid\!\sim_{\rhd} \theta$, entonces $\delta \vee \rho \vdash_\Sigma \theta$ y por lo tanto $\gamma \vdash_\Sigma \theta$.

(iii) Suponga que $\rhd$ es E-racional y mostremos que $\mid\!\sim_{\rhd}$ satisface RM. Para esto sean α, β y θ tales que $\alpha \mid\!\sim_{\rhd} \theta$ y $\alpha \not\mid\!\sim_{\rhd} \neg\beta$. Queremos mostrar que $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim_{\rhd} \theta$. Para hacerlo, fijemos γ tal que $\alpha \wedge \beta \rhd \gamma$. Por E-R-Cut, concluimos que $\alpha \rhd \gamma$ y como $\alpha \mid\!\sim_{\rhd} \theta$, entonces $\gamma \vdash_\Sigma \theta$. Esto muestra que $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim_{\rhd} \theta$. ∎

La proposición que sigue ilustra la interconexión existente entre $\rhd$ y $\mid\!\sim_{\rhd}$. Su demostración es directa y la dejaremos a cargo del lector.

Proposición 4.4.3 *Sea $\rhd$ una relación E-acumulativa y α, β fórmulas. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $\alpha \mid\!\sim_{\rhd} \beta$ y $\beta \mid\!\sim_{\rhd} \alpha$.

(ii) Para todo γ, $\alpha \rhd \gamma$ sii $\beta \rhd \gamma$.

Como dijéramos antes, las reglas de corte explicatorio juegan un papel importante en todo este trabajo. Para entender mejor porqué se restringen estas reglas de corte consideremos la siguiente regla:

E-Cut   Si $(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$, entonces $\beta \rhd \gamma$.

Como indicamos a continuación, la regla E-Cut es demasiado fuerte, pues implica que el razonamiento basado en explicaciones es monótono. La demostración es elemental y queda a cargo del lector.

Proposición 4.4.4 *Supongamos que $\rhd$ satisface* E-Cut*, entonces $\mid\!\sim_{\rhd}$ es monótona.*

Si el lector revisa el ejemplo 4.1 notará que la relación explicatoria usada no satisface E-Cut, de hecho, mostramos que $\neg j \wedge r \wedge \neg l$ es una explicación preferida de $\neg c \wedge \neg l$ pero no es una explicación preferida de $\neg c$.

4.5. Explicando nuestro razonamiento

En esta sección analizaremos la cuestión inversa a la estudiada en la sección anterior. Ya vimos que si se sabe cómo explicar una observación, entonces también sabemos cuáles son las consecuencias de la observación. Ahora enfocaremos el recíproco, es decir, *si conocemos las consecuencias de una observación, ¿podemos explicarla?*

La consecuencias de una observación vendrán dada por una relación $\mid\!\sim$. Supondremos que $\mid\!\sim$ es reflexiva. La primera pregunta que responderemos es cuándo una relación de consecuencia es de la forma $\mid\!\sim_{\triangleright}$ con respecto a alguna relación explicatoria. De la definición de $\mid\!\sim_{\triangleright}$ es claro que la pregunta es equivalente a saber cuándo se cumple lo siguiente:

$$C(\alpha) = \bigcap\{Cn\ (\Sigma \cup \{\gamma\}) :\ C(\alpha) \subseteq Cn(\Sigma \cup \{\gamma\})\}. \tag{4.5}$$

Aislamos esta condición en la siguiente definición

Definición 4.5.1 *Una relación de consecuencia* $\mid\!\sim$ *se dice que es* adecuada con respecto a Σ *si (4.5) se cumple para toda fórmula* α. *Diremos que* $\mid\!\sim$ *satisface* Con_{Σ}, *si* $\alpha \not\mid\!\sim \bot$ *para toda* $\alpha \in Form_{\Sigma}$.

Si $\triangleright$ es una relación explicatoria entonces, de la definición de $\mid\!\sim_{\triangleright}$, es claro que $\mid\!\sim_{\triangleright}$ es adecuada con respecto a Σ. La relación de consecuencia clásica $\vdash$ es adecuada con respecto a $\{\top\}$ y $\vdash_{\Sigma}$ es adecuada con respecto a Σ. Si no existe ningún peligro de confusión, diremos solamente *adecuada* en lugar de *adecuada con respecto a* Σ.

Dada un relación de consecuencia $\mid\!\sim$ adecuada es claro que $\alpha \mid\!\sim \sigma$ para toda $\sigma \in \Sigma$. Además, si $\alpha \not\mid\!\sim \bot$, entonces existe γ consistente con Σ tal que $\gamma \vdash_{\Sigma} \alpha$. En particular, si $\alpha \not\mid\!\sim \bot$ entonces α es consistente con Σ. Observe también que una relación adecuada satisface la siguiente versión de la supraclasicalidad: si $\alpha \vdash_{\Sigma} \beta$, entonces $\alpha \mid\!\sim \beta$.

Cuando el lenguaje es finito, es fácil verificar que toda relación de consecuencia que satisfaga las siguientes condiciones es adecuada: (i) $C(\alpha) = Cn(C(\alpha))$ y (ii) $\alpha \mid\!\sim \sigma$ para toda α y toda $\sigma \in \Sigma$. La noción de relación adecuada es más relevante cuando el lenguaje es infinito. De hecho, para lenguajes infinitos existen relaciones de consecuencia que son racionales pero no son adecuadas (un ejemplo se puede encontrar en [38]).

De (4.5) se ve claramente una manera de asociar a una relación de consecuencia otra explicatoria.

Definición 4.5.2 *Sea $\mid\!\sim$ una relación de consecuencia. Le asociamos a $\mid\!\sim$ una relación binaria $\rhd_{\mid\sim}$ como sigue:*

$$\alpha \rhd_{\mid\sim} \gamma \overset{def}{\Leftrightarrow} \gamma \nvdash_{\Sigma} \perp \ \& \ C(\alpha) \subseteq Cn\ (\Sigma \cup \{\gamma\}) \tag{4.6}$$

Observe que $\rhd_{\mid\sim}$ es en efecto una relación explicatoria (pues $\mid\!\sim$ se supuso reflexiva).

Suponga que $\mid\!\sim$ satisface la siguiente forma de supraclasicalidad: Si $\alpha \vdash_{\Sigma} \beta$, entonces $\alpha \mid\!\sim \beta$. En este caso se tiene que si $\alpha \rhd_{\mid\sim} \gamma$, entonces $\gamma \mid\!\sim \alpha$. Sin embargo, en general $\gamma \mid\!\sim \alpha$ no implica que $\alpha \rhd_{\mid\sim} \gamma$. Esto sugiere una noción alternativa de explicación que será analizada en la sección 4.6.

Proposición 4.5.3 *Si $\mid\!\sim$ es una relación adecuada, entonces*

$$\mid\!\sim \, = \, \mid\!\sim_{\rhd_{\mid\sim}} .$$

Demostración: Sea $\mid\!\sim$ una relación adecuada. Para simplificar la notación, pongamos $\rhd = \rhd_{\mid\sim}$. Mostraremos que $\mid\!\sim = \mid\!\sim_{\rhd}$. Supongamos que $\alpha \mid\!\sim \beta$. Para ver que $\alpha \mid\!\sim_{\rhd} \beta$ fijemos γ tal que $\alpha \rhd \gamma$. Por definición de $\rhd_{\mid\sim}$, tenemos que $C(\alpha) \subseteq Cn(\Sigma \cup \{\gamma\})$. En particular, $\gamma \vdash_{\Sigma} \beta$. Esto muestra que $\alpha \mid\!\sim_{\rhd} \beta$.

Recíprocamente, supongamos que $\alpha \mid\!\sim_{\rhd} \beta$. Como $\mid\!\sim$ es adecuada, entonces basta mostrar que si $C(\alpha) \subseteq Cn(\Sigma \cup \{\gamma\})$, entonces $\gamma \vdash_{\Sigma} \beta$. Si γ es inconsistente con Σ no hay nada que mostrar. Supongamos que $\gamma \in Form_{\Sigma}$, entonces por definición de $\rhd_{\mid\sim}$, se tiene que $\alpha \rhd \gamma$. Como $\alpha \mid\!\sim_{\rhd} \beta$, entonces $\gamma \vdash_{\Sigma} \beta$. Con esto termina la demostración.

∎

El siguiente teorema muestra la relación entre los postulados que satisface $\mid\!\sim$ y los que satisface $\rhd_{\mid\sim}$.

Teorema 4.5.4 *Sea $\mid\!\sim$ una relación de consecuencia adecuada.*

1. $\rhd_{\mid\!\sim}$ *satisface* RS *y* ROR.

2. *Si* $\mid\!\sim$ *es acumulativa y satisface* Con_Σ*, entonces* $\rhd_{\mid\!\sim}$ *es E-acumulativa.*

3. *Si* $\mid\!\sim$ *es preferencial y satisface* Con_Σ*, entonces* $\rhd_{\mid\!\sim}$ *es E-preferencial.*

4. *Si* $\mid\!\sim$ *satisface* WDR*, entonces* $\rhd_{\mid\!\sim}$ *satisface* LOR.

5. *Si* $\mid\!\sim$ *es preferencial y satisface* DR*, entonces* $\rhd_{\mid\!\sim}$ *satisface* E-DR.

6. *Si* $\mid\!\sim$ *satisface* RM*, entonces* $\rhd_{\mid\!\sim}$ *satisface* E-R-Cut.

7. *Si* $\mid\!\sim$ *es monótona, entonces* $\rhd_{\mid\!\sim}$ *satisface* E-Cut.

Demostración: Todas estas afirmaciones se prueban de manera elemental. Para simplificar la notación, escribiremos $\rhd$ en lugar de $\rhd_{\mid\!\sim}$.

Veamos (3). Supongamos que $\mid\!\sim$ es preferencial. Por (2) basta ver que $\rhd_{\mid\!\sim}$ satisface E-S-CM y LOR$^-$. Veamos E-S-CM. Supongamos que $\alpha \rhd \gamma$ y $\gamma \vdash_\Sigma \beta$. Queremos mostrar que $\alpha \wedge \beta \rhd \gamma$, es decir, $C(\alpha \wedge \beta) \subseteq Cn(\Sigma \cup \{\gamma\})$. Sea θ tal que $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \theta$. Por ser $\mid\!\sim$ preferencial, satisface la regla S (ver lemma 3.1.6), por lo tanto, $\alpha \mid\!\sim \beta \to \theta$. Como $\alpha \rhd \gamma$, entonces $\gamma \vdash_\Sigma \beta \to \theta$. Por hipótesis, $\gamma \vdash_\Sigma \beta$, por lo tanto $\gamma \vdash_\Sigma \theta$.

Por (1), (2) y lo mostrado arriba, $\rhd$ es E-acumulativa fuerte y satisface RS. Por lo tanto, de la proposición 4.2.3 se obtiene que $\rhd$ satisface LOR$^-$.

Veamos (6). Supongamos que $\mid\!\sim$ satisface RM. Para ver que $\rhd$ satisface E-R-Cut, sean α, β, γ y ρ tales que $(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$, $\alpha \rhd \rho$ y $\rho \not\vdash_\Sigma \neg\beta$. Queremos mostrar que $\alpha \rhd \gamma$, es decir, $C(\alpha) \subseteq Cn(\Sigma \cup \{\gamma\})$. Sea θ tal que $\alpha \mid\!\sim \theta$. Como $\alpha \rhd \rho$ y $\rho \not\vdash_\Sigma \neg\beta$, entonces por la defunción de $\rhd$ se tiene que $\alpha \not\mid\!\sim \neg\beta$. Por RM, tenemos que $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \theta$ y como $(\alpha \wedge \beta) \rhd \gamma$, entonces $\gamma \vdash_\Sigma \theta$.

El resto de la demostración la dejamos como ejercicio al lector interesado.

∎

4.6. Relaciones explicatorias causales y la deducción al revés

Como dijéramos al comienzo, una de las cosas que queremos aclarar acerca de los razonamientos explicatorios, es cuán cerca están de ser deducción al reves. Para responder esta pregunta es conveniente primero analizar la dualidad entre relaciones de consecuencia y relaciones explicatorias. Considere las funciones:

$$\begin{array}{rcl} \Phi(\mid\!\sim) & = & \rhd_{\mid\sim} \\ \Psi(\rhd) & = & \mid\!\sim_{\rhd} \end{array}$$

El siguiente resultado resume las propiedades más importantes de estas dos funciones.

Proposición 4.6.1 *Sea* $\mid\!\sim$ *una relación de consecuencia y* $\rhd$ *una relación explicatoria. Entonces*

1. $\mid\!\sim\ \subseteq \Psi(\Phi(\mid\!\sim))$.
2. $\rhd \subseteq \Phi(\Psi(\rhd))$.
3. $\Psi(\rhd)$ *es adecuada.*
4. $\Phi(\Psi(\Phi(\mid\!\sim))) = \Phi(\mid\!\sim)$.
5. $\Psi(\Phi(\Psi(\rhd))) = \Psi(\rhd)$.
6. *Si* $\mid\!\sim$ *es adecuada, entonces* $(\Psi \circ \Phi)(\mid\!\sim) = \mid\!\sim$.

Una relación $\rhd$ se dice que es *causal* si

$$(\Phi \circ \Psi)(\rhd) = \rhd.$$

Las relaciones causales son una clase muy especial de relaciones explicatorias. Una relación causal $\rhd$ está completamente determinada por $\mid\!\sim_{\rhd}$. Es decir, en las relaciones causales, las explicaciones de una observación están completamente determinadas por el conjunto de inferencias que se puedan hacer acerca de la observación. Esto es, $\rhd$ es causal sii se cumple lo siguiente:

$$\text{Si } C_{\mid\!\sim_{\rhd}}(\alpha) \subseteq Cn(\Sigma \cup \{\gamma\}), \text{ entonces } \alpha \rhd \gamma.$$

La parte 4 de la proposición anterior dice que $\rhd_{\mid\!\sim}$ es causal para cada relación de consecuencia $\mid\!\sim$. Las relaciones de la forma $\rhd_c$ que vimos en el ejemplo 4.3.2 son los ejemplos típicos de relaciones causales.

Ejercicio 4.6.2 *Suponga que el lenguaje es finito. Muestre que una relación explicatoria es causal sii satisface* RS *y* ROR.

La dualidad entre relaciones explicatorias y relaciones de consecuencia sería muy precisa si Φ y Ψ fueran una inversa de la otra. Esto no ocurre pues Ψ no es inyectiva. Daremos a continuación ejemplos de relaciones explicatorias $\rhd$ y $\rhd^*$ muy diferentes entre sí, pero tales que $\Psi(\rhd) = \Psi(\rhd^*)$.

A pesar de estos aspectos limitantes, la relación $\mid\!\sim_{\rhd}$ contiene información útil para el estudio de $\rhd$.

Ejemplo 4.6.3 *(Tres relaciones explicatorias que tienen asociada la misma relación de consecuencia)*

Para este ejemplo, Σ es vacío y el lenguaje se supondrá finito. Fijemos un orden parcial $\sqsubset$ sobre todas las valuaciones del lenguaje. Considere las relaciones $\rhd_{rd}$, $\rhd_{ma}$ y $\rhd_{lit}$ que vimos en los ejemplos 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3. Afirmamos que

$$\Psi(\rhd_{ma}) = \Psi(\rhd_{lit}) = \Psi(\rhd_{rd}) = \vdash .$$

Para simplificar la notación, escribiremos $\mid\!\sim_{lit}$ por $\Psi(\rhd_{lit})$, $\mid\!\sim_{ma}$ por $\Psi(\rhd_{ma})$ y $\mid\!\sim_{rd}$ por $\Psi(\rhd_{rd})$. Primero que todo, notemos que para mostrar que $\Psi(\rhd) = \vdash$ es suficiente mostrar que $\Psi(\rhd) \subseteq \vdash$.

Para $\rhd_{rd}$, notemos que $\alpha \rhd_{rd} \alpha$ para toda fórmula consistente α. Por esto, si $\alpha \mid\!\sim_{rd} \beta$, entonces necesariamente $\alpha \vdash \beta$.

Para $\rhd_{lit}$, sea $\alpha \mid\!\sim_{lit} \beta$ y mostremos que $\alpha \vdash \beta$. Sea M un modelo de α. Mostraremos que $M \models \beta$. Sea δ_M la conjunción de todos los literales que valen en M. Entonces por la definición de $\prec_{lit}$, existe $\gamma \in \mathcal{C}$ tal que

$\delta_M \vdash \gamma \vdash \alpha$ and γ es $\prec_{lit}$-minimal. Por lo tanto $\alpha \rhd_{lit} \gamma$. Ya que $\alpha \mid\!\sim_{lit} \beta$, entonces $\gamma \vdash \beta$. Como M es un modelo de γ, entonces $M \models \beta$.

Por último, para $\rhd_{ma}$, supongamos $\alpha \mid\!\sim_{ma} \beta$. Sea $M \models \alpha$. Entonces existe una $\sqsubset$-anticadena maximal $A \subseteq mod(\alpha)$ que contiene a M. Sea γ la fórmula cuyos modelos son las valuaciones en A. Entonces de la definición de $\rhd_{ma}$ se tiene que $\alpha \rhd_{ma} \gamma$ y por esto $\gamma \vdash \beta$. Por lo tanto, $M \models \beta$.

4.6.1. Un enfoque alternativo

En esta sección haremos algunos comentarios acerca de métodos alternativos para definir una noción de explicación. Estos comentarios ayudarán a ubicar los resultados presentados en un contexto más general y aclararán en que sentido los razonamientos explicatorios son un proceso de deducción al reves.

La mayoría de los trabajos sobre los razonamiento explicatorios suponen que una observación debe inferirse, de alguna manera, a partir de cualquiera de sus explicaciones preferidas. Nosotros hemos usado la deducción clásica como mecanismo de inferencia entre explicaciones y observaciones. Por esto, nuestra relaciones explicatorias, por definición, satisfacen lo siguiente:

$$\text{Si } \alpha \rhd \gamma, \text{ entonces } \gamma \vdash_\Sigma \alpha. \tag{4.7}$$

Pero este no es el único enfoque posible, uno alternativo se obtiene si en lugar de $\vdash_\Sigma$ se usa una relación de consecuencia más general.

Fijemos una relación de consecuencia $\mid\!\sim$ que supondremos es reflexiva y satisface que si $\alpha \vdash_\Sigma \beta$, entonces $\alpha \mid\!\sim \beta$. Existen tres nociones que naturalmente se pueden usar para definir qué es una explicación [38, 42]. En lo que sigue, supondremos que γ es consistente con Σ.

$$\begin{array}{ll} \alpha \mid\!\!<_e \gamma & \text{si } \gamma \mid\!\sim \alpha. \\ \alpha \mid\!\!<_{se} \gamma & \text{si } C(\alpha) \subseteq C(\gamma). \\ \alpha \rhd_{\mid\sim} \gamma & \text{si } C(\alpha) \subseteq Cn(\Sigma \cup \{\gamma\}). \end{array}$$

Recordemos que $\rhd_{rd}$ denota la deducción al reves (ver ejemplo 4.3.1). La interdependencia entre estas cuatro nociones es la siguiente:

$$\rhd_{\mid\!\sim} \;\subseteq\; \begin{array}{c} \rhd_{rd} \\ \\ |\!\!<_{se} \end{array} \;\subseteq\; |\!\!<_{e}$$

Las relaciones $|\!\!<_{se}$ y $|\!\!<_{e}$ no son relaciones explicatorias, pues en lugar de (4.7) sólo satisfacen lo siguiente:

$$\text{Si } \alpha |\!\!< \gamma, \text{ entonces } \gamma \mid\!\sim \alpha.$$

Es importante darse cuenta que las relaciones $\rhd_{\mid\!\sim}$, $|\!\!<_{e}$ y $|\!\!<_{se}$ son tres maneras diferentes de interpretar los razonamientos explicatorios como razonamientos no monótonos al reves.

Las relaciones $|\!\!<_{e}$ y $|\!\!<_{se}$ tienen aplicaciones especialmente en contextos donde una explicación no necesariamente implica lógicamente a la observación [10]. Cuando $\mid\!\sim$ es una relación de consecuencia racional, $|\!\!<_{e}$ y $|\!\!<_{se}$ se tornan interesantes debido a la estrecha relación entre la teoría de la revisión AGM y la lógica no monótona [20], haciendo más atractiva la interpretación de estas nociones de explicación en términos de la teoría de la revisión de las creencias. En [42] se mostró una caracterización completa de $|\!\!<_{se}$ cuando $\mid\!\sim$ es una relación de consecuencia racional, pero dejaron sin responder la pregunta más general de conseguir reglas que caractericen $|\!\!<_{se}$ cuando $\mid\!\sim$ es solamente preferencial.

4.7. Teoremas de representación

En esta sección mostraremos algunos teoremas de representación de relaciones explicatorias. Comenzaremos introduciendo el tipo de modelos que usaremos en estas representaciones. Son modelos similares a los acumulativos que vimos en el capítulo 3.

4.7.1. E-modelos

Definición 4.7.1 *Un* E-modelo *es una tripleta $\mathcal{E} = \langle S, l, \prec \rangle$ donde S es un conjunto, l es una función de S en la colección de subconjuntos no vacíos de $Form_\Sigma$ y $\prec$ es una relación de preferencia suave sobre S.*

Cuando $l(s)$ *contiene una sola fórmula,* $\mathcal{E}$ *se dice que es un* E-modelo univaluado *y en este caso, supondremos que* $l(s) \in Form_\Sigma$. *Cuando la relación* $\prec$ *es transitiva, diremos que* $\mathcal{E}$ *es un E-modelo transitivo.*

Dado un E-modelo $\mathcal{E} = \langle S, l, \prec \rangle$ y un fórmula $\alpha \in Form_\Sigma$, definimos

$$\widehat{\alpha} = \{s \in S : \ \gamma \vdash_\Sigma \alpha \text{ for all } \gamma \in l(s)\}.$$

Definición 4.7.2 *Un E-modelo* $\mathcal{E} = \langle S, l, \prec \rangle$ *es E-acumulativo si cada* $\widehat{\alpha}$ *no es vacío y es suave para toda* $\alpha \in Form_\Sigma$.

A cada E-modelo $\mathcal{E} = \langle S, l, \prec \rangle$ le asociamos una relación explicatoria como sigue:

$$\alpha \rhd_{\mathcal{E}} \gamma \quad \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \quad \exists s \in min(\widehat{\alpha}, \prec) \ (\gamma \in l(s)). \tag{4.8}$$

Sino hay confusión acerca de cual relación $\prec$ se está usando, escribiremos $min(\widehat{\alpha})$ en lugar de $min(\widehat{\alpha}, \prec)$.

El objetivo de esta sección es, entonces, determinar bajo cuáles condiciones una relación explicatoria es de la forma $\rhd_{\mathcal{E}}$, para algún E-modelo $\mathcal{E}$.

Comenzaremos con un resultado que muestra que el concepto de E-modelo es correcto.

Teorema 4.7.3 *Sea* $\mathcal{E}$ *un E-modelo acumulativo. Entonces*

(i) $\rhd_{\mathcal{E}}$ *es E-acumulativa.*

(ii) Si $\mathcal{E}$ *es univaluado, entonces* $\rhd_{\mathcal{E}}$ *es E-acumulativa fuerte.*

Demostración: La dejamos como ejercicio al lector. ∎

El siguiente ejercicio debería convencer al lector que las reglas del sistema E-acumulativo son naturales.

Ejercicio 4.7.4 *Suponga que el lenguaje es finito. Sea $\prec$ un orden parcial sobre $Form_\Sigma$. Sea $S = Form_\Sigma$ y $l(\gamma) = \gamma$. Muestre que $\mathcal{E} = (S, l, \prec)$ es un E-modelo acumulativo y en consecuencia $\rhd_{\mathcal{E}}$ es E-acumulativa fuerte.*

4.7.2. Relaciones E-preferenciales

En esta sección mostraremos un teorema de representación para las relaciones E-preferenciales. Pero antes enunciaremos el siguiente resultado para las relaciones E-acumulativas.

Teorema 4.7.5 *Si $\rhd$ es una relación E-acumulativa, entonces $\rhd = \rhd_{\mathcal{E}}$ para algún E-modelo acumulativo $\mathcal{E}$*

La demostración de este teorema es similar a la del teorema 3.3.12 y no la incluiremos (ver [14]).

Teorema 4.7.6 *Suponga que el lenguaje es finito. Sea $\rhd$ una relación explicatoria E-preferencial que además satisface* SC. *Entonces $\rhd = \rhd_{\mathcal{E}}$ donde $\mathcal{E}$ es un modelo acumulativo univaluado y transitivo con la siguiente propiedad: Dadas $\alpha, \beta \in Form_\Sigma$ y $s \in \mathrm{mín}(\widehat{\alpha \vee \beta})$, existen $t \in min(\widehat{\alpha})$ y $r \in min(\widehat{\beta})$ tales que*

$$l(s) \vdash_\Sigma l(t) \vee l(r). \tag{4.9}$$

Para mostrar el teorema 4.7.6 necesitamos algunos lemas auxiliares. Fijemos una relación E-preferencial $\rhd$. Sea S la colección de pares (α, γ) tales que $\alpha \rhd \gamma$. Sea $l(\alpha, \gamma) = \gamma$ y $\prec$ definida sobre S de la manera siguiente:

$$(\alpha, \gamma) \prec (\beta, \delta) \overset{def}{\Leftrightarrow} \gamma \not\vdash_\Sigma \beta \;\&\; \alpha \vee \beta \mid\!\sim_\rhd \alpha \tag{4.10}$$

Sea $\mathcal{E} = (S, l, \prec)$ el modelo definido arriba.

Lema 4.7.7 *La relación $\prec$ definida en (4.10) es antisimétrica.*

Demostración: Supongamos que (α, γ) y (β, δ) pertenecen a S son tales que $(\alpha, \gamma) \prec (\beta, \delta)$ y $(\beta, \delta) \prec (\alpha, \gamma)$. Entonces $\alpha \vee \beta \mid\!\sim_\rhd \alpha$ y

$\alpha \vee \beta \mid\!\sim_{\rhd} \beta$. Es claro que $\alpha \mid\!\sim_{\rhd} \alpha \vee \beta$ y $\beta \mid\!\sim_{\rhd} \alpha \vee \beta$, por lo tanto de la proposición 4.4.3, se concluye que $\beta \rhd \gamma$, pero esto es imposible, pues $\gamma \not\vdash_{\Sigma} \beta$.

∎

Lema 4.7.8 *Sea $\rhd$ una relación E-acumulativa que además satisface* SC*. Entonces $\rhd = \rhd_{\mathcal{E}}$ donde $\mathcal{E}$ es el modelo definido arriba por* (4.10)*. Además, si $\rhd$ satisface* LOR^{-}*, entonces $\mathcal{E}$ satisface* (4.9)*.*

Demostración: Queremos mostrar que para todo $\alpha \in Form_{\Sigma}$, $\alpha \rhd \gamma$ sii existe β tal que $(\beta, \gamma) \in min(\widehat{\alpha})$. Se concluye inmediatamente de las definiciones que $(\alpha, \gamma) \in min(\widehat{\alpha})$ cuando $\alpha \rhd \gamma$. Recíprocamente, sea $(\beta, \gamma) \in min(\widehat{\alpha})$ y supongamos, por reducción al absurdo, que $\alpha \not\rhd \gamma$. Entonces por SC existe ρ tal que $\alpha \rhd \rho$, $(\rho \vee \beta) \rhd \rho$ y $\rho \not\vdash_{\Sigma} \beta$. Es claro que $(\rho \vee \beta, \rho) \prec (\beta, \gamma)$, lo cual contradice que $(\beta, \gamma) \in min(\widehat{\alpha})$.

Supongamos ahora que $\rhd$ satisface LOR^{-}. Como $\rhd = \rhd_{\mathcal{E}}$, se obtiene inmediatamente que (4.9) es válida. ∎

Observemos que el lema anterior no garantiza que el modelo $\mathcal{E}$ sea acumulativo, esto es, que $\prec$ sea una relación suave. Esto lo mostraremos sólo cuando el lenguaje es finito. Veremos en un ejercicio que se puede extender a lenguajes arbitrarios si suponemos RS.

Lema 4.7.9 *Supongamos que el lenguaje es finito. Sea $\rhd$ una relación E-acumulativa fuerte. Entonces la relación $\prec$ definida arriba por* (4.10) *es suave.*

Demostración: Sea $\alpha \in Form_{\Sigma}$ y supongamos, por reducción al absurdo, que $\widehat{\alpha}$ no es suave. Entonces existe $(\beta, \delta) \in \widehat{\alpha}$ con $(\beta, \delta) \notin min(\widehat{\alpha})$ y tal que todo estado en $\widehat{\alpha}$ por debajo de (β, δ) no es minimal en $\widehat{\alpha}$. Construiremos una sucesión infinita de estados $(\theta_i, \rho_i) \in \widehat{\alpha}$ tales que

$$(\theta_i, \rho_i) \prec (\beta, \delta), \quad \beta \vdash_{\Sigma} \theta_1, \quad \theta_i \vdash_{\Sigma} \theta_{i+1} \quad \text{y} \quad \theta_{i+1} \not\vdash_{\Sigma} \theta_i.$$

Lo cual es imposible pues hemos supuesto que el lenguaje es finito.

La construcción es como sigue. Ya que $(\beta,\delta) \notin min(\widehat{\alpha})$, entonces existe $(\nu,\rho_1) \in \widehat{\alpha}$ con $(\nu,\rho_1) \prec (\beta,\delta)$. Como $\nu \vee \beta \mid\!\sim_\rhd \nu$, entonces $\nu \vee \beta \rhd \rho_1$ (por la proposición 4.4.3). Sea $\theta_1 = \nu \vee \beta$, entonces $(\theta_1,\rho_1) \prec (\beta,\delta)$ y $\beta \vdash_\Sigma \theta_1$. En particular, (θ_1,ρ_1) no es minimal en $\widehat{\alpha}$.

Supongamos hemos definido $(\theta_1,\rho_1),...,(\theta_n,\rho_n)$ tales que $(\theta_i,\rho_i) \prec (\beta,\delta)$, $\theta_i \vdash_\Sigma \theta_{i+1}$ y $\theta_{i+1} \not\vdash_\Sigma \theta_i$, para todo $i < n$. Ya que $(\theta_n,\rho_n) \notin min(\widehat{\alpha})$, entonces existe $(\nu',\gamma') \in \widehat{\alpha}$ tal que $(\nu',\gamma') \prec (\theta_n,\rho_n)$. Sea $\theta_{n+1} = \nu' \vee \theta_n$ y $\rho_{n+1} = \gamma'$. Como $\theta_{n+1} \mid\!\sim_\rhd \nu'$, entonces $\theta_{n+1} \rhd \gamma'$. Ya que $\gamma' \not\vdash_\Sigma \theta_n$ y $\beta \vdash_\Sigma \theta_n$, tenemos que $\gamma' \not\vdash_\Sigma \beta$. Por esto, $(\theta_{n+1},\rho_{n+1}) \prec (\beta,\delta)$. Finalmente, como $\gamma' \vdash_\Sigma \nu'$, entonces $\theta_{n+1} \not\vdash_\Sigma \theta_n$.

∎

Lema 4.7.10 *Sea $\rhd$ una relación E-preferencial. Supongamos que $\alpha \vee \beta \mid\!\sim_\rhd \alpha$ y $\beta \vee \eta \mid\!\sim_\rhd \beta$, entonces $\alpha \vee \beta \vee \eta \mid\!\sim_\rhd \alpha$ y $\alpha \vee \eta \mid\!\sim_\rhd \alpha$.*

Demostración: Por el teorema 4.4.2, sabemos que $\mid\!\sim_\rhd$ es preferencial. Primero mostraremos que $\alpha\vee\beta\vee\eta \mid\!\sim_\rhd \alpha\vee\beta$. En efecto, ya que $\beta\vee\eta \mid\!\sim_\rhd \beta$, entonces $\beta \vee \eta \mid\!\sim_\rhd \alpha \vee \beta$ y claramente $\alpha \vee \beta \mid\!\sim_\rhd \alpha \vee \beta$. Por lo tanto, como $\mid\!\sim_\rhd$ satisface OR, entonces $\alpha \vee \beta \vee \eta \mid\!\sim_\rhd \alpha \vee \beta$.

Por otra parte, como $\alpha \vee \beta \mid\!\sim_\rhd \alpha$, $\alpha \mid\!\sim_\rhd \alpha \vee \beta$, $\alpha \vee \beta \vee \eta \mid\!\sim_\rhd \alpha \vee \beta$ y $\alpha \vee \beta \mid\!\sim_\rhd \alpha \vee \beta \vee \eta$, entonces usando la proposición 4.4.3 se concluye que $\alpha\vee\beta\vee\eta \mid\!\sim_\rhd \alpha$. Por esto $\alpha\vee\beta\vee\eta \mid\!\sim_\rhd \alpha\vee\eta$ y claramente $\alpha\vee\eta \mid\!\sim_\rhd \alpha\vee\beta\vee\eta$. De nuevo, por la proposición 4.4.3, se obtiene que $\alpha \vee \eta \mid\!\sim_\rhd \alpha$. ∎

Lema 4.7.11 *Sea $\rhd$ una relación E-preferencial. Entonces la relación $\prec$ definida en (4.10) es transitiva.*

Demostración: Suponga $(\alpha,\gamma) \prec (\beta,\delta)$ y $(\beta,\delta) \prec (\eta,\theta)$. Mostraremos que $(\alpha,\gamma) \prec (\eta,\theta)$. De la definición de $\prec$ se tiene que $\alpha \vee \beta \mid\!\sim_\rhd \alpha$, $\beta \vee \eta \mid\!\sim_\rhd \beta$ y $\gamma \not\vdash_\Sigma \beta$. Por el lema 4.7.10, sabemos que $\alpha \vee \eta \mid\!\sim_\rhd \alpha$ y $\alpha \vee \beta \vee \eta \mid\!\sim_\rhd \alpha$. Nos queda por mostrar que $\gamma \not\vdash_\Sigma \eta$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\gamma \vdash_\Sigma \eta$. Ya que $\alpha \rhd \gamma$, entonces $(\alpha \vee \beta \vee \eta) \rhd \gamma$ por la proposición 4.4.3. Por E-S-CM y LLE_Σ, $\beta \vee \eta \rhd \gamma$. Como $\beta \vee \eta \mid\!\sim_\rhd \beta$, entonces $\gamma \vdash_\Sigma \beta$, pero esto es imposible ya que $(\alpha,\gamma) \prec (\beta,\delta)$. Por lo tanto, $\gamma \not\vdash_\Sigma \eta$ y con esto hemos demostrado que $(\alpha, \gamma) \prec (\eta, \theta)$. ∎

Demostración del teorema 4.7.6. El resultado se obtiene a partir de los lemas 4.7.7, 4.7.8, 4.7.9 y 4.7.11. ∎

Observación: No sabemos si la hipótesis de que $\rhd$ satisface SC es necesaria. Otros teoremas de representación se pueden encontrar en [15].

Ejercicio 4.7.12 *Suponga que $\mathcal{E}$ es un modelo acumulativo, univaluado y satisface la propiedad* (4.9). *Muestre que $\rhd_{\mathcal{E}}$ es E-preferencial.*

Ejercicio 4.7.13 *Sea $\rhd$ una relación E-preferencial que además satisface* RS. *Muestre que el modelo $\mathcal{E}$ definido por* (4.10) *es acumulativo. Esto es, pruebe que $\prec$ es suave. Para hacerlo, muestre lo siguiente: Si $\alpha \in Form_\Sigma$ y $(\beta, \delta) \in \widehat{\alpha}$, entonces:*

$$(\beta, \delta) \in min(\widehat{\alpha}) \ \Leftrightarrow \ (\alpha \vee \beta) \mid\!\sim_{\rhd} \beta.$$

4.7.3. Relaciones E-racionales

En esta sección mostraremos un teorema de representación para las relaciones E-racionales. En este caso, obtendremos un modelo más fuerte que los anteriores, pues la función l será inyectiva. De hecho el modelo que usaremos es análogo al usado en la sección 3.3.4 para representar relaciones de consecuencia racional.

Dada una relación explicatoria $\rhd$ diremos que una fórmula γ es *admisible* si existe α tal que $\alpha \rhd \gamma$. Es fácil convencerse que si $\rhd$ es E-acumulativa fuerte y γ es admisible, entonces $\gamma \rhd \gamma$.

Definición 4.7.14 *Sea $\rhd$ una relación explicatoria. Sean γ y δ fórmulas con γ admisible,*

$$\gamma \prec_{\rhd} \delta \ \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \ \forall \alpha \, (\, \alpha \rhd \delta \Rightarrow \gamma \not\vdash_\Sigma \alpha \,).$$

Diremos que $\prec_{\rhd}$ es la relación de preferencia asociada a $\rhd$.

Observemos que si γ es admisible y δ no lo es, entonces $\gamma \prec_{\triangleright} \delta$. Claramente $\delta \not\prec_{\triangleright} \delta$ para todo δ admisible. De aquí en adelante supondremos que $\prec_{\triangleright}$ está definida sobre las fórmulas admisibles.

El principal objetivo de esta sección será mostrar que, bajo ciertas condiciones, se cumple lo siguiente:

$$\alpha \triangleright \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \in min(Expla(\alpha), \prec_{\triangleright}). \tag{4.11}$$

La ecuación (4.11) dice que $\prec_{\triangleright}$ captura el criterio de selección de explicaciones implícito en $\triangleright$. En términos de los E-modelos, podemos interpretar (4.11) como sigue. Si ponemos S el conjunto de fórmulas admisibles y $l(\gamma) = \gamma$, entonces $\widehat{\alpha} = Expla(\alpha)$. Veremos que bajo ciertas condiciones sobre $\triangleright$ se tiene que $\prec_{\triangleright}$ es una relación suave sobre S y $\mathcal{E} = (S, l, \prec_{\triangleright})$ es un E-modelo tal que $\triangleright = \triangleright_{\mathcal{E}}$.

Lema 4.7.15 *Sea $\triangleright$ un relación explicatoria E-racional, entonces $\prec_{\triangleright}$ es suave sobre la fórmulas admisibles y (4.11) se cumple.*

Demostración: Es fácil ver que, sin imponer ninguna restricción sobre $\triangleright$, se tiene que si $\alpha \triangleright \gamma$, entonces $\gamma \in min(Expla(\alpha), \prec_{\triangleright})$. Veamos que se cumple la otra dirección. Supongamos que $\gamma \in Form_{\Sigma}$, $\gamma \vdash_{\Sigma} \alpha$ y $\alpha \not\triangleright \gamma$. Mostraremos que existe $\delta \in Expla(\alpha)$ tal que $\delta \prec_{\triangleright} \gamma$. Por $\mathsf{E\text{-}Con}_{\Sigma}$, existe δ tal que $\alpha \triangleright \delta$. Mostraremos que $\delta \prec_{\triangleright} \gamma$, supongamos que no es así, entonces existe β tal que $\beta \triangleright \gamma$ y $\delta \vdash_{\Sigma} \beta$. Por E-CM, tenemos que $\alpha \wedge \beta \triangleright \gamma$ y por E-R-Cut, $\alpha \triangleright \gamma$, lo que contradice nuestra suposición.

Observemos que el argumento anterior también muestra que $\prec_{\triangleright}$ es suave. En efecto, hemos visto que si $\gamma \in Expla(\alpha)$, γ no es $\prec_{\triangleright}$-minimal y $\alpha \triangleright \delta$, entonces $\delta \prec_{\triangleright} \gamma$. Pero por (4.11) $\delta \in min(Expla(\alpha), \prec_{\triangleright})$ ∎

En el ejercicio 4.7.19 se muestra que con hipótesis mucho más débiles que E-R-Cut se puede obtener (4.11).

Ahora veremos que si $\triangleright$ es E-racional, la relación $\prec_{\triangleright}$ es modular. Pero primero necesitamos un resultado auxiliar.

Lema 4.7.16 *Sea $\triangleright$ una relación explicatoria E-racional. Sean γ y δ dos fórmulas admisibles. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $\gamma \prec_{\rhd} \delta$.

(ii) $\forall\alpha\forall\beta\,[\,\alpha \rhd \gamma \,\&\, \beta \rhd \delta \;\Rightarrow\; (\alpha\vee\beta) \rhd \gamma \,\&\, (\alpha\vee\beta) \not\rhd \delta]$.

(iii) $\exists\alpha\,\exists\beta\,[\,\alpha \rhd \gamma \;\&\; \beta \rhd \delta \;\&\; (\alpha\vee\beta) \rhd \gamma \,\&\, (\alpha\vee\beta) \not\rhd \delta\,]$.

Demostración: $(i) \Rightarrow (ii)$. Supongamos que $\gamma \prec_{\rhd} \delta$, $\alpha \rhd \gamma$ y $\beta \rhd \delta$. De la definición de $\prec_{\rhd}$ tenemos que $(\alpha\vee\beta) \not\rhd \delta$ y por E-DR (ver proposición 4.2.4) se concluye que $(\alpha\vee\beta) \rhd \gamma$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Es obvio por $\mathsf{E\text{-}Con}_{\Sigma}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que $\theta \rhd \delta$, queremos mostrar que $\gamma \not\vdash_{\Sigma} \theta$. Sean α, β como en la hipótesis de (iii), es decir, $\alpha \rhd \gamma$, $\beta \rhd \delta$, $(\alpha\vee\beta) \rhd \gamma$ y $(\alpha\vee\beta) \not\rhd \delta$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\gamma \vdash_{\Sigma} \theta$. Entonces por E-S-CM, $(\alpha\vee\beta)\wedge\theta \rhd \gamma$ y $\theta\wedge(\alpha\vee\beta) \rhd \delta$. Como $\gamma \vdash_{\Sigma} \theta$, entonces por E-R-Cut, se tiene que $(\alpha\vee\beta) \rhd \delta$, lo que contradice nuestra suposición.

∎

Lema 4.7.17 *Sea $\rhd$ una relación explicatoria E-racional. Entonces $\prec_{\rhd}$ es modular y además satisface lo siguiente: Para todo par de fórmulas $\alpha, \beta \in Form_{\Sigma}$, se cumple*

$$min(\widehat{\alpha}) \cap \widehat{\beta} = \emptyset \;\Rightarrow min(\widehat{\alpha}) \subseteq \widehat{\neg\beta}. \tag{4.12}$$

Demostración: Recordemos toda relación E-racional cumple con E-DR, (ver proposición 4.2.4). Comenzamos mostrando que $\prec_{\rhd}$ es transitiva. Sean γ_i fórmulas admisibles tales que $\gamma_1 \prec_{\rhd} \gamma_2$ y $\gamma_2 \prec_{\rhd} \gamma_3$. Sean α_i fórmulas tales que $\alpha_i \rhd \gamma_i$. Para probar que $\gamma_1 \prec_{\rhd} \gamma_3$, por el lema 4.7.16, es suficiente mostrar que $(\alpha_1\vee\alpha_3) \not\rhd \gamma_3$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $(\alpha_1\vee\alpha_3) \rhd \gamma_3$. Ya que $\gamma_2 \prec_{\rhd} \gamma_3$, entonces por el lema 4.7.16 tenemos que $(\alpha_1\vee\alpha_2\vee\alpha_3) \rhd \gamma_2$ y $(\alpha_1\vee\alpha_2\vee\alpha_3) \not\rhd \gamma_3$. Ya que $\gamma_1 \prec_{\rhd} \gamma_2$, análogamente tenemos que $(\alpha_1\vee\alpha_2\vee\alpha_3) \rhd \gamma_1$ y $(\alpha_1\vee\alpha_2\vee\alpha_3) \not\rhd \gamma_2$, lo es una contradicción.

Ahora mostraremos que $\prec_{\rhd}$ es modular. Usaremos el lema 3.3.18. Sean γ, δ y ρ fórmulas admisibles tales que $\gamma \not\prec_{\rhd} \delta$, $\delta \not\prec_{\rhd} \gamma$ y $\gamma \prec_{\rhd} \rho$. Queremos mostrar que $\delta \prec_{\rhd} \rho$. Sean α, β, θ fórmulas tales que $\alpha \rhd \gamma$, $\beta \rhd \delta$ y $\theta \rhd \rho$. Ya que γ y δ son $\prec_{\rhd}$-incomparables, entonces del lema 4.7.16 se concluye que $(\alpha \vee \beta) \rhd \gamma$ y $(\alpha \vee \beta) \rhd \delta$. De nuevo por lema 4.7.16 es suficiente mostrar que $(\alpha \vee \beta \vee \theta) \rhd \delta$ y $(\alpha \vee \beta \vee \theta) \not\rhd \rho$. Por $\mathsf{E\text{-}DR}$ es suficiente mostrar que $(\alpha \vee \beta \vee \theta) \not\rhd \rho$. Ya que $\gamma \prec_{\rhd} \rho$, entonces por el lema 4.7.16 tenemos que $(\alpha \vee \beta \vee \theta) \rhd \gamma$ y $(\alpha \vee \beta \vee \theta) \not\rhd \rho$.

La propiedad 4.12 se concluye directamente del hecho que toda relación E-racional satisface NEG (ver ejercicio 4.2.5).

∎

En resumen, hemos demostrado el siguiente teorema de representación.

Teorema 4.7.18 *Si $\rhd$ es una relación E-racional, entonces $\rhd = \rhd_{\mathcal{E}}$ para algún E-modelo $\mathcal{E} = (S, l, \prec)$ donde l es inyectiva y $\prec_{\rhd}$ es modular y satisface (4.12).*

En el ejercicio 4.7.20 le dejamos al lector interesado la tarea de mostrar el recíproco del teorema anterior.

Ejercicio 4.7.19 *Sea $\rhd$ una relación E-acumulativa fuerte que satisface* LOR.

(i) Sea $\alpha \in Form_{\Sigma}$ y $\delta \in Expla(\alpha)$ una fórmula admisible tal que $\alpha \not\rhd \delta$. Sea

$$C_{\alpha} = \bigcap \{Cn\ (\Sigma \cup \{\rho\}) :\ \alpha \rhd \rho\}$$

y

$$S = C_{\alpha} \cup \{\neg\beta :\ \beta \rhd \delta\}.$$

Muestre que S es consistente.

(ii) Suponga que el lenguaje es finito y $\rhd$ es una relación explicatoria E-acumulativa fuerte que satisface LOR. *Use la parte (i) para mostrar que $\prec_{\rhd}$ es suave y que (4.11) se cumple.*

Ejercicio 4.7.20 *(i) Sea $\mathcal{E} = (S, l, \prec)$ un E-modelo tal que l es inyectiva, $\prec$ es modular y satisface (4.12). Muestre que $\rhd_{\mathcal{E}}$ es E-racional.*

(ii) Suponga que $\prec$ *es una relación modular y smooth sobre* $Form_{\Sigma}$*. Muestre que* $\rhd_{\mathcal{E}}$ *es E-acumulativa fuerte y satisface la regla de corte (4.2) enunciada en el ejercicio 4.2.5. Verifique que la relación* $\rhd_{mac}$ *definida en el ejemplo 4.3.2 satisface (4.2) pero no* E-R-Cut.

Bibliografía

[1] C. E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.

[2] Atocha Aliseda-Llera. *Seeking explanations: abduction in logic, philosophy of science and artificial intelligence.* PhD thesis, Stanford, CA, USA, 1998. http://www.illc.uva.nl/Publications/reportlist.php?Series=DS.

[3] Atocha Aliseda-Llera. *Abductive Reasoning: Logical Investigations into Discovery and Explanation.* Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.

[4] K. J. Arrow. *Social choice and individual values.* Wiley, New York, second edition, 1963.

[5] C. Baral, S. Kraus, and J. Minker. Combining multiple knowledge bases. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 3(2):208–220, 1991.

[6] C. Baral, S. Kraus, J. Minker, and V. S. Subrahmanian. Combining knowledge bases consisting of first-order theories. *Computational Intelligence*, 8(1):45–71, 1992.

[7] I. Bloch, R. Pino-Pérez, and C. Uzcátegui. Explanatory relations based on mathematical morphology. In *ECSQARU 2001*, pages 736–747, Toulouse, France, September 2001.

[8] A. Bochman. A causal theory of abduction. *J. Logic Computation*, 17(5):851–869, 2007.

[9] A. Borgida and T. Imielinski. Decision making in committees: A framework for dealing with inconsistency and non-monotonicity. In *Proceedings Workshop on Nonmonotonic Reasoning*, pages 21–32, 1984.

[10] C. Boutilier and V. Becher. Abduction as belief revision. *Artificial Intelligence*, 77:43–94, 1995.

[11] L. Cholvy. Reasoning about merged information. In D. M. Gabbay and Ph. Smets, editors, *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, volume 3, pages 233–263. 1998.

[12] L. Cholvy and T. Hunter. Fusion in logic: a brief overview. In *Proceedings of the Fourth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'97)*, Lecture Notes in Computer Science 1244, pages 86–95, 1997.

[13] M. Cialdea Mayer and F. Pirri. Abduction is not deduction-in-reverse. *Journal of the IGPL*, 4(1):1–14, 1996.

[14] A. Díaz and C. Uzcátegui. Representation theorems for explanatory reasoning based on cumulative models. *Journal of Applied Logic*, 6:564–579, 2008.

[15] A. Díaz. *Relaciones explicatorias: Teoremas de representación y noción de clausura.* PhD thesis, IVIC, Caracas, Venezuela, 2005.

[16] P. Flach. Logical characterisations of inductive learning. In D. M. Gabbay and R. Kruse, editors, *Abductive Reasoning and Learning*, pages 155–196. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[17] P. Flach. Modern logic and its role in the study of knowledge. In Dale Jacquette, editor, *A Companion to Philosophical Logic*, pages 680–693. Blackwell Publishers, 2002.

[18] P. A. Flach. Rationality postulates for induction. In Yoav Shoam, editor, *Proc. of the Sixth Conference of Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK96)*, pages 267–281, March 17-20, 1996.

[19] M. Freund. Injective models and disjunctive relations. *J.Logic Computation*, 3:231–247, 1993.

[20] P. Gärdenfors and D. Makinson. Relations between the logic of theory change and nonmonotonic logic. In *The Logic of Theory Change, Workshop, Konstanz, FRG, Octuber 1989*, pages 185–205. Springer-Verlag, 1989. Lecture Notes in Artificial Intelligence 465.

[21] J. Hawthorne. Nonmonotonic conditionals that behave like conditional probabilities above a threshold. *Journal of Applied Logic*, 5(4):625–637, 2007.

[22] J. Hawthorne and D. Makinson. The qualitative/quantitative watershed for rules of uncertain inference. *Studia Logica*, 86, 2007.

[23] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52:263–294, 1991.

[24] Sébastien Konieczny. *Sur la logique du changement : révision et fusion de bases de connaissance.* PhD thesis, 1999.

[25] Sébastien Konieczny, Jérôme Lang, and Pierre Marquis. DA^2 merging operators. *Artificial Intelligence*, 157(1-2):49–79, 2004.

[26] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Confluence operators. In Heinrich Wansing Steffen Hölldobler, Carsten Lutz, editor, *Logics in Artificial Intelligence, Eleventh European Conference on Logics in Artificial Intelligence (JELIA'08)*, pages 272–284.

[27] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. On the logic of merging. In *Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 488–498, 1998.

[28] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Merging with integrity constraints. In *Fifth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'99)*, pages 233–244, 1999.

[29] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Merging information under constraints: a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5):773–808, 2002.

[30] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. On the frontier between arbitration and majority. In *Eighth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'02)*, pages 109–118, 2002.

[31] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Propositional belief base merging or how to merge beliefs/goals coming from several sources and some links with social choice theory. *European Journal of Operational Research*, 160(3):785–802, 2005.

[32] S. Kraus, D. Lehmann, and M. Magidor. Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. *Artificial Intelligence*, 44(1):167–207, 1990.

[33] D. Lehmann and M. Magidor. What does a conditional knowledge base entail? *Artificial Intelligence*, 55:1–60, 1992.

[34] H. J. Levesque. A knowledge level account of abduction. In *Proceedings of the eleventh Internattional Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 1061–1067, Detroit, 1989.

[35] J. Lobo and C. Uzcátegui. Abductive consequence relations. *Artificial Intelligence*, 89(1-2):149–171, 1997.

[36] D. Makinson. General patterns in nonmonotonic reasoning. In C. Hogger D. Gabbay and J. Robinson, editors, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume III, Nonmonotonic Reasoning and Uncertain Reasoning. Oxford University Press, 1994.

[37] J. B. Paris and R. Simmonds. O is not enough. *The Review of Symbolic Logic*, 2(2):298–309, 2009.

[38] R. Pino-Pérez and C. Uzcátegui. Jumping to explanations versus jumping to conclusions. *Artificial Intelligence*, 111(2):131–169, 1999.

[39] R. Pino-Pérez and C. Uzcátegui. On representation theorems for non-monotonic consequence relations. *Journal of Symbolic Logic*, 65(3):1321–1337, 2000.

[40] R. Pino-Pérez and C. Uzcátegui. Preferences and explanations. *Artificial Intelligence*, 149:1–30, 2003.

[41] V. S. Subrahmanian. Amalgamating knowledge bases. *ACM Transactions on Database systems.*, 19(2):291–331, 1994.

[42] B. Walliser, D. Zwirn, and H. Zwirn. Abductive logic in a belief revision framework. *J. Logic, Languange and Information*, 14:87–117, 2005.

[43] W. Zadrozny. On the rules of abduction. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 9:387–419, 1993.

Índice alfabético

IVIC

Gobierno **Bolivariano**
de Venezuela

Ministerio del Poder Popular
para **Ciencia, Tecnología e Industrias Intermedias**

BICENTENARIO